

Föreläsning 5: Funktioner

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

11 mars 2020

1 Funktioner

Vad är egentligen en funktion?



Definition. En funktion f är en regel som till varje punkt x i en definitionsmängd D_f tilldelar precis ett y enligt sambandet $y = f(x)$.

Denna definition kan göras lite mer ordentlig med så kallade relationer på mängder, men vi överlämnar detta till senare kurser. Observera här att vi inte sagt något om att definitionen bara gäller reella tal. Eller ens tal överhuvudtaget! Det kunde lika gärna handla om apelsiner eller solar ute i rymden. För vår del (i denna kurs) kommer vi i princip bara att betrakta reellvärda funktioner (där $y \in \mathbf{R}$ alltså), och oftast är även $x \in \mathbf{R}$ (eller någon delmängd). Ett undantag är faktiskt polynomen $p(z)$ som vi diskuterade ovan, där $z \in \mathbf{C}$ generellt sätt.



Funktion och funktionsvärde

Observera att det är f som är funktionen. Uttrycket $f(x)$ är det värde funktionen antar i punkten $x \in D_f$. Det är alltså ganska slarvigt att skriva uttryck i stil med "funktionen $f(x)$ ", men vi tillåter oss göra det ibland.



Värdemängd

Definition. En funktions värdemängd V_f definieras som alla möjliga y -värden vi kan få ur sambandet $y = f(x)$,

$$V_f = \{y = f(x) : x \in D_f\}.$$

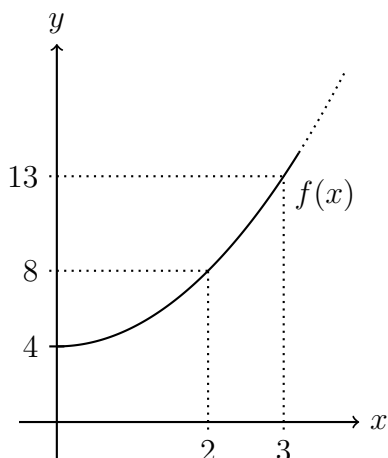
Generellt sett kan värdemängden vara svår att bestämma för en generell funktion. Vissa verktyg kommer att introduceras i envariabelanalysen, men för oss just nu är vi begränsade till ganska enkla funktioner. Till exempel vissa enkla polynom kan vi enkelt rita upp och se vad värdemängden blir.



Exempel

Låt $f(x) = 4 + x^2$ för $x \geq 0$. Bestäm V_f och rita upp funktionen.

Skissar vi funktionen kan vi till exempel göra med en klassisk värdetabell för att få en uppfattning. Sen är det ett polynom så det betar sig ganska snällt.



x	$y = 4 + x^2$
0	4
1	5
2	8
3	13
4	20
...	...

Det som är bra med en bild här är att vi direkt kan se att varje y -värde större än eller lika med 4 kan träffas av (precis ett) x -värde. Till exempel så blir $y = 5$ precis då $5 = 4 + x^2$, dvs då $x^2 = 1$. Eftersom D_f ges av villkoret $x \geq 0$ så är det bara $x = 1$ som passar.

Svar. $V_f = [4, \infty[$.

Figuren ovan brukar kallas **graf** för funktionen f . Formellt så är grafen en mängd av punkter (x, y) där $y = f(x)$ som beskriver hur definitionsmängd och värdemängd hänger ihop, men för vår del räcker det med att betrakta grafen som en ritad figur där vi ser hur x och y -värden hänger ihop.



Exempel

Låt $f(x) = \sqrt{3 - x^2 - 2x}$. Bestäm D_f och V_f .

