

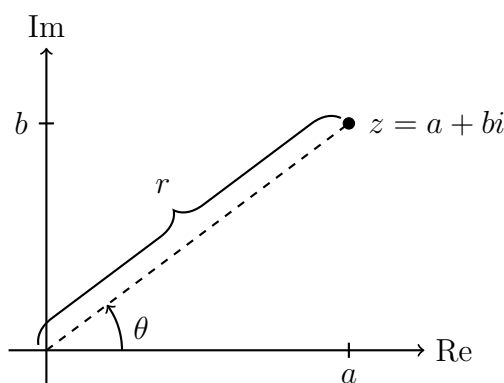
Föreläsning 9: Komplexa exponentialfunktionen och binomiska ekvationer

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

17 augusti 2026

1 Komplexa tal på polär form

Ett komplext tal $z = a + bi$ kan som bekant betraktas som en punkt i komplexa talplanet med två koordinater (a, b) . En annan variant för att beskriva z är att istället ange ett avstånd r till origo och en vinkel; vi kallar detta för polär form.



Lite geometri visar att

$$a = r \cos \theta \quad \text{och} \quad b = r \sin \theta,$$

så

$$z = a + bi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Som bekant är $r = |z|$, men hur uttrycker vi θ ?



Definition. Argumentet $\arg z$ för ett komplext tal z definieras som alla vinklar φ så att

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Observera att $\arg z$ är en flervärd funktion! Lite bökigt att hantera ordentligt alltså. När vi säger "argumentet för z " menar vi oftast *något* värde på φ så att $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

1.1 Den komplexa exponentialfunktionen

Tidigare har vi betraktat funktion $\exp$ för reella argument. Kan vi utvidga definitionen till komplexa tal? Följande definition visar att detta är möjligt.

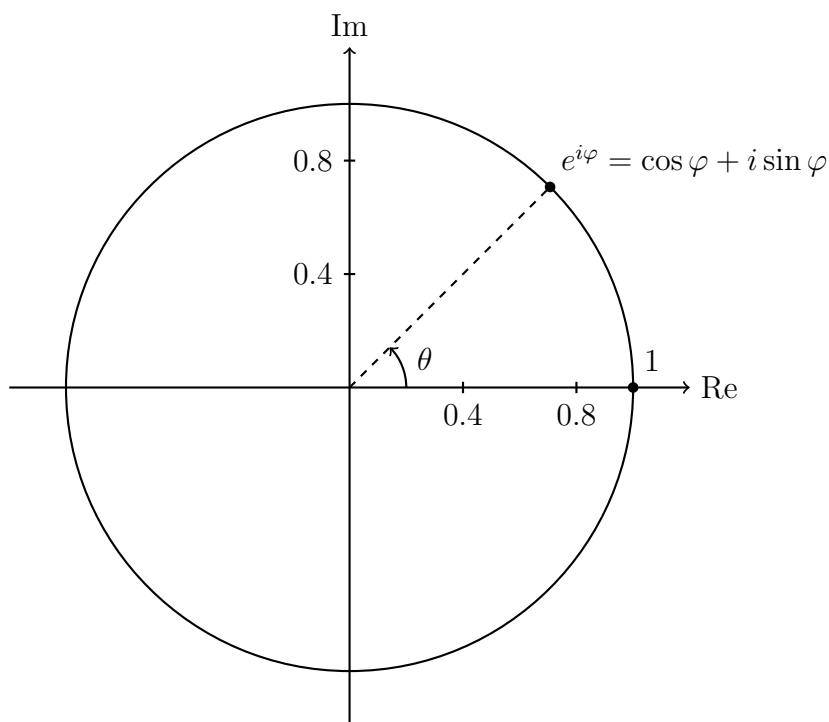


Definition. För alla $\varphi \in \mathbf{R}$ så definierar vi $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Vi observerar att $e^{i\varphi}$ är ett tal på enhetscirkeln ty

$$|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

enligt trigonometriska ettan. Vi kan alltså betrakta $e^{i\varphi}$ som en punkt på cirkeln $|z| = 1$:



Det visar sig att de flesta "regler" som gäller för den vanliga exponentialfunktionen fortfarande är sanna. Märk dock att olikheter som involverar komplexa storheter oftast är nonsens (varför?).



- (i) $\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;
- (ii) $e^{i\varphi} e^{i\theta} = e^{i(\varphi+\theta)}$;
- (iii) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$ för $n \in \mathbf{Z}$ (obs **endast heltal**);

Punkt (iii) kallas de Moivres formel. Dessa likheter visas helt enkelt genom att använda definitionen av $e^{i\varphi}$. Vi kikar närmare på (i):

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{i\varphi}} &= \frac{1}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \\ &= \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

ty $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ och $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$.



Exempel

Skriv talet $z = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} \right)^5$ på polär form.

