

Föreläsning 10: Hyperboliska funktioner och sammansatta övningar

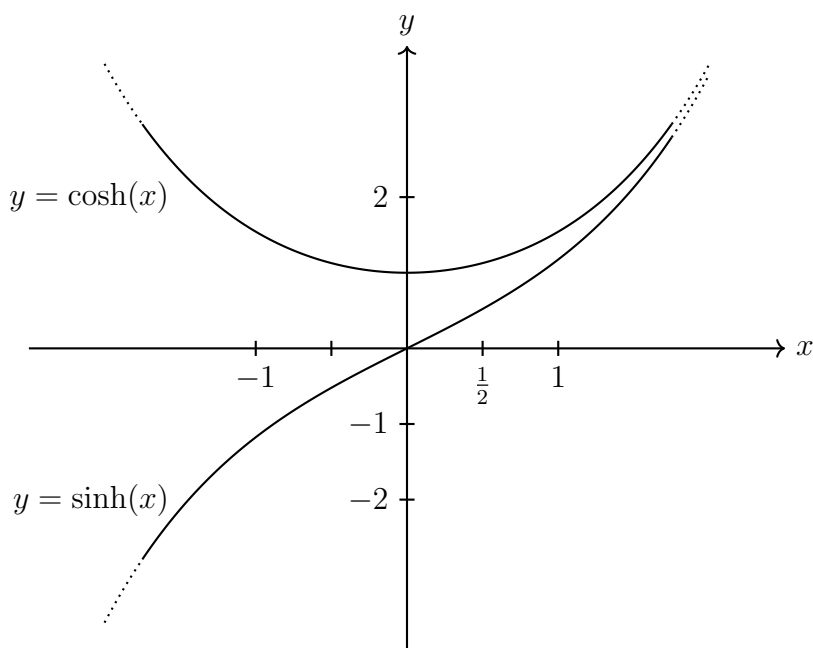
Johan Thim (johan.thim@liu.se)

14 september 2026

Syftet med denna föreläsning är att introducera de hyperboliska funktionerna och att visa hur de olika momenten i kursen används för att lösa problem som kanske är lite mer omfattande än tidigare exempel. Det handlar alltså inte enbart om repetition även om det blir en del av effekten.

1 $\cosh(x)$ och $\sinh(x)$

Definiera funktionerna $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ och $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ för $x \in \mathbf{R}$ (dessa kallas för de hyperboliska cosinus- och sinusfunktionerna).



Notera att *ingen* av dessa kurvor är hyperblar. Dessa objekt dyker upp på grund av följande likhet.



Exempel

Visa att $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ för alla $x \in \mathbf{R}$ (den hyperboliska ettan).

Lösning. Vi förenklar:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{4}{4} = 1,\end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.



Exempel

Lös ekvationen $4 \sinh x - 3 \cosh x = 3$.

Lösning. Vi ser att

$$\begin{aligned}4 \sinh x - 3 \cosh x = 3 &\Leftrightarrow 2(e^x - e^{-x}) - \frac{3}{2}(e^x + e^{-x}) = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^x - \frac{7}{2}e^{-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x - \frac{7}{2} = 0\end{aligned}$$

Låt $t = e^x > 0$. För $t > 0$ så är

$$\frac{1}{2}t^2 - 3t - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \pm 4.$$

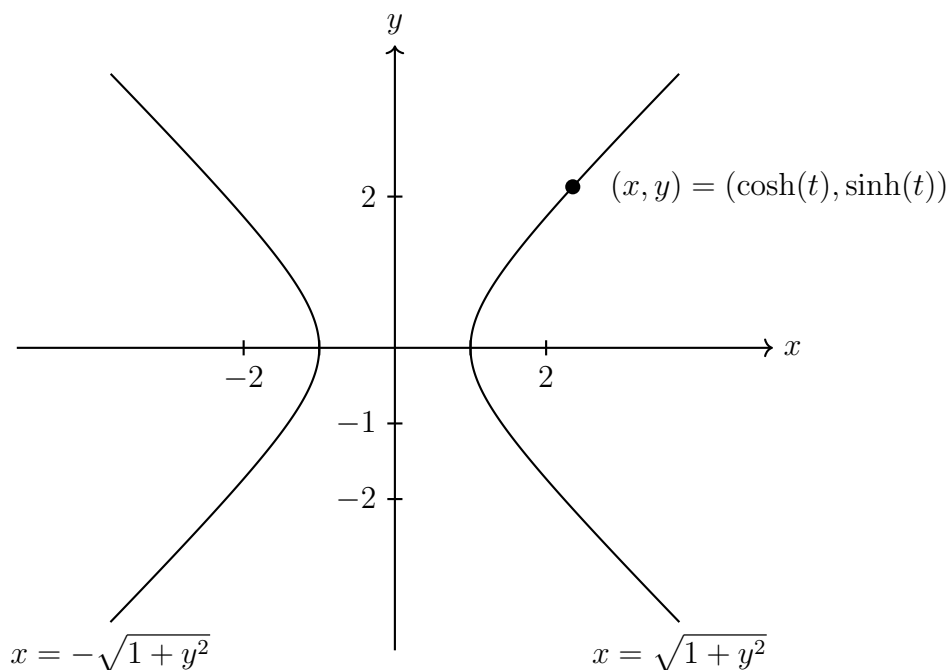
Alltså ges den enda lösningen av $x = \ln 7$ eftersom $t = -1 < 0$.