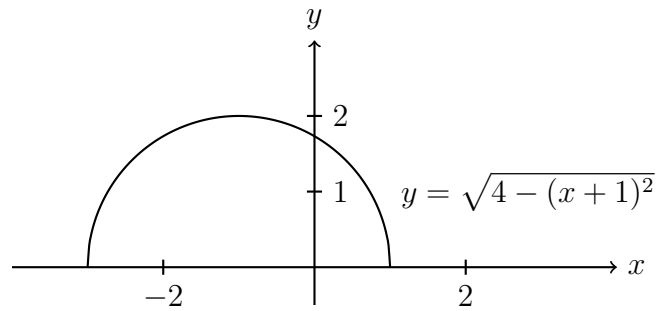
Borde inte D_f vara angiven? Inte nödvändigtvis. Om inget står brukar vi anta att D_f är största möjliga mängd där f är naturligt definierad. I detta fall är detta när kvadratroten är definierad. Hur reder vi ut när detta sker? Vi börjar med att analysera det som står i rottecknet. Det är ett polynom av grad två, så en vettig start är att kvadratkomplettera:

$$3 - x^2 - 2x = 3 - (x^2 + 2x) = 3 - ((x + 1)^2 - 1) = 4 - (x + 1)^2.$$

Eftersom kvadratroten bara är definierad för icke-negativa argument så måste $4 - (x + 1)^2 \geq 0$. Faktoriseringen och en teckentabell visar att $-3 \leq x \leq 1$ är nödvändigt. Så vilka y -värden kan vi få ut? Vi försöker lösa ekvationen $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{4 - (x + 1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - (x + 1)^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Detta är inget annat än ekvationen för övre delen av en cirkel med radie 2 och centrum i $(-1, 0)$. Största möjliga värde är alltså 2 (när $x = -1$) och minsta möjliga värde är 0 (när $x = -3$ eller $x = 1$). En figur där det mesta vi precis räknat ut kan utläsas direkt (men man måste så klart få upp figuren på något sätt också).

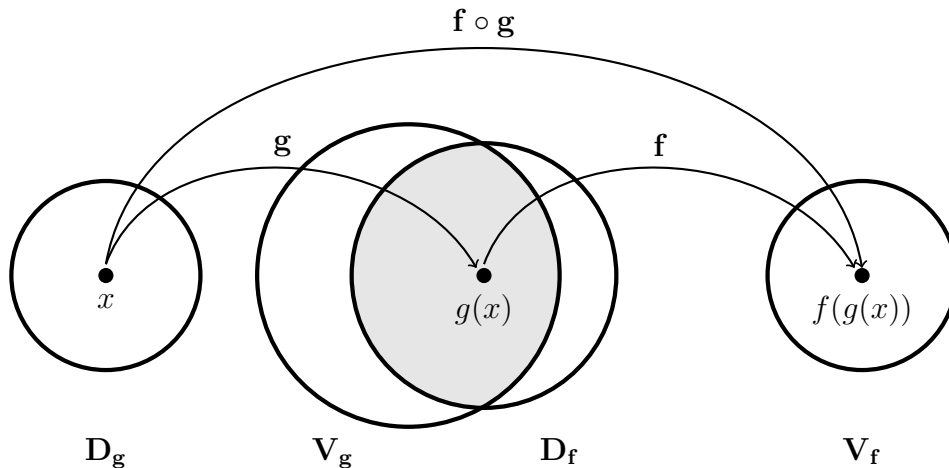


Svar. $D_f = [-3, 1]$ och $V_f = [0, 2]$.

Vad händer om vi sätter ihop två funktioner?

Sammansättning

Definition. Sammansättning $f \circ g$ av två funktioner f och g definieras av sambandet $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ där detta uttryck har mening.



Observera här att för $f \circ g$ blir definitionsmängden

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Det följer alltså att $D_{f \circ g} \subset D_g$, men i allmänhet gäller att $V_g \neq D_f$. Var således försiktiga vid hanterandet av sammansättningar.

Exempel

Låt $g(x) = 1 - x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$. Jämför $f \circ g$ och $g \circ f$.

Ser vi på f och g separat så är $D_f = [0, \infty[$ och $D_g = \mathbf{R}$. Om vi betraktar $f \circ g$ så måste $1 - x^2 \geq 0$, eller ekvivalent, $-1 \leq x \leq 1$. Så,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{för } -1 \leq x \leq 1,$$

och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x \quad \text{för } x \geq 0.$$

Observera att vi får både olika sammansatta uttryck och olika definitionsmängder för $f \circ g$ och $g \circ f$. Ordningen är alltså mycket viktig både för värdet och definitionsmängd för den sammansatta funktionen!

