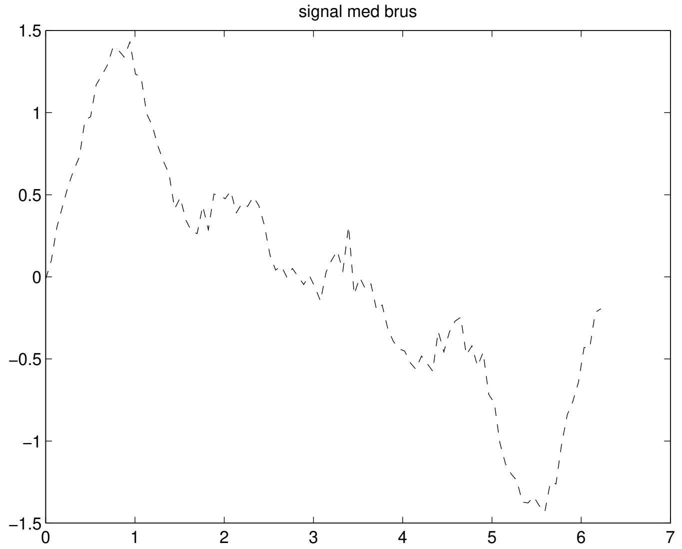
Brusreducering med Fourier-analys

Antag att vi har mätt upp en periodisk signal (med perioden 2π), som innehåller ett antal sinuskomponenter plus brus:



Antag vidare (för enkelhets skull) att vi vet att summan har 8 sinuskomponenter. Vi har modellen

$$f_b(t_i) = \sum_{k=1}^{8} c_k \sin(kt_i) + \eta(t_i), \qquad t_i = 2(i-1)\pi/m, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

där η är bruset och vi har samplat signalen vid $m = 100$ tidpunkter t_i.

Vi ska uppskatta koefficienterna c_i med minsta kvadratmetoden och samtidigt reducera bruset. Med beteckningarna från Kapitel 9 i boken har vi

$$f^* = \sum_{k=1}^{8} c_k^* \varphi_k, \qquad \varphi_k = \sin(kt),$$

där koeeficienterna c_k^* fås ur normalekvationerna.

Vi har skalärprodukten

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{m} f(t_i) g(t_i);$$

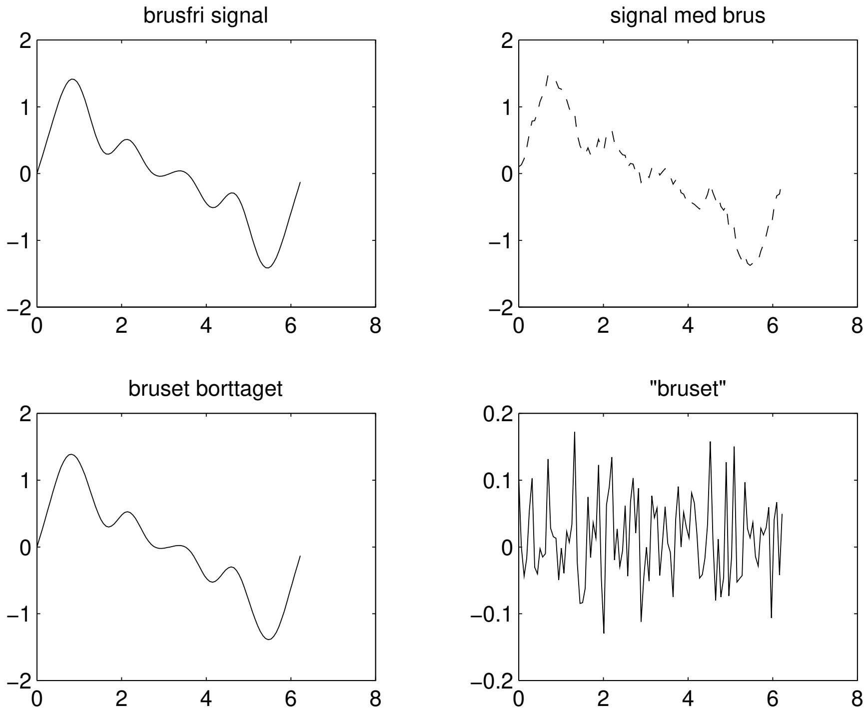
man kan visa, att vi har

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \begin{cases} 0 & j \neq k, \\ 50 & j = k, \end{cases}$$

dvs funktionerna $\{\varphi_k\}$ är ortogonala. Lösningen till normalekvationerna blir därför helt enkelt

$$c_k^* = \frac{1}{50}(f_b, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, 8.$$

I nedanstående figur har vi illustrerat den "rätta" signalen utan brus, signalen med brus (f_b), signalen med bruset borttaget (minsta kvadratlösningen f^*), och "bruset" (residualen $f_b - f^*$).



Beräkningarna blir mycket enkla i Matlab:

```
m=100; h=2*pi/m; t=0:h:2*pi-h/2; % Vector of t(i) values

for k=1:8,
  phik=sin(k*t)';
  xc(k)=(2/m)*(phik'*fb);         % Solution of normal equations
end
```

I realistiska tillämpningar utförs beräkningarna med snabb Fourier-transform (FFT).