Svar: $x = \ln 7$.

En hyperbel är en kurva som uppfyller en ekvation av typen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

för reella konstanter a och b . Dessa hänger ihop med de hyperboliska funktionerna genom följande manöver. Låt $x = \cosh(t)$ och $y = \sinh(t)$ för $t \in \mathbf{R}$. Då kommer punkten (x, y) i planet att ligga på hyperbeln $x^2 - y^2 = 1$ (så en hyperbel med $a = b = 1$).





Exempel

Undersök om $\cosh x$ och $\sinh x$ är inverterbara funktioner och ange om möjligt inverserna.

Lösning. Eftersom $\cosh$ är en jämn funktion saknar den en invers (med $\mathbf{R}$ som definitionsmängd). Att $\cosh$ är jämn kan enkelt ses ur definitionen då

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x.$$

Däremot verkar det möjligt att $\sinh$ är inverterbar, så vi försöker därmed att finna ett uttryck för en eventuell invers:

$$\begin{aligned} y = \sinh x &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x - y)^2 = y^2 + 1. \end{aligned}$$

Det verkar nu finnas två möjligheter: $e^x = y \pm \sqrt{1 + y^2}$. Men, eftersom

$$\sqrt{1 + y^2} > |y|$$

så blir högerledet negativt om vi väljer minus-lösningen. Detta är omöjligt eftersom vänsterledet alltid är positivt (varför?). Således måste

$$e^x = y + \sqrt{1 + y^2} \Leftrightarrow x = \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right).$$

Vi har alltså endast ett alternativ, och därmed har vi visat att $f^{-1}(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$.

Svar: $\sinh^{-1}(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$. Funktionen $\cosh$ saknar invers.

1.1 Varför heter det arsinh?

De vanliga trigonometriska funktionerna kan som beskrivet i föreläsning 7 knytas till enhetscirkeln

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Vinkeln t bestämmer då punkten $(\cos t, \sin t)$, och $\arcsin y$ ger tillbaka den valda vinkeln vars sinus är y (för $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$).