2 Monotonicitet



Monotonicitet

Definition. En funktion kallas

- (i) **växande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- (ii) **strängt växande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) < f(x_2)$;
- (iii) **avtagande** om $x_1 \leq x_2$ medför att $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- (iv) **strängt avtagande** om $x_1 < x_2$ medför att $f(x_1) > f(x_2)$;
- (v) **monoton** om f är växande eller avtagande;
- (vi) **strängt monotont** om f är strängt växande eller strängt avtagande.



Avtagande eller icke-växande?

I litteraturen är uttrycket avtagande/växande inte entydigt bestämt. I vissa fall (som vi definierat det) innebär till exempel avtagande att vi endast har \leq , så en konstant funktion uppfyller detta villkor. Verkar det vettigt att kalla en konstant funktion för både växande och avtagande? Det är en definitionsfråga. Ett vettigare uttryck är egentligen icke-växande. Var försiktig om ni läser andra böcker!

Så hur visar man att något är, till exempel, strängt växande? I envariabelanalyskursen kommer ni att lära er andra metoder, men i detta fall är vi tvungna att visa att olikheten i föregående definition är uppfylld. Vi betraktar ett exempel.



Exempel

Visa att $f(x) = x^3$ är strängt växande.

Lösning. Vi undersöker $f(x_2) - f(x_1)$ och visar att detta uttryck är strikt större än noll om $x_1 < x_2$. Vi ser att $x_2 - x_1$ borde vara en faktor så vi försöker faktorisera:

$$\begin{aligned}x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_2 - x_1) \left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} \right) > 0\end{aligned}$$

ty $(x_1 + x_2/2)^2 + 3x_2^2/4 > 0$ och $x_2 > x_1$.

3 Inverterbarhet

En mycket vanlig fråga när vi analyserar funktioner är om funktioner är "omvändbar" i den meningen att om vi känner till utvärdet $y = f(x)$, går det att hitta ett enda x (så det endast finns ett alternativ) som ger detta y ? Funktioner som har denna egenskap brukar vi kalla för **injektiva**.



Injektivitet

Definition. En funktion f kallas **injektiv** (eller **ett-till-ett**) om det till varje $x \in D_f$ finns precis ett $y \in V_f$ så att $y = f(x)$. Eller ekvivalent:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Alla injektiva funktioner går att invertera.



Invers

Definition. Om f är injektiv så har f en invers f^{-1} så att

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Hur hittar vi då inversen (om den finns)? Vi löser helt enkelt ut x ur ekvationen $y = f(x)$.



Exempel

Finn inversen, om den finns, till $f(x) = \sqrt{4 - (x + 1)^2}$ för $x \geq -1$.

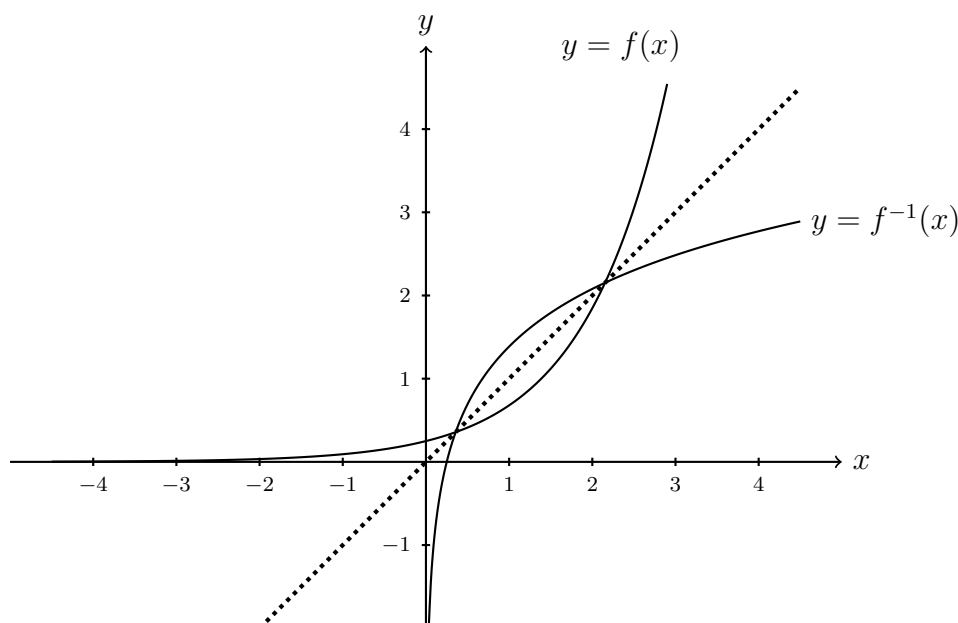
Lösning. Vi försöker helt enkelt att lösa ut x ur ekvationen $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{4 - (x + 1)^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - (x + 1)^2, \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + y^2 = 4, \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{4 - y^2} \end{aligned}$$

