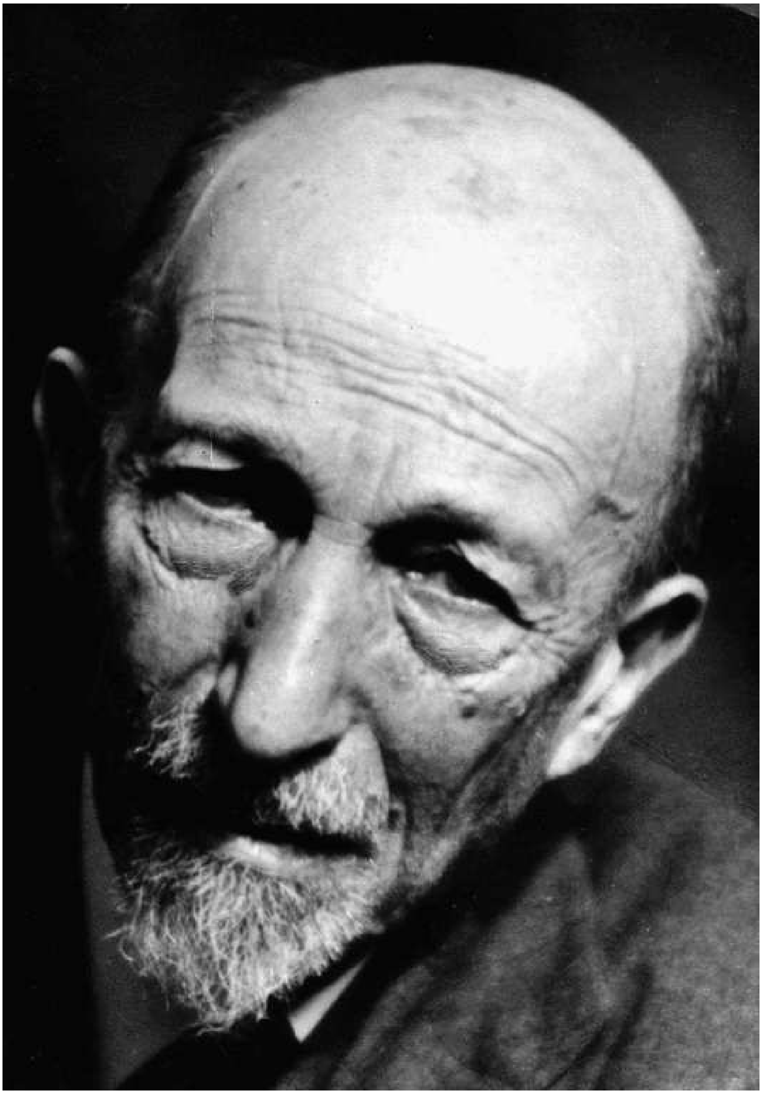
Нашему сыну Мише с любовью



J Hadamard

В. Г. МАЗЬЯ Т. О. ШАПОШНИКОВА

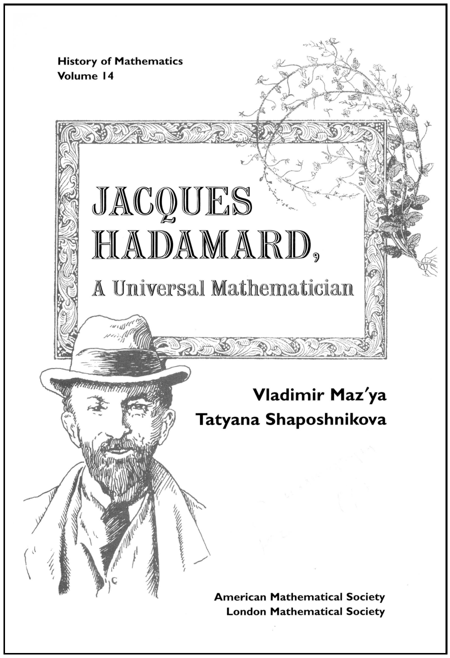
ЖАК АДАМАР

ЛЕГЕНДА МАТЕМАТИКИ

Перевод с английского Ю. А. Данилова,
авторизованный и расширенный

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 51(092)
ББК 22.1г
М13



Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.

М13 Жак Адамар — легенда математики. — М.: МЦНМО, 2008. — 528 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-083-7

Книга посвящена описанию жизни и творчества великого французского математика Жака Адамара (1865—1963), работы которого оказали огромное влияние на развитие математики в XX веке.

В первой части излагается история жизни Жака Адамара. На страницах книги воссоздана атмосфера научной и общественной жизни конца XIX — первой половины XX века. Обилие интересных исторических подробностей и широкий ряд упоминаемых исторических персонажей и событий, относящихся не только к математике, сделают эту книгу увлекательной для любого читателя.

Вторая часть представляет собой обзор математических достижений Адамара. Ему принадлежит множество классических результатов в самых разных областях математики — в теории функций, вариационном исчислении, теории чисел, аналитической механике, алгебре, геометрии, теории вероятностей, теории уравнений в частных производных и т. д. Помимо материала, относящегося непосредственно к математической деятельности ученого, приводится много интересных сведений по истории математики XIX и XX веков.

Книга адресована всем интересующимся историей науки.

ББК 22.1г

ISBN 0-8218-0841-9 (англ.)
ISBN 978-5-94057-083-7

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

Английский оригинал настоящей книги был опубликован в 1998 г. совместно Американским и Лондонским математическими обществами. Второе английское издание появилось в 1999 г. В 2003 г. в Париже был напечатан несколько расширенный французский перевод. Мы очень рады, что теперь книга становится доступной в русском переводе. По сравнению с английским, в русское издание внесены некоторые исправления и добавления.

Мы надеемся, что книга будет интересна широкому кругу читателей, включая математиков, физиков и инженеров. Нам представляется, что её бóльшая часть, посвященная долгой, полной драматизма жизни Адамара, может заинтересовать также и представителей гуманитарных профессий.

Настоящее издание стало возможно благодаря усилиям нескольких людей. Мы глубоко признательны ответственному редактору Американского математического общества Сергею Гельфанду за помощь в организации русского издания. Перевод на русский «в первом приближении» был выполнен Юлием Даниловым, неожиданно скончавшимся в 2003 г. В этот критический момент сотрудники издательства Московского центра непрерывного математического образования включились в большую работу по доводке текста. Мы от души благодарны им за доброжелательность и профессионализм.

Линчёпинг,
июнь 2007 г.

Предисловие к английскому изданию и благодарности

Мы глубоко благодарны Е. М. Полищуку (1913–1987), пробудившему наш интерес к жизни и творчеству Адамара и предложившему нам принять участие в работе над книгой о великом французском математике. Книга «Жак Адамар» Е. М. Полищука и Т. О. Шапошниковой, написанная при участии В. Г. Мазьи, была издана в 1990 г. в Ленинграде.

Биографическая часть этой книги была очень мала, так как документы, письма и многие публикации были нам недоступны. После нашей эмиграции в Швецию в 1990 г. мы получили возможность путешествовать и знакомиться с материалами о жизни и научном творчестве Адамара. Его личные бумаги исчезли во время войны, и нам пришлось восстанавливать мозаику его жизни из фрагментов, рассеянных по архивам и библиотекам многих стран. Результатом этих поисков стала первая часть настоящей книги.

Адамар никогда не привлекал внимания профессиональных историков науки. На протяжении тридцати лет после его кончины не было предпринято ни одной попытки написать его подробную биографию. Между тем живы лишь немногие из тех, кто мог бы поделиться воспоминаниями о человеке, которого некогда называли «живой легендой математики». Как заметил в своем очерке Ж.-П. Кахан [II.29][1], «ни в одной математической библиотеке нет полного собрания математических трудов Адамара, потому что, в отличие от работ менее значительных математиков, его труды никто не собрал и не опубликовал полностью. В Париже нет улицы, которая носила бы его имя. Эту легенду настоятельно требуется оживить, особенно во Франции».

Хотя наше изложение документировано, оно отнюдь не претендует на то, чтобы считаться глубоким историческим исследованием. Мы не ставили перед собой такой цели и не могли бы ее достичь. Наша задача была более скромной: мы просто хотели рассказать историю жизни Адамара для профессиональных математиков и студентов старших курсов, интересующихся математикой. На страницах нашей книги о Жаке Адамаре говорят его родственники, учителя, коллеги, друзья и ученики.

Пытаясь сделать очерк жизни Адамара понятным более широкому кругу читателей, мы руководствовались в первой части книги законом Юстиниана «О злодеях и математиках», который гласит: «Искусство математики также воспрещается под страхом наказания» [III.88, с. 379], и ограничились упоминанием лишь немногих наиболее значительных математических результатов Адамара, чтобы читатель мог получить представление о том, почему об Адамаре стоит писать.

[1]Римские числа относятся к одной из четырех частей библиографии: I. Работы Жака Адамара; II. Литература об Адамаре; III. Использованная литература; IV. Архивные материалы.

Более подробно вклад Адамара в математику освещен во второй части книги. Порядок глав в ней отражает главным образом хронологический порядок его интересов. Как и прежде, мы имели в виду читателя со скромными познаниями в математике. Тем не менее, нам представляется, что даже профессиональный математик найдет во второй части нечто интересное. Наряду с новым материалом эта часть содержит расширенный и пересмотренный вариант математических глав русской книги [II.52], а § 11.3, § 16.1 и фрагменты из главы 9 воспроизводят с небольшими изменениями текст, оставленный Е. М. Полищуком, который умер в самом начале работы над книгой [II.52]. Кроме того, его заметки оказались полезными для нас, когда мы писали главы 10–12. Мы с благодарностью признаём вклад Е. М. Полищука в данную книгу.

Наша книга была бы менее полной без поддержки внука Адамара физика Франсиса Пикара (1929–1995). Мы встретились с ним в Париже в 1992 г. и были тронуты его желанием оказать нам помощь. Он предоставил в наше распоряжение интересный материал о своем деде, собранный младшей дочерью Жака Адамара Жаклин. Кроме того, Франсис Пикар разрешил нам цитировать неопубликованную автобиографическую рукопись Жаклин Адамар. Он был увлечен нашим проектом и, как рассказала нам его жена Сабина Гайе, даже в последние дни своей жизни мечтал увидеть эту книгу напечатанной. Мы выражаем Франсису Пикару нашу глубокую благодарность.

Мы также глубоко признательны Джереми Дж. Грею за щедрую помощь на различных стадиях подготовки рукописи. Взяв на себя труд просмотреть первоначальный вариант книги, он высказал много ценных замечаний и советов как по стилю, так и по изложению конкретных вопросов.

Наш приятный долг — выразить сердечную благодарность Франсуа Мюра, прочитавшему первоначальный и окончательный варианты рукописи и внесшему многочисленные поправки. Он щедро жертвовал временем, отвечая на наши вопросы о научной и общественной жизни Франции. То, что в нашей книге осталось существенно меньше ошибок в математике, французском и английском языках, а также в фактах из жизни и культуры Франции, — его заслуга.

С глубокой признательностью мы отмечаем помощь нашего друга и коллеги Ларса-Инге Херберга, прочитавшего первоначальные варианты текста. Благодаря его эрудиции и бескомпромиссным критическим замечаниям, нам удалось исключить ошибки и улучшить текст.

Мы обязаны Мари-Элен и Лорану Шварцам за то, что они поделились с нами своими воспоминаниями об Адамаре.

Мы признательны Бенуа Мандельброту за критические замечания, которые позволили улучшить изложение, и за разрешение использовать воспоминания его дяди, Шолема Мандельбройта, а также его собственные воспоминания об Адамаре.

Мы выражаем нашу самую теплую благодарность художнику Некоду Зингеру, создавшему макет обложки и проиллюстрировавшему истории из жизни Адамара забавными рисунками.

Нам приятно поблагодарить Наташу и Александра Мовчанов за дружескую помощь в редактировании предварительного варианта рукописи.

Мы также глубоко благодарны Мательде и покойному Гаэтано Фикера, прочитавшим первоначальный вариант нашей книги и оказавшим нам щедрую помощь в наших поисках связей Адамара с итальянскими математиками.

Мы весьма признательны Эве и Ларсу Гордингам, прочитавшим предварительный вариант нашей книги и сделавшим полезные замечания. Ларс Гординг любезно помог датировать статью Адамара, написанную на шведском языке, которую мы обнаружили в библиотеке Академии деи Линчеи.

Мы глубоко признательны Эрнесту Кахану за разрешение использовать его воспоминания об Адамаре и его сыну Жану-Пьеру Кахану за рассказ о своих встречах с Адамаром и о французских профсоюзах. Он любезно предоставил нам несколько интересных фотографий.

Мы хотим поблагодарить Жана-Пьера Пюэля, объяснившего структуру французской системы образования в подробной лекции, которая оказалась необычайно полезной для нас.

Мы выражаем свою признательность Говарду Стоуну за рвение, с которым он вычитал текст, и за сделанные им ценные замечания.

Огромная благодарность Нан Стрёмберг, с готовностью взявшей на себя бремя перепечатки многих страниц рукописи.

Сердечное спасибо Чавдару Иванову за неоценимую помощь в технической подготовке рукописи.

Мы благодарны С. Агмону, К. Амаратунге, В. М. Бабичу, Дж. Биркгофу, Р. Бюргеру, И. Веселому, Т. Ганелиусу, А. Григорьяну, С. С. Демидову, В. Ф. Демьянову, Д. Диониси, А.-М. Зендиг, В. Катасонову, М. Костабелю, И. Кралу, Г. Кресину, Р. Крессу, Н. Кузнецову, С. Латковичу, П. Р. Мазани, Л. Мейстер, Ж.-К. Неделеку, И. Нетуке, Л. Никольской, Н. Никольскому, О. Олейник, С. Прессдорфу, Я. Г. Синаю, Жен Суну, Б. Хоканссону и Й. Хорвату, снабдившим нас различными материалами и информацией об Адамаре.

Мы хотим также поблагодарить Ф. Норстеда за его экспертную помощь в решении наших проблем с LaTeXом, М. Людвигсена и В. Эдгара за ответы на наши вопросы по грамматике английского языка, Я. Бьёрн, К. Марциняка, П. Э. Риччи, Б. О. Туресcона и Ж. Шо за их любезную помощь в переводе некоторых документов с чешского, польского, итальянского, латыни и китайского.

Мы хотим также поблагодарить тех, кто помог нам проиллюстрировать эту книгу фотографиями и рисунками: Х. Брезиса, И. Вербицкого, Л. Гибянского, Н. Григорян, С. Джонса, Ф. Дофрань, Н. Ермолаеву, Ж.-П. Кахана, Г. Кресина, В. Ленферинка, Дж. Лютцена, Б. Мандельброта, М. Мендес-Франса, Ж. Мовэна, К. Моно-Брока, Ф. Мюра, Л. Никольскую, Н. Никольского, Дж. Полкинга, М. Рогстедта, М. Ролина, И. Романовскую, А. Слуцкого, Г. Стоуна, Джи-Гуан Суна, Жен Суна, В. Тихомирова, М. Тучняка, Е. Френкеля, И. Шетца и Г. Шмидта.

Работа над книгой проходила в дружеской атмосфере математического факультета Университета в Линчёпинге.

Мы благодарны сотрудникам Института Миттаг-Леффлера, где мы провели январь 1991 г., за превосходные условия для работы.

Выражаем признательность за поддержку нашей работы Университету в Линчёпинге и Шведскому совету по естественнонаучным исследованиям, а также

Шведскому институту, который предоставил нам редкую возможность пребывания в Шведском культурном центре во время двух наших визитов в Париж: его старые стены и историческая обстановка во многом способствовали нашему вдохновению.

Мы хотим поблагодарить сотрудников библиотек и архивов, где мы получили множество информации, использованной в этой книге. Мы неизменно встречали готовность помочь и высокоэффективную помощь в библиотеке Университета в Линчёпинге, библиотеке Института Миттаг-Леффлера, Королевской библиотеке в Стокгольме, библиотеке Упсальского университета, библиотеке Академии деи Линчеи, библиотеке Массачусетского технологического института, библиотеке Вудсоновского научно-исследовательского центра (в Университете Райса), библиотеке Гёттингенского университета, библиотеке Куинз Колледж (Лондон), Национальной библиотеке в Париже, библиотеке Института Франции, библиотеке Политехнической школы, библиотеке Нормальной школы, библиотеке Национального института педагогических исследований (Париж), а также в Национальном архиве (Париж), архиве Академии наук Франции, архиве Политехнической школы, архиве Коллеж де Франс, Муниципальном архиве Версаля, архиве Еврейского университета в Иерусалиме и архиве Российской академии наук.

Особая благодарность нашему шестнадцатилетнему сыну Мише, слышавшему имя Адамара с детства. Он изо всех сил помогал нам в английском и французском языках, печатал, копировал и сканировал. Мы признательны ему за терпение, понимание и поддержку.

Линчёпинг,
декабрь 1997 г.

Добавление ко второму английскому изданию

За год, прошедший после первого издания нашей книги, мы получили полезные замечания от И. Граттана-Гиннеса, П. Е. Риччи, Ю. Бураго, И. Веселого, И. Нетуки и Р. Кука. Всем им наша глубокая благодарность.

При подготовке второго издания мы исправили опечатки и внесли некоторые стилистические улучшения. Мы также добавили новые ссылки в конец части III библиографии («Использованная литература»).

Часть I

Жизнь Адамара

Пролог

В детстве Жак Адамар любил книги о путешествиях, играл на скрипке, совершенствовался в иностранных языках, любил собирать гербарии и не скрывал своего отвращения, когда ему приходилось заниматься решением арифметических задач. Но, повзрослев, он посвятил свою жизнь именно математике и сделал в ней ряд выдающихся открытий, не утратив ни одного из своих детских интересов.

Адамар прожил долгую жизнь. Его столетие отпраздновали всего лишь через два года после его смерти. Он родился в эпоху, когда единственными транспортными средствами были лошади и паровозы, — а к концу его жизни

человек облетел земной шар. Его детство пришлось на время, когда в военных целях использовали холодное оружие и порох, — и он дожил до испытаний ядерного оружия. Молодым ученым он выступил в защиту Дрейфуса в знаменитом деле капитана французской армии, осужденного на тюремное заключение по ложному обвинению в государственной измене. В преклонном возрасте ему пришлось стать свидетелем того, как миллионы людей были умерщвлены в концентрационных лагерях.

Адамар испытал большие радости: он был счастлив в браке, стал отцом двух дочерей и трех сыновей, к тридцати годам он получил всемирную известность. Не обошли его и горести: все трое его сыновей погибли в двух мировых войнах, а ему самому пришлось бежать из родной Франции, когда разразилась Вторая мировая война. Но несмотря на все тяготы и страдания, Адамар сохранял мужество и ни разу не пал духом.

Обладая от природы блестящей памятью, Адамар жаждал знания и впитывал его. Он был большим любителем музыки и неутомимым путешественником. Его вошедшая в поговорку рассеянность сделала его героем многих анекдотов. Мудрый и добродушный, он располагал к себе, среди его друзей были некоторые из самых знаменитых деятелей науки и культуры. Адамар был неутомимым борцом за права человека, он всегда решительно выступал против дискриминации и несправедливости.

Адамар работал неутомимо, он занимался проблемами теории функций, вариационного исчисления, теории чисел, аналитической механики, алгебры, геометрии, теории вероятностей, теории упругости, гидродинамики, теории дифференциальных уравнений в частных производных, топологии, логики, а также образования, психологии и истории математики. Каждый студент-математик знает формулу Коши—Адамара для радиуса сходимости степенного ряда. Среди классических результатов теории функций комплексного переменного мы встречаем теоремы Адамара о трех кругах, рядах с лакунами и умножении особенностей. Одно из величайших достижений теории чисел — доказательство асимптотического закона распределения простых чисел — также принадлежит Адамару. Хорошо известно неравенство Адамара для определителей. Корректность постановки задач в смысле Адамара — одна из самых важных характеристик задач в математической физике, а построенные им контрпримеры входят в курсы лекций по этому предмету. Матрицы Адамара, вариационная формула для функции Грина и построение решений задачи Коши для гиперболических уравнений, условие Лежандра—Адамара положительности акустического тензора твердого тела и уравнение Адамара для волн на воде — таков далеко не полный перечень математических проблем, решения которых связаны с именем Адамара.

Математика XX века — калейдоскоп идей и методов — разветвилась настолько, что энциклопедические познания в ней стали практически невозможны. Даже лучшие математики, работающие в различных областях, как правило, не понимают друг друга. Тем не менее, Адамар смог познать почти все области математики своего времени и способствовать их развитию. Разумеется, его вклад в различные области математики не равнозначен. Однако именно многогранность, свойственная творчеству Адамара, малоизвестна. Действительно, специалисты по теории чисел обычно считают Адамара одним из классиков в своей области, даже не подозревая, что он также является одним из величайших столпов в математической физике. Это незнание специалистов по теории чисел сравнимо с незнанием специалистов по математической физике, не ведающих о вкладе Адамара в теорию чисел и другие области математики.

На протяжении жизни Адамара математика полностью изменилась, и важнейшую роль в этом сыграла его собственная колоссальная работа. С одной стороны, Адамар, виртуозно используя классический анализ, во многом способствовал решению конкретных проблем, оставшихся нерешенными в девятнадцатом веке. С другой стороны, он заложил основы многих направлений, которые и поныне играют жизненно важную роль в современной математике.

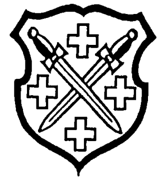
Глава 1

Начало

§ 1.1. Семья и детство

Жак Соломон Адамар родился 8 декабря 1865 г. в Версале, в еврейской семье. Фамилия Адамар (Hadamard), по-видимому, происходит от древнего германского города Хадамар (на старогерманском Hadamar означает «место с болотистой водой») в Гессене, ведущего свою историю с 832 года[1].

Немецко-еврейская фамилия Хадамар встречалась в Германии, где еврейские Хадамары жили по крайней мере с 1650 г. [III.242]. Использование этой фамилии можно проследить до X века — до немецкого кардинала Хадамара (скончался в 956 г.). Готический поэт Хадамар фон Лабер, живший в первой половине XIV века, был еще одним носителем этой фамилии.



Герб города Хадамар

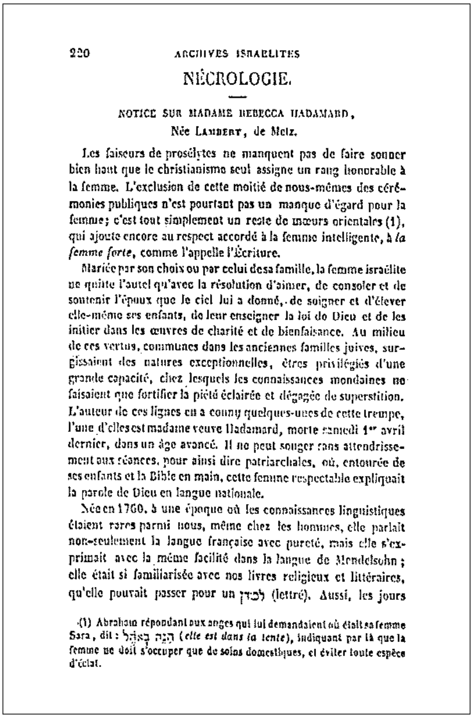
Майер Хадамар (Hadamar), прапрапрадед Жака Адамара, жил именно в Хадамаре, где у него в 1695 г. родился сын Натан Майер. Юношей Натан Майер попадает в Мец и не исключено, что именно к нему относится самое раннее известное нам упоминание Адамаров из Меца в деле, которое слушалось в городском суде Меца в 1715 г.[2] В актах гражданского состояния Меца в XVIII веке, когда герцогство Лотарингское утратило свой суверенитет и стало провинцией Франции, упоминаются несколько Адамаров [IV.4]. С этого времени фамилия Hadamar пишется на французский манер Hadamard и произносится Адамар. Натан Майер Хадамар умер в Меце в 1770 г. Его сын Майер Натан (1716—1791) был купцом, представлявшим евреев Меца в Париже. Один из его сыновей, Давид Майер Адамар (1752—1802), также стал купцом и взял в жены Ребекку Ламберт (1760—1843), дочь почтенной еврейской семьи в Меце. Она была выдающейся женщиной, некролог о ней поместили в еврейском ежемесячном журнале «Les Archives Israélites de France» за 1843 г. [III.292].

Будучи женщиной сильного характера, Ребекка проявляла высокую активность в социальной жизни еврейской общины Меца, что в то время было редким

[1] Этот город стал одним из семи Tötungsanstalten (учреждений умерщвления) Третьего Рейха, в нём отправляли в газовые камеры психически больных людей, систематическое уничтожение которых производилось нацистами с начала программы эвтаназии [III.134, с. 387].

[2] Манускрипт «Дело месье Поля Герра, мастера железных дел, ... против Натана Одомара, еврея, жительствующего в Меце...» [IV.43]. Этот документ относится к судебному делу, в котором участвовали Натан Одомар и Исаак Спир Леви, еврейский торговец железом. Истцом был мастер железных дел. Тяжба была связана с торговлей железом в Лотарингии и носила столь желчный характер, что мастер железных дел с горечью посетовал: «...Положение банкира требует исполнения общественной функции, на что неспособны евреи.... Но почему этот еврей должен вмешиваться в дела монсиньора герцога Лотарингского... почему вмешиваются два других еврея?»

явлением для женщины. Однажды она выразила протест властям Меца в связи с осквернением надгробий на еврейском кладбище и настояла на том, чтобы осквернители надгробий предстали перед судом. В ее некрологе говорится: «Преданность мадам Адамар делу защиты общественных интересов была наследственной. Во времена якобинского террора, когда люди похвалялись отречением



220 ARCHIVES ISRAELITES

NÉCROLOGIE.

NOTICE SUR MADAME REBECCA HADAMARD,

Née Lambert, de Metz.

Les faiseurs de prosélytes ne manquent pas de faire sonner bien haut que le christianisme seul assigne un rang honorable à la femme. L'exclusion de cette moitié de nous-mêmes des cérémonies publiques n'est pourtant pas un manque d'égard pour la femme; c'est tout simplement un reste de mœurs orientales (1), qui ajoute encore au respect accordé à la femme intelligente, à *la femme forte*, comme l'appelle l'Écriture.

Mariée par son choix ou par celui de sa famille, la femme israélite ne quitte l'autel qu'avec la résolution d'aimer, de consoler et de soutenir l'époux que le ciel lui a donné, de soigner et d'élever elle-même ses enfants, de leur enseigner la loi de Dieu et de les initier dans les œuvres de charité et de bienfaisance. Au milieu de ces vertus, communes dans les anciennes familles juives, surgissaient des natures exceptionnelles, êtres privilégiés d'une grande capacité, chez lesquels les connaissances mondaines ne faisaient que fortifier la piété éclairée et dégagée de superstition. L'auteur de ces lignes en a connu quelques-unes de cette trempe, l'une d'elles est madame veuve Hadamard, morte samedi 1er avril dernier, dans un âge avancé. Il ne peut songer sans attendrissement aux séances, pour ainsi dire patriarchales, où, entourée de ses enfants et la Bible en main, cette femme respectable expliquait la parole de Dieu en langue nationale.

Née en 1760, à une époque où les connaissances linguistiques étaient rares parmi nous, même chez les hommes, elle parlait non-seulement la langue française avec pureté, mais elle s'exprimait avec la même facilité dans la langue de Mendelsohn; elle était si familiarisée avec nos livres religieux et littéraires, qu'elle pouvait passer pour un למדן (lettré). Aussi, les jours

(1) Abraham répondant aux anges qui lui demandaient où était sa femme Sara, dit : הִנֵּה בָאֹהֶל (*elle est dans la tente*), indiquant par là que la femme ne doit s'occuper que de soins domestiques, et éviter toute espèce d'éclat.

Первая страница некролога Ребекки Адамар

от религиозных обрядов, евреи Меца не могли решиться праздновать Пасху без мацы, и Мец стал свидетелем сцен из жизни средневековой Испании, когда глубочайшая тайна окружала отправления религии, не ведающей тайн. Евреи Меца пекли мацу, но всё же боялись столь частых в то время „обличений“, и это заставило мать Ребекки Адамар обратиться к народному представителю.

— Чего вы хотите, гражданка? — спросил проконсул Меца.

— Испросить разрешения отпраздновать Пасху.

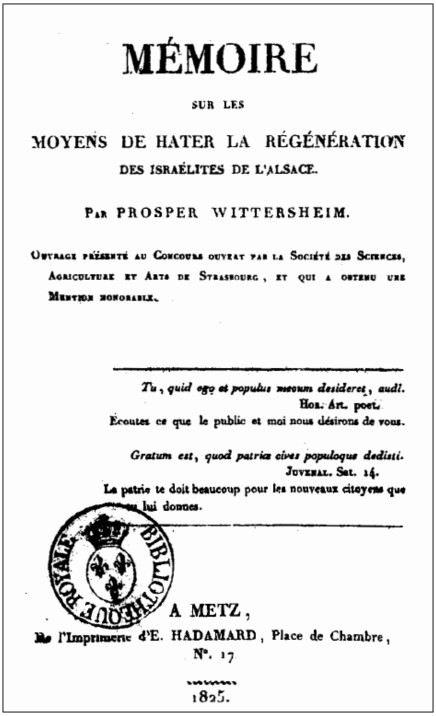
— Что? Вы все еще придерживаетесь этой чуши, когда солнце истины воссияло над горизонтом?

— Маца готова, а обычай праздновать Пасху дорог нашим сердцам как напоминание об обретенной свободе.

— Что ж, раз вино налито, его нужно выпить».

Когда Ребекка Адамар в возрасте сорока двух лет овдовела, ей пришлось в одиночку воспитывать девять детей. «Ее деловая хватка и честность в коммерческих делах были общеизвестны» [III.292]. Она была весьма сведуща в книгах по богослужебным вопросам и превосходно знала французский язык и литературу, могла на память цитировать длинные отрывки из Расина и Корнеля. Последние годы она провела в Париже со своими детьми.

Ее сын Эфраим Адамар (1787—1854), дед Жака Адамара, стал известным в Меце печатником[1]. К концу XVIII века издание книг на древнееврейском языке в Меце по существу прекратилось, и богослужебные и образовательные книги,


MÉMOIRE

SUR LES

MOYENS DE HATER LA RÉGÉNÉRATION

DES ISRAÉLITES DE L'ALSACE.

Par PROSPER WITTERSHEIM.

Ouvrage présenté au Concours ouvert par la Société des Sciences, Agriculture et Arts de Strasbourg, et qui a obtenu une Mention honorable.

Tu, quid ego et populus mecum desideret, audi.
Hor. Art. poet.
Écoutes ce que le public et moi nous désirons de vous.

Gratum est, quod patriæ cives populoque dedisti.
Juvenal. Sat. 14.
La patrie te doit beaucoup pour les nouveaux citoyens que tu lui donnes.

A METZ,
de l'Imprimerie d'E. HADAMARD, Place de Chambre, N°. 17

1825.