För de hyperboliska funktionerna ersätts cirkeln av enhetshyperbeln

$$x^2 - y^2 = 1.$$

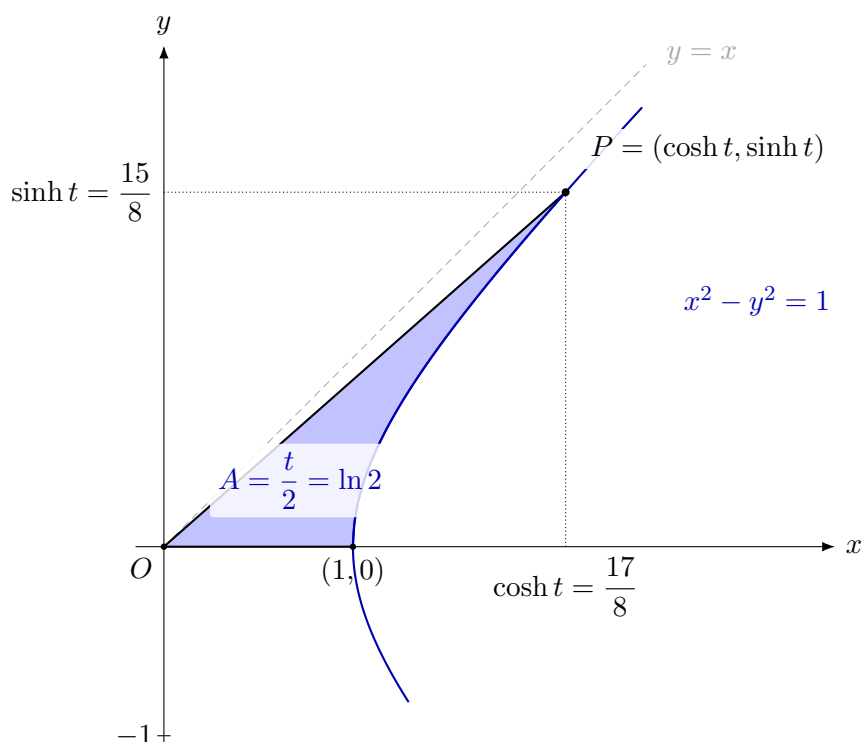
Om

$$P = (\cosh t, \sinh t),$$

så är t inte en vanlig vinkel. I stället är t dubbla arean av den hyperbelsektor som begränsas av den positiva x -axeln, hyperbelbågen från $(1, 0)$ till P och strålen som sträcker sig från origo till punkten P på hyperbeln. Om den skuggade arean i figuren betecknas med A , så gäller alltså

$$A = \frac{t}{2}, \quad y_P = \sinh t, \quad \operatorname{arsinh}(y_P) = t = 2A.$$

På motsvarande sätt som arcsin återskapar en vinkel från dess sinusvärde så återskapar alltså arsinh en hyperbolisk parameter från punktens y -koordinat. Skillnaden är geometrisk: arcsin är förknippad med en båge på enhetscirkeln, medan arsinh kan knytas till en area vid enhetshyperbeln. Prefixet *ar* kan därför läsas som *area*, och skrivsättet arsinh betonar denna tolkning. Skrivsättet arcsinh förekommer också, men det kan felaktigt ge intrycket att det fortfarande är en cirkelbåge som mäts.



Figuren kan också tolkas baklänges. Om man börjar med ett reellt tal y och väljer punkten

$$P = (\sqrt{1 + y^2}, y)$$

på hyperbelns högra gren, så finns det ett entydigt bestämt reellt tal t sådant att

$$P = (\cosh t, \sinh t).$$

Detta tal är

$$t = \operatorname{arsinh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right),$$

och samtidigt dubbla den orienterade hyperbelsektorns area. För $y < 0$ ligger punkten under x -axeln och den orienterade arean räknas med negativt tecken. Detta stämmer överens med att arsinh är en udda funktion.

2 Arcusar!



Exempel

Lös ekvationen $(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = -\frac{\pi^2}{12}$.

Lösning. Låt $x \in [-1, 1]$ och $v = \arcsin x$. Vi visar att $v = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Enligt definition vet vi att $\sin v = x$ och $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$. Vidare,

$$x = \sin v = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right),$$

och då $0 \leq \pi/2 - v \leq \pi$ måste $\pi/2 - v = \arccos x$. Med andra ord har vi visat att

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Konjugatregeln medför nu att

$$(\arccos x)^2 - (\arcsin x)^2 = (\arccos x + \arcsin x)(\arccos x - \arcsin x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin x \right).$$

Detta uttryck skall vara lika med $-\pi^2/12$, så

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arcsin x \right) = -\frac{\pi^2}{12} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Addition av arcus-funktioner: komplex hjälpmetod



Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arctan 3$.

Lösning: Låt $z_1 = 1 + 2i$ och $z_2 = 1 + 3i$. Låt v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln, och v_2 vinkeln z_2 bildar mot positiva real-axeln. Det följer att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{och} \quad \tan v_2 = \frac{3}{1} = 3.$$