Eftersom vi bara får ett svar så finns inversen. Skulle vi erhålla något i stil med $x = \pm \dots$ så det finns flera möjligheter så finns det ingen invers (om inte någon möjlighet faller bort).

Svar. $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4 - x^2}$.

Grafiskt går det att representera inversen som speglingen av kurvan $y = f(x)$ i linjen $y = x$.





Exempel

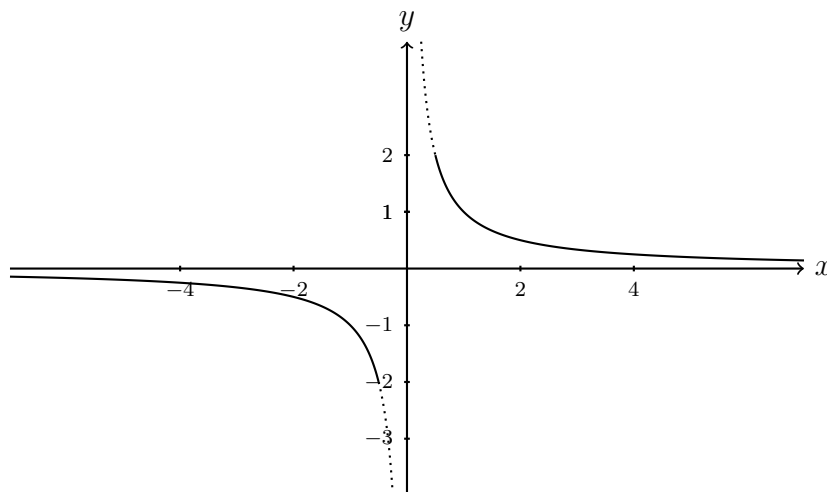
Låt $f(x) = 4 + x^2$ där $D_f = \mathbf{R}$. Undersök om f är injektiv.

Lösning. Nej, f kan inte vara injektiv. Kvadraten är ett vanligt tecken på att en funktion inte är injektiv om D_f innehåller viss symmetri kring nollan. Specifikt, till exempel $f(-1) = 4 + (-1)^2 = 4 + (1)^2 = f(1)$. Alltså är f inte injektiv.

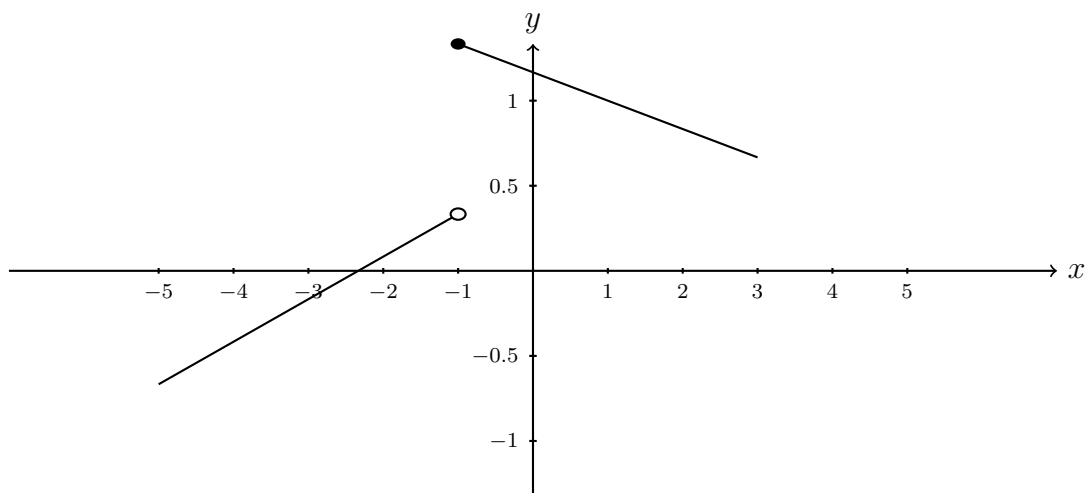


Sats. En strängt monotont funktion är alltid inverterbar.