Титульный лист книги, изданной в мастерской Э. Адамара

необходимые для многочисленной еврейской общины, ввозились извне. Молодой Эфраим Адамар разработал план восстановления в Меце издания книг на древнееврейском языке и в 1813 г. приступил к его реализации. Свою карьеру он начал в книгоиздательском деле в Меце, а затем несколько лет проработал в книгопечатных мастерских Франции, Германии и Нидерландах, совершенствуясь в искусстве книгопечатания и изучая языки. По возвращении в Мец Эфраим Адамар купил старую типографию и не без некоторых трудностей получил разрешение основать свою собственную книгоиздательскую фирму. Ему удалось собрать в разных местах еврейские литеры, и через несколько лет книгопечатная мастерская Эфраима Адамара процветала, у него было много учеников, и он публиковал книги на древнееврейском, французском и немецком языках. В 1816 г. он вступил в брак с Филеттой Май (1791—1882). У них было пять детей.

[1]Краткое описание его жизни и деятельности можно найти в книге «Филологический очерк зарождения книгопечатания в Меце», [III.394, с. 222—231].

Один из сыновей Эфраима Адамара — Давид (1821—1849), дядюшка Жака Адамара, стал известным арабистом. Он упоминается в «Les Archives Israélites de France» за 1845 г. [III.82, с. 170]:

«Месье Давид Адамар, сын книгопечатника, носящего то же имя, после успешного изучения арабского языка в Париже был направлен в город Алжир в качестве секретаря-переводчика в Департамент финансов. Прослужив в этой должности несколько лет к великому удовлетворению своих начальников, он заболел тяжелой формой офтальмии. Утратив зрение в возрасте двадцати трех лет, в тот момент, когда перед ним открывалась блестящая карьера, он вернулся во Францию и, желая заработать себе на жизнь достойным образом и в то же время передать соотечественникам свои редкие познания, открыл курсы арабского языка, которые вел в течение некоторого времени. Предложенный им хороший метод позволяет учащимся вскоре заговорить по-арабски.

Занятия на курсах происходят по адресу: Монмартр, 148, где желающие могут получить проспект».

В 1847 г. Давид Адамар стал профессором арабского языка в Оране (Алжир), но через два года умер от холеры, оставив после себя жену и шестинедельную дочь Зели (1849—1902).

Зели Адамар на сцене

Зели Адамар стала талантливой драматической актрисой. В возрасте шестнадцати лет она выиграла на конкурсе первый почетный диплом за драму и вторую премию за комедию. В следующем году она получила первую премию за комедию и была принята в театр «Одеон». Она совершила гастрольный тур по Европе и Америке и по возвращении играла в лучших французских театрах. «Мадемуазель Адамар замечательно владеет искусством подачи своего голоса. Она принадлежит к числу весьма немногих актеров, которые знают, как читать стихи, придавая без пения своему голосу звучность и окраску. Она превосходно умеет выразить благородство, скромность и нежность» [III.60].

Другой сын Эфраима Адамара — художник Огюст Адамар (1823—1886). В юности он обучался у исторического живописца, портретиста и скульптора Поля Делароша (1797—1856), при этом он был вынужден зарабатывать себе на жизнь. Многие из жанровых и портретных работ Огюста Адамара выставлялись в парижском «Салоне». Он также работал и как иллюстратор книг и журналов.

Огюст Адамар. Иллюстрация к книге «Национальные песни» [III.76]

Адамары были семьей с культурными и либеральными традициями, и младший сын Эфраима Амедей (1828—1888), отец Жака Адамара, не являлся исключением. Ему было шестнадцать лет, когда Эфраим умер, и, получив в 1849 г. в возрасте двадцати одного года звание лиценциата (licence ès lettres), он был вынужден закончить на этом свое образование и стал зарабатывать себе на жизнь частными уроками в Париже. И только через десять лет, в 1859 г., он сдал экзамен на звание кандидата, что давало ему право преподавания в лицеях и коллежах. В начале своей карьеры он несколько раз переходил из одного учебного заведения в другое, не оставаясь более трех лет на одном месте, — Ним (1859—1861), Дуэ

(1861—1864), Коллеж Роллен в Париже (1864—1865). Он преподавал классические языки, французскую грамматику, историю, географию и даже элементарную математику.

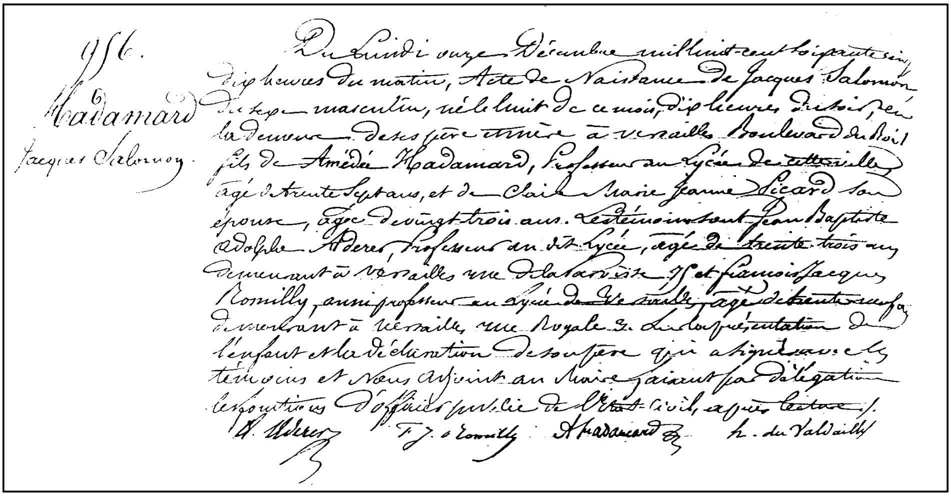
Еще в те годы, когда он давал уроки в Париже, Амедей вступил в связь с женщиной, которая родила от него ребенка. В бытность свою в Ниме он, опасаясь, что она вздумает навестить его, написал ей, что женат, и отразил это в личном формуляре, официальном документе Министерства общественного образования, в котором тщательно отслеживалась карьера каждого преподавателя. Когда его парижская знакомая нашла себе другого поклонника, а ребенок умер, Амедей, к тому времени работавший в Дуэ, стал писать в своих документах, что он холост. Это несоответствие в документах вскрылось, и дело привлекло внимание министра общественного образования [IV.24]. Об этом проступке начальники Амедея впоследствии упоминали в своих отзывах о нем на протяжении многих лет.

Лицей Ош, бывший Императорский лицей Версаля,
где Амедей Адамар работал в 1865—1869 гг.

6 июня 1864 г. он вступил в брак с Клер Мари Жанной Пикар, которая была на четырнадцать лет моложе его, а в 1865 г. получил пост преподавателя в Императорском лицее Версаля. «Адамар, специалист, сведущий в грамматике, прибыл к нам из Роллена», — говорилось в статье о лицее того времени [III.233, с. 100].

Молодая чета снимала квартиру из трех комнат, разделяя её со своей горничной, в доме по адресу бульвар Дю Руа, д. 1, в Версале. Именно там и родился в конце 1865 г. их первенец Жак.

Через три года Амедей Адамар перешел в лицей Карла Великого, и семья переехала в Париж. О раннем детстве Жака Адамара известно мало. Его дочь Жаклин Адамар вспоминала: «...Моя тетушка рассказывала мне, что когда ему



956.
6
Hadamard
Jacques Salomon

Du Lundi onze Décembre mil huit cent soixante cinq
dix heures du matin, Acte de Naissance de Jacques Salomon
du sexe masculin, né le huit de ce mois, dix heures du soir, en
la demeure de ses père et mère à Versailles boulevard du Roi 1
fils de Amédée Hadamard, Professeur au Lycée de cette ville
âgé de trente sept ans, et de Claire Marie Jeanne Picard son
épouse, âgée de vingt trois ans. Les témoins sont Jean Baptiste
Adolphe Aderer, professeur au dit Lycée, âgé de trente trois ans
demeurant à Versailles rue de la Paroisse 75 et François Jacques
Romilly, aussi professeur au Lycée de Versailles, âgé de trente neuf ans
demeurant à Versailles, rue Royale 3. Sur la présentation de
l'enfant et la déclaration de son père qui a signé avec les
témoins et Nous Adjoint au Maire faisant par délégation
les fonctions d'officier public de l'État civil, après lecture./
A. Aderer F. J. Romilly A Hadamard L. de Valdailly

Свидетельство о рождении Жака Адамара

Понедельник, 11 декабря 1865 г., 10 часов утра. Свидетельство о рождении Жака Соломона, мужского пола, родившегося 8 числа этого месяца, в 10 часов вечера в доме его отца и матери в Версале, бульвар Дю Руа, д. 1, сына Амедея Адамара, преподавателя лицея в этом городе, 37 лет от роду, и Клер Мари Жанны Пикар, его жены, 23 лет от роду. Свидетели: Жан Батист Адольф Адерер, преподаватель упомянутого лицея, 33 лет от роду, проживающий в Версале, улица Нативите, д. 75, и Франсуа Жак Номийи, также преподаватель Версальского лицея, 39 лет от роду, проживающий в Версале, улица Рояль, д. 3. Выдано по предъявлении ребенка и по заявлению его отца, поставившего свою подпись вместе со свидетелями и заместителем мэра, уполномоченного делегацией исполнять обязанности регистратора, по прочтении.

Дом в Версале, где родился Жак Адамар

было около четырех лет, он часто разражался надсадным плачем, протекавшим так бурно, что мою бабушку вызвали в комиссариат из-за жалоб соседей на то, что „с ребенком плохо обращаются“. Врач весьма разумно посоветовал бабушке научить Жака читать; приступы рёва немедленно прекратились» [IV.1, с. I(5)].

1870 год был трудным для Амедея и его супруги: умерла их пятимесячная дочь Жанна Ортензия. Затем Париж осадили пруссаки, что принесло горожанам голод и болезни. Эдмон Гонкур записал в своем дневнике 8 декабря: «Люди говорят только о том, что они едят, что могут съесть и что еще осталось из съестного» [III.153, с. 130]. Около семидесяти двух тысяч лошадей были забиты во время осады, а тем, у кого не было денег на покупку конины, приходилось довольствоваться кошатиной и собачатиной, которые были дешевле. К тому времени относятся воспоминания Жака о том, как однажды ему довелось есть слонятину: слонов Кастора и Полидевка, гордость зоопарка, застрелили, а их мясо отправили на продажу по невысокой цене.

Подписание перемирия 26 февраля 1871 г. не прекратило страданий парижан. В марте того же года в Париже установилась Коммуна, что привело к гражданской войне, а когда правительственные войска вступили в Париж, схватки продолжались на баррикадах, воздвигнутых на улицах. Во время одной из таких баталий дом, в котором жила семья Адамаров, был сожжен. Депутат Национального собрания направил министру общественного образования письмо, в котором говорилось следующее [IV.24]:

Версаль, 28 августа 1871 г.

Господин министр!

Имею честь сообщить Вам о бедственном положении, в котором оказался месье Амедей Адамар, преподаватель лицея Карла Великого, лишившийся всего своего имущества во время одного из пожаров, возникших по вине инсургентов. Будучи женатым и отцом семейства, месье Адамар хотел бы получить назначение в какой-нибудь достаточно значительный лицей, работая в котором, он мог бы давать частные уроки.

Позвольте подчеркнуть, что эта ситуация заслуживает серьёзного внимания.

С глубоким уважением,

Бамберже.

Это обращение к министру не возымело никакого действия. В июне 1874 г. на родителей Жака обрушилась еще одна трагедия: умерла их трехлетняя дочь Сюзанна Жанна. Год спустя родилась Жермен, сестра Жака. Они были похожи внешне и, несмотря на различие в возрасте, всю жизнь были очень дружны.

Жаклин Адамар пишет, что ее отец никогда не рассказывал ей о своем детстве. Была ли тому какая-то причина? Жаклин ссылается на свою мать, по словам которой в семье Адамаров детей держали в строгости. Судя по дошедшим до нас отзывам инспекторов и администраторов лицея, Амедея Адамара вряд ли можно было бы назвать приятным человеком. «Твердый и сильный по характеру, увлеченный работой до степени упрямства, несмотря на слабое здоровье, жесткий по отношению к самому себе, он был одним из тех, кто мог требовать дисциплины от самого себя и от других», — так отозвался об Амедее Адамаре один из его коллег Марге [III.267].

По-видимому, аналогичным характером обладала и мать Жака. Она давала на дому уроки игры на фортепиано и была такой строгой учительницей, что ученики боялись ее. Жаклин Адамар живо описывает ее: «Моя тетушка, ее дочь, утверждала, что ее ученики плакали, поднимаясь по лестнице! Ребенком я удивлялась, почему в ее пианино не растут грибы, так часто на него падали слезы» [IV.1, с. I(5)].

Но она была хорошим педагогом. Поль Дюка, ставший впоследствии известным композитором и написавший скерцо для симфонического оркестра «Ученик чародея» на тему одноименной баллады Гёте, был одним из ее учеников.

Музыка играла важную роль в домашнем укладе Адамаров, и Жак научился играть на скрипке в раннем возрасте. Благодаря своей матери он получил музыкальное образование, а его сестра стала профессиональной учительницей музыки и позднее учила будущего математика Лорана Шварца играть на фортепиано.

У Жака рано развилась страсть к чтению. «Я знаю несколько изданий, которые он любил читать, — пишет Жаклин Адамар, — это „Журнал воспитания и развлечения“, очень хороший журнал, опубликовавший всего Жюля Верна и многих других авторов с превосходными гравюрами, хотя и не Гюстава Доре, но не худшего качества. Не подлежит сомнению, что отец хранил в своей невероятной памяти многие знания из этого журнала, поэтому у него можно было спросить о чем угодно. Сколько раз мне приходилось слышать, как ему задавали самые неожиданные вопросы в полной уверенности, что он всё знает. И почти всегда он знал!» [IV.1, с. I(6)].

§ 1.2. Лицейские годы

Когда Жак Адамар был школьником, среднее образование можно было получить в государственных школах (лицеях) и муниципальных школах (коллежах). Лицеи пользовались более высокой репутацией, и поступить в них было труднее. Образование начиналось с шести лет в малом коллеже, или начальной школе, с одиннадцатого класса и продолжалось до седьмого класса. Следующая ступень была первой частью среднего образования (первый цикл) — с шестого класса по третий в среднем коллеже. Затем в возрасте пятнадцати лет учащийся мог перейти на второй цикл в высшем коллеже на три года. Классы назывались соответственно вторым (seconde), риторическим (rhétorique) и завершающим (terminale). В конце этой второй части проводились экзамены на звание бакалавра, которое давало учащимся право на поступление в университет.

Студенты завершающего класса могли выбирать между философией и элементарной математикой и соответственно могли по собственному желанию становиться бакалаврами изящной словесности или естественных наук. После бакалавриата можно было поступать в университет или готовиться к поступлению в одну из высших школ (Grandes Écoles) — престижных профессиональных учебных заведений с конкурсным набором, в которых воспитывали интеллектуальную элиту Франции (к ним относятся Нормальная, Политехническая, Центральная школы и др.). В некоторых лицеях имелись классы для подготовки учащихся к строгим вступительным экзаменам в эти высшие школы.

Характерной особенностью французской образовательной системы был ее соревновательный характер, который наиболее ярко проявлялся в лицеях. В конце каждого учебного года учащиеся параллельных классов ранжировались по оценкам за каждый предмет, а учащийся, лучше других успевавший по всем предметам, получал высшую школьную награду (prix d'excellence). Кроме того, для учащихся средних и высших коллежей ежегодно проводились национальные соревнования — Общий конкурс по различным предметам (Concours Général), причем одни и те же тесты предлагались в лицеях и коллежах по всей Франции.

Жак Адамар учился в лицее Карла Великого, где преподавал его отец, до конца пятого класса. В перечне учащихся, получивших награды в 1873—1874 учебном году, мы обнаруживаем, что восьмилетний Жак учился в седьмом классе и что он был на два года младше своих одноклассников [III.255]. С 1875 г. Жак Адамар неоднократно получал призы на Общем конкурсе, и его отец наверняка гордился им. Вот его результаты на первом конкурсе [III.255]:

Перевод на латынь — 2-я премия;
Перевод с латыни — 2-я премия;
Упражнение на греческом — 1-я премия;
Грамматика французского языка — 2-я премия;
Декламация — 2-я премия;
История и география — 5-й похвальный лист [почетное упоминание];
Арифметика — 6-й похвальный лист.

Церемония вручения премий была очень торжественным событием и проводилась в конце учебного года: ее открывал директор лицея, после чего один из преподавателей читал лекцию на избранную тему, а победителям в качестве призов вручались книги в красивых переплётах.

Сначала Жак не проявлял никаких математических способностей, решая арифметические задачи с большой неохотой: «...До конца пятого класса я был последним, или одним из последних, по арифметике» [II.27, с. 52]. Он, несомненно, имел в виду шестой или седьмой классы, так как в пятом классе получил вторые премии и в лицее, и на Общем конкурсе. Однажды, когда Жак с отцом проходили мимо Нормальной школы (École Normale), между ними произошёл следующий разговор:

— Здесь изучают математику?

Вход в Нормальную школу

— Да, в Нормальной школе, на отделении естественных наук.

— Тогда я сюда не пойду.

Интересно, что будущий учитель Адамара Эмиль Пикар в юности также не проявлял склонности к математике. «В лицее Генриха IV (в те времена — лицей Наполеона), где Пикар получал образование, он блистал в переводах с греческого, латинских стихах и истории, но решительно ненавидел геометрию, которую учил наизусть, чтобы избежать наказания!» [I.363, с. 114].

Первым, кто пробудил в Адамаре любовь к математике, был Лонэ, его новый преподаватель в пятом классе. Лонэ, по словам Адамара, вызвал у него первое, ещё детское, ощущение красоты научных истин [II.27, с. 52].

К тому времени отец Адамара прекратил преподавание в лицее Карла Великого, где ему не удалось наладить отношения ни с учащимися, ни с коллегами. Заместитель директора лицея в отзыве о поведении Амедея Адамара на имя министра общественного образования [IV.24] сообщал:

«Он сказал юному Гари, учащемуся из Чили, что „все чилийцы лжецы и воры“. Юному Виллену, сыну депутата Национального Собрания от провинции Эна: „Вас призовут к порядку точно так же, как вашего отца вчера в Версале“.

Подробности относительно учащихся Гари и Виллена приводятся в отчете ниже, а более вызывающий случай произошел в октябре 1872 г. Месье Адамар сказал ребенку, которого ему представили: „Вы не можете быть сыном месье N. Я знавал его шесть лет назад в Версале, и он не был женат“».

Отчет заканчивался просьбой перевести Амедея Адамара в другой лицей в Париже, и в 1875 г. он получил назначение в лицей Людовика Великого. Это самый старый лицей во Франции, история которого восходит к 1563 г., когда иезуиты купили большое здание на улице Сен-Жак и основали в нем коллеж. После изгнания иезуитов из Франции в 1762 г. этот коллеж продолжал расти, поглощая один за другим небольшие парижские коллежи. Название коллежа несколько раз изменялось, следуя изгибам и поворотам французской истории, пока наконец в 1873 г. он не стал лицеем Людовика Великого. Среди его бывших учащихся немало лиц, оставивших заметный след в жизни Франции: кроме Жака Адамара, это Анри Беккерель, Сирано де Бержерак, Бодлер, Борель, Вольтер, Галуа, Гюго, Дега, Делакруа, Дюркгейм, Жорес, Лафайет, Лебег, Мольер, Пенлеве, Раймон Пуанкаре, Пуансо, герцог Ришелье, Робеспьер, маркиз де Сад и Эрмит.

Двор лицея Людовика Великого

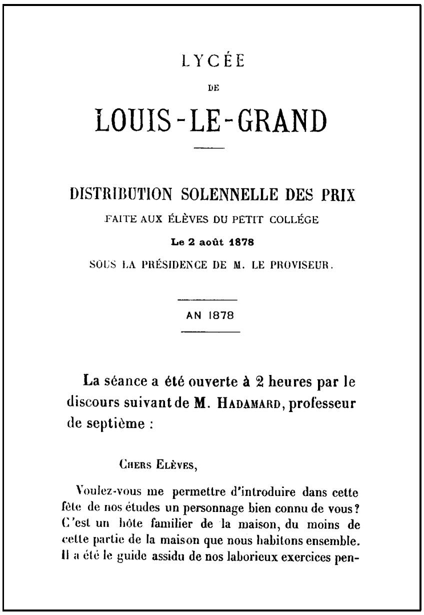
По-видимому, назначение Амедея Адамара в лицей Людовика Великого счастливо сказалось на его судьбе, о чем свидетельствует следующий отрывок из письма директора лицея [IV.24]:

«...Месье Адамар имеет репутацию плохого преподавателя. Это преувеличение. Месье Адамар — не выдающийся, но вполне приемлемый преподаватель. У него несколько унылый характер, и он часто болеет. Он задаёт упражнения, которые, возможно, немного трудны для начинающих в шестом классе, но те из учащихся, кто сведущ в предмете, отвечают хорошо и выходят из-под его опеки столь же хорошо подготовленными, как и учащиеся в других классах. Месье Адамар обратился ко мне с просьбой перевести его преподавателем в пятый [класс] на смену месье Беше. Я уже предлагал его на эту должность и вновь обращаюсь с предложением в пользу месье Адамара».

Проработав в лицее Людовика Великого один год, Амедей Адамар перевёл туда своего десятилетнего сына, который стал учиться в четвёртом классе. В этот учебный год Жак получил в лицее восемь наград — почти по всем предметам, но его единственным достижением на Общем конкурсе стал 4-й похвальный лист по немецкому языку [III.256]. К концу третьего класса он получил высшую школьную награду вместе с шестью другими наградами в лицее. Но на Общем конкурсе Жак сумел получить только 7-й похвальный лист по математике [III.257].

Именно тогда родители Жака предприняли неожиданный шаг, оставив его на второй год в третьем классе. Это решение стало дополнительным импульсом для успехов их сына: Жак получил на Общем конкурсе первый приз за перевод с латыни, вторые призы за перевод с древнегреческого и по математике [III.258]. Всю свою жизнь Жак Адамар глубоко переживал из-за этого второго места по математике, считая, что провалился на Общем конкурсе. Об этом независимо свидетельствовали Ш. Мандельбройт: «Правда, Адамар также сожалел, что не стал первым призером на Общем конкурсе» [III.255, с. 30] — и А. Н. Колмогоров: «Адамар живо помнил Concours Général, в котором он участвовал. „Я оказался вторым, — сказал он, — а тот первый, он тоже сделался математиком. Но гораздо более слабым — он и всегда был слабее“. И было видно, что своё „поражение“ на Concours Général Адамар и сейчас воспринимает болезненно!» [III.13a, с. 51].

На церемонии вручения наград в 1878 г. отец Жака Адамара произнес торжественную речь, избрав ее темой судьбу знаменитого филолога и педагога Ломона (1727—1794). Осужденный на смертную казнь на гильотине в период террора, Ломон был спасен благодаря вмешательству Тальена, его бывшего студента,


LYCÉE

DE

LOUIS-LE-GRAND

DISTRIBUTION SOLENNELLE DES PRIX

FAITE AUX ÉLÈVES DU PETIT COLLÉGE

Le 2 août 1878

SOUS LA PRÉSIDENCE DE M. LE PROVISEUR.

AN 1878

La séance a été ouverte à 2 heures par le discours suivant de M. HADAMARD, professeur de septième :

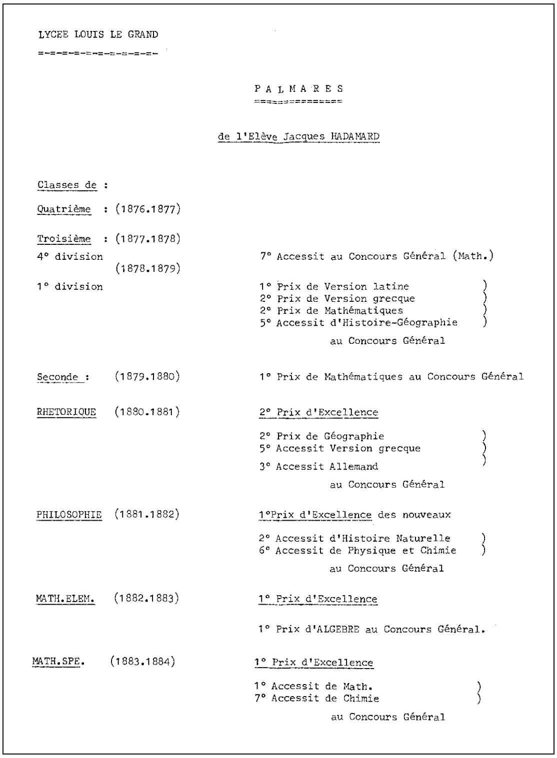
CHERS ÉLÈVES,

Voulez-vous me permettre d'introduire dans cette fête de nos études un personnage bien connu de vous? C'est un hôte familier de la maison, du moins de cette partie de la maison que nous habitons ensemble. Il a été le guide assidu de nos laborieux exercices pen-

Первая страница выступления Амедея Адамара на церемонии вручения наград в лицее Людовика Великого 2 августа 1878 г.

ставшего одним из деятелей Французской революции. Речь заканчивалась следующими словами, обращенными к учащимся [III.107, с. 208]: «За первыми тремя годами занятий на пути, который мы открыли для вас, последуют годы более серьёзных занятий. Успех последних может гарантировать только упорный труд с самого начала. Если мы объединим наши усилия, то можно будет надеяться, что ваши имена, прославившиеся в других стенах и на более широком поприще, окажутся вписанными в анналы наших конкурсов и продолжат давнюю славу лицея Людовика Великого».

Жак продолжил свои успехи на Общем конкурсе, получив первый приз по математике за второй класс и второй приз по геометрии и космографии в риторическом классе [III.259]. Его преподаватели без устали хвалили его и предрекали ему блестящее будущее как историку, географу или лингвисту — в зависимости от того, какой предмет преподавал тот или иной учитель.



LYCEE LOUIS LE GRAND

PALMARES

de l'Elève Jacques HADAMARD

Classes de :		
Quatrième :	(1876.1877)	
Troisième :	(1877.1878)	
4° division		7° Accessit au Concours Général (Math.)
	(1878.1879)	
1° division		1° Prix de Version latine 2° Prix de Version grecque 2° Prix de Mathématiques 5° Accessit d'Histoire-Géographie au Concours Général
Seconde :	(1879.1880)	1° Prix de Mathématiques au Concours Général
RHETORIQUE	(1880.1881)	2° Prix d'Excellence 2° Prix de Géographie 5° Accessit Version grecque 3° Accessit Allemand au Concours Général
PHILOSOPHIE	(1881.1882)	1°Prix d'Excellence des nouveaux 2° Accessit d'Histoire Naturelle 6° Accessit de Physique et Chimie au Concours Général
MATH.ELEM.	(1882.1883)	1° Prix d'Excellence 1° Prix d'ALGEBRE au Concours Général.
MATH.SPE.	(1883.1884)	1° Prix d'Excellence 1° Accessit de Math. 7° Accessit de Chimie au Concours Général

Награды Адамара в лицее Людовика Великого и на Общих конкурсах

После риторического класса Жак поступил в класс философии и в 1882 г. стал бакалавром изящной словесности. 1882—1883 учебный год он провел в классе элементарной математики и получил степень бакалавра естественных наук с выдающимися результатами: первый приз по алгебре и механике на Общем конкурсе, высшая школьная награда вместе с первыми призами по алгебре, геометрии и механике, физике и химии в лицее [III.259]. Двойная степень бакалавра давала преимущество тем, кто держал вступительные экзамены в Политехническую школу (École Polytechnique): к результатам вступительных экзаменов прибавлялось двадцать пять дополнительных баллов.

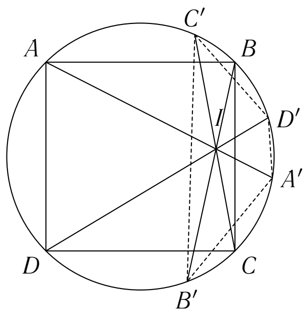
Предложенные Жаком Адамаром решения двух геометрических задач на Общем конкурсе были опубликованы в «Journal de Mathématiques Élémentaires» [I.1], [I.2]. Следующий вопрос Общего конкурса для класса философии в 1881 г. может дать представление об уровне трудности.

«Дан вписанный квадрат $ABCD$ и точка I в плоскости квадрата. Точка I соединена с вершинами квадрата отрезками прямых, которые пересекают окружность в четырех новых точках A', B', C' и D'.

1. Покажите, что

$$A'B' \cdot C'D' = A'D' \cdot B'C'.$$

2. Если четырехугольник $A'B'C'D'$ удовлетворяет условию из п. 1, расположите точку I так, чтобы восстановить квадрат $ABCD$».



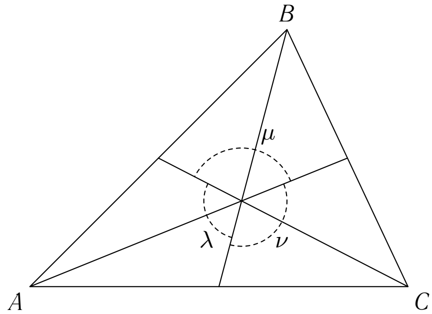
Тонкость здесь состоит в том, что точка I не обязательно лежит внутри окружности, как это изображено на рисунке. Адамар сначала предлагает простое, наивное решение, объясняет его неадекватность, а затем приступает к подробному анализу общего случая. Этот анализ занимает шесть страниц в журнале. Насколько можно судить, это первая математическая публикация Жака Адамара.

В 1883 г. Адамар завершил обязательное среднее образование. Предполагалось, что далее учащийся может продолжить образование в высшей школе и, если он интересуется естественными науками, провести два года в классах высшей (mathématiques supérieures), а затем специальной (mathématiques spéciales) математики, учащиеся которых на студенческом жаргоне назывались «гипокроты» (hypotaupe) и «кроты» (taupe). Адамар решил поступить сразу в класс специальной математики и стал «кротом». Он получил первый похвальный лист по математике на Общем конкурсе, а в лицее был удостоен высшей школьной награды и почетного приза по математике вместе с первыми призами по физике и немецкому языку [III.259]. Кроме того, две трудные задачи, которые Жак Адамар решил, занимаясь в классе специальной математики, стали темами его математической статьи «О гипоциклоиде с тремя точками возврата», опубликованной в «Journal de Mathématiques Spéciales» [I.4], [I.6]. В этом и аналогичных журналах было опубликовано несколько задач, предложенных Адамаром для учащихся школ.