Lösning. Det komplexa talet $\sqrt{3} - i$ ligger i fjärde kvadranten och kan skrivas

$$\sqrt{3} - i = \sqrt{3 + 1}e^{-i\pi/6} = 2e^{-i\pi/6}.$$

På samma sätt,

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

Detta medför att

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} \right)^5 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/6 + i\pi/4} \right)^5 = 2^{5/2} e^{5\pi/12}.$$



Exempel

Använd den komplexa exponentialfunktionen för att visa additionsformlerna för sinus och cosinus.

Lösning. Detta är ett ganska elegant sätt att ta fram additionsformlerna på. Vi betraktar följande samband mellan reella u och v :

$$\begin{aligned} e^{i(u+v)} &= e^{iu} e^{iv} = (\cos u + i \sin u)(\cos v + i \sin v) \\ &= \cos u \cos v - \sin u \sin v + i(\sin u \cos v + \cos u \sin v). \end{aligned}$$

Eftersom $e^{i(u+v)} = \cos(u+v) + i \sin(u+v)$ måste då

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

och

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

eftersom realdelen och imaginärdelen måste stämma överens. Observera dock att argumentet blir cirkulärt om man visat punkt (ii) ovan med hjälp av additionsformlerna.

Ibland kan det underlätta att betrakta en så kallad "komplex form" av ett uttryck. Om vi har något som innehåller $\sin x$ eller $\cos x$ kan ju dessa betraktas som imaginär- eller realdel av e^{ix} . Vi visar med ett exempel.



Exempel

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \operatorname{Im}(e^{i3x}) = \operatorname{Im}((e^{ix})^3) = \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^3) \\ &= \operatorname{Im}(\cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x + 3i^2 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x) \\ &= 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \end{aligned}$$

1.2 Eulers formler

Om vi löser ut $\cos \varphi$ och $\sin \varphi$ ur de ekvationer vi får från definitionen av $e^{i\varphi}$ och $e^{-i\varphi}$ så ser vi att

$$\begin{cases} e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \\ e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos \varphi = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}, \\ 2i \sin \varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}. \end{cases}$$

Vi skriver ofta sambanden som

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{och} \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Dessa brukar kallas för Eulers formler och är mycket användbara. Bara med hjälp av trigonometriska ettan och Eulers formler kan man ofta härleda de flesta trigonometriska samband vi stöter på, även om det inte alltid blir så enkla kalkyler.



Exempel

Undersök vilka x som uppfyller $4 \sin 2x \sin 4x - 8 \sin x \sin 2x \cos 3x = 1$ genom att skriva om vänsterledet som en summa av $\sin / \cos$ -termer och lösa ekvationen som uppstår.

Lösning. Vi använder Eulers formler och finner att

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x \cos 3x &= \frac{1}{-8} (e^{ix} - e^{-ix}) (e^{2ix} - e^{-2ix}) (e^{3ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{-8} (e^{6ix} + 2 + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix} - e^{4ix} - e^{-4ix}) \\ &= -\frac{1}{4} (1 + \cos 6x - \cos 2x - \cos 4x) \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} \sin 2x \sin 4x &= \frac{1}{-4} (e^{6ix} + e^{-6ix} - e^{2ix} - e^{-2ix}) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 2x). \end{aligned}$$

Med dessa samband kan vi skriva om ekvationen i fråga enligt

$$-2 \cos 6x + 2 \cos 2x + 2 + 2 \cos 6x - 2 \cos 2x - 2 \cos 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 4x = \frac{1}{2},$$

så $4x = \pm\pi/3 + 2\pi n \Leftrightarrow x = \pm\pi/12 + \pi n/2$, där $n \in \mathbf{Z}$.

Svar: $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

2 Binomiska ekvationer

Uttrycket binom innebär ett polynom med två termer (där den ena termen oftast är en konstant), så vi betraktar uttryck av typen $z^n - w$, där $z, w \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, samt w och n är kända storheter. Hur löser vi ut z ur en ekvation av typen $z^n = w$? Tanken är att vi arbetar med det hela på polär form, så:

- (i) Skriv z och w på polär form: $z = re^{i\varphi}$ och $w = \rho e^{i\theta}$. Här kommer ρ och θ att vara kända, ρ och $r \geq 0$, samt $\varphi, \theta \in \mathbf{R}$.

- (ii) Eftersom $z = re^{i\varphi}$ så är $z^n = r^n e^{in\varphi}$ och vi försöker alltså lösa ekvationen $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$.
- (iii) Isolera absolutbeloppet och argumentet i ekvationen. Vi löser

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Absolutbeloppet:

$$|r^n e^{in\varphi}| = |\rho e^{i\theta}| \Leftrightarrow r^n = \rho \Leftrightarrow r = \rho^{1/n},$$

där vi endast har en lösning (den positiva) $r = \rho^{1/n}$ ty $\rho \geq 0$.

Argumentet:

$$\arg(r^n e^{in\varphi}) = \arg(\rho e^{i\theta}) \Leftrightarrow n\varphi = \theta + 2\pi k \Leftrightarrow \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

där vi erhåller flera möjligheter eftersom $\arg z$ är en flervärd funktion.