Märk väl att satsen ovan endast är en implikation. En inverterbar funktion behöver inte vara strängt monotont. Ett enkelt exempel är funktionen $n(x) = \frac{1}{x}$ med $D_n = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Figuren nedan visar utseendet.



Uppenbarligen gäller inte att om $x_1 < x_2$ med $x_1, x_2 \in D_n$ så är $n(x_1) > n(x_2)$ i fallet då $x_1 < 0$ och $x_2 > 0$. Men lokalt kring varje punkt $x \in D_n$ gäller så klart att n är strängt avtagande. Problemet uppstår i ”punktering” av definitionsmängden där funktionen tillåts hoppa ordentligt. Fusk? Kan vi hitta exempel på ett sammanhängande intervall? Ett sätt att konstruera ett sådant exempel är att skarva ihop två funktioner — en växande och en avtagande — så det uppstår ett ”hopp” som separerar graferna. Ta till exempel följande funktion h med definitionsmängd $D_h = [-5, 3]$.



Det är tydligt att varje y -värde i värdemängden motsvarar precis ett x -värde i definitionsmängden, så funktionen är inverterbar. Däremot är den så klart varken strängt växande eller avtagande. Nu kanske man kan tycka att h ändå i princip är monoton eftersom den är det på olika delintervall, så den går att dela upp i två delar där h är endera strängt avtagande eller strängt växande. Skulle den slutsatsen gälla generellt? Går det alltid att dela upp i mindre intervall där funktionen är strängt växande eller avtagande? Svaret är nej. Betrakta till exempel följande roliga funktion:

$$d(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Funktionen d definieras alltså enligt $d(x) = x$ om x är rationell och $d(x) = 1 - x$ om x är irrationell. På intervallet $]0, 1[$ är d uppenbarligen inverterbar ty $d^{-1}(x) = d(x)$, men det finns inget delintervall där d är växande eller avtagande. Att ge sig in på att rita upp funktionen blir dock problematiskt (varför?).

När begreppet kontinuitet introduceras i envariabelanalysen får ni svaret på frågan om en *kontinuerlig* funktion definierad på ett intervall kan vara inverterbar utan att vara strängt växande eller avtagande på definitionsintervallet.

4 Logaritmfunktioner

Ni har säkert stött på logaritmer tidigare för att svara på frågor av typen ”om $10^x = 12$, vad blir x ?” Vi svara på den frågan genom att använda 10-logaritmen. För oss kommer det dock att vara mer användbart att introducera den *naturliga logaritmen* (som vi sedan kan använda för att ta fram logaritmer med andra *baser*).



Den naturliga logaritmen

Definition. Vi definierar funktionen $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ som den deriverbara funktion med definitionsmängd $]0, \infty[$ och värdemängd \mathbf{R} som uppfyller att

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y > 0, \quad (1)$$

och

$$\ln(x) < x - 1, \quad x > 0 \text{ och } x \neq 1. \quad (2)$$

Den finns nu två uppenbara frågor: hur vet vi att en funktion överhuvudtaget existerar med dessa egenskaper och om det finns sådana funktioner, hur vet vi att det bara finns en? Detta är en fråga om existens och entydighet, något vi tryckt hårt på när vi arbetat med ekvationslösning (vi har konsekvent strävat efter att behålla ekvivalenser).

Nästa problem är att vi behöver derivatan och gränsvärden för att bevisa detta. Ni kommer få se dessa begrepp mer ordentligt i nästa analyskurs, men vi kommer använda dessa verktyg för att svara på frågorna ovan. Men innan dess, låt oss undersöka vilka konsekvenser vi erhåller endast av definitionen ovan.

Låt $x, y > 0$. Då gäller följande egenskaper.

