Dugga 1, TATA68, 2010-09-25

Lösningsskiss

1a) $$\frac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2-y^2}{xy}}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = \underline{\underline{x-y}}$$

(där $x \neq 0, y \neq 0, x+y \neq 0$)

b) Linjens lutning är $k = \frac{8-1}{10-7} = \frac{7}{3}$ och linjen går genom $(7,1)$, så linjens ekvation är $y-1 = \frac{7}{3}(x-7)$.

Linjen skär x-axeln då $y=0$, dvs $0-1 = \frac{7}{3}(x-7) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-7 = -\frac{3}{7} \Leftrightarrow x = 7-\frac{3}{7} = \frac{46}{7}$

Svar: Vid $x = \frac{46}{7}$

c) $2x^2-x+5 = 2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}\right) = 2\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+\frac{5}{2}\right) =$

$= 2\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right) = 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}$, vilket blir som minst då $x = \frac{1}{4}$ och då blir uttrycket $\frac{39}{8}$

Svar: $\frac{39}{8}$

2) $x \geq \frac{x+4}{x+1} \Leftrightarrow x - \frac{x+4}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)-(x+4)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x+1} \geq 0$. Täljarens och nämnarens nollställen finns vid $x=2, x=-2, x=-1$, så vi får teckentabellen

x		-2		-1		2	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{(x-2)(x+2)}{x+1}$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

och där syns att olikheten gäller då

$-2 \leq x < -1$ eller $x \geq 2$

3) $|2x+2| = \begin{cases} 2x+2, & \text{då } x \geq -1 \\ -(2x+2), & \text{då } x \leq -1 \end{cases}$, $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{då } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{då } x \leq 1 \end{cases}$

Vi får tre fall:

① $x \leq -1$:

$|2x+2| - |x-1| = 2 \iff -(2x+2) + (x-1) = 2 \iff -x-3 = 2 \iff$

$\iff x = -5$, som uppfyller villkoret $x \leq -1$

② $-1 \leq x \leq 1$:

$|2x+2| - |x-1| = 2 \iff (2x+2) + (x-1) = 2 \iff 3x+1 = 2$

$\iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$, som uppfyller $-1 \leq x \leq 1$

③ $x \geq 1$:

$|2x+2| - |x-1| = 2 \iff (2x+2) - (x-1) = 2 \iff x+3 = 2 \iff$

$\iff x = -1$, som inte uppfyller villkoret $x \geq 1$.

Svar: $x = -5$ eller $x = \frac{1}{3}$

4) $1 - \sqrt{4x^3 - 5x + 2} = 2x \iff 1 - 2x = \sqrt{4x^3 - 5x + 2}$

$\implies (1-2x)^2 = 4x^3 - 5x + 2 \iff 4x^2 - 4x + 1 = 4x^3 - 5x + 2$

$\iff 4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ Prövning ser att $x = 1$

är en lösning, och polynomdivision ger

$4x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-1)(4x^2 - 1) = (x-1)(2x-1)(2x+1)$

som är lika med 0 då $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ eller $x = -\frac{1}{2}$.

Vi har ej ekvivalens i räkningarna, så vi måste kontrollera.

Vi gör det i ekv $1 - 2x = \sqrt{4x^3 - 5x + 2}$.

$x=1$: $VL = 1 - 2x = -1 < 0$ och $HL = \sqrt{\text{något}} \geq 0$, så $x = 1$ är ej lösn.

$x = \frac{1}{2}$: $VL = 1 - 2x = 0$, $HL = \sqrt{4x^3 - 5x + 2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2} = \sqrt{0} = 0$, ok

$x = -\frac{1}{2}$: $VL = 1 - 2x = 2$, $HL = \sqrt{4x^3 - 5x + 2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 2} = \sqrt{4} = 2$, ok

Svar: $x = \frac{1}{2}$ eller $x = -\frac{1}{2}$

5) $|z+2i| \leq 2|z+1| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{båda led} \geq 0}}{\iff} |z+2i|^2 \leq 4|z+1|^2$

Låt $z = x+iy$, där x och y är reella, så fås

$|z+2i|^2 \leq 4|z+1|^2 \iff |x+(y+2)i|^2 \leq 4|(x+1)+iy|^2$

$\iff x^2+(y+2)^2 \leq 4((x+1)^2+y^2) \iff$

$\iff x^2+y^2+4y+4 \leq 4x^2+8x+4+4y^2 \iff$

$\iff 3x^2+8x+3y^2-4y \leq 0 \iff x^2+\frac{8}{3}x+y^2-\frac{4}{3}y \leq 0$

$\iff \left(x+\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{9} = \left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2$

dvs olikheten beskriver en cirkelskiva med radie $\frac{\sqrt{20}}{3}$ kring $(x,y)=\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ dvs kring komplexa talet $z = -\frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$