Numerisk derivering - Richardsonextrapolation

Beräkna $f'(0.2)$ så noggrannt som möjligt då f ges av följande korrekt avrundade tabell.

x	$f(x)$
0.000	1.0000
0.025	1.0260
0.050	1.0539
0.075	1.0839
0.100	1.1162
0.125	1.1509
0.150	1.1880
0.175	1.2277
0.200	1.2703
0.225	1.3157
0.250	1.3643
0.275	1.4161
0.300	1.4713
0.325	1.5302
0.350	1.5929
0.375	1.6596
0.400	1.7305

Använd centraldifferens (Kap. 6.2)

$$D_h = \frac{f(0.2+h) - f(0.2-h)}{2h},$$

och upprepad Richardsonextrapolation (Kap. 6.4).
Eftersom de absoluta felen i funktionsvärdena är mindre än $0.5 \cdot 10^{-4}$ kan R_{XF} i D_h-värdena uppskattas (Kap. 6.3)

$$R_{XF} \leq \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{h}.$$

Algoritm:

$h := h_0$

repeat

Beräkna D_h och Richardsonextrapolera

Uppskatta R_T och R_{XF}

if $|R_T| \leq |R_{XF}|$ **then** STOP **else** $h := h/2$

Vi beräknar differensapproximationer för steglängderna $h = 0.2$ och $h = 0.1$, och gör en Richardsonextrapolation. Samtidigt gör vi ett störningsschema för R_{XF}:

h	D_h	
0.2	1.8262	
0.1	1.7755	1.7586

h	R_{XF}	
0.2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	
0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$

Ur Richardsonschemat ser vi att R_T kan uppskattas (Kap 6.4)

$$|R_T| \leq |1.8262 - 1.7755| \approx 0.05,$$

vilket är mycket större än R_{XF}, så vi måste halvera steglängden och beräkna en ny differensapproximation, samt extrapolera:

h	D_h		
0.2	1.8262		
0.1	1.7755	1.7586	
0.05	1.7630	1.7588	1.7589

h	R_{XF}	
0.2	$2.5 \cdot 10^{-4}$	
0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$
0.05	$10 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-4}$

Vi uppskattar

$$|R_T| \leq |1.7588 - 1.7586| \leq 2 \cdot 10^{-4},$$

vilket är mindre än R_{XF} för värdena i extrapolationsschemat.
Totalt fel:

$$|R_{tot}| \leq |R_T| + |R_{XF}| + |R_B| \leq (2 + 15 + 0.5) \cdot 10^{-4} \leq 2 \cdot 10^{-3}.$$

(Vi har räknat med större noggrannhet och avrundat till fyra decimaler. Därför $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-4}$).

Svar: $f'(0.2) = 1.7589 \pm 2 \cdot 10^{-3}$.