

Tentamen i Matematisk grundkurs 2011-01-11 kl 8-13

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng¹ till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

- Ange medelpunkt och radie för cirkeln $x^2 + 4x = 6y - y^2$. (1 p)
 - Lös olikheten $|2x + 3| - x \leq 5$. (2 p)
- Lös ekvationen $3^{x+1} = 9^x - 10$. (1 p)
 - Finn alla lösningar till $\ln(5 - 3x) = \ln(5x - 7)$. (1 p)
 - Finn alla reella x som uppfyller sambandet $(\ln x)^2 = \ln \frac{1}{x^2}$. (1 p)
- Finn alla lösningar till ekvationen $\cos 7x + \cos 2x = 0$. (1 p)
 - Beräkna $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ om man vet att $\sin x = \frac{4}{5}$ och $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. (1 p)
 - Bestäm $\text{Im}\left(3e^{i \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$. (1 p)
- Bestäm alla positiva heltal n som uppfyller $\frac{999}{1000} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1$.
- Polynomet $p(z) = z^4 + z^2 - 2z + 6$ har ett nollställe i punkten $1 - i$. Finn samtliga nollställen till $p(z)$.
- Bestäm den reella konstanten $a > 0$ så att $f(x) = a \cos x - \frac{1}{a} \sin x$ har ett nollställe i $x = \frac{\pi}{6}$. Lös sedan ekvationen $f(x) = a\sqrt{2}$ för detta värde på a .
- Låt f vara en inverterbar funktion och antag att $g(x) = \ln(16 - (f^{-1}(x) - 3)^2)$ med $D_g = D_{f^{-1}} = [-1, 1[$ också är inverterbar.
 - Bestäm största möjliga definitionsmängd för f , givet att D_f är ett intervall som innehåller punkten 0. (1 p)
 - Ge exempel på en funktion f som har definitionsmängden du hittade i a) och dessutom uppfyller problemets alla övriga förutsättningar. Bestäm sedan g^{-1} för detta val av f . (2 p)

¹Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, d v s godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.