LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Tillämpad matematik

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN3

Tentamen i Matematisk grundkurs 2013-01-07 kl 14-19

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Svaren ska förstås ges på så enkel form som möjligt.

En tentand som fått färre än 9 skrivningspoäng får addera intjänade bonuspoäng[1] till sin skrivningspoäng så länge summan av bonuspoäng och skrivningspoäng inte överstiger 9.

För betyg 3, 4 och 5 räcker 9, 12 resp. 15 poäng.

Svar m m finns att hämta på kurshemsidan efter tentamens slut. Resultat meddelas via e-brev.

1. (a) Lös olikheten $\dfrac{x+1}{x} > \dfrac{x}{x+1}$. (1 p)

   (b) Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^3 - 2z + 4 = 0$. (2 p)

2. (a) Lös ekvationen $3^x = 6 - 9^x$. (2 p)

   (b) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är $\ln(2-3x) > \ln(5x-2)$? (1 p)

3. (a) Vilka reella x uppfyller sambandet $\sin x = 3\sin 2x$? (2 p)

   (b) Formulera och bevisa additionsformeln för tangens. Additionsformlerna för sinus och cosinus får användas utan bevis. (1 p)

4. (a) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $\operatorname{Im} z = 3$ och $z\bar{z} = 13$. (1 p)

   (b) En cirkel C har sin medelpunkt i $(-1, 4)$ och linjen L går genom punkterna $(2, -1)$ och $(0, -5)$. Bestäm C:s radie om man vet att C och L har exakt en gemensam punkt. Bestäm också denna punkt. (2 p)

5. Skriv $\cos x \sin 3x \sin 5x$ som en summa av cos- och/eller sin-termer.

   Lös också ekvationen $4\cos x \sin 3x \sin 5x = \cos x + \cos 3x$.

6. Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för f^{-1} om $f(x) = \ln\left(\pi + 6\arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)$.

7. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} (\ln y)^2 \sin\left(\pi + 5(\ln x)^2\right) & = & 1 \\ (\ln y)^2 \cos\left(5(\ln x)^2\right) & = & 1 \end{cases}$.

[1] Godkänd dugga 1 ger 2 bonuspoäng. Minst 6 poäng på dugga 2 ger 2 bonuspoäng, godkänd dugga 2 ger ytterligare 2 bonuspoäng, d v s godkänd dugga 2 ger totalt 4 bonuspoäng.

Tentamen i TATM79, 2013-01-07 lösningsförslag

1. (a) $\dfrac{x+1}{x} > \dfrac{x}{x+1} \iff \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} > 0 \iff \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} > 0 \iff$ $\iff \dfrac{2x+1}{x(x+1)} > 0$. Detta ger följande teckentabell

x		-1		$-1/2$		0	
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\dfrac{2x+1}{x(x+1)}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

vilket visar att olikheten gäller då $x > 0$ eller $-1 < x < -1/2$.

Svar: $x > 0$ eller $-1 < x < -1/2$.

(b) Prövning visar att $z = -2$ är en lösning till ekvationen. Polynomdivision med faktorn $z+2$ ger kvoten $z^2 - 2z + 2$, dvs de övriga lösningarna fås ur ekvationen $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 = -1 \iff z - 1 = \pm i \iff z = 1 \pm i$.

Svar: $z = 1 \pm i$ eller $z = -2$.

2. (a) $3^x = 6 - 9^x \iff 3^x = 6 - \left(3^2\right)^x \iff 3^x = 6 - 3^{2x} \iff 3^x = 6 - (3^x)^2 \iff$ $\iff \Big/ t = 3^x > 0 \Big/ \iff t = 6 - t^2 \iff t = 2$ (eller $t = -3$ men $t > 0$) $\iff$ $\iff 3^x = 2 \iff x \ln 3 = \ln 2 \iff x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

Svar: $x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$.

(b) De båda logaritmerna är definierade då $2 - 3x > 0$ och $5x - 2 > 0$ dvs då $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{2}{3}$. För dessa x är $\ln(2-3x) > \ln(5x-2) \iff \Big/$ ln är strängt växande $\Big/ \iff$ $\iff 2 - 3x > 5x - 2 \iff 8x < 4 \iff x < \dfrac{1}{2}$. Villkoren $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{2}{3}$ och $x < \dfrac{1}{2}$ ger tillsammans att $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{1}{2}$.

Svar: $\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{1}{2}$.

3. (a) $\sin x = 3 \sin 2x \iff \sin x = 6 \sin x \cos x \iff \iff \sin x (1 - 6 \cos x) = 0 \iff$ $\sin x = 0$ eller $\cos x = \dfrac{1}{6}$.

- $\sin x = 0 \iff x = n\pi$ där n är heltal.
- $\cos x = \dfrac{1}{6} \iff x = \pm \arccos \dfrac{1}{6} + 2n\pi$ där n är heltal.

Svar: $x = n\pi$ eller $x = \pm \arccos \dfrac{1}{6} + 2n\pi$ där n är heltal.

(b) $\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$ för alla u och v där båda leden är definierade, ty

$$\tan(u+v) = \frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)} = \frac{\sin u \cos v + \cos u \sin v}{\cos u \cos v - \sin u \sin v} = \frac{\cos u \cos v \left(\frac{\sin u}{\cos u} + \frac{\sin v}{\cos v}\right)}{\cos u \cos v \left(1 - \frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{\sin v}{\cos v}\right)} =$$

$= \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$ vilket skulle bevisas.