Вот, например, задача, опубликованная в «Journal de Mathématiques Élémentaires» (Sér. 2, 1885, с. 22—23):

«Пусть A, B, C — внутренние углы треугольника, тогда соответствующие углы λ, μ, ν между медианами определяются соотношениями

$$3\operatorname{ctg}\lambda = \operatorname{ctg}A - 2\operatorname{ctg}B - 2\operatorname{ctg}C,$$
$$3\operatorname{ctg}\mu = \operatorname{ctg}B - 2\operatorname{ctg}C - 2\operatorname{ctg}A,$$
$$3\operatorname{ctg}\nu = \operatorname{ctg}C - 2\operatorname{ctg}A - 2\operatorname{ctg}B».$$



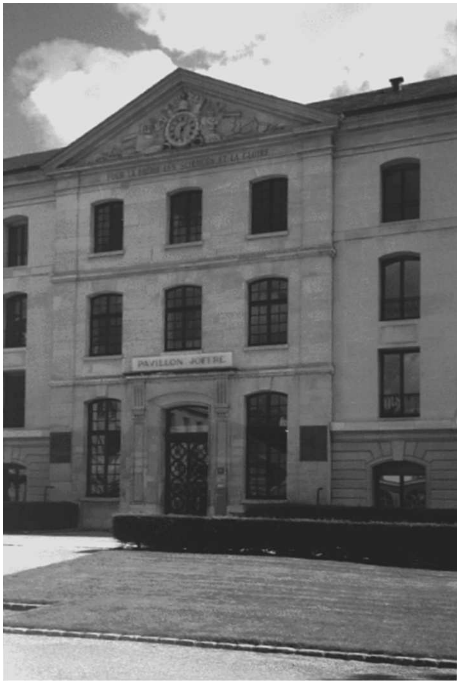
Между прочим, одна серебряная медаль, полученная в лицейские годы, вернулась к Адамару после Второй мировой войны из рук генерала французской армии. Дело в том, что в 1942 г., когда семья Адамаров находилась в эмиграции, их квартира была разграблена оккупантами, и медаль пропала вместе со всеми вещами. Генерал случайно наткнулся на нее в парижском антикварном магазине и вернул ее законному владельцу, лекции которого он слушал когда-то в Политехнической школе. Но бумаги, принадлежавшие семье, так никогда и не нашлись, и с ними бесследно исчез интересный материал о Жаке Адамаре. Эта потеря усугубляется скудостью материалов, которые Адамар сохранил о своей жизни.

Иногда говорят: «Дитя — отец взрослого», и Адамар не был исключением из этого правила: черты, сделавшие его выдающимся ученым, проявились уже в то время, когда он учился в лицее. Это относится не только к его феноменальной математической активности и широкой гуманитарной культуре, но и к его общим политическим пристрастиям. Еще в бытность свою в лицее Жак написал статью «Родина», которая снискала ему репутацию революционера [IV.25]. Его страсть к ботанике так же берет начало в юности, как и необычайная рассеянность, которой он прославился. Например, однажды в 1882 г., когда Жак проводил летние каникулы в Альпах, он отправился вместе с семилетней сестрой Жермен на ледник Боссон собирать образцы растений для гербария. Оставив девочку у края ледника, он занялся сбором растений.

Когда Адамар вернулся домой, мать спросила его, где Жермен. Жак признался, что забыл ее, и поспешил назад за малолетней сестрой [IV.1, с.I(7)].

§ 1.3. «Крот» становится «гнуфом»

В 1884 г. восемнадцатилетний Адамар держал вступительные экзамены одновременно в Политехническую школу и на отделение естественных наук в Высшую Нормальную школу (École Normale Supérieure). Это была обычная практика: в свое время так же действовали Гастон Дарбу, Анри Пуанкаре и Эмиль Борель. Принятые в эти высшие школы становились гражданскими служащими и в отличие от студентов университетов получали небольшое жалование. Они были обязаны отработать на государственной службе десять лет, включая и годы учения.



Старое здание Политехнической школы

Политехническая школа была основана в 1794 г. для подготовки военных инженеров и армейских офицеров. Ее символ — буква X, напоминающая пару скрещенных орудийных стволов. Во времена Адамара и позднее школа располагалась на холме Св. Женевьевы в центре Парижа, ныне она занимает большую территорию в Палезо — примерно в 20 километрах к юго-западу от Парижа.

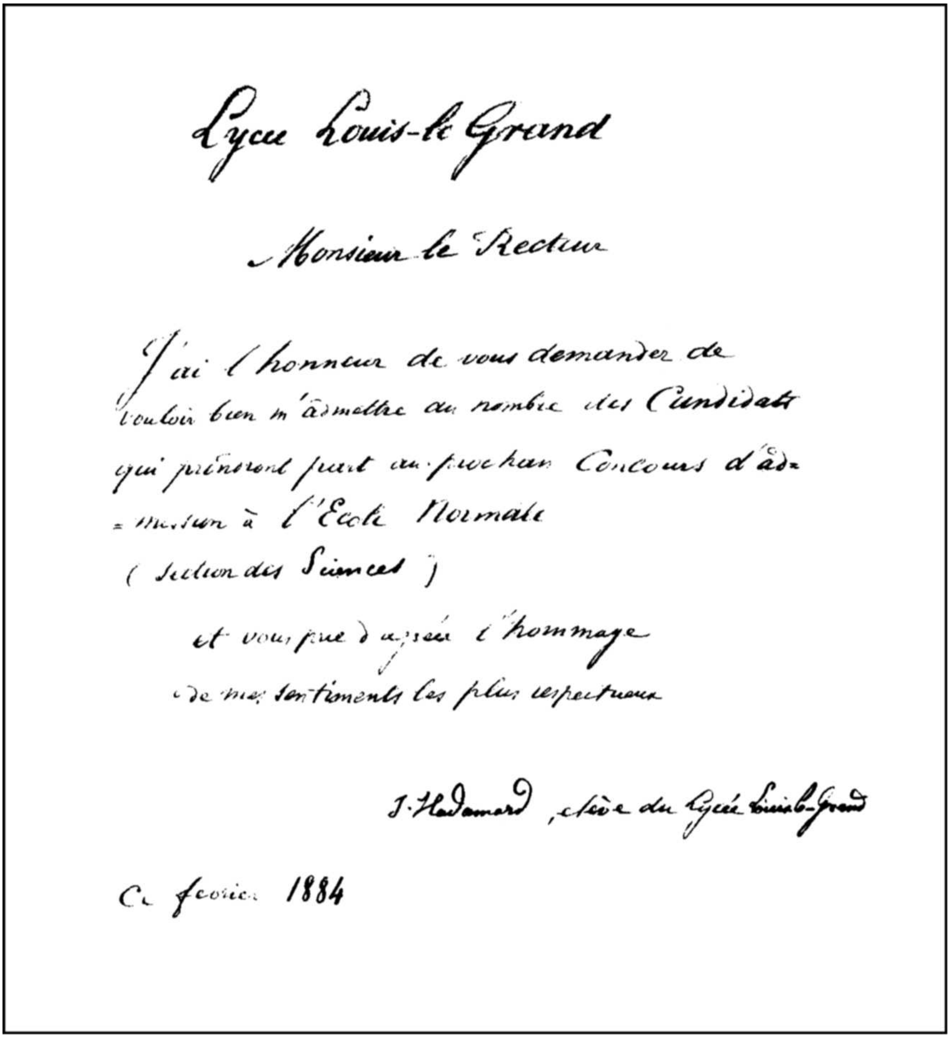
Вскоре после своего основания Политехническая школа стала образцом для высших учебных заведений, благодаря блестящим профессорам, строгой дисциплине, высокому уровню требований на экзаменах и превосходным учебникам. Долгое время Политехническая школа была самым престижным учебным заведением Франции и пользовалась репутацией лучшего математического центра в мире. В Политехнической школе преподавали А.-М. Ампер, О.-Л. Коши, Ж.-Л. Лагранж, П.-С. Лаплас, А.-М. Лежандр, Г. Монж, Ж. Понселе, С.-Д. Пуассон и Ж. Б. Ж. Фурье. Однако во второй половине XIX в. уровень преподавания математики несколько понизился, и возрос престиж Высшей Нормальной школы.

Высшая Нормальная школа была основана через месяц после Политехнической школы для подготовки учителей и первоначально называлась просто Нормальной школой. Первые лекции начались 19 января 1795 г. в Музее естественной истории. Несмотря на столь блестящих профессоров, как Лагранж, Лаплас и Монж, качество образования в Нормальной школе подвергалось критике, и полгода спустя Нормальную школу закрыли. Наполеон открыл ее вновь в 1810 г. в здании Коллеж дю Плесси. Вторично Нормальная школа была закрыта в 1822 г., и затем ее открыли в 1826 г. по новому адресу и под новым названием Подготовительной школы (École Préparatoire). Наконец в 1847 г. школа переехала в то здание на улице Ульм, где она находится поныне, и стала называться Высшей Нормальной школой. Название улицы постепенно стало нерасторжимо связано со школой, и аббревиатура «ENS Ulm» (École Normale Supérieure, rue d'Ulm) получила повсеместное признание.

Поступить в любую из этих двух школ было необычайно трудно. Например, в 1880-е гг. на 45 мест в Высшую Нормальную школу претендовали около 1000 кандидатов, примерно 20 мест отводилось отделению естественных наук, а остальные — гуманитарному отделению. Экзамены проходили в коллежах и лицеях кандидатов в одни и те же два дня по всей Франции: первые шесть часов отводились для письменных экзаменов по математике, физике и философии, а на второй день кандидатам предоставлялось четыре часа для перевода с латыни. При успешной сдаче этих экзаменов кандидаты допускались к устным и письменным экзаменам, которые проводились в Высшей Нормальной школе. Устный экзамен состоял из вопросов по программе специальной математики и продолжался не менее часа. Кандидаты должны были также выполнить чертеж по начертательной геометрии. Список принятых ранжировался по полученным ими оценкам и впоследствии публиковался.

В 1884 г. Адамар значился под номером первым в списке принятых в обе школы — так же, как до него Дарбу в 1859 г. и Пикар в 1874 г., а после него Борель в 1889 г. На вступительных экзаменах в Политехническую школу Жак Адамар побил все предыдущие рекорды, набрав 1834 балла из 2000 возможных. «Можно представить себе, какой популярностью среди „кротов“ долгое время пользовалось имя Адамара. Когда я в 1902 г. был одним из „кротов“, Адамар был для меня и моих товарищей легендарным персонажем», — писал Данжуа [II.8, с. 33][1].

[1] А. Данжуа (1884—1973) — член Академии наук с 1942 г., профессор Сорбонны в 1922—1955 гг. Главные работы Данжуа относятся к теории функций действительного переменного (в которой имеется понятие интеграла Данжуа), теории дифференциальных уравнений и теории меры. Он работал также в теории функций комплексного переменного и топологии.



Lycée Louis-le-Grand

Monsieur le Recteur

J'ai l'honneur de vous demander de vouloir bien m'admettre au nombre des Candidats qui prendront part au prochain Concours d'admission à l'École Normale (Section des Sciences)

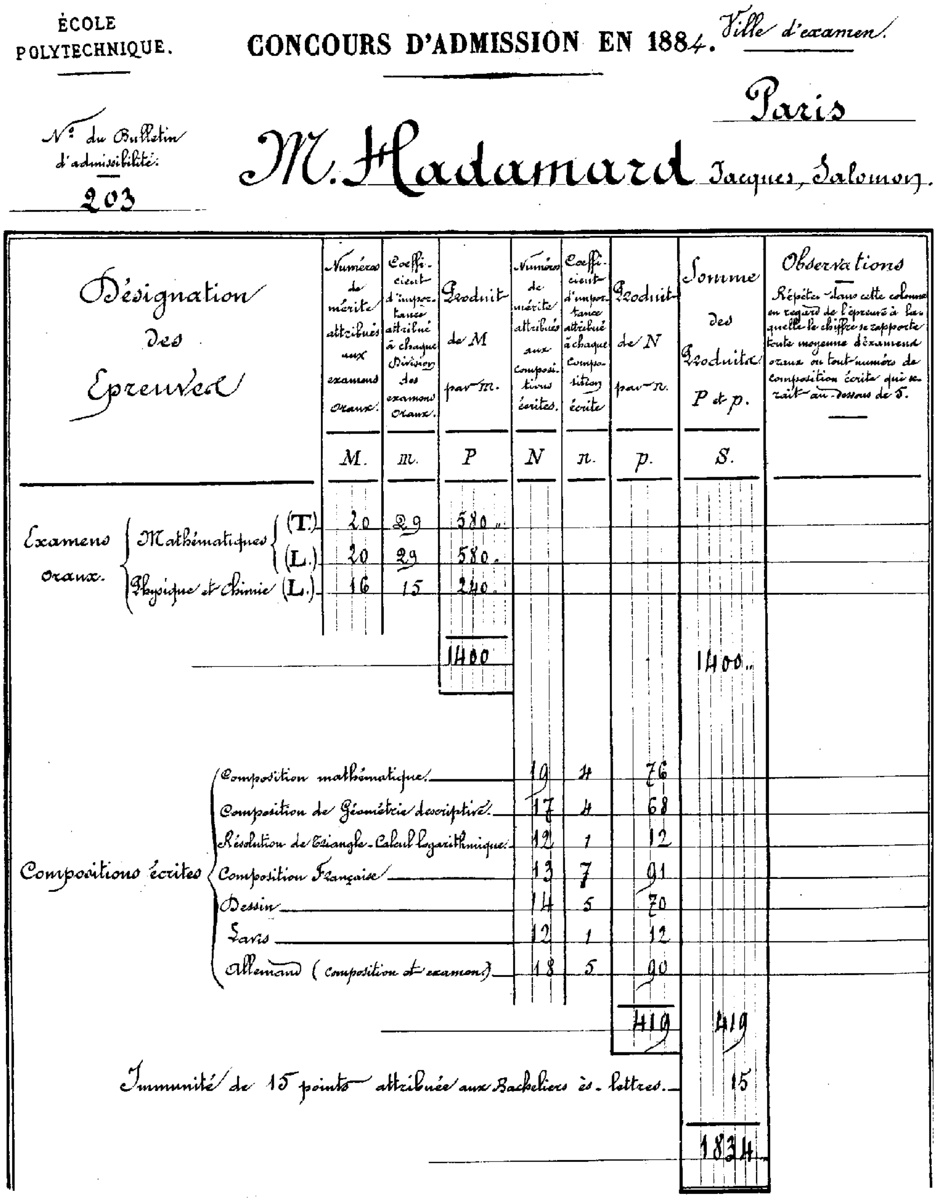
et vous prie d'agréer l'hommage de mes sentiments les plus respectueux

J. Hadamard, élève du Lycée Louis-le-Grand

Ce février 1884

Прошение Адамара о допуске к вступительным экзаменам в Нормальную школу

Позднее появилось много рассказов об Адамаре, но не всегда им можно верить. Вот одна занимательная история о вступительных экзаменах, которую вспомнила Жаклин Адамар: «Что же касается Нормальной школы, то между Адамаром и Эмилем Борелем (ставшим впоследствии его коллегой) была острая конкуренция за первое место. Сестра Эмиля Бореля (Жермен Дюкло) сообщила моему кузену, что ее брат вернулся домой после экзамена в полном восторге: „У Адамара жесточайшая головная боль; у меня есть шанс стать первым!“ Нужно ли говорить, что головной боли оказалось недостаточно» [IV.1, с. I(7)]. К сожалению, эта история не соответствует фактам, так как Адамар покинул Нормальную



ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

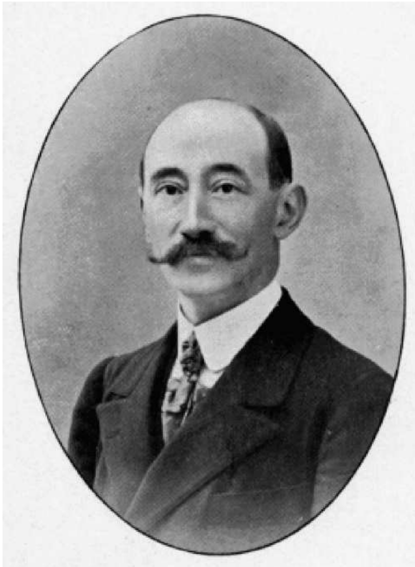
CONCOURS D'ADMISSION EN 1884. Ville d'examen. Paris

N° du Bulletin d'admissibilité: 203

M. Hadamard Jacques, Salomon.

Désignation des Épreuves		Numéros de mérite attribués aux examens oraux. M.	Coefficient d'importance attribué à chaque Division des examens oraux. m.	Produit de M par m. P	Numéros de mérite attribués aux compositions écrites. N	Coefficient d'importance attribué à chaque composition écrite n.	Produit de N par n. p.	Somme des Produits P et p. S.	Observations. Répéter dans cette colonne en regard de l'épreuve à laquelle le chiffre se rapporte toute moyenne d'examens oraux ou tout numéro de composition écrite qui serait au-dessous de 5.
Examens oraux.	Mathématiques (T.)	20	29	580					
	Mathématiques (L.)	20	29	580					
	Physique et Chimie (L.)	16	15	240					
				1400				1400	
Compositions écrites	Composition mathématique				19	4	76		
	Composition de Géométrie descriptive				17	4	68		
	Résolution de triangle. Calcul logarithmique				12	1	12		
	Composition Française				13	7	91		
	Dessin				14	5	70		
	Lavis				12	1	12		
	Allemand (composition et examen)				18	5	90		
							419	419	
Immunité de 15 points attribuée aux Bacheliers ès-lettres.								15	
								1834	

Оценки Адамара на вступительных экзаменах в Политехническую школу



Эрнест Полен Жозеф Вессио (1865—1952)

«Твоему появлению в школе предшествовала слава об исключительно одарённом ученике, юной знаменитости, что с блеском подтвердил твой великолепный успех в Политехнической и Нормальной школах, куда ты был принят первым всего лишь после года подготовки, — вспоминал сокурсник Адамара Эрнест Вессио, который занял второе место на вступительных экзаменах в Нормальную школу. — В твоём лице наш выпуск получил отличного товарища, которому никогда не изменяли ни простота, ни дружеская преданность» [II, 27].

Э. П. Ж. Вессио (1865—1952) был заведующим учебной частью (1920—1927) и директором (1927—1935) Нормальной школы, с 1943 г. — членом Академии наук. Он работал над решением различных проблем теории групп, дифференциальных уравнений, механики и общей теории относительности.

школу в 1888 г., а Борель поступил в нее в 1889 г., также заняв первые места на вступительных экзаменах в обе школы. Существуют и другие рассказы, но их труднее опровергнуть или подтвердить.

Будучи, как мы уже говорили, первым по результатам экзаменов в обе школы, Адамар, разумеется, мог поступить лишь в одну. Были ли у него колебания, неизвестно, но вот что он пишет об Эмиле Пикаре, оказавшемся в аналогичном положении за десять лет до него (этот отрывок взят из некролога, опубликованного в 1943 г., через два года после кончины Пикара): «Как всякий французский юноша нашего времени, наделенный способностями к науке, он должен был выбрать между Политехнической школой, которая в принципе готовила к карьере инженера, и Нормальной школой с ее чисто научной направленностью. Он принял решение в пользу последней и поступил первым [по списку]. Рассказывают, что он сделал этот шаг после волнующего визита к Пастеру, во время которого отец бактериологии говорил о чистой и не заинтересованной в приложениях науке в столь благородных терминах, что его молодой собеседник был полностью убежден» [I.362, с. 114]. Здесь следует, однако, заметить, что Пастеру трудно было сохранять объективность, поскольку он окончил Нормальную школу в 1843 г., а впоследствии стал в ней профессором и в течение десяти лет, с 1857 по 1867 гг., был в ней руководителем научных исследований.

Как и Пикар, Адамар выбрал Нормальную школу и перебрался на улицу Ульм. Он стал «нормальеном» (normalien) — по крайней мере официально, но не в соответствии со студенческой традицией. На жаргоне Нормальной школы он был всего лишь «гнуфом» (слово, произошедшее от pignouf — крестьянин или грубый, невоспитанный человек). Прежде чем стать «новобранцами» (conscrits), гнуфы должны были пройти серию церемоний посвящения в студенты (canular), организуемых «квадратами» (carrés) и «кубами» (cubes), т. е. студентами второго и третьего курсов. Недолговечных по самой их природе гнуфов рассматривали как переходных существ: «Бесплотные, как призраки, подобные ночным сновидениям, гнуфы проходят бледными процессиями, влача за собой свои тщетные заботы» (из «Баллады о гнуфах» Гастона Ражо [III.311, с. 112]).

Из года в год церемония посвящения в студенты изменялась, но, как правило, в неё входило публичное высмеивание новичков: гнуфов заставили подниматься по очереди на печь, после чего старшекурсники освистывали их и отпускали шуточки по поводу их имён, внешности, привычек и (реальных или вымышленных) особенностей характера. Всё это заканчивалось диким танцем — «сарабандой новобранцев». Ромен Роллан, ставший гнуфом через два года после Адамара, так вспоминает о церемонии посвящения в студенты в своем дневнике:

«Укладываясь спать, мы уткнулись носами в пружины, так как наши матрацы оказались перевернутыми. На следующий день — шумная процессия, организованная „квадратами“. Наши „погонщики слонов“ провели нас из конца в конец по всей школе с заходом во все грязные места, заставляя нас преклонять колена перед скелетом ископаемого слона (Мега́) и почтительно целовать кончик его хвоста, затем мы ползали во дворе вокруг фонтана по краю бассейна и каждый из нас, опустившись на четвереньки, должен был проползти между ног остальных двадцати трех однокурсников. „Кубы“ заставляли нас вырывать страницы из книг или переписывать конспекты. „Квадраты“ задали нам серию омерзительных заданий и подвергли нас экзамену на „нравственность“ — самое ужасное из всего, что можно придумать. Мне повезло: моё имя забыли включить в список гнуфов, которые должны были продефилировать перед учёным сборищем... Истории, которые поведали мне мои товарищи-студенты о перекрестном допросе, позволили мне по достоинству оценить выпавшую на мою долю удачу» [III.311, с. 113].

Упомянутый выше Мега́ — мегатерий, доставшийся школе в наследство от знаменитого зоолога и палеонтолога Жоржа Кювье (1769—1832) и стоящий в библиотеке. Кульминацией посвящения была церемония принятия в новобранцы перед скелетом Мега́. В завершение церемонии исполнялась кантата: «Никогда не было никаких гнуфов, никогда не было никакого посвящения, есть только „кубы“, „квадраты“ и новобранцы!»

Визит к Мега́, 1895

§ 1.4. Учащиеся

Трудно представить себе какое-нибудь другое учреждение во Франции, которое оказывало бы такое же влияние на культурную жизнь страны, как Нормальная школа. Молодые люди, учившиеся в школе, становились философами, священнослужителями, политическими деятелями, историками, писателями, филологами, химиками, физиками и математиками. Как сказал Ромен Роллан, «...дом на улице Ульм ревностно гордился своей самодостаточностью. Он был как благородный интеллектуальный монастырь... Нас было около ста тридцати или ста сорока молодых интеллектуалов — гуманитариев и естествоиспытателей, пользовавшихся исключительными привилегиями... Три года аскетических и заразительных интеллектуальных игр, свободных от попечения и приводящих нас на путь открытий...» [III.311, с. 145].

Действительно, Политехническая школа и Высшая Нормальная школа служили «колыбелью» французской интеллектуальной и научной элиты, в которой самые одаренные и умные молодые люди страны проводили три года, оказывавшие решающее влияние на формирование их личностей, в занятиях, спорах и общении в тесном студенческом кругу. Один из тех, кто заслуживает особого упоминания, — Пьер Дюэм, который был «кубом» в тот год, когда Адамар прибыл в Школу. Через много лет Адамар вспоминал, как Дюэм «мгновенно принял юного новобранца, который только что „пришвартовался“ к Школе» [II.27, с. 53]. По словам Вессио, Дюэм был другом Адамара «больше, чем кто-либо еще» [II.27, с. 25], несмотря на то, что он был почти на пять лет старше Адамара. Эта дружба позднее сыграла решающую роль в формировании научных интересов Адамара. В работе «Математические аспекты трудов Дюэма» [I.263, с. 638] Адамар с благодарностью вернул другу старый долг:

«В тех долгих и ценных беседах, которые мы вели с момента моего поступления в Школу, когда крепла наша дружба, я ощутил его трепет перед гением Эрмита или гением Пуанкаре, чьи работы Дюэм знал лучше, чем большинство из нас (я имею в виду тех, кто специализировался по математике)! Но вообще он был знаком со всеми по-настоящему плодотворными математическими идеями. С того времени я обязан ему яркими озарениями (при которых приходило ясное понимание вопроса, хотя и без подробностей), которые без всяких усилий и как бы бессознательно заменяли мне долгие месяцы учения».

На год раньше Адамара в Нормальную школу, тоже из лицея Людовика Великого, поступил другой замечательный студент Поль Пенлеве, который также стал другом Адамара на всю жизнь. Пенлеве сделал блестящую карьеру как математик и столь же блестящую карьеру в политике, несколько раз занимал министерские посты, а в 1917 г. и еще раз в 1925 г. даже становился премьер-министром.

Наряду с математикой и политикой областью глубокого практического и теоретического интереса Пенлеве была авиация. В 1908 г. он даже установил рекорд дальности полетов на биплане (пассажиром у В. Райта[1] и А. Формана[2]). В 1910 г. в Париже была опубликована работа «Авиация», написанная Пенлеве в соавторстве с Э. Борелем.

Представление о том, каким Пенлеве был в молодости, можно составить по его ответам на вопросы анкеты, которые он дал в бытность свою студентом лицея:

«*Какие качества я ценю в человеке*? Те, которыми обладаю сам.
Мой главный недостаток: Нужно ли говорить об этом?
Мое любимое занятие: Дискуссия.
Как мне видится успех: Стать знаменитым.
Чем я хотел бы заниматься: Всем.
В какой стране я хотел бы жить: В той, где я мог бы стать гением.
Мои любимые авторы: Тацит, Паскаль, Тэн.
Мои любимые поэты: Шекспир, Гейне, Мюссе.
Мои любимые композиторы: Берлиоз и еще раз Берлиоз.
Мои герои в художественной литературе: Ахилл, Фауст, Гамлет.
Мои любимые имена: Знаменитые имена.
Какими талантами я хотел бы обладать: Теми, которые у меня будут.
Как бы я хотел умереть: За истину.
Состояние моего ума в настоящий момент: Честолюбивое.
Мой девиз: Parcere subjectis, debellare superbos[3]» [III.77, с. 205—206].

[1] Вилбур Райт (1867—1912) — американский авиаконструктор. Вместе со своим братом Орвилом (1871—1948) совершил первые полёты на аэроплане в декабре 1903 г.

[2] Анри Форман (1874—1958) — французский инженер, один из пионеров авиации.

[3] Щадить побеждённых и повергать гордых (лат.)

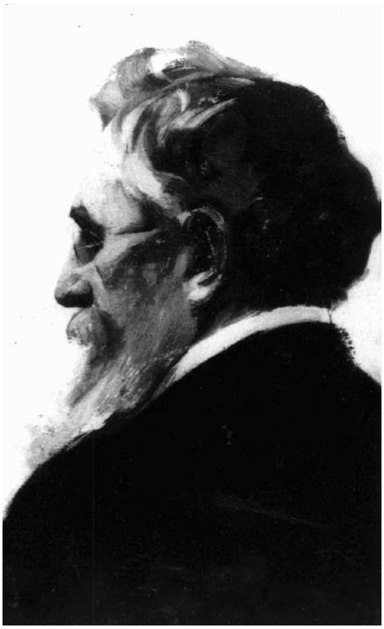
Среди ранних математических работ Поля Пенлеве (1863—1933) — исследования рациональных преобразований алгебраических кривых и поверхностей. Он также внес вклад в теоретическую механику и аналитическую теорию дифференциальных уравнений. Особенно известна его работа об особых точках алгебраических дифференциальных уравнений.

Среди студентов, потешавшихся над гнуфами во время посвящения 1884 г., были «квадраты» Жозеф Бедье, Поль Жане и Эжен Коссера. Бедье (1864—1938) впоследствии стал знаменитым филологом и приобрёл мировую известность благодаря превосходному переложению средневекового романа «Тристан и Изольда» (1900), а также как автор «Эпических легенд» (1908—1913). Жане был физиком, в 1894 г. он стал первым директором Высшей школы электричества (École Supérieure d'Électricité). Коссера (1866—1931) внес фундаментальный вклад в проективную геометрию и механику сплошных сред. Вессио, Пенлеве, Бедье, Жане, Коссера, Адамар и еще десять студентов, поступивших в Школу в 1883—1885 гг., стали членами престижного Института Франции, который состоит из пяти академий: Французской академии, Академии надписей и изящной словесности, Академии изящных искусств, Академии (естественных) наук и Академии гуманитарных и политических наук. Через несколько лет после Адамара в стены Нормальной школы вступили будущие математики Э. Картан (1888), Борель (1889), Бэр (1892), Лебег и Монтель (1894).

§ 1.5. Преподаватели

К тому времени, когда Адамар поступил в Нормальную школу, самыми влиятельными французскими математиками старшего поколения были Бертран, Бонне, Эрмит, Жордан и М. Леви. Все они являлись членами Академии наук, преподавали в Коллеж де Франс, на Факультете естественных наук Парижского университета и в высших школах. За ними следовали более молодые звезды — Дарбу, Пуанкаре, Аппель, Пикар и Гурса[1].

Особую роль в обучении нового поколения французских математиков сыграл Жюль Таннери (1842—1910), который был руководителем научных исследова-



Жюль Таннери (1848—1910)

ний в Нормальной школе в 1884—1910 гг. Это был человек редкого обаяния и эрудиции, превосходный педагог. Лекции Таннери легли в основу его книги «Введение в теорию функций одной переменной» (1886). Позднее эта книга была расширена, переработана в духе новых веяний и подкреплена теоретико-множественными идеями. В новом варианте учебник Таннери был опубликован в двух томах (1904—1910). Таннери интересовался философией науки и методологией математического образования. Он опубликовал рукописи Галуа и переписку Лиувилля и Дирихле. В «Словаре научных биографий» П. Специали пишет: «Таннери обладал выдающимися литературными способностями. Чистый и изящный стиль стихотворений, которые он сочинял в часы досуга, явственно несет на себе отпечаток классической возвышенности чувств. Его широкий культурный кру-

[1] О том, как распределялись роли между действующими лицами на парижской математической сцене того времени, см. статью М. Цернера [III.428].

гозор, благородство характера и внутреннее чувство рационально обоснованной морали отражались в его „Размышлениях“ — собрании мыслей о дружбе, искусствах и прекрасном. Часто в „Размышлениях“ ощущается тонкое чувство юмора» [III, с. 373].

В день, когда научное сообщество Франции отмечало семидесятилетие Адамара, он, отвечая на поздравления, говорил о Таннери с большой теплотой. Вот отрывок из этой речи Адамара:

«Нынешние молодые люди не могут представить себе, какой светлой фигурой был Жюль Таннери для нашего поколения. Им трудно это представить, потому что после него не осталось научных результатов, носящих его имя. Но для нас он был научным, интеллектуальным и нравственным наставником. Я никогда не забуду встречу с ним: с первых же слов, которыми мы обменялись, я ощутил спокойное и в то же время доброжелательное превосходство человека, которым я восхищался и которого нежно любил всю свою жизнь. Все, что каждый из нас смог сделать, есть в некотором смысле его работа, потому что в личности каждого из нас он оставил частицу себя. Ты, Вессио, хорошо это знаешь, ты, как и я, сохранил память о нем и отвёл ему первое место именно сейчас, в своих воспоминаниях о Нормальной школе» [II.27, с. 52].

