Instrument för elevationsvinkelmätning

Ett instrument för elevationsvinkelmätning konstruerades för några år sedan av en civilingenjör utexaminerad från LiTH. Instrumentet byggdes enligt följande principschema.

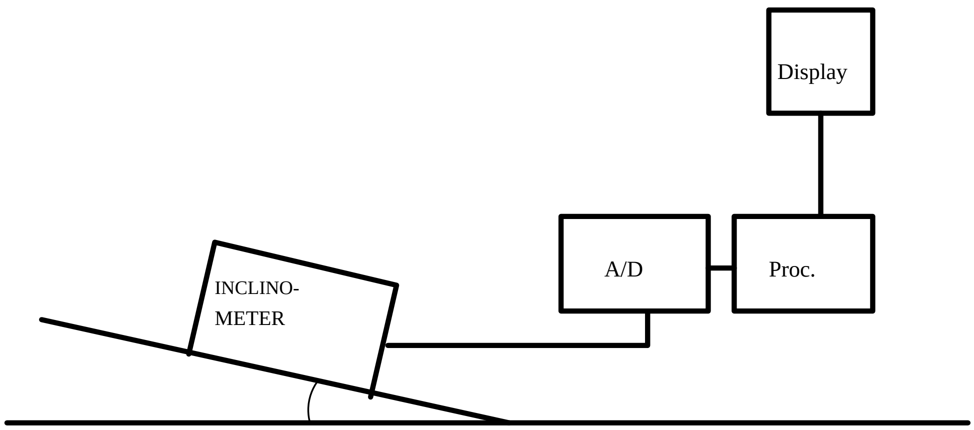

Figure 1: Instrument för elevationsvinkelmätning

Processorn antas ha flyttalsaritmetik. Inclinometern ger som utdata en likspänning, som är proportionell mot sinus för vinkeln, för enkelhets skull antar vi att proportionalitetskonstanten är lika med 1. Efter A/D-omvandling, som ger ett digitalt sinus-värde s, beräknar processorn $\theta = \arcsin s$, som visas på displayen.

Problemet i det aktuella fallet var att inclinometern inte gav sinus-funktionen exakt. För att kalibrera instrumentet satte man det i ett vinkelbord, ställde in ett antal vinklar och mätte upp utsignalen från inclinometern. Antag att man fick följande värden. Vinkeln θ är given i radianer.

$s(\theta)$	0	0.2006	0.3931	0.5695	0.7229	0.8468	0.9364	0.9878
θ	0	0.2020	0.4039	0.6059	0.8078	1.0098	1.2118	1.4137

Vi interpolerar nu θ som funktion av s med ett polynom $P(s)$, dvs vi bestämmer polynomet P så att $P(s_i) = \theta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Då kan vi, givet en instrumentspänning s, direkt beräkna motsvarande vinkel $\theta = P(s)$.

Uppgiften är nu att hitta en lämplig interpolationsmetod, och att implementera denna i processorn. Vi prövar två olika alternativ:

1. Interpolera $n+1$ punkter med ett n-te-gradspolynom.
2. Interpolera med en spline-funktion.

Interpolation med n-te-gradspolynom

En fördel med denna metod är att vi bestämmer ett enda polynom, som vi använder i hela intervallet. Koden för att evaluera polynomet blir på så sätt mycket enkel.

Vi prövar med att interpolera med ett polynom av grad 7. Resultatet visas i Figur 2.

Vi ser att felet verkar vara stort nära origo. Vi försöker därför att nedbringa felet genom att använda fler mätpunkter, t ex 16, och ett polynom av grad 15. Resultatet ges i Figur 3.

Vi är tydligen på helt fel väg.

Interpolation med kubisk spline

I stället prövar vi att interpolera med en kubisk spline-funktion. Vi bestämmer alltså en funktion S, som är ett tredje-gradspolynom på varje intervall, sådan att $S(s_i) = \theta_i$, $i = 1, \ldots, n$, och att första- och andra-derivatan av S är kontinuerliga.

