Exempel på användning av störningsteorin.

Lös $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} 6.1 & 6.11 \\ 2.7 & 2.7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 12.21 \\ 5.4 \end{pmatrix},$$

i flyttalssystemet $(2, 23, -126, 127)$.När vi lagrar matrisen och högerledet i datorn får vi avrundningsfel. Detta ger upphov till an avvikelse mellan den exakta lösningen och den som vi kan beräkna med datorn. Vi måste nu besvara frågan:

Hur stort kan felet i lösningen bli p g a avrundning till flyttal av elementen i A och b?

Eftersom

$$\mathrm{fl}[x] = x(1+\epsilon), \quad |\epsilon| \leq \mu = 2^{-24} \approx 6 \cdot 10^{-8},$$

gäller

$$\begin{aligned} \delta A &= \begin{pmatrix} 6.1\epsilon_{11} & 6.11\epsilon_{12} \\ 2.7\epsilon_{21} & 2.7\epsilon_{22} \end{pmatrix}, \qquad \|\delta A\|_\infty \leq \mu \|A\|_\infty, \\ \delta b &= \begin{pmatrix} 12.21\epsilon_1 \\ 5.4\epsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad \|\delta b\|_\infty \leq \mu \|\delta\|_\infty. \end{aligned}$$

Konditionstalet för matrisen är

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty \approx 4 \cdot 10^3.$$

Med hjälp av störningsteorin får vi

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\lesssim \kappa_\infty(A) \left(\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right) \\ &\leq 4 \cdot 10^3 2\mu \leq 0.5 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

I detta flyttalssystem måste matrisen betecknas som ganska **illa-konditionerad.**

Hur stor avvikelse kan vi få om vi löser systemet i IEEE dubbel precision (flyttalssystemet (2,52,L,U))?