Вместе с тем Адамар выразил глубокое уважение и другим своим учителям. Отмечая, что значительная часть жизни студентов Нормальной школы проходила в Сорбонне, Адамар вспомнил лекции Эрмита, которые он посещал в Сорбонне:

«Не думаю, что те, кто никогда не слышал его, смогут понять, сколь величественна была манера преподавания Эрмита, полная энтузиазма к науке, которая,

Сорбонна

казалось, оживала в его голосе, красоту которой он никогда не упускал случая передавать нам, ибо он проникался ею до глубины своего существа» [II.27, с. 53].

Шарль Эрмит (1822—1901)

После смерти Коши Эрмита считали ведущим математиком Франции, хотя в возрасте двадцати лет он занял на вступительных экзаменах в Политехнической школе всего лишь шестьдесят восьмое место. Эрмит работал в Политехнической школе в 1848—1876 гг.: сначала он был репетитором и принимал вступительные экзамены, в 1862 г. он стал maître de conférence, т. е. преподавателем, ведущим семинарские занятия, а в 1869 г. был назначен профессором анализа. В том же 1869 г. Эрмит получил кафедру в Сорбонне, которую занимал до выхода на пенсию в 1897 г. В 1856 г. он был избран в Академию наук. Основные работы Эрмита посвящены теории эллиптических функций[1] и её приложениям, алгебре, анализу и теории чисел. Благодаря предложенному им методу решения алгебраических уравнений пятой степени в эллиптических функциях (1858) и доказательству трансцендентности[2] числа e (1873) Эрмит стал легендарной фигурой. Инженерам и физикам хорошо известны многочлены и квадратичные формы, носящие имя Эрмита. Среди его многочисленных учеников были такие замечательные математики, как Дарбу, Пикар, Аппель и Пуанкаре. Престиж Эрмита был огромен, чему также способствовали его ученики, друзья и даже семейные связи[3].

[1] Эллиптические функции — двоякопериодические аналитические функции комплексной переменной.

[2] Действительное число называется трансцендентным, если оно не является корнем многочлена с целочисленными коэффициентами.

[3] Он был женат на Луизе, сестре Жозефа Бертрана, его младшая дочь вышла замуж за Эмиля Пикара. Соученик и приятель Пикара Поль Аппель также стал родственником Эрмита через своих родственников со стороны жены.

Под влиянием Коши Эрмит после своего заболевания оспой в 1856 г. стал ревностным католиком. Его математическая философия была разновидностью платоновского идеализма. Он был убежден в том, что математики ничего не изобретают, но иногда им разрешается открывать гармонию математического мира, который существует независимо от человеческого разума.

В 1924 г. Адамар так вспоминал свои встречи с Эрмитом:

«В бытность мою юным студентом счастливое обстоятельство позволило мне регулярно посещать мэтра на несколько минут. В то время он производил на нас глубокое впечатление не только своим подходом и методами Вейерштрасса [которые он развивал], но и своим энтузиазмом и любовью к науке; в наших кратких, но плодотворных беседах Эрмит любил наставлять меня своими замечаниями вроде следующего: „Тот, кто сбивается с пути, начертанного Провидением, терпит катастрофу“. Это были слова глубоко религиозного человека, но и такому атеисту, как я, они были вполне понятны, особенно когда Эрмит в другие наши встречи добавлял: „В математике мы больше слуги, чем господа“. Вряд ли нужно пояснять, что постепенно, с годами, по мере того как разворачивалась моя научная работа, я приходил ко всё более глубокому пониманию уместности и ёмкости его слов» [I.239, с. 66].

Гастон Дарбу (1842—1917)

В 1889 г. Дарбу получил кафедру геометрии в Сорбонне, которую занимал до самой своей смерти. Его главные работы были посвящены дифференциальной геометрии, но он также внес вклад в теорию дифференциальных уравнений (и обыкновенных, и в частных производных), аналитическую механику и теорию функций. Его четырехтомный фундаментальный трактат «Лекции по общей теории поверхностей и геометрическим приложениям исчисления бесконечно малых» (1888, 1894, 1896) стал таким же знаменитым, как его «Лекции по ортогональным системам и криволинейным координатам» (1898, 1910) и «Начала аналитической геометрии» (1917). Дарбу придавал огромное значение истории науки и написал биографии некоторых французских ученых. «Эти биографические экскурсы были особенно удачными эпизодами лекций Дарбу, когда он знакомил нас с геометрией бесконечно малых, одним из основателем которой он был. Его мелодичный голос навсегда остался в моей памяти», — вспоминал Адамар на своем юбилее в 1936 г. [II.27, с. 63].

Воздав должное памяти Эрмита и Дарбу, Адамар продолжал: «Я упомянул двух великих мэтров, которым я обязан своим научным образованием. Еще один великий мастер сидит сейчас передо мной». Это был Эмиль Пикар, который в 1881—1886 гг. был лектором по механике и астрономии в Нормальной школе. В 1885 г. он стал заместителем профессора на кафедре дифференциального исчисления в Сорбонне. Он был назначен на эту кафедру, оказавшуюся вакантной после смерти Буке[1], но он не мог стать профессором, пока не достиг тридцати лет (минимального возраста для получения профессорского звания).

Основные работы Пикара относятся к теории функций, теории дифференциальных уравнений и алгебраической геометрии. Всякий студент-математик изучает две теоремы Пикара из теории функций комплексного переменного и его теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы построить это решение (а также для других целей), Пикар применял метод последовательных приближений, используемый ныне в численном анализе.

Поздравляя Адамара на его юбилее, Пикар заметил, что Адамар, возможно, не запомнил его (Пикара) уроков, посвященных решению «простейших задач теоретической механики». Адамар возразил:

«Обращаясь к месье Пикару, я должен прежде всего выразить свой решительный протест. Нет, я никогда не забывал тех уроков, которые Вы дали во второй год моего пребывания в Нормальной школе, и я даже могу кое-что добавить к Вашим воспоминаниям. Совершенно ясно, что Вы поставили перед собой задачу, — я бы сказал, взвалили на себя ярмо — увлечь нас той искусственной и прискорбно монотонной дисциплиной, какой представляется аудитории теоретическая механика. Вы смогли сделать её почти интересной; впоследствии я всегда спрашивал себя, как Вам это удалось, поскольку я не достиг той же цели, когда настал мой черёд. Но Вы счастливо избегали скуки. Вам удалось познакомить нас не только с гидродинамикой и турбулентностью, но и со многими

[1]В самом начале, в 1884 г., класс Адамара посещал последние лекции Буке, который был профессором Сорбонны с 1870-х гг. Бывший студент Нормальной школы и выдающийся ученик Коши, Буке был хорошо известным специалистом в области математического анализа и механики. По отзыву Вессио, Буке был «не знающим колебаний апостолом строгости, но читаемые им курсы открывали слушателям лишь немногие новые горизонты. На смену ему пришел месье Эмиль Пикар, молодой и уже знаменитый мэтр» [II.27, с. 25].

Эмиль Пикар (1856—1941)

другими теориями математической физики и даже геометрии бесконечно малых, и все это в лекциях, на мой взгляд, наиболее мастерски прочитанных из всех, какие мне довелось слышать, в которых не было ни одного лишнего и ни одного недостающего слова. Суть проблемы и средства, используемые для ее решения, излагались с кристальной ясностью, а все второстепенные подробности излагались тщательно и в то же время занимали подобающее место.

С другой стороны, все математики знают, каким чудесным стимулом для исследований стала — и все еще им является — Ваша загадочная и волнующая теорема о целых функциях, потому что предмет и поныне не утратил своей актуальности. Могу сказать, что обязан этой теореме значительной частью вдохновения первых лет своей работы» [II.27, с. 54].

Много позже в некрологе, посвященном Пикару, Адамар писал: «Поразительной особенностью Пикара как учёного было совершенство стиля его преподавания — одного из самых изумительных, если не самого изумительного из всех мне известных» [I.362, с. 128].

На своем юбилее Адамар также отметил лекции Поля Аппеля, «ясность изложения которого вошла в поговорку», и лекции Эдуарда Гурса, «столь совершенные в своей простоте» [II.27, с. 54].

Аппель занял кафедру механики в Сорбонне в 1885 г. У него уже были замечательные открытия в области математического анализа и геометрии, в частности в теории эллиптических и гипергеометрических функций двух или больше-

Поль Аппель (1855—1930)

Эдуард Гурса (1858—1936)

го числа переменных. Он ввел многочлены, носящие ныне его имя, и получил общие обыкновенные дифференциальные уравнения движения механических систем. В 1893—1896 гг. Аппель опубликовал пять томов своего фундаментального труда «Теоретическая механика».

Другой выдающийся аналитик Гурса стал лектором в Высшей Нормальной школе в 1885 г. Среди его результатов — доказательство интегральной теоремы Коши без априорного предположения о непрерывности первой производной: интеграл от функции по замкнутому контуру равен нулю, если функция аналитична внутри контура и на контуре. Для гиперболических уравнений второго порядка он сформулировал и решил краевую задачу с данными на характеристической кривой, которая называется задачей Гурса. Гурса был блестящим учителем, и его «Курс анализа» стал классическим учебником.

Начиная с 1881 г. Анри Пуанкаре также преподавал в Сорбонне. До того как ему исполнилось тридцать лет, т. е. до того времени, когда Адамар стал «нормальеном», Пуанкаре уже создал асимптотическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром, исследовал кривые, определяемые дифференциальными уравнениями, открыл так называемые автоморфные функции комплексного переменного — обобщения эллиптических функций, а также внес вклад в теорию чисел, алгебру и небесную механику.

О первых математических работах Пуанкаре Адамар писал, что одной из самых замечательных их особенностей были «количество и значимость полученных

Анри Пуанкаре
(1854—1912)

результатов, появившихся почти одновременно за короткий период между 1879 г. и 1884—1885 гг., которые полностью изменили состояние математической науки и открыли для нее новые пути по всем ее направлениям. За это время Пуанкаре опубликовал так много научных статей, посвященных самым различным областям математики, что, например, XI том «Bulletin de la Société Mathématique de France» содержал три статьи, появившиеся одна за другой, причем две из них были представлены на одном и том же заседании общества (эти заседания проходили раз в две недели), и каждая статья представляла собой совершенно новую главу теории функций» [I.220, с. 111].

Однако, как отметил Адамар на своём юбилее в 1936 г., Пуанкаре не оказывал того немедленного и непосредственного влияния на студентов, которого можно было бы ожидать. Его работами восхищались, но никто не «осмеливался коснуться их» [II.27, с. 54].

§ 1.6. Школа на улице Ульм

Что представляла собой Высшая Нормальная школа с её исключительностью и одарённостью студентов, обитавших под ее крышей? Школа занимала квадратное трехэтажное здание, расположенное между улицами Ульм и Рато. В центре большого внутреннего сада фонтан изливал свои струи в маленький круглый цементный бассейн, в котором плавали золотые рыбки. Каждую рыбку звали Эрнестом в память Эрнеста Берсо, директора Школы (1871—1880), при котором и был построен этот бассейн. В «мифологию» студентов входило утверждение о божественной сущности Эрнестов, и гнуфы обязаны были поклоняться им после визита к Мега́.

Внутренний двор Нормальной школы на улице Ульм с «бассейном Эрнестов» на переднем плане

Западная сторона здания, выходившая на улицу Ульм, была отведена под кабинеты преподавателей и квартиры администрации. Спальни студентов располагались на первом и втором этажах в других частях здания. Студенты спали в пиолах (от фр. piaules) — узких одиночных кельях, в которых из мебели были только железная кровать и шкаф для одежды. Для умывания предназначались кувшин, ведро и таз. Вместо двери была занавеска, что облегчало наблюдение за студентами. Андре Вейль, поступивший в Нормальную школу почти через сорок лет после Адамара, писал в своей книге «Ученичество математика»: «Студенты спали в больших спальнях, их кровати были отделены друг от друга тонкими ширмами, которые создавали отдаленнейшее подобие уединения: большинство лошадей чувствуют себя свободнее в своем стойле» [III.418, с. 45].

Студенты были разбиты на группы по тюрнам (thürnes, от эльзасского слова türn — темница), или кабинетам. Находиться в тюрне было гораздо комфортнее, чем в пиоле, так как в нём была печь, а также столы и стулья. Стены были украшены картинками и афишами в соответствии со вкусами обитателей.

Тюрн в 1895 г.

Во время директорства Пастера правила несколько напоминали те, которыми руководствуются воинские части. Подъем был в пять часов утра за исключением понедельников, сред и некоторых особых дней, когда побудка могла быть в шесть утра. Увольнительные из Школы строго контролировались, и студентам не разрешалось выходить в город не в форме. Курить и играть в карты запрещалось, равно как и читать газеты, иллюстрированные журналы и романы. Считалось, что все это отвлекает студентов от занятий. Делая фетиш из работы и порядка, Пастер был обуян идеей борьбы с бесполезной тратой времени: «Студенты первого и второго курсов затрачивают по крайней мере двадцать минут на то, чтобы должным образом одеться и добраться от Школы до Сорбонны. Столько же им требуется, чтобы вернуться в Школу. Это составляет по крайней мере сорок минут на каждую лекцию». Так как у студентов отделения естественных наук по крайней мере пять лекций в Сорбонне еженедельно, «потеря времени составляет пять раз по сорок минут, или три с половиной часа, каждую неделю. В действительности потеря времени больше, так как я взял минимум» [III.195, с. 83].

Но со временем правила стали не столь жесткими, и, когда Адамар поступил в Школу, уже не требовалось ни вставать в пять часов утра, ни обязательно носить форму при выходе в город. Кроме того, студентам разрешалось читать любые газеты, журналы или книги по своему усмотрению.

День Адамара обычно проходил следующим образом: в шесть часов утра в спальне звонил колокольчик, через двадцать минут он звонил вторично, и все торопились, чтобы к шести тридцати быть в своем тюрне. Здесь студенты работали до тех пор, пока следующий звон колокольчика не призывал их в большую студенческую столовую в северной части здания, «мрачную и холодную, в которой не было другой мебели, кроме скамей и длинных мраморных столов, на которых были разложены ножи, стояли графины с водой и красным вином» [III.311, с. 173]. Столовая была постоянной целью острот на тему «питания или отравления».

После завтрака приходили преподаватели, и «нормальены» разделялись по группам и принимали участие в семинарских занятиях. Студенты-математики решали задачи и обсуждали теоретический материал. Затем следовал обед и большой перерыв, во время которого студенты занимались спортом, играли в вист или бильярд, а в хорошую погоду гуляли или даже дремали в саду. В дождливую погоду они проводили время в разговорах и дебатах в тюрнах и коридорах. Политика и философия были постоянными предметами горячих дискуссий. Затем проводились еще несколько семинаров, и в завершение дня три часа отводилось на индивидуальные занятия в тюрнах.

Библиотека Нормальной школы (гравюра 1895 г.)

Популярным местом в Школе была библиотека, два главных зала которой, отведенные для гуманитарных и естественных наук, располагались на первом этаже в восточной части здания. Фонд библиотеки насчитывал десятки тысяч томов, расставленных в два ряда в высоких дубовых шкафах.

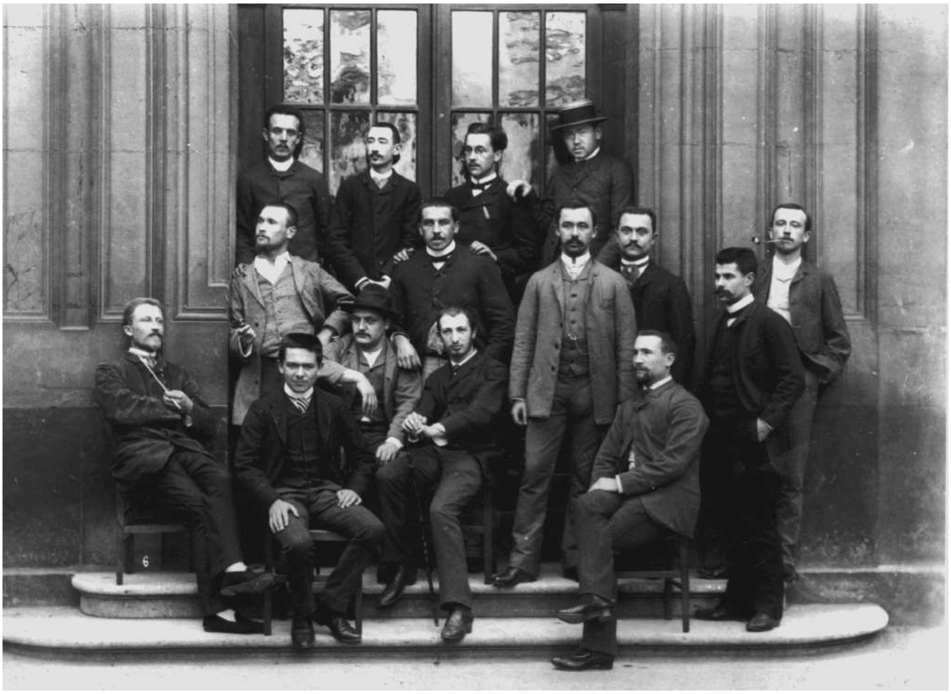
По вечерам студенты развлекались как могли — устраивали небольшие вечеринки, пели, читали стихи и танцевали. Если ставили спектакль, то все женские роли исполняли студенты (женщин впервые допустили в Школу в 1917 г.). Зимой директор по особым случаям устраивал приемы, на которые приглашались все ученые светила и министр общественного образования с членами их семей, и студенты на несколько часов становились светскими людьми. Помимо перечисленных выше развлечений студенты также посещали драматические театры, оперу и даже городские балы. Традиционными, хотя и не такими безобидными, были также прогулки по крышам домов на улице Ульм, вызывавшие жалобы жильцов и гнев администрации.

Прогулка по крышам (1895 г.)

Студенты посещали также курсы лекций вне Школы, обычно в Сорбонне или в Коллеж де Франс, одном из старейших высших учебных заведений в Париже, предлагавшем желающим публичные лекции на высоком академическом уровне. Занятия в Школе должны были дополнять эти курсы.

В число предметов, которые изучали новобранцы (первокурсники) и «квадраты» (второкурсники) отделения естественных наук, входили органическая и неорганическая химия, дифференциальное исчисление, минералогия, физика, теоретическая механика, астрономия, зоология, геология, а также рисование.

Экспериментальная работа, и учебная, и исследовательская, проводилась в лабораториях физики, химии и естественных наук. К востоку от Школы на улице Рато был даже небольшой ботанический сад. Особенно известной была лаборатория органической химии, основанная Пастером. Свою знаменитую работу по ферментации и иммунологии он выполнил именно в этой лаборатории. В конце первого года пребывания Адамара в Школе Пастер разработал свою вакцину против бешенства.



Курс 1884 г. отделения естественных наук Нормальной школы. Адамар сидит вторым справа. Вессио стоит в последнем ряду вторым слева.

Дважды в неделю по два часа студенты проходили военную подготовку, и шум от громко отдаваемых приказов, звяканье сабель и топот сапог разносились по внутреннему двору Школы и соседним улицам.

В конце первого учебного года Адамару предстояло получить два звания «полулиценциата» по физическим и математическим наукам (demilicences ès sciences physiques et ès sciences mathématiques). Через год он сдал оставшуюся часть экзаменов на звание лиценциата (первую ученую степень). Третий учебный год Адамар посвятил подготовке к кандидатскому экзамену (agrégation), который давал право преподавать в лицеях. После этого Адамар получил разрешение остаться еще на год в Школе (1887—1888) для проведения свободных исследований. Вессио вспоминал об этом так: «Ты провёл в школе спокойные годы, насыщенные работой, позволяя созреть своему таланту, не спеша найти свой путь. Но с твоей всегда активной любознательностью, от которой не ускользали никакая информация или опыт, ты извлекал пользу из разговоров как с литераторами, так и с учеными, как с физиками, так и с математиками» [II.27, с. 25].

Именно в те годы стали проявляться творческие способности Адамара. Его первые теоремы были опубликованы в «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences» (заседания 23 января 1888 г. и 8 апреля 1889 г.) и позднее вошли в его докторскую диссертацию. В частности, он пытался найти оценку определителя, порожденного коэффициентами степенного ряда. Над этой трудной задачей Адамар бился некоторое время, пока, наконец, по его словам, не произошло следующее: «Однажды, когда меня внезапно разбудил посторонний шум, мгновенно и без малейшего усилия с моей стороны мне в голову пришло долго разыскиваемое решение проблемы... Этот случай был весьма необычным и произвел на меня незабываемое впечатление». Эти строки заимствованы из его книги «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» [I.404*, с. 11]. Адамар добавляет, что из личного опыта знает, что сильные эмоции могут способствовать математическому творчеству, и комментирует: «Открытие, сделанное в момент неожиданного пробуждения, о котором я рассказал выше, было сделано как раз в период, когда я находился в состоянии такого эмоционального возбуждения» [I.404*, с. 12].

Мы не знаем, каковы были эмоции, о которых упоминает Адамар, но примерно в то время здоровье его отца, которое никогда не было крепким, ухудшилось, и осенью 1888 г. шестидесятилетний Амедей Адамар просил предоставить ему трехмесячный отпуск. Вскоре после этого он подал прошение о выходе из лицея на пенсию по причине своей немощи. Разрешение пришло через день после его внезапной кончины, последовавшей 28 ноября. Мать Адамара вторично замуж не вышла. Она по-прежнему давала уроки игры на фортепиано и скончалась в 1926 г.

§ 1.7. Неудачи в лицее Бюффона

По выпуске из Нормальной школы 30 октября 1888 г. Адамар в 1888—1889 гг. продолжил свое образование в качестве стипендиата (boursier) города Парижа и Коллеж де Франс. (Формально с 1 ноября 1888 г. до 30 сентября 1889 г. он числился преподавателем Канского лицея, свободным от обязанностей.)

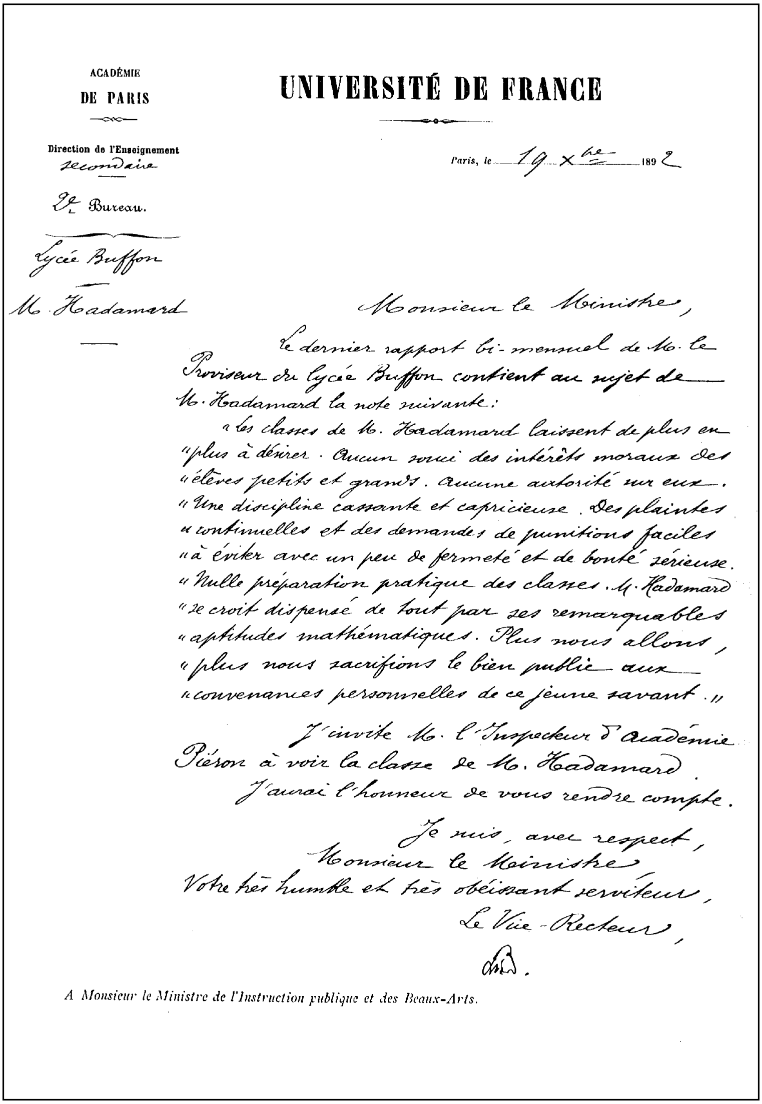
С 1 июня 1889 г. по 4 сентября 1890 г. Адамар был временным заместителем преподавателя в лицее Святого Людовика, а затем получил место преподавателя математики в лицее Бюффона. В этом лицее он проработал с 5 сентября 1890 г. до 30 сентября 1893 г.

Вначале у Адамара было много проблем с преподаванием, как можно понять из следующего отчета, написанного директором лицея на имя министра просвещения:

«Несмотря на все свои несомненные достоинства, месье Адамар достигает при чтении порученных ему курсов лишь посредственных результатов. У него нет четкого ощущения того, как следует учить своих учеников...

В гуманитарном классе, где учащихся больше, у него возникают те же трудности с дисциплиной, и он сыплет наказаниями без разбора.

Я был вынужден рекомендовать месье Адамару относиться к преподаванию немного серьезнее, прилагать больше усилий к тому, чтобы представить себя на уровне своих учеников, и предупредил его, что если он не добьется лучших результатов, то нам придется рассмотреть вопрос, следует ли ему продолжать преподавание в парижском лицее» [IV.26].



ACADÉMIE
DE PARIS

Direction de l'Enseignement
secondaire

2e Bureau.

Lycée Buffon

M. Hadamard

UNIVERSITÉ DE FRANCE

Paris, le 19 Xbre 1892

Monsieur le Ministre,

Le dernier rapport bi-mensuel de M. le Proviseur du lycée Buffon contient au sujet de M. Hadamard la note suivante:

« Les classes de M. Hadamard laissent de plus en « plus à désirer. Aucun souci des intérêts moraux des « élèves petits et grands. Aucune autorité sur eux. « Une discipline cassante et capricieuse. Des plaintes « continuelles et des demandes de punitions faciles « à éviter avec un peu de fermeté et de bonté sérieuse. « Nulle préparation pratique des classes. M. Hadamard « se croit dispensé de tout par ses remarquables « aptitudes mathématiques. Plus nous allons, « plus nous sacrifions le bien public aux « convenances personnelles de ce jeune savant. »

J'invite M. l'Inspecteur d'Académie Piéron à voir la classe de M. Hadamard.

J'aurai l'honneur de vous rendre compte.

Je suis, avec respect,
Monsieur le Ministre
Votre très humble et très obéissant serviteur,
Le Vice-Recteur,

A Monsieur le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts.

Письмо министру образования от вице-ректора Парижской академии

Существует еще одно подобное письмо, написанное министру образования вице-ректором Парижской академии (одного из административных округов, или «академий», на которые Наполеон разделил Францию в ходе реформы образования):

Господин министр!

В последнем отчете за два месяца главы лицея Бюффона содержится следующее замечание по поводу месье Адамара: «Занятия, проводимые месье Адамаром, все более и более оставляют желать лучшего. Он совершенно не заботится о воспитании своих учеников, как младших, так и старших. Он не пользуется у них авторитетом. Неадекватная и произвольная дисциплина. Постоянные жалобы и требования наказаний, которых можно было бы легко избежать, прояви он немного твердости и доброты. Практически не готовится к занятиям. Месье Адамар считает себя свободным от всех обязательств по причине своих замечательных математических способностей. Чем дольше это продолжается, тем больше мы жертвуем общественной пользой в угоду личным удобствам этого молодого ученого».

Я пригласил инспектора месье Пьерона посетить занятия, проводимые месье Адамаром.

О результатах я извещу Вас дополнительно [IV.26].

Было ли неудачное начало преподавательской деятельности Адамара обусловлено недостатком внимания и прилежания с его стороны или тем, что он не мог правильно оценить уровень своих учеников? Нам кажется, что последнее более вероятно. Справедливости ради следует отметить, что к концу пребывания Адамара в должности преподавателя официальные отзывы о нем стали менее критическими. По-видимому, он выработал в себе любовь к преподаванию: «Не подлежит сомнению, что за те годы, которые он преподавал в лицее, его интерес к преподаванию и к учебной программе вырос; вероятно, в этот период у него созрел план его „Лекций по элементарной геометрии“, которые он написал и опубликовал десятью годами позже и которые оказали также влияние на учащихся моего поколения», — писал Поль Леви [II.37, с. 2].

§ 1.8. Первый ученик Адамара

Когда Адамар преподавал математику в лицее Бюффона, он обратил внимание на одаренного молодого человека Мориса Фреше, проявлявшего к математике больший интерес, чем его соученики. Адамар стал давать Фреше дополнительные уроки и многими другими способами поощрял его энтузиазм по поводу математики. Во время летних каникул Адамар и Фреше переписывались, и их переписка продолжалась, когда Адамар переехал в Бордо.

Они продолжали общаться и позже, когда Фреше был студентом Нормальной школы с 1900 по 1903 гг. Докторская диссертация Фреше, которую он защитил в 1906 г., была написана под сильным влиянием Адамара, который был его официальным научным руководителем, и работ Вольтерра по функциям от кривых.

Многие годы спустя Фреше, ставший к тому времени одним из столпов функционального анализа, сказал, что никогда не забудет того внимания, который уделял ему Адамар: «Вы сыграли решающую роль в моем становлении как математика» [II.27, с. 34]. По случаю девяностолетия Адамара газета «Nouvelles Littéraires» обратилась к нескольким математикам с вопросом: «Что Вы думаете о работах Адамара?». И на этот раз Фреше вспомнил, как Адамар обратил внимание на его математические способности, поговорил об этом с его родителями, направил его и помог ему [II.18]. В некрологе о Жаке Адамаре, написанном восьмидесятипятилетним Фреше, говорилось следующее: «Я должен признать-

Морис Фреше (1878—1973) в 1954 г.

В 1928—1949 гг. Фреше был профессором Парижского университета. В 1956 г. после кончины Бореля Фреше был избран в Академию наук. Основными областями его исследований были функциональный анализ, теоретико-множественная топология, теория вероятностей и статистика. В 1905 г. Фреше ввел понятие абстрактного пространства. Им же были введены понятия метрического пространства, компактности, сепарабельности и полноты. Рекомендуя Фреше к избранию в Академию наук в 1934 г., Адамар заметил, что дерзновенность усилий Фреше по введению абстрактных понятий была беспрецедентной со времен работы Галуа.

ся, что, радуясь встрече с моим благодетелем, я неизменно испытывал страх при мысли, что не смогу ответить на все его вопросы» [II.13, с. 15].