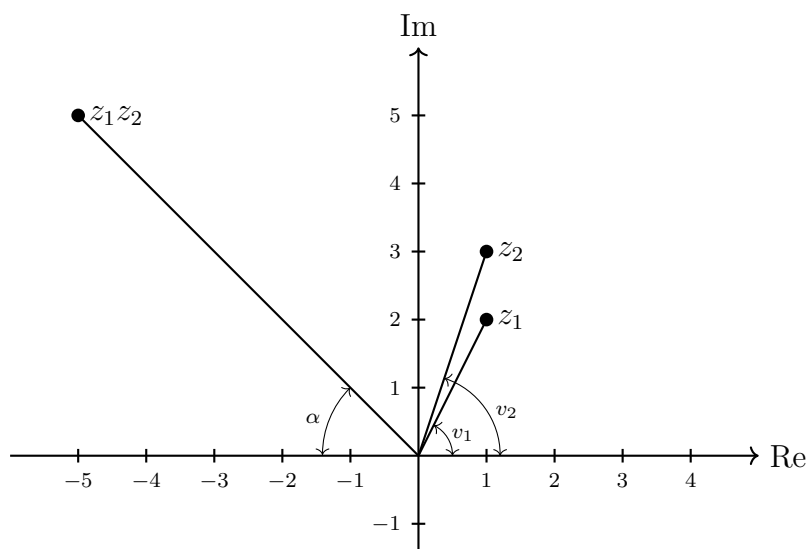
En lösning till respektive ekvation fås genom $v_1 = \arctan 2$ och $v_2 = \arctan 3$. Dessa punkter ligger i första kvadranten. Om vi nu skriver z_1 och z_2 på polär form,

$$z_1 = \sqrt{5}e^{i \arctan 2} \quad \text{och} \quad z_2 = \sqrt{10}e^{i \arctan 3},$$

ser vi att $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{i(\arctan 2 + \arctan 3)}$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arctan 3 + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (1)$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 + 3i) = -5 + 5i$. Vi har följande illustration:



Vi ser att $\tan \alpha = 5/5 = 1$, så $\alpha = \arctan 1 = \pi/4$. Alltså blir $v_3 = \pi - \arctan 1 = 3\pi/4$ vinkeln mellan $z_1 z_2$ och (positiva) real-axeln, där $z_1 z_2 = \sqrt{50}e^{iv_3}$. Observera att vi inte kan skriva $\arctan(-1)$ eftersom den vinkeln ligger i 4:e kvadranten ($= -\pi/4$). Detta medför att

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Ekvationerna (1) och (2) implicerar att

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (3)$$

Heltalet n kommer från $n = k - m$, som kan anta vilket heltal som helst. För att kunna välja det n som är nödvändigt (det finns bara ett korrekt svar) så måste vi uppskatta hur stort talet $\arctan 2 + \arctan 3$ är. Funktionen $\arctan x$ är strängt växande, så

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 < \arctan 2 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan alltså se att $\pi/4 + \pi/4 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$, eller

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (3).

Svar: $\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}.$

OBS: Ett svar!

En favorit i repris? Varför inte.



Exempel

Förenkla $\arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right).$

Lösning: Som i förra exemplet låter vi $z_1 = 1 + 2i$ och v_1 vara vinkeln som z_1 bildar mot positiva real-axeln så att

$$\tan v_1 = \frac{2}{1} = 2.$$

En lösning till ekvationen ges av $\arctan 2$. När det gäller den andra vinkeln så observerar vi att

$$\begin{aligned} \exp\left(i \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) &= \cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + i \sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) \\ &= -\frac{4}{5} + i\sqrt{1 - \left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)^2} \\ &= -\frac{4}{5} + i\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}, \end{aligned}$$

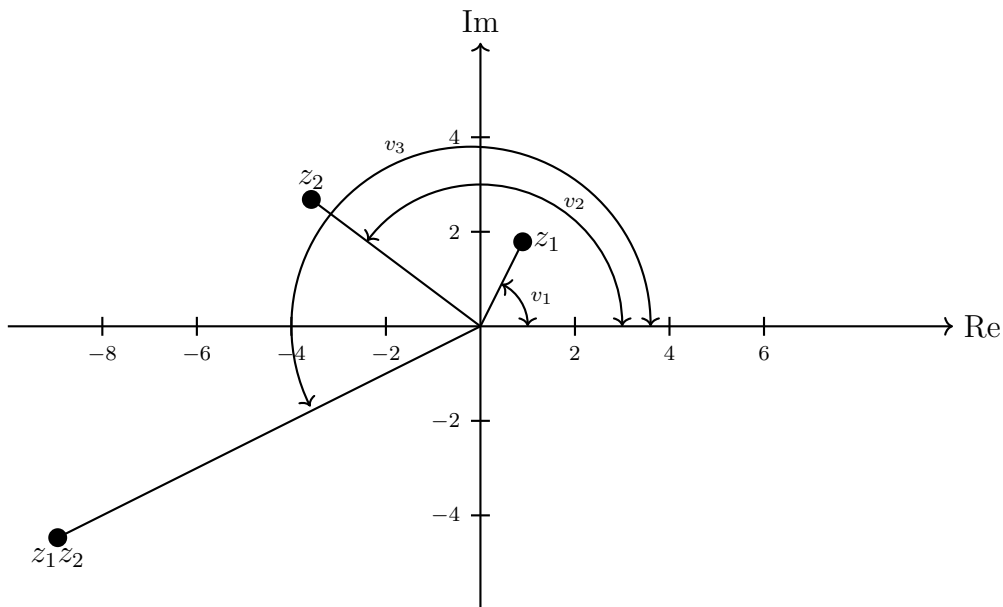
där det blir plus-tecken framför kvadratroten eftersom $\sin v_2 > 0$. Låt nu $z_2 = -4 + 3i$ (vi multiplicerar med 5 för att slippa bråken). På polär form kan vi nu skriva

