Exempel på kancellation: implementering av $\sinh x$

Då man implementerar standardfunktioner på en dator bör man kräva att de ger full noggrannhet, att alla bitarna i taldelen är korrekta, dvs att det relativa felet är mindre än μ (avrundningsenheten i flyttalssystemet). Antag, att man ska implementera standardfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{1}$$

på en dator i IEEE enkel precision. Antag vidare att man har en implementation av exponentialfunktionen, som ger e^x med relativt fel mindre än $\mu = 2^{-24} \approx 0.6 \cdot 10^{-7}$ för alla x sådana att e^x kan representeras i flyttalsformatet. För stora x går det bra att använda definitionen (1), men för små x uppstår **kancellation**. Låt $S_1 = \mathrm{fl}[(e^x - e^{-x})/2]$, beteckna resultatet då standardfunktionen e^x används och subtraktionen utförs i flyttalssystemet. Följande värden erhölls på en SUN arbetsstation:

x	S_1	$\sinh x$	$\lvert S_1 - \sinh x\rvert / \sinh x$
10^{-1}	0.1002	0.1002	$1.5 \cdot 10^{-7}$
10^{-2}	$1.000 \cdot 10^{-2}$	$1.000 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-7}$
10^{-3}	$1.000 \cdot 10^{-3}$	$1.000 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$
10^{-4}	$1.000 \cdot 10^{-4}$	$1.000 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	$1.001 \cdot 10^{-5}$	$1.000 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$
10^{-6}	$0.984 \cdot 10^{-6}$	$1.000 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$
10^{-7}	$1.192 \cdot 10^{-7}$	$1.000 \cdot 10^{-7}$	0.19
10^{-8}	0	$1.000 \cdot 10^{-8}$	1

Om man i stället använder de tre första termerna i MacLaurin-utvecklingen

$$\sinh x \approx S_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

så får man på arbetsstationen felet 0 (vilket inte betyder att felet är lika med noll utan att skillnaden mellan den "inbyggda" standardfunktionen och S_2 är lika med noll).

Vi ska nu visa att det relativa felet $|\sinh x - S_2(x)|/\sinh x$ är tillräckligt litet för $|x| \leq 0.1$. Vi har

$$\begin{aligned} |\sinh x - S_2(x)| &= \left|\frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots\right| = \left|\frac{x^7}{7!}\left(1 + \frac{x^2}{8 \cdot 9} + \frac{x^4}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11} + \ldots\right)\right| \\ &\leq \frac{|x|^7}{7!}\left(1 + \frac{x^2}{8^2} + \frac{x^4}{8^4} + \ldots\right) = \frac{|x|^7}{7!}\frac{1}{1-(x/8)^2}, \end{aligned}$$

där vi har summerat en geometrisk serie. Eftersom $|\sinh x| > |x|$, kan vi uppskatta det relativa felet

$$\frac{|\sinh x - S_2(x)|}{|\sinh x|} \leq \frac{x^6}{7!}\frac{1}{1-(x/8)^2}.$$

Det största felet får vi för $x = 0.1$:

$$\frac{10^{-6}}{7!}\frac{1}{1-(0.1/8)^2} \leq 2 \cdot 10^{-10} < \mu,$$

vilket visar att approximationen $\sinh x \approx S_2(x)$ är tillräckligt noggrann.

Om man beräknar S_2 i utökat flyttalsformat (se Avsnitt 2.8 i boken) så blir avrundningen till enkel precision det dominerande felet och man får full noggrannhet (relativt fel mindre än μ) i approximationen av $\sinh x$.