А. Э. Тейлор так комментирует сохранившиеся письма от Адамара к Фреше:

«Фреше сохранил более двадцати писем, написанных ему Адамаром примерно в 1890—1899 гг., еще до того, как он (Фреше) поступил в Высшую Нормальную школу. Все письма ныне принадлежат дочери Фреше мадам Элен Ледерер, которая разрешила мне ознакомиться с ними. Несколько писем датированы, но большинство без даты (отсутствие дат было характерно для Адамара). Некоторые письма слегка аннотированы (Фреше или кем-то другим, думаю, через много лет) — указан год отправления или сделаны другие краткие примечания. Эти письма по большей части носят учебный характер, но содержат и некоторые проявления личной заботы и советы. Письма от Фреше к Адамару не сохранились.

В одном из первых писем (вероятно, 1890 г.) Адамар просит Фреше навестить его (Адамар жил на авеню Ваграм в Париже) в указанное время. Он сообщает Фреше, что рад узнать о том, что мальчик занял первое место по физике. „Vous savez que je tiens beaucoup à cela“[1], — писал Адамар.

В 1893 г. Фреше по настоянию Адамара записывал и посылал ему решения задач по геометрии и алгебре. Вот одна из задач: пусть $p(x)$ — такой многочлен, что $p(a) = m$, $p(b) = n$; найдите остаток от деления многочлена $p(x)$ на $(x - a)(x - b)$. В одном письме Адамар просит Фреше доказать теорему Паскаля (по-видимому, о шестиугольнике, вписанном в эллипс). Из более позднего письма видно, что у Фреше возникли трудности с доказательством этой теоремы. В ответном письме Адамар делает поправки, дает наводящие указания и рекомендует Фреше всегда убеждаться, что он использовал все предположения. К одному письму приложен надорванный листочек бумаги, на котором написан следующий совет: „Travaillez l'allemand; une insuffisance en cette langue vous sera une grand gêne plus tard“[2].

На открытке 1895 г. Адамар пишет Фреше: „Bravo pour le Concours Général“[3]. В письме 1896 г. Адамар задает своему юному другу несколько алгебраических задач из книги Лорана и спрашивает, изучил ли Фреше полюсы и поляры. В других письмах того же времени Адамар исправляет ошибки Фреше при вычислении определителей и делении одного многочлена на другой, а также рассказывает ему о гальванических элементах, об электростатике, о ньютоновских потенциалах системы материальных частиц и о трении. В одном письме, написанном во время пасхальных каникул 1897 г. (судя по примечанию), имеется ссылка на книгу Сальмона о конических сечениях. В этом письме Адамар пишет Фреше, что не следует думать, будто преподавание математики в Англии ведётся на более строгом уровне, чем во Франции. Адамар считает, что в действительности ситуация противоположная — английские учебники редко отличаются строгостью изложения. По словам Адамара, чтобы основательно разобраться в какой-нибудь теории, всегда необходимо обращаться к французской или немецкой книге. Затем он говорит о Евклиде и отмечает некоторые изъяны в строгости присланных Фреше решений. В том же письме Адамар пишет о методе последовательных приближений, замечая, что правило извлечения квадратных корней есть не что иное, как применение этого метода. Доказательство этого, пишет Адамар, лежит в области дифференциального исчисления.

Однажды Адамар устроил Фреше основательный выговор, когда был недоволен тем, что написал ему ученик. По-видимому, Фреше утверждал, будто некоторое утверждение нетрудно доказать, а затем воспользовался недоказанными результатами. Адамар сообщил Фреше, что утверждение, о котором шла речь,

---

[1] Вы знаете, что я это очень ценю. — *Прим. перев.*

[2] Изучайте немецкий язык; недостаточное владение этим языком позднее станет для Вас огромным препятствием. — *Прим. перев.*

[3] Браво за Общий конкурс. — *Прим. перев.*

в действительности ложно и что Фреше никогда не должен делать таких заявлений, если он действительно не располагает доказательством. В другом случае Адамар строго выговорил Фреше за ошибку в решении геометрической задачи. Можно только догадываться о точной природе допущенной Фреше ошибки, по поводу которой Адамар написал следующие слова: „Mais vous ne devez en aucun cas faire de déduction fausse, jamais, sous quelque prétext et en quelque circonstance que ce soit“»[1] [III.391, с. 238—239].

§ 1.9. Докторская диссертация

Несмотря на преподавательскую нагрузку в лицее (у него было двенадцать часов в неделю), Адамар завершил свою докторскую диссертацию «Опыт исследования функций, заданных разложением в ряд Тейлора». Официальными научными руководителями были Пикар и Таннери. Диссертация посвящена теории комплексных функций, т. е. функций комплексного переменного z, заданных в окрестности произвольной точки z_0 плоскости сходящимся степенным рядом

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n.$$

Такие функции называются аналитическими.

Теория комплексных функций берет начало в XVIII в., но основания этой дисциплины были заложены Коши в первой половине XIX в. Основной вклад в последующее развитие теории аналитических функций в середине XIX в. внесли Риман и Вейерштрасс. Во Франции исследования Коши были продолжены Лиувиллем, Лораном, Пюизо, Эрмитом, Брио, Буке и др.[2] Во второй половине XIX в. теорией комплексных функций занимались такие известные французские математики, как Лагерр, Дарбу, Пуанкаре, Пикар и др. В то время аналитические функции принято было считать универсальным и эффективным средством решения задач математического анализа и приложений. Поэтому теория комплексных функций привлекала всеобщее внимание, и в этой области работали лучшие математики.

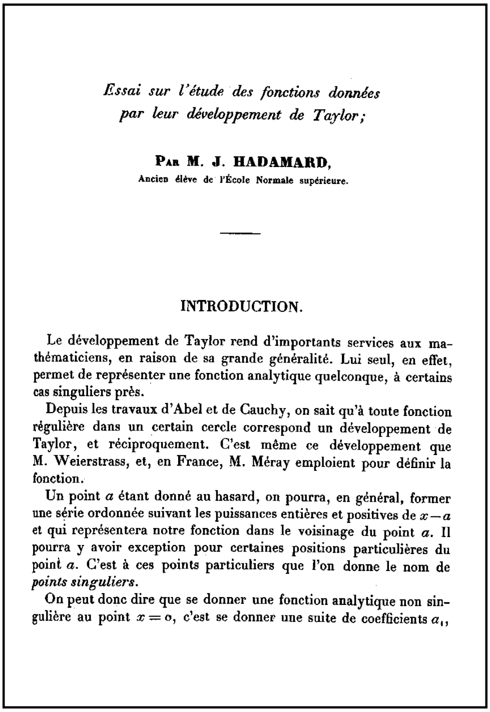
Огромная работа была проделана по исследованию конкретных классов аналитических функций (гипергеометрические ряды, эллиптические и эллиптические модулярные функции, автоморфные функции, исследованные Клейном и Пуанкаре)[3]. С другой стороны, публикаций по общим свойствам аналитических функций, к числу которых относятся и диссертация Адамара, было немного. Адамар исследовал общий ряд

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \tag{1.1}$$

[1] Но Вы ни в коем случае не должны делать неверный вывод, никогда, ни под каким предлогом и ни при каких обстоятельствах (подчеркнуто Адамаром). — *Прим. перев.*

[2] Относительно истории теории аналитических функций комплексного переменного см. [III.53], [III.54], [III.55], [III.207].

[3] Исторический анализ этих исследований провел Дж. Дж. Грей [III.157].



Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor;

Par M. J. HADAMARD,

Ancien élève de l'École Normale supérieure.

INTRODUCTION.

Le développement de Taylor rend d'importants services aux mathématiciens, en raison de sa grande généralité. Lui seul, en effet, permet de représenter une fonction analytique quelconque, à certains cas singuliers près.

Depuis les travaux d'Abel et de Cauchy, on sait qu'à toute fonction régulière dans un certain cercle correspond un développement de Taylor, et réciproquement. C'est même ce développement que M. Weierstrass, et, en France, M. Méray emploient pour définir la fonction.

Un point a étant donné au hasard, on pourra, en général, former une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x-a$ et qui représentera notre fonction dans le voisinage du point a. Il pourra y avoir exception pour certaines positions particulières du point a. C'est à ces points particuliers que l'on donne le nom de *points singuliers*.

On peut donc dire que se donner une fonction analytique non singulière au point $x=o$, c'est se donner une suite de coefficients a_1,

Диссертация Адамара

и его аналитическое продолжение. (Упрощённое представление о предмете исследований Адамара читатель может составить, взяв геометрическую прогрессию $1+z+z^2+\ldots$, которая сходится при $|z|<1$ и может быть аналитически продолжена до функции $(1-z)^{-1}$, определенной на всей комплексной плоскости за исключением точки $z=1$.) Адамар начал со следующего вопроса. Пусть задан ряд (1.1). Требуется определить его радиус сходимости, т. е. максимальное значение R радиуса круга, в котором этот ряд сходится. Ответ Адамара гласил:

$$R = (\overline{\lim_{n\to 0}}|c_n|^{1/n})^{-1}. \tag{1.2}$$

В действительности эту формулу гораздо раньше открыл Коши, но Адамар не знал об этом и стал первым, кто сумел строго доказать ее. Что еще важнее, помимо доказательства формулы (1.2) Адамар получил ряд глубоких результатов об особых точках степенных рядов, т. е. о точках, которые служат препятствием для аналитического продолжения ряда. Простейшие особые точки — полюсы. Точка z_0 называется полюсом функции $\varphi(z)$, если существует отличный от нуля предел произведения $(z-z_0)^n\varphi(z)$ при $z\to z_0$, где n — натуральное целое число, называемое порядком полюса. Мероморфными называются такие функции, у которых все особые точки — полюсы. Термин «полюс» предложили Брио и Буке.

Формула Коши—Адамара (1.2) позволяет сделать вывод о существовании особых точек непосредственно по поведению коэффициентов c_n при $n\to\infty$, но ничего не говорит о характере особых точек и их расположении на грани-

Леон Франсуа Альфред Лекорню (1854—1940) был математиком и инженером, членом Академии наук с 1910 г.

це круга сходимости $|z| = R$. Поэтому Адамар пошел дальше. Он попытался исследовать, каким образом свойства особых точек можно вывести из свойств коэффициентов. Исходным пунктом его исследований стала статья Лекорню, опубликованная в «Comptes Rendus» (1887). Лекорню сообщал, что ему удалось доказать утверждение[1], обратное следующему, неявно содержавшемуся в статье Дарбу 1878 г.: если z_0 — полюс первого порядка и z_0 является единственной особой точкой ряда (1.1), лежащей на окружности $|z| = R$, то $c_n/c_{n+1} \to z_0$. Хотя доказательство Лекорню было неполным, а полученный им результат оказался ошибочным, его работа вдохновила исследования Адамара — хороший пример полезности ошибок для прогресса математики.

В своей диссертации Адамар впервые развил общую теорию особенностей. В частности, он получил необходимое и достаточное условие того, чтобы количество полюсов функции на границе круга сходимости не превосходило заданного числа (причём функция не имеет других особых точек), выраженное в терминах некоторого определителя с коэффициентами ряда в качестве элементов.

Публичная защита диссертации состоялась 18 мая 1892 г. Оппонентами были Эрмит, Пикар и Жубер. Пикар был рецензентом, докладывающим остальным оппонентам свое мнение о диссертации. Он нашел диссертацию Адамара слишком абстрактной. В своем отзыве от 9 января 1892 г. Пикар писал о формуле Ко-

[1] То же утверждение высказал в 1876 г. Г. Кёниг (см. Б. Сенаши [III.386, с. 242]).

ши—Адамара (1.2) для радиуса сходимости: «Этот результат, несомненно, более теоретический, чем практический». И повторил то же самое о критерии Адамара существования у функции p полюсов: «Оставаясь на том уровне общности, которым автор по существу пытался ограничить себя, нельзя ожидать получения формул, имеющих практическую пользу». Однако, критикуя результаты, Пикар не упускает случая похвалить автора: «...Но проницательность, которую месье Адамар обнаруживает в этих весьма тонких вопросах, представляется мне замечательной», «...отвага, с которой он берется за решение столь трудного вопроса», и, наконец, «мне представляется, что талант, проявленный диссертантом, несомненно, выше полученных им результатов, и отмеченный недостаток присущ скорее поставленному вопросу, нежели автору рецензируемой статьи» [III.149, с. 352].

В заметке Адамара от 1901 г. [I.87, с. 3] выражено неявное возражение мнению Пикара:

«В то время казалось, будто к такому исследованию не следовало бы приступать, будто эти попытки могли, несмотря на значительные усилия, завершиться только неинтересными и чрезвычайно сложными результатами. Я не отрицал ценности таких возражений, но считал (и события подтвердили правильность такого отношения), что остановиться на этом означало бы игнорировать важность рядов Тейлора, о которой я говорил выше, важность столь фундаментальную, что ни одним результатом, полученным в этом направлении, сколь бы ограниченным или сложным он ни казался, нельзя было бы пренебречь».

Время показало, что Адамар был прав, так как и результаты, и методы его диссертации заложили основание новой обширной области в теории комплексных аналитических функций.

§ 1.10. Первый математический триумф

В том же 1892 г. Адамар ко всеобщему удивлению получил свою первую награду — премию Академии наук. История его неожиданной награды показывает, что даже самые тщательно разработанные планы могут идти «наперекосяк».

На протяжении многих лет было известно, что некоторые свойства дзета-функции Римана

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots$$

тесно связаны со свойствами целых чисел, в частности, что решение давно стоящей классической проблемы распределения простых чисел следует из гипотезы Римана, согласно которой все нули дзета-функции лежат на прямой $\mathrm{Re}\, z = 1/2$.

В то время, когда Адамар изучал теорию аналитических функций в Нормальной школе, принято было думать, будто гипотеза Римана доказана голландским математиком Томасом Йоаннесом Стилтьесом. Его путь к математике был необычен. Будучи на девять лет старше Адамара, Стилтьес в 1873 г. поступил в Политехническую школу в Дельфте. Он так любил математику, что

Томас Стилтьес (1856—1894)

пропускал обязательные курсы, читая вместо них труды Гаусса и Якоби. В результате Стилтьес не получил степени. Покинув школу в 1877 г., он получил место «ассистента по астрономическим вычислениям» в Лейденской обсерватории и при всей занятости умудрялся находить время для своего математического хобби. В 1883 г. Стилтьес уволился из обсерватории, чтобы стать математиком. Он подал заявку на место в Университете Гронингена, но потерпел неудачу и вместе со своей семьей переехал в Париж. Здесь в 1886 г. он успешно представил свою докторскую диссертацию по расходящимся рядам $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^{-n}$. К тому времени Стилтьес приобрел широкую известность, был избран почетным доктором Лейденского университета в 1884 г. и членом Королевской академии наук в Амстердаме (1885). Он получил глубокие результаты в различных областях математического анализа, в частности, стал основателем теории непрерывных дробей

$$\cfrac{1}{z-\cfrac{a_1}{z-\cfrac{a_2}{z-\cfrac{a_3}{z-\ldots}}}}.$$

Исследуя эти дроби, Стилтьес ввел новый интеграл, названный впоследствии его именем.

В 1885 г. Стилтьес опубликовал короткую статью [III.379], в которой утверждал, что ему удалось доказать гипотезу Римана. В статье говорилось следующее:

«Риман сформулировал весьма правдоподобную гипотезу, что все мнимые корни [дзета-функции] имеют вид $\frac{1}{2}+ai$, где a — действительное число.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur une fonction uniforme.* Note de M. STIELTJES, présentée par M. Hermite.

« Le caractère analytique de la fonction $\zeta(z)$, qui est définie pour les valeurs de z dont la partie réelle surpasse l'unité par la série

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots,$$

a été complètement dévoilé par Riemann qui a montré que

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$$

est holomorphe dans tout le plan.

» Les zéros de la fonction $\zeta(z)$ sont d'abord

$$-2,\ -4,\ -6,\ -8,\ \ldots;$$

il y en a, en outre, une infinité d'autres, qui sont tous imaginaires, la partie réelle restant comprise entre 0 et 1.

» Riemann a annoncé comme très probable que toutes ces racines imaginaires sont de la forme $\frac{1}{2}+ai$, a étant réel.

» Je suis parvenu à mettre cette proposition hors de doute par une démonstration rigoureuse. Je vais indiquer la voie qui m'a conduit à ce résultat.

» D'après une remarque due à Euler,

$$1:\zeta(z)=\prod\left(1-\frac{1}{p^z}\right),$$

p représentant tous les nombres premiers, ou encore

$$1:\zeta(z)=1-\frac{1}{2^z}-\frac{1}{3^z}-\frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}-\frac{1}{7^z}+\frac{1}{10^z}-\cdots.$$

C'est l'étude plus approfondie de la série qui figure ici dans le second membre qui conduit au but désiré. On peut démontrer, en effet, que cette série est convergente et définit une fonction analytique tant que la partie réelle de z surpasse $\frac{1}{2}$.

» Il est évident, d'après cela, que $\zeta(z)$ ne s'évanouit pour aucune va-

C. R., 1885, 2ᵉ *Semestre.* (T. CI, N° 2.) 20

Первая страница статьи Стилтьеса

Мне удалось устранить все сомнения в истинности этой гипотезы с помощью ее строгого доказательства. Я покажу, каким образом я смог прийти к этому результату».

Стилтьес не привел доказательства, ограничившись несколькими словами о ходе своих рассуждений, но никто не сомневался, что проблема была решена.

Стилтьес был одним из ближайших друзей Эрмита. На протяжении двенадцати лет они обменивались письмами, 432 из которых составили два тома, опубликованных в 1905 г. [III.89]. В 1886 г. Эрмит помог Стилтьесу получить пост в Университете Тулузы, где он проработал вплоть до своей ранней смерти от туберкулёза в 1894 г.

В письме от 3 декабря 1890 г. Эрмит, бывший президентом Академии наук, предложил Стилтьесу принять участие в ежегодном конкурсе на соискание Большой премии (Grand Prix) Академии наук:

«На протяжении многих лет Вы получали превосходные результаты, которые обеспечили Вам высокий научный авторитет и получили высочайшую оценку со стороны всех геометров. Теперь наступил момент, когда столь же высокую оценку мог бы дать избранный круг друзей Анализа, и Вы могли бы получить официальное признание, соответствующее Вашему огромному таланту и великим услугам, оказанным Вами Науке» [III.89, с. 112].

По инициативе Эрмита 29 декабря 1890 г. Академия наук объявила тему Большой премии: «Определение количества простых чисел, меньших заданной величины». В объяснении подчеркивалась желательность восполнения пробелов в работе Римана по дзета-функции.

В письме к Эрмиту от 4 марта 1891 г. Стилтьес признал, что полученное им доказательство неполно [III.89, с. 154—155], и даже год спустя он все еще не был готов отправить свою работу жюри. В письме от 30 ноября 1891 г. Эрмит писал Стилтьесу:

«Спешу уведомить Вас, что официальный срок окончания конкурса на соискание премии Академии наук — июнь следующего года, но Вы можете, отослав статью, совершенно спокойно прислать затем дополнение, если оно попадет секретарю института до ноября. Таким образом, Вы еще располагаете некоторым запасом времени, и я уверен, что если Академия не получит других работ или они не будут представлять значительной ценности, то перспектива получить статью от Вас склонит жюри к решению объявить тот же вопрос на конкурс по соисканию Большой премии вторично» [III.89, с. 188].

Но, как вспоминал Адамар более полувека спустя, события разворачивались иначе:

«Когда я представил мою докторскую диссертацию на рассмотрение Эрмиту, он заметил, что было бы очень полезно найти приложения. В тот момент я не знал ни одного возможного приложения. Но в промежутке между днём, когда я подал рукопись, и днём, когда я защищал диссертацию, я узнал, что Академия наук предложила в качестве конкурсной темы решить одну важную проблему... и оказалось, что результаты моей диссертации дают решение этого вопроса. Я руководствовался лишь чувством интереса к проблеме, и оно меня вывело на правильный путь» [I.372, с. 127—128].

Упомянутая здесь важная проблема касалась некоторого пробела в работе Римана, который Адамару удалось восполнить. Речь шла о функции $\Xi(z)$, тесно связанной с дзета-функцией Римана $\zeta(z)$. Ход рассуждений Римана по существу опирался на некоторое представление функции $\Xi(z)$, аналогичное следующему произведению, полученному Эйлером для синуса:

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{z}{\pi n}\right)^2\right).$$

Обоснование представления функции $\Xi(z)$, данное Риманом, не имело никакого отношения к доказательству, представленному Адамаром тридцатью четырьмя годами позднее. Достижение Адамара было побочным следствием его результатов в теории целых функций, т. е. функций, представимых степенными рядами, сходящимися на всей плоскости.

В 1869 г. Вейерштрасс показал, что эти функции являются в некотором смысле «многочленами бесконечной степени», выведя для произвольной целой функции следующую формулу факторизации:

$$f(z) = e^{Q(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{P_n(z/z_n)}, \tag{1.3}$$

где Q — другая целая функция, P_n — многочлены, а z_n — последовательность ненулевых корней уравнения $f(z) = 0$. Этот результат, в частности, приводит к фундаментальной теореме Миттаг-Леффлера (1877) о мероморфных функциях, которая дает аналог разложения рациональной функции на элементарные дроби. Но от теоремы Вейерштрасса до разложения целой функции $\Xi(z)$ в произведение, не содержащее экспоненциальных множителей, долгий путь. Последующее развитие этой теории происходило в работах Лагерра (1872) и Пуанкаре (1882—1883), оказавших существенное влияние на исследования Адамара. Метод, который Адамар применил в своей диссертации к степенным рядам с конечным радиусом сходимости, оказался весьма полезным. Адамар обнаружил взаимосвязь между поведением коэффициентов c_n и распределением нулей целой функции и придал формуле Вейерштрасса более явный вид для функций, растущих медленнее, чем $\exp(|z|^\lambda)$. Проверка отсутствия экспоненциальных множителей у функции $\Xi(z)$ стала легко выполнимой.

Свои результаты по целым функциям и дзета-функции Римана Адамар изложил в обширной статье [I.15], которую представил жюри конкурса на соискание Большой премии Академии наук. Всего жюри получило две работы. Одна из них была отвергнута как слишком элементарная и нарушающая формальное требование: она была подписана не девизом, а фамилией автора. Статья Адамара имела в качестве девиза слова Паскаля: «Искусство обоснования истин уже открытых и их ясное изложение, в результате чего их доказательство было бы неопровержимым, — вот то, что я хочу дать». Стилтьес не представил своей работы, и 19 декабря 1892 г. Большая премия была вручена Адамару. Гипотеза Римана остается недоказанной до настоящего времени.

Глава 2

На рубеже веков

§ 2.1. Женитьба

В городском зале 1-го округа Парижа 28 июня 1892 г. Жак Адамар сочетался браком с Луизой Анной Тренель, его единственной любовью и спутницей на протяжении всей жизни. Он знал ее с детства, ее мать Сесиль была подру-

Луиза-Анна Тренель. Рисунок Н. Зингера по старой фотографии.

гой Клер Адамар. Её отцом был Исаак Леон Тренель, директор Французской раввинской семинарии[1], превосходный учитель Талмуда, автор «Жизни Гиллеля Древнего», соавтор (вместе с Н. Ф. Сандером) «Древнееврейско-французского словаря» и основатель Общества друзей еврейской науки. Он был отпрыском старинного еврейского рода с корнями из Меца.

[1] Seminaire Israélite de France (École rabbinique).

У Тренелей было шесть детей: Яков, Марианна, Регина, Белла, Марк и Луиза. Луиза была младшей, и она была на три года моложе Жака. Старший сын Яков был преподавателем латыни, «сильно опередившим свое время: он приводил в изумление всех инспекторов, потому что в его классе говорили на латыни» [IV.1, с. I(4)]. Марк Тренель, сверстник Адамара, впоследствии стал врачом.

Жак часто посещал счастливый и гостеприимный дом Тренелей. Жаклин Адамар вспоминает: «Мама часто рассказывала мне о долгих играх в крокет, устраиваемых в саду раввинской семинарии, особенно о тех, которые происходили в 1884 г., когда отец сдавал вступительные экзамены в Политехническую и Нормальную школы. Старшим сестрам вменялось в обязанность сообщать ему, который час. Жак уходил из дома, прося сестер не прикасаться к шарам. Когда он возвращался, никто, казалось, не интересовался, как он сдал экзамены: „Жак, твоя очередь, ты опаздываешь“» [IV.1, с. I(7)].

Французская раввинская семинария на улице Воклэн, 9, 5-й округ, Париж

Обстоятельства, связанные с женитьбой Адамара, также описаны его дочерью Жаклин:

«Разумеется, он думал о Луизе Тренель, его подруге по детским играм. Но моя бабушка сумела внушить ему, что, женившись прямо сейчас, он не добьется ничего хорошего. Поэтому он не заводил разговора о браке. Родители моей матери, видя, что он не решается сделать предложение, стали оказывать давление на дочь, и она, огорчённая, уступила их настояниям и согласилась на помолвку с молодым человеком, которого они ей представили».

«Во время одной вечеринки кузина сообщила моему отцу: „Ты знаешь, Луиза Тренель помолвлена“. Не слушая более ни слова, мой отец оставил кузину немедленно, прямо посреди вальса, и бросился к Тренелям. Он заявил им, что помолвка невозможна и что он откладывал предложение только потому, что ожидал, когда займет лучшее положение! Наконец вмешался отец Робера Дебре[1]. Он оказал давление на мою бабушку Адамар и взял на себя неблагодарную задачу принести извинения покинутому жениху... и всё закончилось хорошо» [IV.1, с. I(9)].

В день помолвки Жак еще раз продемонстрировал свою рассеянность. Его мать купила кольцо для помолвки, и Жак должен был отдать его Луизе. Вечером мать спросила Жака, понравилось ли кольцо невесте. «Да оно всё ещё у меня в кармане, я забыл его отдать», — ответил Жак [IV.1, с. I(9)].

§ 2.2. Бордо. Дюэм и Дюркгейм

В 1893 г. Адамар и его жена переехали в Бордо, винную столицу Франции, с населением более чем в 250 тысяч жителей и университетом, основанным

Старое здание университета Бордо, ныне Музей Аквитании

в XV в. Чета Адамаров поселилась в небольшом домике по адресу бульвар Таланс, 210. Адамар начал свою деятельность в Бордо в качестве лектора (chargé de cours) на факультете естественных наук университета. Он читал курс астрономии и механики. В отличие от ситуации в лицее Бюффона отношения Адамара

[1]Робер Дебре, знаменитый врач, был сыном главного раввина Симона Дебре и Марианны Тренель, сестры Луизы Тренель.

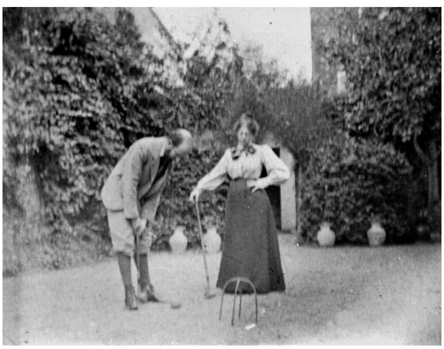
Дом в Бордо, в котором Жак и Луиза Адамар жили с 1893 по 1897 г. (ныне бульвар Президента Франклина Рузвельта, 52)

со студентами и администрацией университета были замечательными, как видно из следующего отзыва декана факультета естественных наук за 1895 г.

«Месье Адамар пользуется у студентов, особенно у лучших, настоящим авторитетом. Он обладает тонким и острым умом и мыслит замечательно ясно. Факультет рад иметь его в числе своих сотрудников и намерен предоставить ему профессуру к концу года» [IV. 25]. В результате 1 февраля 1896 г. Адамар стал профессором астрономии и теоретической механики. Звание полного профессора он получил всего лишь через два года после начала своей университетской карьеры, что было необычайно быстрым продвижением по службе.

Именно в Бордо 5 октября 1894 г. у четы Адамаров родился первый сын Пьер. Вот что писала об этом периоде Жаклин Адамар:

«Родители всегда говорили мне, что три года, проведённые ими в Бордо, были самыми счастливыми в их жизни, потому что, как они объясняли, в провинции



Семья Адамаров — молодожёны

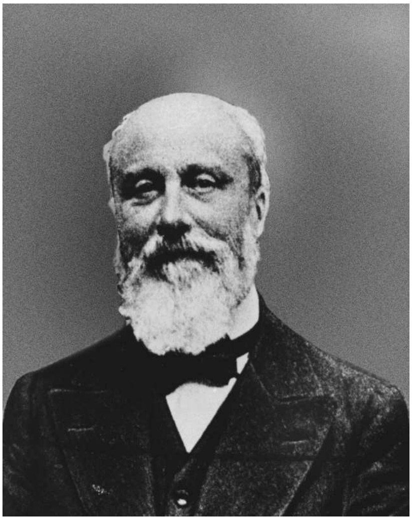
у них было достаточно времени и для работы, и для личной жизни. Отношения между моими родителями и обществом (разумеется, винодельческим) Бордо немного отличались от отношений, сложившихся у других профессоров. Винодельческая аристократия вряд ли питала какое-то уважение к „бюрократам“, и жена одного из местных аристократов, принимая жену префекта, объясняла, провожая гостью к дверям: „Надеюсь, Вы меня извините, не так ли? Мы никогда не наносим ответные визиты государственным служащим“. Но мои родители, будучи очень музыкальными, ко всеобщему удивлению были легко приняты в светском обществе» [IV.1 с. I(10)].

Однажды в самом начале их жизни в Бордо молодая чета Адамаров была приглашена на званый вечер, устроенный в их честь. Они сидели вместе с другими гостями. Время было уже позднее, но гости не расходились. Часы пробили полночь, но все оставались на своих местах. И только после полуночи Луизе вдруг пришло в голову, что, как почётные гости, они с Жаком должны были первыми покинуть вечер. Этот эпизод нам рассказал Ш. Агмон, который узнал о нем от мадам Адамар в 1948 г. В то время молодой Агмон был приглашен своим учителем Ш. Мандельбройтом в дом Адамара в Париже, и жена Адамара, по словам Агмона, «весьма живая и разговорчивая дама», рассказала ему эту историю. «После этого, — добавил Агмон, — я подумал, что самое время и нам откланяться».

Жак, Луиза и Пьер в Бордо

Адамар снова встретился с Пьером Дюэмом, который читал лекции по физике в том же университете. Этот человек — фигура настолько значительная и его роль в творчестве Адамара столь велика, что о нём стоит рассказать подробнее. В большой статье Миллера мы читаем:

«Пьер Дюэм являл собой редкий, если не сказать уникальный, пример учёного, чей вклад в науку (в термодинамику, гидродинамику, теорию упругости и физическую химию), философию науки и историографию науки имел большое значение и был вполне профессионален во всех трёх областях. Значительная часть его чисто научных работ к настоящему времени забыта. Кажущаяся лёгкость, с которой он переходил от одной области естествознания к другой, была обусловлена его убеждённостью в целостности природы научных теорий, сочетавшейся с жёсткой ультракатолической жизненной позицией...» [III.276 с. 225].