$$z_1 = \sqrt{5} \exp(i \arctan 2) \quad \text{och} \quad z_2 = 5 \exp\left(i \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right),$$

ser vi att $z_1 z_2 = 5\sqrt{5} \exp(i(\arctan 2 + \arccos(-4/5)))$. Det följer alltså att

$$\arg(z_1 z_2) = \arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

Men, vi vet också att $z_1 z_2 = (1 + 2i)(-4 + 3i) = -10 - 5i$. Vi har följande illustration:



Alltså blir $v_3 = \pi + \arctan(1/2)$ vinkeln mellan $z_1 z_2$ och (positiva) real-axeln (i positiv led), där $z_1 z_2 = 5\sqrt{5}e^{iv_3}$. Detta medför att

$$\arg(z_1 z_2) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (5)$$

Ekvationerna (4) och (5) implicerar att

$$\arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (6)$$

för något heltal n . Vidare vet vi att

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) < \arctan 2 < \frac{\pi}{2} \quad \text{och} \quad \frac{\pi}{2} < \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \pi,$$

så

$$\frac{\pi}{2} < \arctan 2 + \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) < \frac{3\pi}{2}.$$

Alltså måste vi välja $n = 0$ i (6).

Svar: $\pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$.

4 En trigonometrisk identitet



Exempel

För vilka x gäller att $2(1 - \cos x) \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin nx + \sin x - \sin(n+1)x$ för alla positiva heltal n ?

Lösning. Vi börjar med att försöka räkna ut summan. Via definitionen av e^{ix} kan vi skriva

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(e^{ikx}) = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n e^{ikx}.$$

Summan vi nu tar imaginärdelen av är en geometrisk summa med kvoten e^{ix} . Vi räknar ut denna:

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = -1 + \sum_{k=0}^n e^{ikx} = -1 + \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = -1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}},$$

där vi har förlängt med konjugatet. Likheten gäller så länge $e^{ix} \neq 1$. Nämnaren kan skrivas om som $2 - 2\cos x$, och vi erhåller då

$$\operatorname{Im} \left(-1 + \frac{e^{inx} - e^{i(n+1)x} - e^{ix} + 1}{2 - e^{ix} - e^{-ix}} \right) = \frac{\sin nx - \sin(n+1)x - \sin x}{2(1 - \cos x)}.$$

Alltså måste

$$2(1 - \cos x) \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin nx - \sin(n+1)x - \sin x$$

såvida inte $e^{ix} = 1$. Men detta händer precis då $x = 2k\pi$ för något $k \in \mathbf{Z}$, och då är $\cos x = 1$ och alla sinus-termer i vänsterledet lika med noll. Likheten gäller alltså även då. Vi har nu visat att likheten gäller för alla $x \in \mathbf{R}$.

Svar: alla $x \in \mathbf{R}$.

5 Ett max/min-problem



Exempel

Avgör var $f(x) = \frac{\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x}{8}$ har sitt största respektive minsta värde och ange vad maximum och minimum blir.

Lösning. Först skriver vi om uttrycket lite för att få något enklare att arbeta med. Som bekant kan summor av sin och cos skrivas om med en hjälpvinkel om de har samma frekvens. Vi försöker med detta:

$$\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x \right).$$

Vi bryter ut $C = 2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ för att garantera att vi kan hitta en lämplig punkt på enhetscirkeln.