- (iv) Lista upp vilka lösningar vi erhåller. Observera att det räcker med n stycken eftersom det bara finns n rötter till ekvationen! Vilka? Bara vi tar en följd med n värden, till exempel $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, så får vi med allt. Skissa in lösningarna i en cirkel. När vi tagit n stycken i följd kommer vi tillbaka till den punkten vi startade i.



Exempel

Finn alla komplexa lösningar till $z^6 + 729 = 0$.

Ange eventuella lösningar på formen $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Lösning. Vi börjar med att skriva -729 på polär form:

$$-729 = 729e^{i\pi} = 3^6 e^{i\pi}.$$

Låt $z = re^{i\varphi}$, där $r \geq 0$. Då måste $z^6 = r^6 e^{6i\varphi} = 3^6 e^{i\pi}$, så

$$z^6 = -729 \Leftrightarrow r^6 e^{i6\varphi} = 3^6 e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 3^6, & r \geq 0, \\ 6\varphi = \pi + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Alltså är $r^6 = 3^6$ och $6\varphi = \pi + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 3$ och att $\varphi = \pi/6 + n\pi/3$. Våra lösningar blir nu

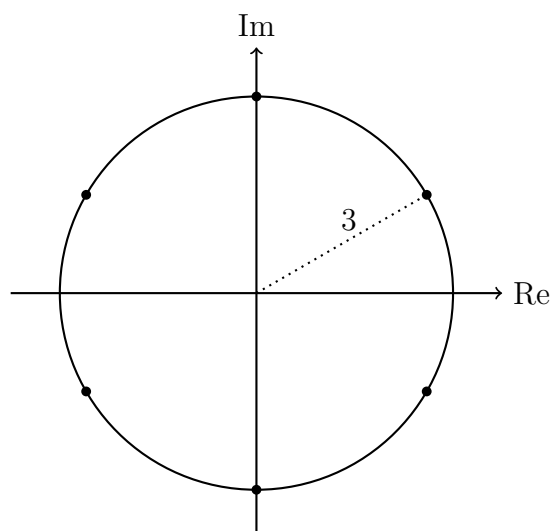
$$z = 3e^{i(\pi/6 + n\pi/3)} = 3e^{i(1+2n)\pi/6}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Här har vi valt att endast numrera de lösningar som är unika (när $n = 6$ får vi samma komplexa tal som när $n = 0$). Observera dock att för ekvivalensen ovan **måste** vi ha $n \in \mathbf{Z}$ godtycklig. Om vi förenklar dessa får vi lösningarna

$$z = \pm 3i, \quad z = \pm \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \quad z = \pm \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Svar: $z = \pm 3i, \pm \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \pm \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i)$.

Lösningarna ligger **alltid** jämnt fördelade på en cirkel i komplexa talplanet.



Ibland finns det inget "trevligt" sätt att skriva lösningarna på rektangulär form (dvs $a + bi$). Skriv då inte ut med $\cos$ och $\sin$ utan lämna istället lösningarna på polär form. Det är enklare att läsa.



Uttryck i stil med $w^{1/n}$ (med $\text{Im } w \neq 0$) har ingen mening i denna kurs. Om $n = 2$ till exempel skulle det innebära att vi tar roten ur ett komplex tal. Hur skulle det definieras? Vi lämnar sådana övningar till en kurs i komplex analys.



Exempel

Lös ekvationen $z^2 = i$.

Lösning. Låt $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$ och $\theta \in \mathbf{R}$. Eftersom $i = e^{i\pi/2}$ så gäller att

$$z^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad r^2 e^{i2\theta} = e^{i\pi/2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^2 = 1, & r \geq 0, \\ 2\theta = \pi/2 + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Alltså är $r^2 = 1$ och $2\varphi = \pi/2 + 2\pi n$ där n är heltal (absolutbeloppet och argumenten måste stämma överens). Detta ger att $r = 1$ och att $\varphi = \pi/4 + n\pi$. Våra lösningar blir nu

$$z = e^{i(\pi/4+n\pi)} = \pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$



Definition. Vi definierar $\exp(z)$ för $z \in \mathbf{C}$ enligt

$$\exp(z) = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

om $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$.



Exempel

Lös ekvationen $e^z = 1 + 2i$.

Lösning. Låt $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$. Då gäller att

$$e^z = 1 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad e^a e^{ib} = 1 + 2i.$$

Om vi tar beloppet av ekvationen erhåller vi

$$|e^a e^{ib}| = e^a = |1 + 2i| = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad a = \ln \sqrt{5} = \frac{1}{2} \ln 5.$$

Om $e^a = \sqrt{5}$ måste

$$e^{ib} = \frac{1 + 2i}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos b = 1/\sqrt{5}, \\ \sin b = 2/\sqrt{5}. \end{cases} \quad (1)$$

Vi ser att

$$\cos b = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

och då $\sin b > 0$ så ges samtliga lösningar till (1) av

$$b = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n.$$

Kontrollera gärna att $\sin b = 2/5$ som sig bör.

Svar: $z = \frac{1}{2} \ln 5 + i \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n \right)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Det här är ett sätt vi skulle kunna introducera logaritmer av komplexa tal på. Observera att det dyker upp oändligt många möjligheter.