Пьер Дюэм (1861—1916)

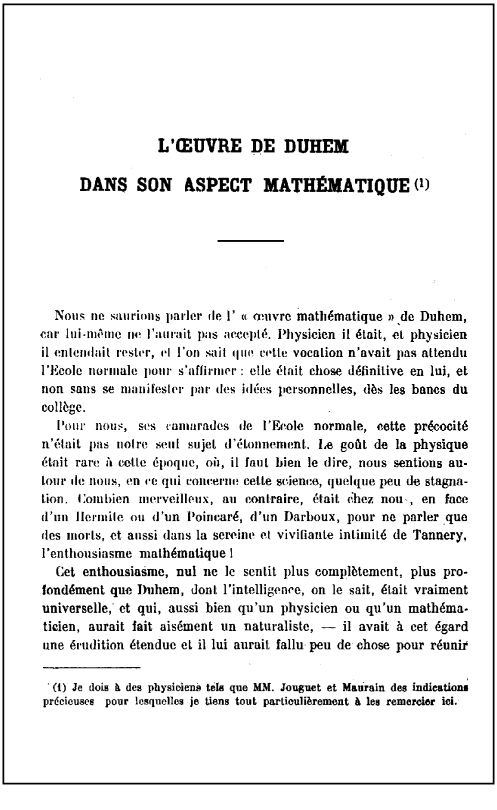
Ещё будучи студентом Нормальной школы, Дюэм представил диссертацию, в которой развивал концепцию термодинамического потенциала в химии и физике и критиковал исследования 20-летней давности, принадлежавшие знаменитому химику Марселену Бертло. Дюэм был прав, а Бертло влиятелен[1], и в результате диссертацию отвергли. Через четыре года, в 1888 г., Дюэм защищает другую диссертацию, по теории магнетизма, в которой было довольно много математики. Его первая диссертация была опубликована в 1886 г. в виде книги «Термодинамический потенциал», но потребовалось более десяти лет, чтобы точка зрения Дюэма была более или менее принята. В обширной монографии Яки о Дюэме говорится следующее:

«Несмотря на растущее осознание научного триумфа, одержанного над ним Дюэмом, Бертло не мог согласиться с тем, чтобы Дюэм получил кафедру в Па-

[1] Любопытная деталь: Бертло был министром иностранных дел в 1895—1896 гг. Он похоронен в Пантеоне, и в Париже есть улица Бертло.

риже. Ставкой была известность теоретической интерпретации, которую Бертло дал своим обширным и весьма ценным экспериментальным исследованиям. Желание Бертло защитить свою интерпретацию от разрушительной критики Дюэма по-человечески было вполне понятно: предоставление его оппоненту кафедры в Париже придало бы критике официальный характер и сделало бы научный спор предметом публичного обсуждения. Именно в этом причина пренебрежительного отношения, которое Дюэм ощущал в течение тридцати лет, со времени защиты своей первой докторской диссертации до самой смерти, т. е. на протяжении всей академической карьеры. Без знания этих обстоятельств трудно понять всю драму его жизни» [III.194, с. 162].

Однажды Дюэму предложили пост профессора истории науки в Коллеж де Франс, но он отказался, заявив, что он физик и не желает появляться в Париже «с черного хода». В 1913 г. Дюэм стал членом-корреспондентом Института Франции. В 1916 г., во время пешего похода на каникулах, он умер от сердечного приступа, когда ему было всего 55 лет.



L'ŒUVRE DE DUHEM

DANS SON ASPECT MATHÉMATIQUE (1)

Nous ne saurions parler de l' « œuvre mathématique » de Duhem, car lui-même ne l'aurait pas accepté. Physicien il était, et physicien il entendait rester, et l'on sait que cette vocation n'avait pas attendu l'Ecole normale pour s'affirmer : elle était chose définitive en lui, et non sans se manifester par des idées personnelles, dès les bancs du collège.

Pour nous, ses camarades de l'Ecole normale, cette précocité n'était pas notre seul sujet d'étonnement. Le goût de la physique était rare à cette époque, où, il faut bien le dire, nous sentions autour de nous, en ce qui concerne cette science, quelque peu de stagnation. Combien merveilleux, au contraire, était chez nous, en face d'un Hermite ou d'un Poincaré, d'un Darboux, pour ne parler que des morts, et aussi dans la sereine et vivifiante intimité de Tannery, l'enthousiasme mathématique !

Cet enthousiasme, nul ne le sentit plus complètement, plus profondément que Duhem, dont l'intelligence, on le sait, était vraiment universelle, et qui, aussi bien qu'un physicien ou qu'un mathématicien, aurait fait aisément un naturaliste, — il avait à cet égard une érudition étendue et il lui aurait fallu peu de chose pour réunir

(1) Je dois à des physiciens tels que MM. Jouguet et Maurain des indications précieuses pour lesquelles je tiens tout particulièrement à les remercier ici.

Статья Адамара о математических аспектах работы Дюэма, 1927

Дюэм успел сделать в науке поразительно много. Им было опубликовано около 400 статей и 22 книги общим объёмом в 45 томов. Его работы относятся к термодинамике, теории электромагнитного поля, гидродинамике, теории упругости, философии и истории науки. Среди его книг — «Эволюция механики» (1903), «Физическая теория, её предмет и структура» (1906), трёхтомник «Этюды о Леонардо да Винчи» (1906—1913) и десятитомная «Система мира. История космологических учений от Платона до Коперника», первый том которой появился в 1913 г., а последний — в 1959 г., посмертно. К этому можно добавить, что Дюэм был превосходным живописцем и знатоком теории искусства. Что касается политики и религии, то Дюэм был крайне правым, антиреспубликанцем и католиком-клерикалом. Адамар испытывал к Дюэму дружеские чувства, хотя их взгляды почти во всём диаметрально расходились.

Адамар писал: «Очень часто наши разговоры в Бордо являлись продолжением наших бесед в Нормальной школе, причём с того же самого места, на котором мы когда-то остановились, и рассуждения этого логика казались мне незыблемо интуитивно ясными!» [I.263, с. 639]. Беседы с Дюэмом в Бордо о проблемах теории упругости, распространении волн и о вариационных принципах механики помогли Адамару определить тематику того направления, которое уже в XX в. стало в его творчестве доминирующим. Сам Адамар подтверждает это следующим образом:

«Наше общение на факультете естественных наук в Бордо предоставило мне редкую возможность дополнить чтение ценным и непрерывным обменом взглядов. Этому чтению, этому обмену взглядов я обязан большинством своих дальнейших работ — почти всеми из посвящённых вариационному исчислению, теории Гюгонио, гиперболическим уравнениям в частных производных, принципу Гюйгенса.

Сам Дюэм обращался почти ко всем этим вопросам в ходе своей колоссальной работы, и большинство теорий, которые он столь удачно и ясно объяснил, помогли ему как при некоторых частных наблюдениях, так и при получении выводов фундаментальной важности» [I.263, с. 644—645].

В Бордо Адамар встретил еще одного выдающегося бывшего студента Нормальной школы, Эмиля Дюркгейма, одного из создателей французской школы социологии. В 1887 г. Дюркгейм был назначен лектором в университете Бордо и начал читать первый курс социологии во Франции, стал профессором в 1896 г. и преподавал в университете до 1902 г. Он приобрел известность своими трудами по разработке адекватных научных методов изучения общества и попытками достичь понимания основы социальной стабильности. В частности, он первым развил теорию мотивации самоубийства (1897). Впоследствии в своей книге по психологии открытия в области математики Адамар упоминает один из вопросов, обсуждавшихся во время дискуссий с Дюркгеймом, — различие во взглядах на источники морали.

«Впервые я обратил на это внимание во время бесед, которые я вёл в Бордо с крупным философом Эмилем Дюркгеймом: он считал, что мораль может и должна базироваться на научной основе. Я же считаю, что одна лишь научная основа не является достаточной для построения морали — мнение, которое Дюркгейм встретил фразой вроде следующей: „Вы увидите, он ещё наговорит глупостей“» [I.404, с. 110].

Эмиль Дюркгейм
(1858—1917)

На протяжении всей свой жизни Адамар не изменил своего мнения по этому вопросу, и его позиция совпадала с мнением Пуанкаре [I.404, приложение II]. Во многих случаях история первой половины XX в. давала Адамару богатый материал для размышлений о проблеме взаимодействия морали и науки (см., например, его статьи [I.363], [I.389]).

§ 2.3. Nulla dies sine linea[1]

Творческий взлёт, предшествовавший переезду Адамара в Бордо, явился началом длительного, поразительно интенсивного периода его деятельности. В 1893 г. Адамар опубликовал три статьи, в 1894 г. — пять, в 1895 г. — восемь статей, в 1896 и 1897 гг. — по тринадцать. Но дело не только в количестве: история математики знает великих учёных, оставивших очень мало работ. Удивительна лёгкость, с которой Адамар переключается с одной области на другую, создавая в каждой из них подлинные шедевры. Упомянем некоторые из них, начиная с небольшой работы, которая, несмотря на малый объём, приобрела широкую известность.

[1] Ни дня без строчки (лат.) — слова римского писателя и оратора Плиния Младшего.

Неравенство

$$|\det(a_{ij})| \leqslant \prod_j \Bigl(\sum_i |a_{ij}|^2\Bigr)^{1/2}, \tag{2.1}$$

«самое знаменитое из неравенств для определителей» [III.22, с. 64], было доказано в статье Адамара [I.16] 1893 г. Адамара особенно интересовал случай равенства, и он показал, что матрицы размера $n \times n$ с элементами ± 1, для которых при $n > 2$ равенство выполняется, существуют, только если n делится на четыре. Адамар привел примеры таких матриц при $n = 12$, $n = 20$, а также при n, равном целой степени числа 2. Позднее матрицы Адамара оказались полезными в теории кодирования, статистике, технике связи и оптике.

Адамар не подозревал, что неравенство (2.1) будет играть решающую роль в теории интегральных уравнений Фредгольма (1900, 1903). Это интегральные уравнения вида

$$g(t) - \int_a^b K(t, \tau) g(\tau)\, d\tau = f(t), \tag{2.2}$$

где ядро K и правая часть f заданы, а функция g неизвестна. Такие уравнения возникают в геометрических и физических задачах, не говоря уже о многочисленных приложениях в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Абель и Лиувилль уже решали интегральные уравнения специального вида с одним переменным пределом интегрирования, но общую теорию для этого случая впервые разработал Вито Вольтерра с помощью метода последовательных приближений (1896). В случае постоянных пределов интегрирования, который оказался более сложным, Фредгольм рассматривал уравнение (2.2) как предел последовательности алгебраических систем, порядок которых бесконечно возрастает. Именно здесь ему понадобилось неравенство Адамара для оценки определителей, возникающих при решении таких систем. В действительности Фредгольм пришел к неравенству (2.1), не зная работы Адамара 1893 г., хотя никогда не подчеркивал это в своих публикациях.

В статье [I.40], опубликованной в 1896 г., Адамар сформулировал свою знаменитую теорему о трёх кругах. Пусть f — функция, аналитическая в кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_3$, $r_1 < r_2 < r_3$, и пусть M_1, M_2 и M_3 означают максимумы функции $|f(z)|$ на окружностях $|z| = r_1$, r_2, r_3. Тогда

$$M_2^{\log(r_3/r_1)} \leqslant M_1^{\log(r_3/r_2)} M_3^{\log(r_2/r_1)}.$$

Это неравенство имеет многочисленные приложения и, в частности, играет важную роль в современной теории операторов.

В 1896 г. была опубликована сенсационная работа Адамара с решением давно стоявшей проблемы распределения простых чисел [I.45][1]. Простые числа хаотически распределены среди целых чисел, но ещё Лежандр в 1798 г., анализируя таблицу простых чисел, высказал гипотезу о том, что их плотность приближенно равна $\mathrm{const}/\log x$, а Гаусс, также исходя из анализа таблицы простых чисел,

[1]Истории этой проблемы посвящены, например, книги [III.118] и очень доходчиво написанные статьи [III.151], [III.359].

Ивар Фредгольм (1866—1927)

Ученую степень доктора наук получил в Упсале в 1898 г., после чего до конца жизни работал в Стокгольмском университете. В 1899 г. Фредгольм прослушал в Париже курсы лекций, которые читали Пуанкаре, Пикар и Адамар. Хотя наследие Фредгольма мало по объёму — полное собрание его научных работ насчитывает всего 160 страниц, — его классические работы по интегральным уравнениям принесли ему широкую известность.

предсказал более точное приближение

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \tag{2.3}$$

где $\pi(x)$ — количество простых чисел, не превышающих x. П. Л. Чебышёв в 1850 г. строго доказал неравенство

$$0{,}9219\frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1{,}10555\frac{x}{\log x}, \tag{2.4}$$

а также проверил, что константа в вышеупомянутой гипотезе Лежандра не может отличаться от 1.

Дальнейший вклад в изучение этой проблемы был внесен восьмистраничной статьей Римана в 1859 г. Он попытался доказать, что $\pi(x)$ асимптотически равно $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Хотя доказательство Римана было неполным, его метод, основанный на исследовании функции $\zeta(x)$ как функции комплексного переменного, оказался весьма важным и оказал сильное влияние на все последующие события. Именно в этой статье Риман сформулировал упоминавшуюся выше гипотезу о нулях функции $\zeta(x)$.

Наконец, более чем через тридцать лет после статьи Римана, загадочный закон Гаусса (2.3) был обоснован одновременно и независимо с помощью различных доказательств Адамаром и Валле Пуссеном. Они показали, что дзета-функция не имеет нулей на прямой $\operatorname{Re} z = 1$, что, разумеется, гораздо слабее, чем гипотеза Римана, но оказалось достаточным для получения теоремы о простых числах. «Именно этот результат из области, которую, следуя Вессио, можно назвать трансцендентной арифметикой, принес имени Адамара широкую известность среди математиков всех стран, когда ему исполнилось всего лишь двадцать семь лет», — писал Фреше [II.13, с. 4083].

Шарль Валле Пуссен (1866—1962)

С 1891 г. работал в Лёвенском университете. Помимо распределения простых чисел и дзета-функции Римана, в круг его научных интересов входили тригонометрические ряды, полиномиальная аппроксимация, обыкновенные дифференциальные уравнения, конформные отображения, квазианалитические функции и т. д.

В 1896 г. Адамар получил премию Бордена (Prix Bordin)[1] за свою работу «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [I.48]. Адамар проявлял интерес к этой тематике с первого года преподавания механики в Бордо. Тема, объявленная Академией наук, гласила: «Усовершенствование важных аспектов теории

[1] Борден был нотариусом, который по завещанию оставил Институту Франции некоторую сумму, проценты от которой шли на выплаты премий. По условиям завещания каждая из пяти академий ежегодно объявляла тему конкурса на соискание премии, причём тема должна была служить общему благу и прогрессу науки и искусства.

геодезических линий». Под геодезической принято понимать кривую на поверхности, которая «в малом» является кратчайшей. Геодезическими на плоскости являются прямые, геодезическими на сфере — окружности больших кругов.

Жак Адамар в 1890-е гг.

Теория геодезических к моменту объявления конкурса на соискание премии Бордена имела богатую историю, восходившую к трудам Гаусса и его предшественников. В качестве примера упомянем теорему Гаусса об ортогональности геодезических, исходящих из некоторой точки, к геодезической окружности с центром в этой точке (1828). Несколько глав книги «Лекции по общей теории поверхностей» Дарбу содержат обширную информацию о геодезических.

По какой причине Академия выбрала для конкурса на соискание премии Бордена именно эту тему? Ответ состоит в том, что факты о геодезических, полученные ранее, относились только к свойствам геодезических «в малом», а их глобальная структура оставалась terra incognita. Еще Якоби получил явные формулы для геодезических на эллипсоиде (1838), которые показали, что поведение геодезических далеко не просто.

Имели ли «траектории в динамике» в заголовке конкурсной работы Адамара какое-то отношение к геодезическим, исследовать которые предложила конкурсантам Академия наук? Конечно, да, и объяснение лежит в глубокой аналогии между геодезическими и траекториями материальных точек на поверхности[1]. Действительно, и геодезические, и динамические траектории подчиняются

[1] Истории геометризации механики посвящена статья Лютцена [III.252].

аналогичным дифференциальным уравнениям. Следовательно, изучая глобальное поведение решений определенного класса нелинейных дифференциальных уравнений, Адамар мог получить результаты, представляющие интерес и для механики, и для геометрии.

Среди других свойств геодезических на поверхностях отрицательной кривизны Адамар, в частности, открыл поразительный эффект неустойчивости ограниченных геодезических траекторий относительно произвольно малых начальных возмущений. Статья Адамара вместе с работами Пуанкаре по небесной механике заложила основание современной теории хаоса.

Работа Адамара была написана под влиянием серии работ Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1885), в которых Пуанкаре заложил основы качественной теории дифференциальных уравнений, занимающейся изучением свойств решений без их явного нахождения. Используя геометрические методы, Пуанкаре описал все возможные формы траекторий в случае системы первого порядка с двумя неизвестными функциями.

Так как подход Пуанкаре оказался неприменимым к уравнениям второго порядка, которым занимался Адамар, он изобрел новый метод, основанный на исследовании экстремальных значений некоторой вспомогательной функции. Выбирая удобным образом эту функцию, можно было прийти к заключениям о поведении динамических систем. В качестве примера в статье Адамара была доказана следующая теорема: две произвольные замкнутые геодезические на замкнутой поверхности положительной кривизны (т. е. границе выпуклого тела) имеют общие точки.

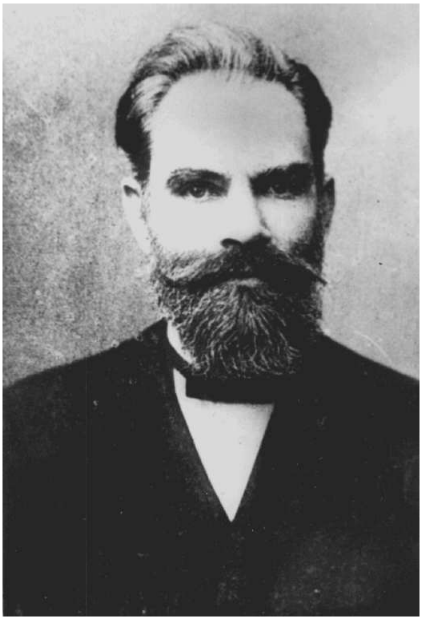
Высокую оценку жюри конкурса заслужил сам метод Адамара, а не полученные им результаты (не очень многочисленные и отнюдь не окончательные). Пуанкаре, который был рецензентом, писал:

«Жюри сочло, что автор проявил большое остроумие, выдвинув много новых идей, которые уже на первый взгляд позволяют предполагать, что когда-нибудь они принесут богатый урожай; только недостаток времени не позволил автору более основательно воспользоваться преимуществом, предоставляемым выдвинутыми им идеями. Даже те немногие точные результаты, которые сформулированы в работе, не оставляют сомнения в этом отношении» [III.334, с. 1111].

Через два года Адамар оправдал эти ожидания в своей статье [I.62], посвященной геодезическим на поверхностях отрицательной кривизны (например, таких, как однополостный гиперболоид). На этот раз его метод позволил дать полное описание всех типов геодезических на таких поверхностях.

Чтобы решить эту классическую проблему дифференциальной геометрии, занимающейся изучением гладких поверхностей и кривых, Адамару пришлось воспользоваться понятиями канторовской теории множеств, которую в то время считали в основном только средством анализа патологических функций.

Благодаря своей статье, представленной на соискание премии Бордена, Адамар вошел в контакт с А. М. Ляпуновым, хорошо известным своими работами по теории устойчивости механических систем и исследованиями фигур равновесия вращающейся жидкости. Кроме того, Ляпунов внес важный вклад в теорию



Александр Михайлович Ляпунов
(1857—1918)

потенциала, переживавшую в то время период интенсивного развития. Узнав о том, что одна из его теорем, к счастью не главная, уже доказана в диссертации Ляпунова «Общая проблема устойчивости движения», Адамар написал об этом Ляпунову[1].

Лето 1897 г. Адамар провел в Сеноне близ Бордо вместе с женой. Он не поехал на Первый международный математический конгресс в Цюрих. Объяснение

[1]Здесь мы приведём переводы двух писем Адамара Ляпунову [IV.37], хранящихся в Санкт-Петербургском отделении архива Российской академии наук.

«Бордо, 29 декабря 1896 г.

Месье, я занимался исследованием неустойчивости свободно опирающейся пластины в моей статье, награждённой Академией наук в прошлом году, и затем узнал в Париже о существовании Вашего важного трактата (опубликованного в 1892 г.), в котором Вы решали ту же задачу и, несомненно, получили много других результатов о траекториях в динамике. Могу ли я просить Вас сообщить точное название Вашей работы, чтобы мы могли ее взять на факультете?

Благодарю Вас заранее и прошу принять уверения в уважении.

Жак Адамар».

«Парижский университет, 9 августа 1907 г.

Месье и глубокоуважаемый коллега!

Я буду очень рад увидеть переведенной на французский язык Вашу прекрасную работу 1892 года об устойчивости движения. У меня есть некоторая надежда организовать этот перевод. Но прежде всего я хотел бы знать, расположены ли Вы дать согласие на осуществление этого намерения. Не будете ли Вы добры дать мне ответ по этому поводу? Я буду Вам очень признателен и заверяю Вас в своих чувствах уважения и преданности.

Вы также доставите мне большое удовольствие, указав сведения о других, ещё не переведённых Ваших статьях на восточноевропейских языках, перевод которых Вы сочтёте желательным.

Жак Адамар».

этому можно найти в его письме Гурвицу, который был членом организационного комитета:

Уважаемый месье!

Я весьма признателен за честь, которую Вы оказали мне, пригласив выступить на Конгрессе, и хотел бы уведомить Вас, что я не отклонил бы это приглашение, не сделав всё возможное для его принятия.

Однако я не могу ничего обещать Вам, так как в начале августа я ожидаю рождения ребенка, и мое решение непременно будет зависеть от состояния здоровья жены.

Еще раз прошу Вас принять, вместе с заверениями в том, что я приложу все усилия, чтобы присоединиться к Вам, мои наилучшие пожелания.

Жак Адамар.

Пользуясь удобным случаем, хочу сообщить Вам о том интересе, который я питаю к Вашему исследованию, анонсированном в статье месье Франеля, об обобщении на более общие ряды фундаментального соотношения, которое выполняется для $\zeta(z)$ и рядов Дирихле. Я хочу поскорее увидеть Ваше исследование опубликованным [IV.49].

Адольф Гурвиц (1859—1919)

Работал в области теории функций комплексного переменного, теории автоморфных функций, рядов Фурье и теории чисел. В частности, в 1895 г. опубликовал критерий неположительности действительных частей всех корней многочлена. Этот результат играет важную роль в теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений, где его интерпретируют как критерий устойчивости их решений. Гурвиц доказал, что формула, представляющая произведение двух сумм n квадратов в виде суммы n квадратов, существует только для $n = 1, 2, 4, 8$.

Луиза с Пьером
и Этьеном

26 июля у Адамара родился его второй сын Этьен. Через несколько дней после этого он отправил Гурвицу текст своего краткого доклада «О некоторых возможных приложениях теории множеств», в котором отметил полезность изучения множеств функций со свойствами, отличными от свойств множеств чисел или n-мерных векторов. Доклад Адамара был зачитан Пикаром 10 августа на заседании секции анализа и теории функций[1].

§ 2.4. Влияние на Бореля

Помимо уже упоминавшейся статьи о геодезических на поверхностях отрицательной кривизны Адамар опубликовал в 1898 г. заметку об интегральных инвариантах в оптике и ряд других работ. Среди них была статья «Теоремы о рядах целых функций», в которой была доказана теорема об умножении особенностей аналитических функций. Напомним, что Адамар интересовался этими особенностями еще в студенческие годы, и вот он вернулся к ним снова.

[1]Заслуживает внимания заявление Бурбаки: «Официальное признание теории множеств произошло на Первом международном математическом конгрессе (Цюрих, 1897), на котором Адамар и Гурвиц привели много примеров ее приложений в анализе» [III.58, с. 44].

Возможно, импульсом к его размышлениям послужило следующее простое наблюдение. Вместе с двумя геометрическими прогрессиями

$$\sum_{n\geqslant 0}\alpha^{-n}z^n \quad \text{и} \quad \sum_{n\geqslant 0}\beta^{-n}z^n$$

рассмотрим третью геометрическую прогрессию, которая получается при перемножении коэффициентов двух первых прогрессий:

$$\sum_{n\geqslant 0}(\alpha\beta)^{-n}z^n.$$

Суммируя каждую из этих прогрессий, нетрудно установить, что произведение полюсов α и β первого и второго ряда равно полюсу $\alpha\beta$ третьего ряда. Может показаться, что то обстоятельство, что умножение коэффициентов приводит к умножению полюсов, — это чистое совпадение, справедливое только для данного конкретного примера. Но Адамару удалось открыть общий закон, по существу показывающий, что особые точки ряда

$$\sum_{n\geqslant 0}a_nb_nz^n \tag{2.5}$$

содержатся в множестве $\{\alpha\beta\}$, где α, β — особые точки рядов

$$\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n \quad \text{и} \quad \sum_{n\geqslant 0}b_nz^n.$$

Этот результат вызвал поток последующих исследований многих хорошо известных математиков. В частности, на работу Адамара немедленно откликнулся Эмиль Борель, который в том же 1898 г. показал, каким образом характер особых точек ряда (2.5) зависит от особых точек $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$.

Борель стал первым и наиболее блестящим последователем Адамара в теории функций комплексного переменного, и имена Адамара и Бореля нередко стоят рядом в монографиях и учебниках по теории аналитических функций. Когда они встретились, Борель, который был на пять лет моложе Адамара, ещё учился в Нормальной школе, а Адамар преподавал в лицее Бюффона. В 1897 г. оба вернулись в Париж: Адамар из Бордо, Борель из Лилля, где он с 1893 г. работал в университете.

Свои первые две заметки Борель опубликовал в 1890 г., когда он был всего лишь «новобранцем» (первокурсником, прошедшим обряд посвящения в студенты). Много лет спустя Борель вспоминал: «В то время, когда я в 1892 г. закончил свое обучение в Высшей Нормальной школе в Париже, теория аналитических функций была одной из научных областей, где все важные открытия были сделаны за последние десятилетия, но где, конечно же, многое еще предстояло сделать. Меня привлекала эта область и особенно исследование влияния особых точек

Эмиль Борель (1871—1956)

на свойства функций» [III.52, с. 2096]. В 1894 г. Борель защитил свою диссертацию «О некоторых вопросах теории функций». Будучи объемом менее пятидесяти страниц, диссертация привлекла общее внимание своей глубиной и оригинальностью, в ней предвосхищались многие последующие открытия Бореля в теории функций и теории меры.

Борель лучше, чем кто-либо, знал ранние работы Адамара и существенно использовал их в различных ситуациях. Например, еще в своей первой статье по теории мероморфных функций «Об одном приложении теоремы Адамара» (1894) Борель использовал свойство определителей из диссертации Адамара для доказательства того, что нерациональные мероморфные функции не представимы степенным рядом с целочисленными коэффициентами, — явление на первый взгляд совершенно неожиданное.

Кроме того, используя свои собственные методы, Борель сумел продвинуть некоторые из полученных Адамаром результатов об особых точках и целых функциях. Удобный случай представился в связи с теоремой из диссертации Адамара, в которой среди прочих Адамар рассмотрел следующий вопрос: когда граница круга сходимости состоит из особых точек? Иначе говоря, когда область аналитичности, определяемая степенным рядом, совпадает с его кругом сходимости? До Адамара было построено несколько примеров степенных рядов, обладающих этим свойством (Вейерштрассом, Дарбу, Ж. Таннери, Фредгольмом и др.), и все такие ряды имели бесконечно много больших лакун, или «пробелов», между ненулевыми коэффициентами. В своей диссертации Адамар доказал первую общую теорему, объясняющую это свойство. Он показал, что ни один степенной ряд $\sum\limits_{k\geqslant 1} a_k z^{n_k}$, где $n_{k+1}/n_k \geqslant \mathrm{const} > 1$, не допускает аналитического продолжения за границу своего круга сходимости. Однако теорема Адамара не была исчерпывающей: она охватывала все известные примеры, кроме одного, предложенного Фредгольмом (1890). В 1894 г. Адамар сообщил в беседе Борелю, что полученный им результат, вероятно, можно усовершенствовать так, чтобы он охватил и функцию Фредгольма, хотя метод, предложенный им в диссертации, по-видимому, недостаточен для этого. Вскоре Борелю с помощью совершенно другого метода в духе развитой им теории расходящихся рядов удалось достичь успеха. Чуть позже Фабри, искусно видоизменив подход Адамара, вывел еще лучшее условие.

Борель усовершенствовал теоремы Пуанкаре и Адамара о соотношении между коэффициентами, распределении нулей и росте целых функций, введя понятие порядка целой функции. Это позволило ему доказать утверждение о формуле Вейерштрасса (1.3), в некотором смысле обратное утверждению, полученному Адамаром, и в настоящее время формула разложения в теории функций комплексного переменного носит название «формула Адамара—Бореля».

Другим вопросом, вызвавшим общий интерес у Адамара и Бореля, стала классическая теорема Пикара (1879), гласившая, что отличная от константы целая функция принимает все конечные значения, кроме, быть может, одного (например, целая функция e^z принимает любое значение, кроме нуля). В своем доказательстве Пикар использовал эллиптические модулярные функции, введенные Эрмитом. В течение двенадцати лет все попытки доказать теорему Пикара без модулярных функций (загадочного трюка из другого раздела математики) были безуспешны. Это стало важной темой в теории аналитических функций, и Адамар первым продвинулся в желательном направлении в своей статье, представленной на соискание Большой премии (1893). Адамар дал «элементарное» доказательство теоремы Пикара, годное для специального класса целых функций. В 1896 г. Борель опубликовал первое доказательство для общего случая — в то время это было заметным событием. Следует упомянуть, что в своих рассуждениях Борель опирался на теорему Адамара о действительной части функции (1892) (неравенство между максимумом модуля и максимумом действительной части аналитической функции).

Новые аспекты теоремы Пикара были позднее выявлены более молодым другом Адамара Полем Монтелем, который окончил Нормальную школу в 1897 г. и до 1911 г. преподавал в различных лицеях. В 1907 г. Монтель защитил диссертацию «О бесконечных последовательностях функций», в которой рассмотрел так называемые нормальные семейства аналитических функций, тесно связанные с принципом компактности, изученным Асколи и Арцела. Понятие нормальных семейств оказало сильное влияние на различные разделы теории аналитических функций. Показав, что семейство аналитических функций, не принимающих двух фиксированных значений, нормально, Монтель пришел к новому доказательству теоремы Пикара.

В 1900-х гг. Адамар и Борель прекратили активную работу в теории функций комплексного переменного. Интересы Адамара постепенно переключились на дифференциальные уравнения, а Борель, уже получивший классические ре-

Поль Монтель (1876—1975) был профессором факультета естественных наук Парижского университета в 1919—1946 гг. В 1937 г. избран в Академию наук, в 1958 г. стал её президентом. Помимо теории функций комплексного переменного, работал в области геометрии, механики и истории математики.

зультаты в теории расходящихся рядов, а также в теории меры и интеграла, обратился к задачам теории вероятностей, статистики и теории игр.