Vi behöver dessutom två randvillkor. Eftersom vi vet att den interpolerade funktionen är en approximation till $\theta = \arcsin s$ kan vi använda de "rätta" randvillkoren $S'(s_1) = \theta'(s_1)$ och $S'(s_n) = \theta'(s_n)$.

Resultatet visas i Figur 4.

Slutsats

Interpolation med polynom av högt gradtal fungerar inte i regel. I det aktuella fallet implementerades en algoritm baserad på en interpolerande kubisk spline-funktion.

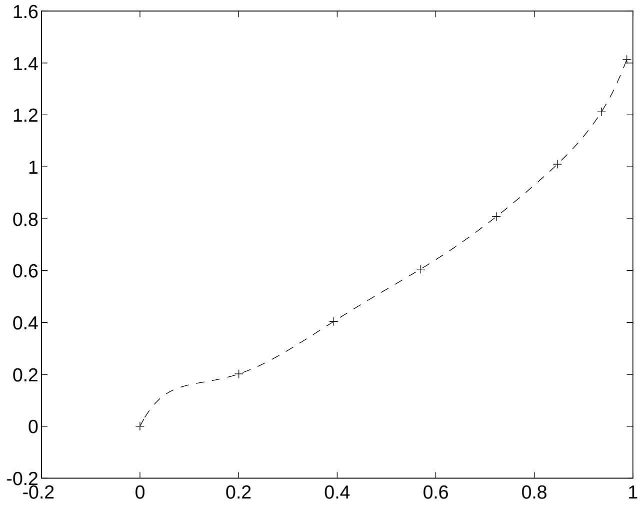

Figure 2: Interpolation med polynom av grad 7. Mätvärdena markeras med '+' och den interpolerande funktionen utgörs av kurvan.

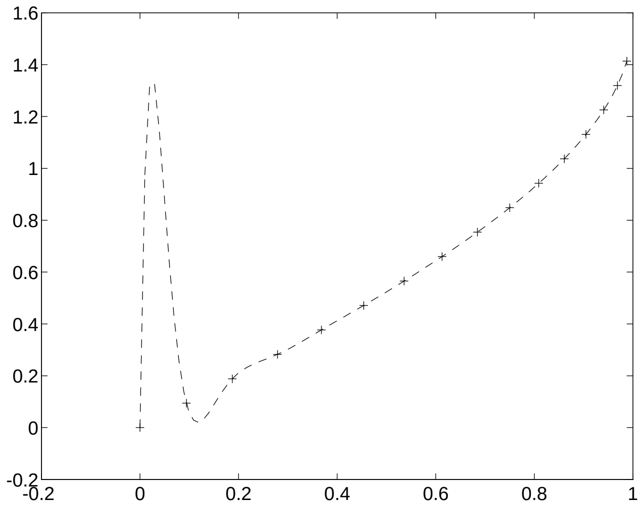

Figure 3: Interpolation med polynom av grad 15.

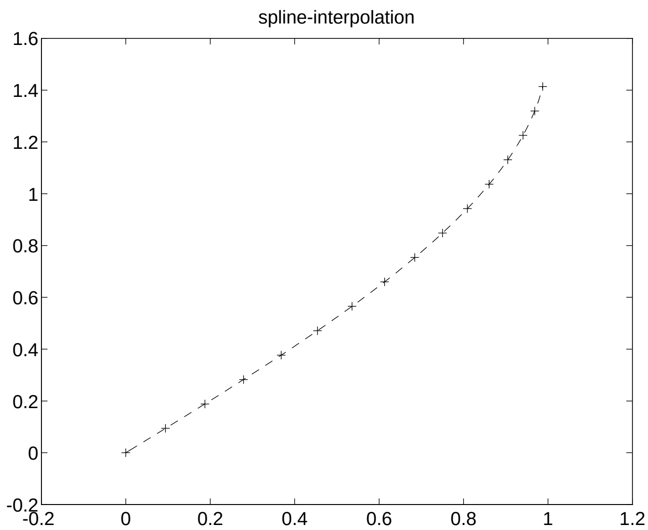

Figure 4: Interpolation med kubisk spline. "Rätta" randvillkor.