4. (a) Med $z = a + ib$ fås att $\begin{cases} \operatorname{Im} z = 3 \\ z\bar{z} = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 3 \\ a = \pm 2 \end{cases}$ dvs $z = \pm 2 + 3i$.

Svar: $z = \pm 2 + 3i$.

(b) Rita en figur!

Linjen L har lutningen $k_1 = \dfrac{-1-(-5)}{2-0} = 2$ så linjens ekvation är $y = -5 + 2x$. För att linjen och cirkeln endast ska ha en gemensam punkt, måste cirkeln tangera linjen. Tangeringspunkten ligger på den linje som går genom $(-1, 4)$ och som är normal till L. Den linjens lutning $k_2 = -1/2$ och ekvationen $y - 4 = -\dfrac{1}{2}(x+1)$.

Den gemensamma punkten uppfyller $\begin{cases} y = -5 + 2x \\ y = \dfrac{7}{2} - \dfrac{x}{2} \end{cases} \iff (x, y) = \left(\dfrac{17}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

Cirkelns radie blir då $r = \sqrt{\left(\dfrac{17}{5}+1\right)^2 + \left(\dfrac{9}{5}-4\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{22}{5}\right)^2 + \left(-\dfrac{11}{5}\right)^2} = \dfrac{11}{5}\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \dfrac{11\sqrt{5}}{5} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$.

Svar: Cirkelns radie är $\dfrac{11}{\sqrt{5}}$, gemensam punkt är $\left(\dfrac{17}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$.

5. $\cos x \sin 3x \sin 5x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \dfrac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} \cdot \dfrac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} =$

$= \dfrac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{8ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} + e^{-8ix}\right)}{-8} =$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - \dfrac{e^{9ix} + e^{-9ix}}{2} - \dfrac{e^{7ix} + e^{-7ix}}{2}\right) =$

$= \dfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x - \cos 9x - \cos 7x)$. Av detta fås att

$4\cos x \sin 3x \sin 5x = \cos x + \cos 3x \Leftrightarrow \cos 9x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 9x = \cos(7x + \pi) \iff 9x = 7x + \pi + 2n\pi$ eller $9x = -(7x + \pi) + 2n\pi \iff 2x = \pi + 2n\pi$ eller $16x = -\pi + 2n\pi \iff x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{n\pi}{8}$ där n är heltal.

Svar: $\cos x \sin 3x \sin 5x = \dfrac{1}{4}(\cos 3x + \cos x - \cos 9x - \cos 7x)$.

Ekvationen har lösningarna $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = -\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{n\pi}{8}$ där n är heltal.

6. Definitionsmängden fås ur $\pi + 6\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > 0 \iff \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > -\frac{\pi}{6} \iff$ $\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \iff$

$\iff \Big/$ $\arcsin t$ är strängt växande och definierad då $-1 \le t \le 1$ $\Big/ \iff$

$\iff -\frac{1}{2} < \frac{1-x}{1+x} \le 1$. Vanlig olikhets-undersökning visar att $\frac{1-x}{1+x} \le 1 \iff x \ge 0$ eller $x < -1$ och $\frac{1-x}{1+x} > -\frac{1}{2} \iff -1 < x < 3$. Sammantaget visar detta att funktionen är definierad då $0 \le x < 3$.

För dessa x fås $y = \ln\left(\pi + 6\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right) \iff e^y = \pi + 6\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \iff$ $\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{e^y-\pi}{6} \implies \frac{1-x}{1+x} = \sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right) \iff x = \frac{1-\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}{1+\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}$ vilket visar att varje y ger *högst* ett x. Alltså är f injektiv och $f^{-1}(y) = \frac{1-\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}{1+\sin\left(\frac{e^y-\pi}{6}\right)}$.

Svar: $D_f = \{0 \le x < 3\}$, $f^{-1}(x) = \frac{1-\sin\left(\frac{e^x-\pi}{6}\right)}{1+\sin\left(\frac{e^x-\pi}{6}\right)}$.

7. $\begin{cases} (\ln y)^2 \sin\left(\pi + 5(\ln x)^2\right) = 1 \\ (\ln y)^2 \cos\left(5(\ln x)^2\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (\ln y)^2 \sin\left(5(\ln x)^2\right) = -1 \\ (\ln y)^2 \cos\left(5(\ln x)^2\right) = 1 \end{cases} \iff$

$\iff (\ln y)^2 \left(\cos\left(5(\ln x)^2\right) + i\sin\left(5(\ln x)^2\right)\right) = 1 - i \iff (\ln y)^2 e^{i5(\ln x)^2} = 1 - i \iff$

$\iff (\ln y)^2 e^{i5(\ln x)^2} = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} \iff \Big/ (\ln y)^2 \ge 0$ och $5(\ln x)^2$ är reell $\Big/ \iff$

$$\iff \begin{cases} (\ln y)^2 = \sqrt{2} \\ 5(\ln x)^2 = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y = \pm\sqrt[4]{2} \\ \ln x = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}} \end{cases} \iff$$

$\iff \begin{cases} y = e^{\pm\sqrt[4]{2}} \\ x = e^{\pm\sqrt{-\frac{\pi}{20}+\frac{2n\pi}{5}}} \end{cases}$ där n är godtyckligt positivt heltal (för att uttrycket under rotmärket ska bli ≥ 0).

Svar: $x = e^{\pm\sqrt{-\frac{\pi}{20}+\frac{2n\pi}{5}}}$, $y = e^{\pm\sqrt[4]{2}}$ där $n = 1, 2, 3, \ldots$ och där tecknen kan väljas oberoende av varandra.