§ 2.5. Дело Дрейфуса

В конце XIX века в связи с делом Дрейфуса Франция оказалась разделённой на два враждующих лагеря — на дрейфусаров и антидрейфусаров. Президент республики, парламент, офицерский корпус, политические партии, министры, знаменитые ученые и писатели, пресса, финансовые круги — все на несколько лет были втянуты в борьбу, носившую как политический, так и нравственный характер. По делу Дрейфуса существует огромная литература, начиная с множества брошюр и кончая такими трудами, как семитомная «История процесса Дрейфуса» Ж. Рэнака. Много места уделено этому делу в художественной литературе (назовём хотя бы роман Роже Мартена дю Гара «Жак Баруа», переведённый на русский язык). Драматическим эпизодам дела Дрейфуса посвящены пьесы и кинофильмы.

Все началось с того, что в сентябре 1894 г. французская разведка, имевшая агентов в германском посольстве в Париже, обнаружила письмо, содержащее опись секретных документов Генерального штаба французской армии, переданных автором записки немцам. Подозрение пало на Альфреда Дрейфуса, офицера французского Генерального штаба, из-за сходства его почерка с почерком автора записки. Хотя Дрейфус решительно отрицал свою вину, он немедленно был

Альфред Дрейфус
(1859—1935)

арестован и предстал перед военным трибуналом. Через два месяца, несмотря на шаткость предъявленного ему обвинения (только двое из пяти экспертов сочли, что записка написана его рукой), Дрейфус единодушным решением судей был сочтён виновным и приговорён к пожизненной каторге на Чертовом острове у побережья Французской Гвианы. Роковую роль в осуждении Дрейфуса сыграли тогдашний военный министр Мерсье и несколько высокопоставленных чинов французской армии.

То обстоятельство, что Дрейфус был евреем, стало решающим для армейской верхушки, заражённой шовинизмом и антисемитизмом. Несмотря на отчаянные усилия родных и близких Дрейфуса, располагавших обширными связями, попытки вызволить его были тщетны. После суда выяснилось, что судьи незаконно использовали информацию из секретного досье, содержание которого оставалось неизвестным защите. Но такие детали породили сомнения в виновности Дрейфуса только у небольшого круга людей, а широкая публика была убеждена в его виновности единодушным приговором военного трибунала. Журналист Леон Блюм, ставший впоследствии премьер-министром в правительстве Народного Фронта, писал: «Прошло около трёх лет с тех пор, как капитан Дрейфус был арестован, осуждён, разжалован и отправлен отбывать наказание. В течение нескольких недель драма находилась в центре общественного мнения, но быстро была забыта, отброшена и поглощена другими новостями. Никто больше не думает о Дрейфусе, и для того чтобы восстановить события, связанные с его именем, ныне необходимо значительное напряжение памяти» [III.43, с. 17].

Затем в 1896 г. полковник Генерального штаба Жорж Пикар[1] обнаружил документ, содержавший веские данные в пользу того, что Дрейфус невиновен и что виновником является другой офицер, майор В. Эстерхази. Полковник Пикар сообщил о своей находке своему начальству, но его начальники не захотели пересматривать дело Дрейфуса. За свою настойчивость Пикар был переведён по службе в отдалённую часть Туниса. В ноябре 1897 г. Матье Дрейфус, брат обвиненного в измене капитана, случайно узнал, что первоначальная записка была написана почерком, очень похожим на почерк Эстерхази, и сообщил об этом военному министру. Через два дня, 13 января 1898 г., Эстерхази предстал перед военным трибуналом, но тотчас же был оправдан.

Тогда же Эмиль Золя публикует в газете «L'Aurore» своё знаменитое открытое письмо «Я обвиняю», в котором, называя поимённо генералов и офицеров, уличает их в подтасовке фактов и фальсификации документов с целью осуждения Дрейфуса. Всемирно известный писатель добился, чтобы против него было возбуждено дело по обвинению в оскорблении армии. На состоявшемся вскоре процессе защитником Золя выступил выдающийся деятель французской социалистической партии Жан Жорес, который тоже становится борцом за освобождение Дрейфуса. С этого времени накал борьбы вокруг находящегося в заключении офицера достигает кульминации.

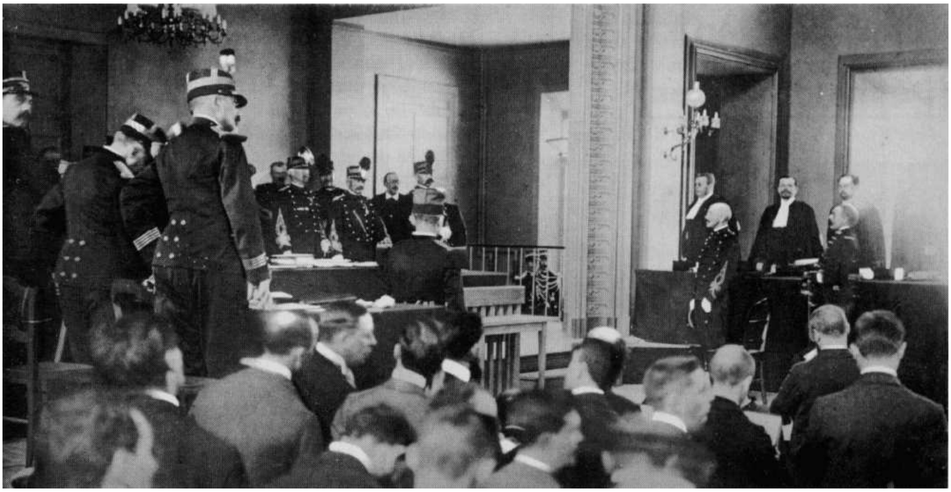
В январе 1898 г. петиции в поддержку Дрейфуса подписали многие французские интеллектуалы, в том числе Ж. Адамар, Э. Борель и физики Ж. Перрен, П. Ланжевен. Среди антидрейфусаров были М. Бертло, П. Дюэм и математики К. Жордан и Ж. Юмбер.

В августе 1898 г. обнаружилось, что важный документ, использовавшийся в качестве улики против Дрейфуса, фальсифицирован. Офицер разведки майор Анри признался, что подделал этот документ, и после ареста покончил с собой. В сентябре 1898 г. Эстерхази бежал в Англию, где сознался в шпионаже.

После длительного разбирательства апелляционный суд потребовал вторичного судебного расследования, и Дрейфус вновь предстал перед военным трибуналом, который открылся в 1899 г. в Ренне. 9 сентября 1899 г. Дрейфус снова был признан виновным пятью голосами против двух, но на этот раз «при смягчающих обстоятельствах». В этом же году он был помилован указом президента республики. Борьба за честное имя Дрейфуса продолжалась. Обнаружилось, что и другие «улики» были сфабрикованы, и наконец в 1906 г. приговоры двух предшествовавших трибуналов были отменены. Дрейфусу было присвоено звание майора, и он был награжден орденом Почетного легиона.

Когда дело Дрейфуса только начиналось, Адамар вместе с семьей жил в Бордо. Они были поражены арестом Дрейфуса. Их потрясение было очень велико, потому что Жак был дальним родственником жены Дрейфуса Люси, урожденной Адамар. Люси была дочерью кузена Амедея Адамара, Давида, богатого торговца

[1] Эта фамилия пишется по-французски Picquart в отличие от Picard — фамилии французского математика.



Чтение вердикта перед военным советом в Ренне, 1899

бриллиантами. Однако антисемитская подоплека дела Дрейфуса стала неожиданностью для Адамара. В 1956 г. Адамар вспоминал:

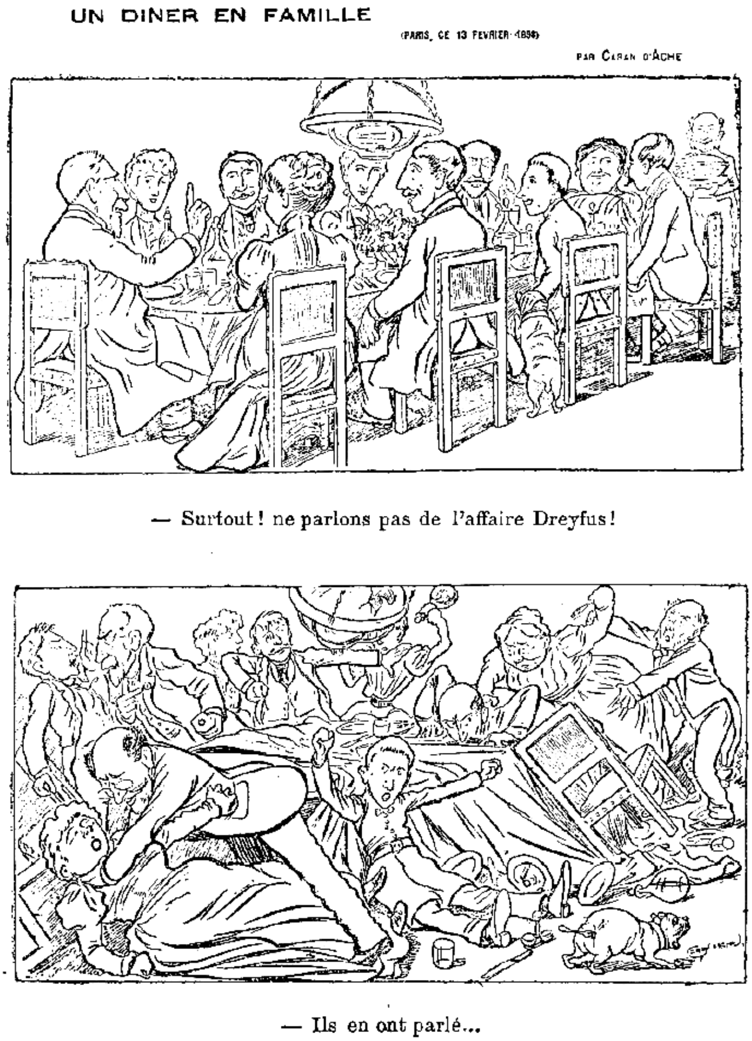
«Услышав новость об аресте, мой коллега по университету Бордо, где я в то время преподавал, физик Дюэм, ярый антисемит, с которым у меня, как ни парадоксально, сложились превосходные отношения, сказал мне: „Как можно утверждать, будто евреи не понимают друг друга? Вы только посмотрите на это море гнева!“ Я ответил: „Какое море гнева?“» [I.399, с. 80].

Как и многие другие, Адамар не имел причины подозревать, что была допущена тяжкая судебная ошибка: «„Интеллектуалы“ и особенно университетские ученые были очень „туги на подъём“. В Бордо, где я преподавал в университете, многие не видели ничего странного в вынесенном Дрейфусу приговоре» [I.399, с. 87].

И только переехав из Бордо в Париж в августе 1897 г., Адамар услышал аргументы против обвинения Дрейфуса. Вот что пишет Жаклин Адамар:

«Однажды отец был приглашен на прием, который давал управляющий Коллеж де Франс. Он сказал, что не хочет идти. Матушка возразила: „Ты не должен избегать общества“, и отец отправился на прием один. Время было позднее, и матушка начала беспокоиться: он не возвращался. Наконец он вернулся и объяснил, что встретился с влиятельными людьми, которые были уверены в том, что Дрейфус невиновен» [IV.1, с. I(10)].

Матье Дрейфус убедил Адамара в невиновности своего брата. Адамар стал активным дрейфусаром, и его взгляды на дело Дрейфуса обрели широкую известность в математических кругах. Когда Адамар однажды нанес визит Эрмиту, тот встретил его словами: «Адамар, Вы предатель». Адамар побледнел, а Эрмит как ни в чём не бывало продолжал: «Вы изменили анализу в пользу геометрии». Эрмит мог иметь в виду статью Адамара о траекториях в динамике [I.48, с. 48], незадолго до того представленную на соискание премии Бордена. «Типичная дурная шутка в духе того времени, когда предательство и измена были ключевыми словами общественной жизни Франции», — прокомментировал этот эпизод Ж.-П. Кахан [II.29, с. 25]. Имея в виду этот инцидент, Адамар заметил: «Эрмит, несомненно, питал ненависть к геометрии и однажды весьма необычно попенял мне за то, что я написал геометрическую статью» [I.372, с. 109].



Вырезка из газеты «Фигаро» от 14 февраля 1898 г. «Семейный ужин», автор Каран д'Аш. «Решено — о деле Дрейфуса не говорим. Но они о нём поговорили...»

Пенлеве сначала также был убеждён в виновности Дрейфуса, но позднее усомнился в справедливости приговора военного трибунала и стал дрейфусаром. Важную роль в его обращении сыграл один разговор с Адамаром весной 1897 г., который Пенлеве так описал в письме Миттаг-Леффлеру от 26 апреля 1899 г.:

«Передам Вам факты в нескольких словах: Жак Адамар, кузен жены Дрейфуса, как-то раз заговорил со мной о военном трибунале 1894 г. (за несколько месяцев до дела Эстерхази). Почти час Адамар пытался убедить меня в невиновности Дрейфуса и, наконец, столкнувшись с моим недоверием, изо всех сил постарался, чтобы я понял внутреннюю ценность его аргументов и его полную беспристрастность. Адамар сообщил мне, что совсем не знает Дрейфуса лично, что видел его всего лишь раз в жизни, что лицо Дрейфуса ему не понравилось и что его убеждение в невиновности Дрейфуса основывается только на фактах.

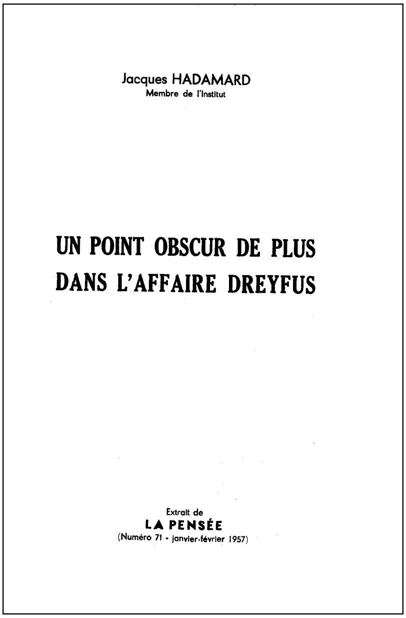
Разговор, о котором я упомянул в начале процесса над Эстерхази, был передан генералу Гонсу, но следующим образом: „Адамар сообщил мне, что семья Дрейфуса ныне располагает доказательством измены Дрейфуса“.

По просьбе генерала Гонса я нанёс ему визит и более получаса объяснял, что Адамар всегда решительно отстаивал невиновность Дрейфуса. Генерал Гонс отвечал, что наш разговор ни в чём его не убедил и не имеет никакого значения. Затем за моей спиной, не предупреждая меня, генерал написал записку, в которой говорилось, что из моего разговора с Адамаром, кузеном Дрейфуса, о котором он узнал от меня, стало известно, что некоторые члены семьи Дрейфуса поверили в виновность Дрейфуса» [III.30, с. 813].

На вопрос: «Не были ли Вы вовлечены в дело Дрейфуса, будучи родственником обвиняемого?» — в интервью, которое он давал в 1956 г., Адамар ответил:

«В то время после осуждения Золя и юридических маневров против Пикара я знал только то, что знали все. Но именно тогда вокруг меня циркулировали слухи: говорили, что я утверждал, будто члены семьи Дрейфуса имели серьезные сомнения в его невиновности — смею заверить Вас, что это была полная и грубая ложь. Эту ложь изрёк мой коллега и друг Поль Пенлеве, который услышал ее от д'Оканя, нашего коллеги по Политехнической школе. Что касается меня, я слышал эту ложь со времени первого допроса, учиненного Уголовным апелляционным судом, который поручил судье, наделив его соответствующими полномочиями, допросить нас троих. Кстати, я должен сказать, что этот допрос оставил у меня тревожное и тяжёлое впечатление о методах нашей уголовной процедуры: когда производящий допрос судья снимает показания под присягой, у него не остается ни одного письменного документа, написанного под диктовку свидетеля, только сам судья говорит и диктует текст показаний секретарю суда...

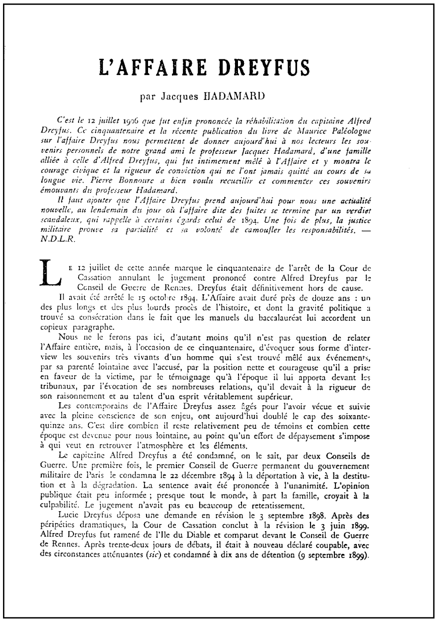
В то время я был преподавателем в Сорбонне. Я тщательно взвешивал каждое произнесённое мной слово и столкнулся с огромнейшими трудностями, отстаивая свои показания под присягой, поскольку мне было необходимо письменно зафиксировать именно то, что я сказал (даже если не очень точно), а не что-нибудь другое. Что касается большинства свидетелей, я бы сказал, что такая система давала судье возможность заставить их говорить все, что ему только заблагорассудится» [I.399].



Jacques HADAMARD
Membre de l'Institut

UN POINT OBSCUR DE PLUS
DANS L'AFFAIRE DREYFUS

Extrait de
LA PENSÉE
(Numéro 71 - janvier-février 1957)



L'AFFAIRE DREYFUS

par Jacques HADAMARD

C'est le 12 juillet 1906 que fut enfin prononcée la réhabilitation du capitaine Alfred Dreyfus. Ce cinquantenaire et la récente publication du livre de Maurice Paléologue sur l'affaire Dreyfus nous permettent de donner aujourd'hui à nos lecteurs les souvenirs personnels de notre grand ami le professeur Jacques Hadamard, d'une famille alliée à celle d'Alfred Dreyfus, qui fut intimement mêlé à l'Affaire et y montra le courage civique et la rigueur de conviction qui ne l'ont jamais quitté au cours de sa longue vie. Pierre Bonnoure a bien voulu recueillir et commenter ces souvenirs émouvants du professeur Hadamard.

Il faut ajouter que l'Affaire Dreyfus prend aujourd'hui pour nous une actualité nouvelle, au lendemain du jour où l'affaire dite des fuites se termine par un verdict scandaleux, qui rappelle à certains égards celui de 1894. Une fois de plus, la justice militaire prouve sa partialité et sa volonté de camoufler les responsabilités. — N.D.L.R.

Le 12 juillet de cette année marque le cinquantenaire de l'arrêt de la Cour de Cassation annulant le jugement prononcé contre Alfred Dreyfus par le Conseil de Guerre de Rennes. Dreyfus était définitivement hors de cause.

Il avait été arrêté le 15 octobre 1894. L'Affaire avait duré près de douze ans : un des plus longs et des plus lourds procès de l'histoire, et dont la gravité politique a trouvé sa consécration dans le fait que les manuels du baccalauréat lui accordent un copieux paragraphe.

Nous ne le ferons pas ici, d'autant moins qu'il n'est pas question de relater l'Affaire entière, mais, à l'occasion de ce cinquantenaire, d'évoquer sous forme d'interview les souvenirs très vivants d'un homme qui s'est trouvé mêlé aux événements, par sa parenté lointaine avec l'accusé, par la position nette et courageuse qu'il a prise en faveur de la victime, par le témoignage qu'à l'époque il lui apporta devant les tribunaux, par l'évocation de ses nombreuses relations, qu'il devait à la rigueur de son raisonnement et au talent d'un esprit véritablement supérieur.

Les contemporains de l'Affaire Dreyfus assez âgés pour l'avoir vécue et suivie avec la pleine conscience de son enjeu, ont aujourd'hui doublé le cap des soixante-quinze ans. C'est dire combien il reste relativement peu de témoins et combien cette époque est devenue pour nous lointaine, au point qu'un effort de dépaysement s'impose à qui veut en retrouver l'atmosphère et les éléments.

Le capitaine Alfred Dreyfus a été condamné, on le sait, par deux Conseils de Guerre. Une première fois, le premier Conseil de Guerre permanent du gouvernement militaire de Paris le condamna le 22 décembre 1894 à la déportation à vie, à la destitution et à la dégradation. La sentence avait été prononcée à l'unanimité. L'opinion publique était peu informée ; presque tout le monde, à part la famille, croyait à la culpabilité. Le jugement n'avait pas eu beaucoup de retentissement.

Lucie Dreyfus déposa une demande en révision le 3 septembre 1898. Après des péripéties dramatiques, la Cour de Cassation conclut à la révision le 3 juin 1899. Alfred Dreyfus fut ramené de l'Ile du Diable et comparut devant le Conseil de Guerre de Rennes. Après trente-deux jours de débats, il était à nouveau déclaré coupable, avec des circonstances atténuantes (*sic*) et condamné à dix ans de détention (9 septembre 1899).

Статьи Адамара о деле Дрейфуса

На допросе Адамар вспомнил свой разговор с Пенлеве и еще раз подтвердил свое убеждение, что Дрейфус был осуждён без достаточного доказательства и в нарушение закона.

Борьба дрейфусаров за оправдание невиновного была вместе с тем борьбой за честь и достоинство человека, против националистических предрассудков. Осознание необходимости защиты личности привело сенатора Жака Трарио к созданию во Франции Лиги прав человека (Ligue de Droits de l'Homme) во время судебного процесса над Золя. Трарио стал первым президентом Лиги, а директор Института Пастера Эмиль Дюкло и химик Эдуард Гримо — вице-президентами. К 1 апреля 1898 г. в Лиге насчитывалось уже 269 членов, и инаугурационное собрание состоялось 4 июня того же года. Адамар активно участвовал в работе Лиги с момента ее основания. Много лет спустя он все еще весьма взволнованно вспоминал дело Дрейфуса. На церемонии по случаю 60-летия основания Лиги, состоявшейся в 1958 г. в Сорбонне, девяностолетний Адамар заявил: «Лига продолжает существовать, так как она заявляет приоритет нравственных ценностей и даже ныне провозглашает, что дело Дрейфуса не умерло, всякий раз, когда нарушается закон, всякий раз, когда торжествуют несправедливость и произвол» [I.402, с. 4]. Избранный членом центрального комитета Лиги в 1909 г., Адамар оставался на этом посту до последних лет своей жизни и уступил его своей дочери Жаклин.

Третий сын четы Адамар Матье-Жорж родился 27 февраля 1899 г. и был назван в честь Матье Дрейфуса и Жоржа Пикара.

Лоран Шварц писал: «Именно дело Дрейфуса в этом смысле [защиты справедливости] стало величайшим делом его [Адамара] жизни. С того момента, когда он осознал всю чудовищность несправедливости, допущенной против человека во имя „государственных“ соображений, и последствия, к которым может привести антисемитизм, Адамар со всей страстностью посвятил себя пересмотру приговора, вынесенного трибуналом. Под знаком дела Дрейфуса прошла вся последующая жизнь Адамара [II.58, с. 320]. С тех пор вовлеченность в политику стала непременным атрибутом его жизни, а в 1924 г. Адамар даже заочно участвовал в работе Лиги наций».

§ 2.6. Снова в Париже

Пост maître de conférences (руководителя семинаров) на факультете естественных наук Парижского университета Адамар получил 29 октября 1897 г., а в ноябре того же года он стал заместителем Мориса Леви по кафедре аналитической и небесной механики в Коллеж де Франс [III.78]. «До 1920-х гг. на пенсию не уходили, и люди работали до самой смерти. Только когда их силы ослабевали, они находили себе заместителя. Такой заместитель получал половину их жалования и всегда был рад своему назначению. Более того, заместитель надеялся со временем занять пост того, кого он замещает. Люди соглашались на половинное жалование только для того, чтобы попасть в Коллеж де Франс, так как до войны получить назначение в Париж было чрезвычайно трудно, причем попасть в Коллеж де Франс было еще труднее, чем в Сорбонну. Каждый обязательно должен был сначала поработать в провинции» [III.265, с. 26]. Адамар отказался от полной профессуры в Бордо, чтобы занять явно более скромное положение в Париже: столь велико было различие в престиже назначения на академические должности в провинциях и в Париже.

Преподавательская нагрузка профессоров Коллеж де Франс была невелика, но требовалось, чтобы содержание читаемых ими курсов было новым. Во время празднований по случаю своего семидесятилетия Адамар вспоминал неповторимую атмосферу Коллеж де Франс. «Одной из традиций Коллеж де Франс было предоставление полной свободы воображения» [II.27, с. 55]. Лекторы определяли не только содержание, но и название своих курсов. Требовалось только формальное одобрение названия на общем собрании профессоров, где суть предмета понимали лишь немногие[1]. Лебег описал процедуру одобрения названия следующим образом:

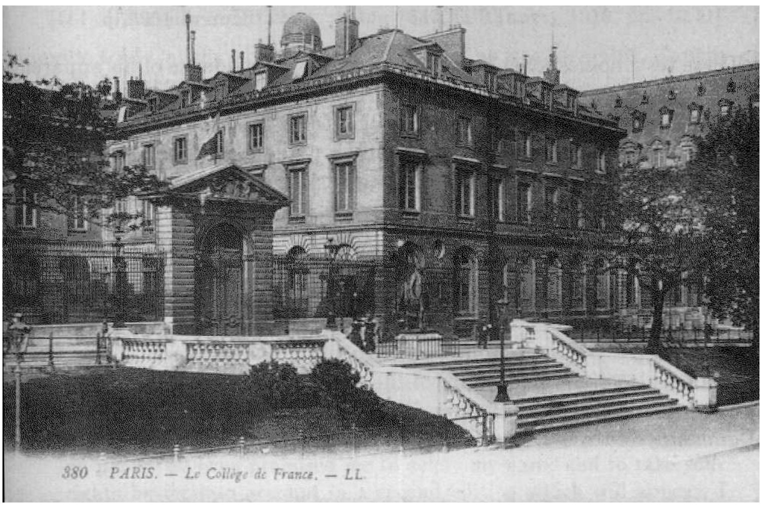
«Администратор зачитывает названия: „«Шакунтала» и «Мриччхакатика»“; „Дифференциация тимоцита, появление гранулоцитов и плазмоцитов“; „Интер-

[1] В настоящее время в Коллеж де Франс пятьдесят три профессора, из которых четверо — профессора математики.

претации Кун Аньго книг «Ли цзи, или И ли» и «Чунь цю фань лу»“. Ужасна эта обязанность, налагаемая на нас нашим девизом „Docet omnia“[1]! Создается впечатление, что читающий запутался в слогах, что он не знает точного смысла произносимых им слов. Чтение окончено, и мы голосуем за эти названия, даже их не понимая.

Что ж, господа, столь необычный контроль был эффективен и действен. Каждый из нас знал, что будет понят двумя-тремя коллегами, но эти коллеги, даже будучи близкими друзьями, слишком ревностно пекутся о достоинстве Коллеж де Франс, чтобы допустить хотя бы малейшую погрешность, не подняв „по тревоге“ всех профессоров, которые тут же ополчатся против провинившегося, и правило соблюдалось неукоснительно. В чём суть этого правила? Делать все, что в ваших силах, чтобы подготовить, облегчить завтрашнее открытие; для этого обучать новой науке, науке, находящейся в стадии формирования, а также науке забытой или мало известной, а самое главное, не повторяться, а идти вперед» [II.27, с. 10].

С того времени как Адамар стал заместителем Мориса Леви в Коллеж де Франс, его интересы сосредоточились главным образом на математической физике. В его лекциях находили отражение полученные им недавние математические результаты и ставились вопросы, которые становились предметом его новых исследований. В лекциях по кинематике, прочитанных в 1898—1899 гг.,



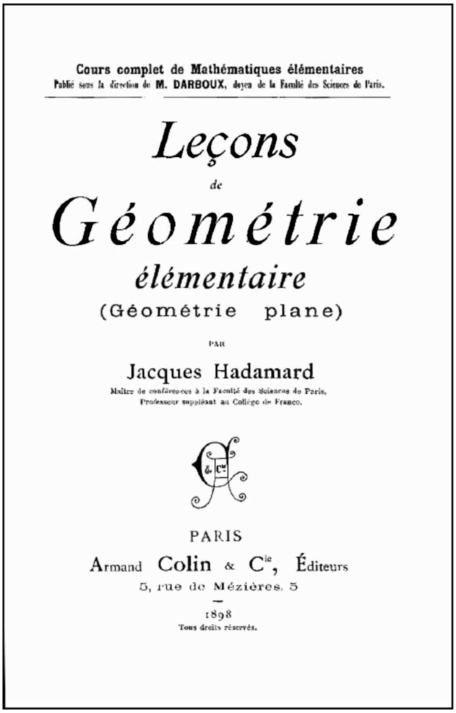
Коллеж де Франс. Открытка 1920-х гг.

Адамар разработал теорию разрывов прямолинейного движения газов, включившую в себя ранние исследования Римана, Кристоффеля и Гюгонио. В следующем учебном году Адамар рассказал своим слушателям об обобщении этой теории

[1] Учить всему (лат.).

на трехмерное волновое движение в газах и упругих телах. В частности, он предложил классификацию условий совместности двух движений среды: перед волновым фронтом, разделяющим кинематические и динамические явления, и за этим волновым фронтом. Полностью ценность полученных Адамаром результатов стала понятна сравнительно недавно, особенно в связи с развитием газовой динамики и динамической теории упругости.

В 1898 г. был опубликован первый том «Элементарной геометрии» — «Планиметрия». Второй том — «Стереометрия» — вышел в 1901 г. «Элементарная геометрия» неоднократно переиздавались с различными дополнениями. Книги были написаны по инициативе Гастона Дарбу, издавшего серию «Полный курс для математического класса». В этой же серии ранее были опубликованы курсы арифметики Жюля Таннери и элементарной алгебры Карло Бурле. В отличие от бытующей ныне практики (Nomina sunt odiosa[1]) имена авторов печатались крупными буквами, а имя редактора — мелкими, пропорционально проделанной работе.



Cours complet de Mathématiques élémentaires
Publié sous la direction de M. DARBOUX, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons
de
Géométrie
élémentaire
(Géométrie plane)
PAR
Jacques Hadamard
Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris,
Professeur suppléant au Collège de France.

PARIS
Armand Colin & C^ie^, Éditeurs
5, rue de Mézières, 5
1898
Tous droits réservés.

Титульный лист первого тома «Элементарной геометрии» Адамара

Многие математики полюбили геометрию благодаря двухтомному трактату Адамара. Гастон Жюлиа вспоминает:

«Юноша, родившийся накануне двадцатого века, в один прекрасный день получает в качестве приза по математике „Элементарную геометрию“. В тече-

[1] Букв. «Имена ненавистны» (лат.), т. е. имена называть не будем.

ние последующих каникул он жадно поглощает её содержание, самозабвенно решая приведенные в ней многочисленные задачи. Книга становится его повседневным спутником. Эта книга и вручивший её учитель элементарной математики направляют юношу к его будущей профессии. Он станет математиком из стремления к совершенству и восхищения богатством мысленных образов, открывшихся ему» [II.56, с. 730].