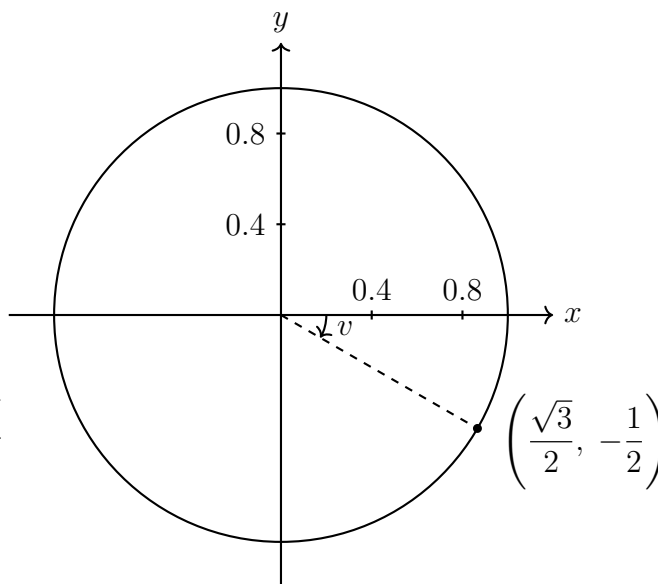
Eftersom

$$C \sin(3x + v) = C (\sin 3x \cos v + \cos 3x \sin v)$$

så kan vi identifiera att

$$\begin{cases} \sin v = -1/2, \\ \cos v = \sqrt{3}/2. \end{cases} \quad (7)$$

I figuren till höger ser vi att den punkt som motsvarar v ligger i fjärde kvadranten. Dessutom ser vi att det rör sig om en standardvinkel. Samtliga vinklar som uppfyller (7) ges av $v = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Vi **väljer** $v = -\frac{\pi}{6}$.



Alltså har vi visat att $f(x) = \frac{1}{4} \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$. Det är således klart att största värdet blir $1/4$ och minsta $-1/4$, vilket inträffar precis då

$$3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z},$$

respektive

$$3x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Svar: Maximum blir $1/4$ då $x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$; Minimum blir $-1/4$ då $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$.



Exempel

Med $f(x)$ från förra exemplet och D_f givet av $-\pi \leq 9x \leq 2\pi$, undersök om f har en invers f^{-1} och ange om möjligt ett uttryck för inversen.

Lösning. Vi försöker nu bestämma inversen:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow 4y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \\ &\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{6} + 2n\pi = \arcsin 4y \text{ eller } \pi - \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 2n\pi = \arcsin 4y \end{aligned}$$

där $n \in \mathbf{Z}$. Möjligheterna ges således av

$$x = \underbrace{\frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} \arcsin(4y)}_{\in [\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{6}] = [-\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}]} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (8)$$

eller

$$x = \underbrace{\frac{7\pi}{18} - \frac{1}{3} \arcsin(4y)}_{\in [\frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{18} + \frac{\pi}{6}] = [\frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}]} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (9)$$

Nu vet vi att $-\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{2\pi}{9}$ och då måste $x = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} \arcsin 4y$. Varför? Vi ser att endast $n = 0$ är möjlig i (8). I (9) hittar vi endast enstaka ändpunkter som hamnar rätt (om $n = 0$ eller $n = -1$). För övriga $n \in \mathbf{Z}$ blir det utanför sökt intervall. I de punkter som finns i båda fallen får vi samma värde på x .

Svar: $f^{-1}(y) = \frac{\pi}{18} + \frac{1}{3} \arcsin 4y$.

6 Det är roligt med inverser



Exempel

Bestäm D_f och (om möjligt) ett uttryck för $f^{-1}(x)$ om $f(x) = \frac{\pi + 4 \arcsin x}{\pi - 4 \arcsin x}$.

Lösning. Vi börjar med att reda ut största möjliga definitionsmängd. Vi ser direkt att $-1 \leq x \leq 1$ är kravet för att $\arcsin x$ ska vara definierad. Vidare får inte

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alltså blir

$$D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cup \right] \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right].$$

Låt $x \in D_f$. Då gäller att

$$\begin{aligned} y = \frac{\pi/4 + \arcsin x}{\pi/4 - \arcsin x} &\Leftrightarrow y \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin x \right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin x \\ &\Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \\ &\Rightarrow x = \sin \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \right). \end{aligned}$$

Eftersom vi finner högst en lösning för varje y så måste detta vara ett uttryck för $f^{-1}(y)$. Observera att det **endast är implikation** i sista steget ovan!

Svar: $D_f = \left\{ x \in \mathbf{R} : -1 \leq x \leq 1, x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ och $f^{-1}(y) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{y-1}{y+1} \right)$.