1. Vi ser att $\ln(1) = 0$ ty

$$\ln(1) = \ln(1 \cdot 1) = \ln(1) + \ln(1) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1) = 0.$$

2. Vi erhåller en regel för kvoter genom

$$\ln(x) = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln(y) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

3. En följd av föregående två egenskaper är att

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

4. För $p \in \mathbf{Z}$ gäller att

$$\ln x^p = p \ln x.$$

Denna egenskap följer av de föregående, vilket kan visas genom att betrakta $x^p = x \cdot x \cdots x$ (om $p > 0$). För $p < 0$ kan vi betrakta $-\ln x^p$. Observera att vi inte kan säga något om fallet då p ej är ett heltal i nuläget; vi återkommer till detta under nästa föreläsning.

5. Eftersom $\ln(x) < x - 1$ så gäller att

$$-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x},$$

så

$$\frac{x-1}{x} < \ln(x) < x-1, \quad x > 0 \text{ och } x \neq 1. \quad (3)$$

6. Två följder av föregående dubbelolikhet är att

- (a) om $x > 1$ så är $\ln x > 0$;
- (b) om $0 < x < 1$ så är $\ln x < 0$.

7. Den naturliga logaritmen \ln är strängt växande: låt $x_2 > x_1 > 0$. Då är $\frac{x_2}{x_1} > 1$, så

$$0 < \ln \frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x_1 < \ln x_2.$$

5 Bevis för att \ln existerar

Vi visar nu att \ln existerar och är entydigt bestämd. Som nämnt ovan så behöver vi verktyg vi inte gått igenom ordentligt, men återkom gärna till detta avsnitt när ni studerat gränsvärden och derivata i nästa kurs.



Sats. Låt $L:]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ vara en deriverbar funktion. Då gäller att

$$L(xy) = L(x) + L(y), \quad \text{för alla } x, y > 0,$$

om och endast om

$$L(1) = 0 \quad \text{och} \quad L'(x) = L'(1) \frac{1}{x}.$$

Bevis. Vi antar först att $L(xy) = L(x) + L(y)$. Enligt tidigare vet vi att detta meför att $L(1) = 0$. Vidare så erhåller vi att

$$\begin{aligned} L'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x+h) - L(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) - L(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x) + L\left(1 + \frac{h}{x}\right) - L(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{L\left(1 + \frac{h}{x}\right) - L(1)}{h/x} = \frac{1}{x} L'(1). \end{aligned}$$

Om vi istället antar att $L'(x) = L'(1) \frac{1}{x}$ och $L(1) = 0$ så ser vi att för $y > 0$ så gäller att

$$\frac{d}{dx} (L(xy)) = y \cdot L'(xy) = y \cdot \frac{L'(1)}{xy} = \frac{L'(1)}{x},$$

så $L(x)$ och $L(xy)$ har samma derivata (vi använde här kedjeregeln för att beräkna derivatan). Då kan dessa uttryck endast skilja sig åt med en konstant, säg

$$L(xy) = L(x) + C,$$

för något $C \in \mathbf{R}$. Men då $L(1) = 0$ så vet vi att

$$L(y) = L(1 \cdot y) = L(1) + C = C,$$

så

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$



Sats. För funktionen $L(x) = \ln(x)$ gäller att $L'(1) = 1$.

Bevis. Detta faktum följer ty för $h \neq 0$ så är

$$\frac{L\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{x}{h} L\left(1 + \frac{h}{x}\right) < \frac{x}{h} \left(1 + \frac{h}{x} - 1\right) = 1$$

samt

$$\frac{L\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} = \frac{x}{h} \cdot L\left(1 + \frac{h}{x}\right) > \frac{x}{h} \cdot \frac{1 + h/x - 1}{1 + h/x} = \frac{1}{1 + \frac{h}{x}}$$

enligt olikhet (3). Eftersom detta gäller för alla $h \neq 0$ så följer det att

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h/x} = 1$$

då både övre och undre gräns blir 1 då $h \rightarrow 0$. Kom ihåg detta till TATA41 (instängningsprincipen)!



Funktionen $L(x) = \ln(x)$ kan således definieras som den primitiva funktion $L(x)$ till $L'(x) = \frac{1}{x}$ som uppfyller att $L(1) = 0$.