Влияние «Элементарной геометрии» Адамара на математическое образование во Франции в начале XX в. описывает Андре Вейль:

«В то время учебники для средней школы во Франции были очень хорошими, они появились в результате введения „новых программ“ 1905 г. Мы обычно забываем, что реформы того периода были не менее плодотворными, чем идеи Бурбаки, влиянию которых подвержены реформаторы нашего времени. Всё началось с „Элементарной геометрии“ Адамара и „Арифметики“ Ж. Таннери — этих замечательных работ, теоретически предназначавшихся для того, чтобы учить нас „элементарной математике“ (известной как math élém) в выпускном классе средней школы, но подходивших только для учителей и самых сильных учащихся: это особенно относится к книге Адамара» [III.18, с. 22].

Исследования Адамара получили высокую оценку, и в 1898 г. комиссия, состоявшая из Эрмита, Бертрана, Пуанкаре и Сарро, присудила ему премию Понселе (Prix Poncelet)[1] за его работы на протяжении десяти предыдущих лет. Старшие коллеги, несомненно, относились к Адамару с глубоким уважением. Пуанкаре в своем труде «Новые методы небесной механики» ссылался на теоремы Адамара об аналитических функциях и геодезических, результаты Адамара стали стандартными в университетских курсах, а Пикар и Гурса включили их в свои учебники математического анализа.

В 1899 г. Адамар стал почетным доктором Гёттингенского университета. Это был университет Гаусса, Дирихле и Римана. В 1886 г. профессором в Гёттингене стал тридцатисемилетний Клейн. К тому времени он уже завершил свои главные работы, обеспечившие ему место на математическом Олимпе. Уже в молодые годы Клейн был необычайно продуктивен. Занимаясь поисками внутренних связей между различными областями математики и естественных наук, он получил первоклассные результаты в геометрии, теории групп, теории алгебраических уравнений, эллиптических и автоморфных функций. В 1895 г. к нему в Гёттингене присоединился Гильберт, уже снискавший известность своим решением фундаментальных проблем теории инвариантов и работавший в то время над общими законами теории алгебраических чисел. В своей книге «Основания геометрии», вышедшей в 1899 г., Гильберт изложил аксиоматику геометрии. В том же году Гильберт обосновал принцип Дирихле в вариационном исчислении. Возглавляемый двумя такими выдающимися личностями, как Клейн и Гильберт, Гёттингенский университет стал ведущим научным центром Германии и соперником математического Парижа.

[1]Ежегодная премия, присуждавшаяся Академией наук за работы по чистой и прикладной математике, учреждена в 1867 г. по завещанию создателя проективной геометрии Ж. Понселе.

Феликс Клейн (1849—1925)

Приветствуя в апреле 1909 г. Пуанкаре в Гёттингене, Гильберт включил имя Адамара в краткий перечень лучших французских и немецких математиков.

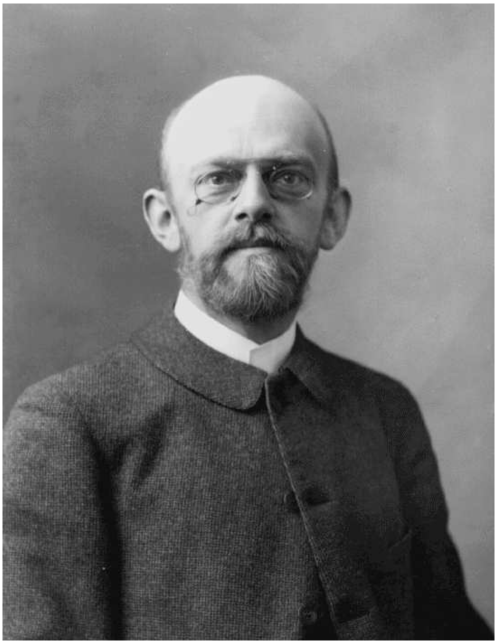
«Вы, высокочтимый коллега, как и все мы, хорошо знаете, сколь близки были и остаются математические интересы Франции и Германии. Если мы вспомним события недавнего прошлого и из мощного многоголосого концерта математической науки выделим два фундаментальных аккорда — теорию чисел и теорию функций, — мы, вероятно, подумаем о Якоби, который нашел в лице Эрмита выдающегося наследника своих идей в теории чисел. А у Эрмита, поднявшего знамя теории чисел во Франции, преемником был Минковский, вернувший её в Германию. Или вспомним имена Коши, Римана, Вейерштрасса, Пуанкаре, Клейна и Адамара — звенья одной цепи, скреплённые друг с другом. Математические узы, связывающие Францию и Германию теснее, чем любые две другие страны, разнообразны и крепки, поэтому с математической точки зрения мы можем рассматривать Германию и Францию как единую страну» [III.347, с. 75—76].

Чета Адамаров была лично знакома с Гильбертом и его женой Кёте, о чём свидетельствует следующее недатированное письмо Адамара Гильберту[1]:

Уважаемый месье!

Мы с супругой глубоко тронуты Вашим в высшей степени дружеским письмом, и я с большим интересом ознакомился с Вашим докладом, который ранее доходил до меня только в отрывках. Очень надеюсь обсудить, как Вы мне и обещали, эти и многие другие вопросы и услышать Ваши оригинальные взгляды по проблемам, занимающим всех

[1] Это письмо хранится в библиотеке Гёттингенского университета вместе с двумя другими письмами Адамара Гильберту.



Давид Гильберт (1862—1943)

нас. Мы с женой будем очень рады продолжить дружеские отношения с Вами и мадам Гильберт, которые мы едва успели завязать во время Вашего визита в Париж.

Вскоре, когда я завершу кое-что из весьма внушительной работы, которую мне все еще предстоит закончить, я надеюсь прислать Вам статью для «Mathematische Annalen» и рад, что Вы столь дружески предложили мне гостеприимство в этом журнале[1].

Прошу Вас передать мои лучшие пожелания и привет от мадам Адамар мадам Гильберт.

Искренне Ваш

Ж. Адамар [IV.50].

§ 2.7. Учёный Косинус

Своей великолепной памятью Адамар поражал всех. Казалось, он никогда не забывал ничего из того, чему его учили в школе и на улице Ульм. «Даже в преклонном возрасте он мог в разговоре процитировать на память отрывок из древнегреческого или латинского текстов» [II.8, с. 34]. Языки никогда не были для него проблемой: по-немецки и по-английски он говорил с детства. Жаклин Адамар так вспоминает о его лингвистических способностях: «В 1919 г. он отправился в Мадрид, чтобы прочитать там несколько лекций. Во время Пасхальных каникул мы присоединились к нему. Отец с гордостью сообщил нам, что последнюю лекцию он сумел прочитать по-испански!» [IV.1, с. III(2)]. Адамар был поистине неисчерпаемым кладезем знаний по географии, истории, философии,

[1] Ни одна из статей Адамара не была опубликована в «Mathematische Annalen».

психологии и особенно ботанике, в которой он был почти профессионалом. Пораженный памятью Адамара, Фреше писал: «...совсем недавно один известный химик поведал мне, какое глубокое впечатление произвели на него познания Адамара в химии. Издатель Адамара сообщил мне, что в процессе подготовки своей книги по анализу Адамар возвратился в издательство, где правил гранки, со следующими словами: „Я только что на улице понял, что забыл исправить ошибку в третьей строке на странице 169“» [II.13, с. 4082].

Но, помимо обширных познаний, Адамара сближала с традиционным образом учёного его невероятная рассеянность в повседневной жизни. «Переходя улицу, Адамар думал о чём угодно, но не о машинах, и он не умел завязывать галстук», — писал Ж.-П. Кахан [II.29].

На рубеже XX в. среди французской интеллигенции большой популярностью пользовалась серия комиксов, героем которых был находчивый и чрезвычайно рассеянный ученый Косинус. Внешне Косинус не похож на Адамара, но, как заметила Жаклин Адамар, «...для людей нашего поколения и нашего круга это творение Кристофа было неотделимо от образа моего отца, который, возможно,

Из-за своего драчливого нрава Зефирен никогда не упускает удобного случая «дать в глаз или в нос» своему ближайшему другу. Нужно ли говорить, что на его удары друг отвечает новыми ударами. Это и есть то, что Зефирен мудро называет «умножением ударов» (намёк на теорему Адамара об умножении особенностей).

послужил прототипом героя комиксов. Действительно, месье Колон (настоящее имя Кристофа[1]) был другом нашей семьи и нашим учителем по естественным наукам»[2] [IV.1, с. 1]. Жорж Колон (1856—1945), заместитель директора ботанической лаборатории в Сорбонне, был автором многочисленных научно-популярных произведений, и его считают изобретателем комиксов во Франции, одним из кото-

[1]Игра слов: Кристоф Колон — французский эквивалент Христофора Колумба.

[2]Нам доводилось слышать другое мнение, согласно которому Кристофа на создание профессора Косинуса вдохновил Пуанкаре. Ученый Косинус, подобно Пуанкаре, окончил Политехническую школу, а рассеянность Пуанкаре была притчей во языцех.

рых была серия «Навязчивая идея ученого Косинуса», впервые опубликованная в 1893—1899 гг. [III.8].

Косинус — прозвище героя Кристофа, которое он заслужил, став «чрезвычайно ученым господином», его настоящая фамилия Бриоше, а имена — гармо-

К сожалению, когда он очень занят, Косинус обычно становится рассеянным. Этим объясняется странный вид Косинуса, идущего в префектуру, и в то же время изумление прохожих по пути его следования.

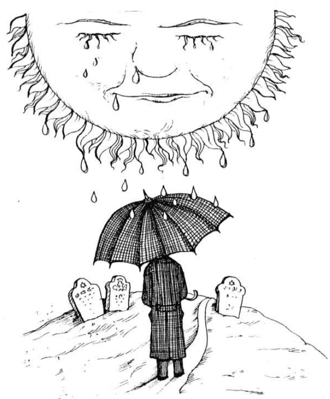
нические, поэтические и возвышенные: Панкрас, Евсебий, Зефирен. Его специальности — математика и механика, и, подобно Адамару, он страстно любит ботанику и путешествия. Но в отличие от Адамара все попытки ученого Косинуса оставить Париж безуспешны из-за его ужасной рассеянности. Пока его багаж пересекает границы, Косинус со своим псом Сфероидом попадает в пренеприятнейшие затруднительные положения в Париже. Мы воспроизводим некоторые иллюстрации из книги Кристофа на с. 118 и 166.

Помимо случая с сестрой, забытой на леднике, и кольце для помолвки, забытом в кармане, имеются и другие анекдотические истории. Процитируем Жаклин Адамар:

«Сходство моего отца с Косинусом (в обыденной жизни) всегда вызывало смех, и не только у нас, но и у всех друзей, которые знали, сколь велик разрыв между отцом и повседневной жизнью. Пенлеве однажды встретил отца на бульваре Сен-Мишель и сказал ему: „Я вижу, мадам Адамар уже отправилась на отдых“. — „Откуда вы знаете?“ — спросил отец. „А у вас галстук висит за правым ухом“.

Действительно, я думаю, что с тех пор, как отец женился, он никогда сам не одевался! Мы всегда гадали, как он справляется с одеждой, когда ему случалось отправиться куда-нибудь читать лекции или на конференцию. Особенно наглядно отец продемонстрировал это в день официальной церемонии учреждения Международного бюро труда, которая состоялась в „Отель дю Лувр“.

Когда отец поднимался по лестнице, его остановил довольно испуганный молодой человек: „Простите, месье, но у вас нет галстука“. Озадаченный, он спросил молодого человека: „Что же мне делать?“ Молодой человек предложил отцу отправиться в магазин по соседству и купить там галстук. „Чудесная идея! Мне бы это никогда не пришло в голову“. (Поскольку моя матушка покупала отцу все необходимое, сам он никогда не ходил ни в какие магазины, кроме книжных.) „Но этот магазин, кажется, большой. Как же я найду там галстук?“ Молодой человек (явно бывший кладезем премудрости) объяснил отцу, что ему нужно только спросить, где находится отдел галстуков. „Потрясающе!“ — Поблагодарив молодого человека за ценный совет, отец отправился в магазин и разыскал отдел галстуков. Продавец спросил его: „Какой галстук вам нужен? Повседневный? Для вечернего костюма? Галстук-бабочка?“ — „Не знаю. Как видите, у меня не оказалось такого, какой необходим для официальной церемонии“. Продавец подобрал подходящий галстук: „Вот ваш галстук, месье“. Но мой отец счёл, что этого мало, и обратился к продавцу с просьбой: „Не будете ли вы так любезны надеть его на меня? Видите ли, я не умею“» [IV.1, с. III(27—28)].



Анекдоты об эксцентрических поступках Адамара рассказывают и поныне, спустя многие годы после его кончины, но большинство из них лишены какого бы то ни было основания. Недавно нам случилось развеять иллюзии одного известного французского математика, который рассказал нам следующую «правдивую» историю (навеянную, очевидно, методом математической индукции): «Адамар трижды становился вдовцом. Когда умерла его третья жена, он пришёл на похороны с зонтом, хотя на небе не было ни облачка. На вопрос: „Почему вы с зонтом?“ он ответствовал: „Понимаете, во время похорон моих предыдущих жён шёл дождь“. И действительно, вскоре пошёл дождь».

Когда рассказчик узнал, что Адамар был женат только один раз, он попросил не упоминать его имени[1].

[1]Вариант этого анекдота с Буссинеском в качестве главного героя можно найти в [III.358, с. 156].

Глава 3

Зрелые годы

§ 3.1. Новая тема

В возрасте тридцати четырех лет Адамар, полный энергии и планов, встретил наступление двадцатого века. Можно только восхищаться глубиной и разнообразием опубликованных им работ. Грядущие годы принесут ему растущее профессиональное признание и новые математические достижения.

Примерно в 1900 г. Адамар начал активно работать над новой темой, которая интересовала его уже давно, — теорией дифференциальных уравнений в частных производных. Стимулом послужили его недавние исследования по газовой динамике.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения в частных производных содержат производные неизвестных функций нескольких переменных. Они описывают различные процессы математической физики, в том числе электромагнетизм, упругость, теплопроводность, гидродинамику, гравитацию и многое другое. Обычно одно и то же уравнение служит математической моделью различных физических явлений. Например, гармонические функции, т. е. решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

можно интерпретировать как стационарное распределение температуры, потенциал электрического поля, гидродинамический потенциал и т. д. Так называемое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{3.1}$$

где ω — действительная постоянная, t — время, возникает в акустике, оптике и гидродинамике. Нестационарные процессы диффузии описываются уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Попытки решить эти три уравнения предпринимались во второй половине XVIII и начале XIX в., а в течение XIX в. были открыты и исследованы другие уравнения в частных производных[1]. К концу XIX в. теория дифференциальных уравнений в частных производных представляла собой большой набор фактов и остроумных методов, лишённый, однако, особого порядка и системы.

Трудность решения таких уравнений обусловлена тем, что их общее решение зависит не от произвольных постоянных, как в случае обыкновенных дифферен-

[1] См. Демидов [III.98] и Лютцен [III.251].

циальных уравнений, а от произвольных функций. Чтобы получить единственное решение, уравнение в частных производных необходимо дополнить некоторыми условиями на границе той области, в которой оно рассматривается. Например, для уравнения Лапласа можно задать граничные условия решения (так называемая задача Дирихле). Вместе с волновым уравнением начальные данные $u|_{t=0}$ и $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ образуют так называемую задачу Коши.

Выбор краевых или начальных условий обычно диктуется физической задачей, и было замечено, что в таких случаях решение часто бывает единственным. Например, для задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа и задачи Коши для волнового уравнения решение существует и единственно. И наоборот, как заметил Адамар в 1900 г. [I.88], задача Коши для уравнения Лапласа, вообще говоря, неразрешима. Адамар с самого начала искал объяснение этому различию между уравнениями. В журнале «Princeton University Bulletin» за 1902 г. он опубликовал статью «О задачах в частных производных и их физическом смысле», в которой ввел понятие корректно поставленной краевой задачи. Это понятие имело большое значение для будущего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных и функционального анализа и ныне известно как понятие корректности задачи в смысле Адамара.

Три приведенных выше дифференциальных уравнения в частных производных — уравнения второго порядка, т. е. они содержат частные производные второго порядка и не содержат частных производных более высокого порядка. Более общие уравнения второго порядка с переменными коэффициентами появляются при моделировании физических процессов в неоднородных средах. В опубликованной после его смерти работе 1889 г. Дюбуа-Реймон ввел классификацию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, разделив их на эллиптические, гиперболические и параболические и тем самым обобщив соответственно уравнение Лапласа, волновое уравнение и уравнение теплопроводности. К концу XIX в. о свойствах уравнений второго порядка с переменными коэффициентами было известно немного, особенно если число независимых переменных было больше двух. Возможно, первую попытку продвинуться дальше в этом направлении предпринял Пикар, который начиная с 1890 г. обобщал некоторые свойства уравнения Лапласа на общие эллиптические уравнения.

Примерно в 1900 г. интерес Адамара привлекли общие гиперболические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, которые описывают распространение волн в неоднородных средах; впоследствии он неоднократно возвращался к таким уравнениям. Его внимание было в основном сосредоточено на решении задачи Коши и принципе Гюйгенса, под которым Адамар понимал следующее свойство волновых явлений: после того как волна прошла через данную точку, эта точка остается в покое.

Чтобы решить задачу Коши, Адамар предложил свою знаменитую ныне конструкцию фундаментального решения. Под фундаментальными решениями понимают решения с особенностями специального вида. Фундаментальные решения позволяют решать задачу Коши с произвольными начальными данными простым интегрированием. В случае гиперболических уравнений особенности фундаментальных решений приводят к расходящимся интегралам вида

$$\int\limits_{\Omega} \frac{f(x)}{g(x)^{\alpha}}\, dx, \qquad \alpha > 1,$$

где интегрирование проводится по области Ω, часть границы которой расположена на гладкой поверхности $g(x) = 0$. Адамар преодолел эту трудность, введя понятие конечной части расходящегося интеграла (1902), тесно связанное с появившейся намного позже теорией обобщенных функций.

Из своей конструкции фундаментального решения задачи Коши Адамар вывел, например, что если выполняется принцип Гюйгенса, то пространство имеет нечетную размерность. Так как это лишь необходимое условие, Адамар поставил задачу описания всех уравнений, удовлетворяющих принципу Гюйгенса. Эта задача оказалась очень трудной и не решена поныне, хотя некоторый прогресс в ее решении достигнут.

Уравнения в частных производных занимали главное место в исследованиях Адамара в течение полувека. Поль Леви писал:

«Один из почитателей Адамара как-то сказал мне, что именно в теории дифференциальных уравнений в частных производных Адамар оставил наиболее поразительное доказательство своей гениальности. Этой теории Адамар посвятил многочисленные статьи и две большие книги, одну книгу — о распространении волн и уравнениях гидродинамики (1903), другую — о задаче Коши. По поводу этих работ я хочу прежде всего заметить, что Адамара не интересовали задачи, которые ставятся так, чтобы их было легко решать. Невозможно представить, чтобы он занимался задачами, решаемыми простым интегрированием. Наоборот, он посвятил себя задачам, которые ставятся естественно, особенно физическим; при решении таких задач даже малый прогресс имел в его глазах большое значение» [II.36, с. 7].

§ 3.2. Хроника 1900—1914 гг.

С 1900 г. международные математические конгрессы проводились каждые четыре года за исключением двух мировых войн. Как иронически заметил Трикоми на столетнем юбилее Адамара, «конгрессы были весьма важными событиями, так как еще не выродились в те хаотические (и по существу бесполезные) собрания, в которые они превратились сегодня» [II.5, с. 24]. Второй международный математический конгресс, состоявшийся в Париже в августе 1900 г., известен тем, что на нем Гильберт сформулировал свои знаменитые 23 проблемы. Начиная с этого конгресса Адамар присутствовал на всех конгрессах, кроме проходивших в Торонто (1924) и в Осло (1936). На парижском конгрессе он выступил с кратким сообщением [I.88], в котором впервые рассмотрел так называемую смешанную задачу для волнового уравнения с данными Дирихле на границе области в произвольный момент времени и данными Коши в начальный момент времени.

В декабре 1900 г. Адамар был внесен в список кандидатов в Академию наук от секции геометрии, но избран был Пенлеве. Вскоре после этого из-за кон-

Жорж Юмбер (1859—1921)

Начинал свою деятельность как горный инженер после окончания Политехнической и Горной Школ. Докторскую диссертацию по алгебраическим кривым защитил в 1895 г. За работу по использованию абелевых функций в геометрии был удостоен в 1892 г. премии Академии наук.

чины Эрмита в январе 1901 г. Адамар снова оказался в списке кандидатов, но и на этот раз он был номинирован секцией геометрии только третьим — после Жоржа Юмбера и Эдуарда Гурса — наравне с Эмилем Борелем.

Одновременно со вторым томом «Элементарной геометрии» в 1901 г. вышла небольшая книга Адамара «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение» [I.80], которая быстро стала руководством для всех, кто интересуется этой областью анализа.

В октябре 1901 г. Адамар совершил свою первую поездку за океан, чтобы представить факультет естественных наук Сорбонны на двухсотлетии Йельского университета и получить присужденную ему ученую степень доктора honoris causa. В 1902 г. Адамар еще раз побывал в Соединенных Штатах, где прочитал серию лекций по теории упругости, методам математической физики и геометрической оптике в Принстонском университете.

В 1903 г. на основе лекций, прочитанных Адамаром в 1898—1900 гг. в Коллеж де Франс, им была опубликована книга «Лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики» [I.109].

В том же году Адамар был избран почетным членом Харьковского математического общества. В письме, датированном 25 ноября 1903, которое Адамар направил Стеклову[1], говорилось: «Для меня большая честь быть избранным членом математического центра, которому мы в последние несколько лет обязаны столь замечательными открытиями» [IV.38].

Название доклада Адамара на Третьем международном математическом конгрессе в Гейдельберге (1904) гласило: «О фундаментальных решениях линейных уравнений в частных производных» [I.117]. Подробное изложение доклада было опубликовано в статьях Адамара в «Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure» [I.114], [I.119].

В 1906 г. Адамар был избран президентом Французского математического общества, а Академия наук наградила его премией Пти д'Ормуа (Prix Petit d'Ormoy).

Жак Адамар в 1900-е гг.

В следующем году Адамар представил на соискание премии Вайяна, объявленной Академией наук, свою большую статью [I.145]. В ней он рассмотрел механическую задачу о равновесии тонкой пластины, защемленной по краю, которая описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка в частных производных, дополненным двумя краевыми условиями. Свои усилия Адамар сосредоточил главным образом на исследовании функции Грина $G(x, y)$, которая

[1]В. А. Стеклов (1864—1926) работал главным образом над решением задач математической физики, особенно теории потенциала. При построении решений краевых задач в форме разложений по собственным функциям он определил важное понятие замкнутой ортогональной системы, т. е. системы, линейная оболочка которой всюду плотна в пространстве L^2. Стеклов первым предложил некоторую процедуру усреднения функций. После революции Стеклов был вице-президентом Российской Академии наук (1919—1926), а в 1921 г. он основал и возглавил Институт физики и математики, от которого в 1934 г. отделился Математический институт Академии наук СССР. Ныне этот математический институт носит его имя.

интерпретируется как отклонение пластины в точке x под действием нормальной нагрузки, приложенной в точке y. Функция Грина позволяет выразить решение краевой задачи в виде интеграла. В своей статье Адамар получил много интересных результатов, а его главным достижением была формула для вариации функции Грина $G(x, y)$ при бесконечно малой вариации области. По решению жюри он был награжден тремя четвертями премии, а остальное равными долями получили Боджо, Корн и Лауричелла.

В 1908 г. Адамар был удостоен премии Эстрад Делькро, присужденной Академией наук за его работы предыдущих лет. В апреле того же года он выступил с двумя сообщениями «О некоторых особенностях вариационного исчисления» и «О некоторых интересных случаях бигармонической задачи» на Четвёртом международном математическом конгрессе в Риме. Вместе с Ланжевеном, Прандтлем, Стекловым и другими Адамар исполнял обязанности члена комиссии по унификации векторных обозначений, организованной конгрессом.

Вскоре после ухода на пенсию Мориса Леви Адамар в 1909 г. покинул Сорбонну и стал его преемником в Коллеж де Франс в качестве профессора механики. В Коллеж де Франс Адамар продолжал чтение курса по теории целых функций, дзета-функции Римана и ее приложениям в теории чисел, который он начинал читать в Сорбонне в 1907 г. Его лекции в Коллеж де Франс по вариационному исчислению легли в основу учебника [I.159], опубликованного в 1910 г. Этот учебник восполнил пробел во французской математической литературе того времени.

В октябре 1911 г. Адамар прочитал 4 лекции в Колумбийском университете в Нью-Йорке, в которых он затронул разнообразные проблемы теории дифференциальных уравнений, в частности роль топологии в изучении обыкновенных дифференциальных уравнений и гладких отображений [I. 194].

5 января 1911 г. Адамар стал преемником Камилла Жордана в качестве профессора математического анализа в Политехнической школе. Самые знаменитые математики Франции — Пуанкаре, Пикар, Гурса и другие — единодушно приветствовали научные и педагогические достижения Адамара и рекомендовали его на должность Жордана. Отзыв Пуанкаре гласил: «Адамар показал себя выдающимся ученым, выполнившим первоклассные работы в многочисленных разделах математики, в частности в теории упругих волн» [II.27, с. 19].

17 июля 1912 г. французское и мировое научные сообщества понесли тяжелую утрату: внезапно в возрасте пятидесяти восьми лет скончался Анри Пуанкаре. Он оставил после себя сотни работ, посвященных асимптотической и качественной теориям обыкновенных дифференциальных уравнений, теории функций, теории бесконечных определителей, теории групп, неевклидовой геометрии, гидродинамике, топологии, теории чисел, математической физике, небесной механике, теории вероятностей, основаниям математики и философии науки.

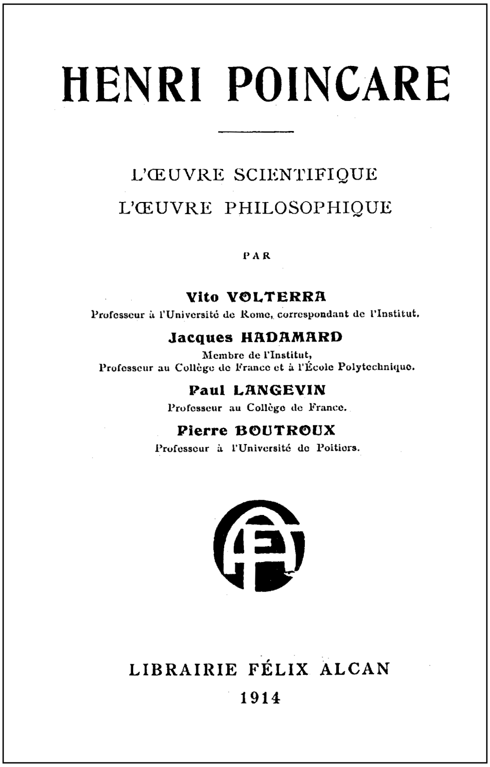
Некоторые из работ Адамара возникли под прямым влиянием исследований Пуанкаре: например, так обстоит дело со статьями Адамара по целым функциям, траекториям в динамических системах и с экскурсами в топологию и теорию вероятностей. Многие высказывания Адамара о Пуанкаре преисполнены восхищением и хвалой таланту Пуанкаре. Адамар, выражая эти чувства, писал статьи

Анри Пуанкаре

о Пуанкаре очень быстро: к концу 1912 г. он опубликовал два обзора работ Пуанкаре в журналах «Revue de métaphysique et de morale» и «Revue du mois» и подготовил обширную статью «Математические труды А. Пуанкаре» для журнала «Acta Mathematica».

Поль Леви писал об этих статьях: «... Он [Адамар], несомненно, написал их за какие-нибудь два-три месяца. Нет нужды напоминать вам, каким необычайным гением был Пуанкаре. Даже если говорить только о математике, то он обновил все ее разделы. Нужно было быть Адамаром, чтобы решиться обозреть всю гигантскую работу Пуанкаре, охватившую столь многие области, и завершить свой замысел за одно лето. Если добавить, что эти статьи насчитывают одна сорок одну страницу, а другая — восемьдесят пять страниц, то станет понятно, что обе статьи представляют собой весьма глубокие исследования» [II.5, с. 15].

Следующая история, рассказанная Лебегом, свидетельствует о глубоком почтении Адамара к поразительному таланту Пуанкаре: «После прочитанных Адамаром лекций несколько ученых устроили банкет в его честь. В приветственной речи кому-то пришло в голову сравнить Адамара с Пуанкаре. Адамар с негодованием поднялся и крикнул: „Нет! Существуют глупости, которых не следует делать!“» [II.27]. Согласно Монтелю эта сцена разыгралась в 1930 г., когда делегация французских математиков посетила СССР. Монтель вспоминает: «Когда мы вышли из Академии наук в Киеве, где президент в приветственной речи сравнил его [Адамара] с Анри Пуанкаре, Адамар был искренне рассержен, так как скромно ставил себя ниже этого великого гения» [II.27, с. 12].



HENRI POINCARE

L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE
L'ŒUVRE PHILOSOPHIQUE

PAR

Vito VOLTERRA
Professeur à l'Université de Rome, correspondant de l'Institut.

Jacques HADAMARD
Membre de l'Institut,
Professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique.

Paul LANGEVIN
Professeur au Collège de France.

Pierre BOUTROUX
Professeur à l'Université de Poitiers.

LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN
1914

В 1914 г. вышла в свет книга «Анри Пуанкаре. Научные работы. Философские работы». Авторами статей, включенными в этот сборник, были Вольтерра, Адамар, Ланжевен и Бутру.

Жаклин Адамар писала:

«Для моего отца Пуанкаре всегда был величайшим гением, он называл его mon Maître (мой учитель) и восхищался не только его математическими работами, но и прекрасным языком, которым они были написаны.

Отец испытывал большие трудности, переводя свои мысли в слова. Он был одним из тех людей, которые не могли терпеть посредственности в словесном оформлении своих работ, и большая часть его времени уходила на этот тяжкий труд. Его терпение при этом было неисчерпаемо» [IV.1, с. III(2)].

На следующий день после своего сорокасемилетия в 1912 г. Адамар был избран в Академию наук, где он стал преемником Пуанкаре по секции геометрии. В своем отзыве тайному комитету от 2 декабря 1912 г. Аппель отнёс Адамара к числу «геометров первой величины нашей эпохи» и заявил:

«Работы месье Адамара разнообразны, мощны и богаты, они охватывают почти все области математики: он занимается теорией функций и теорией чисел, интегрированием дифференциальных уравнений механики и математической физики, работает над решением новейших проблем теории функций.

Во всех этих областях месье Адамар получил общие результаты огромного значения, используя мощные методы, которые он сам разработал и которые открыли путь многим исследованиям во Франции и в других странах» [IV.22].

Афина, эмблема
Академии наук

На этот раз Адамар был первым в списке, за ним вторыми следовали Борель и Гурса, а третьими Гишар и Лебег. Адамар был избран в первом же туре голосования, набрав тридцать шесть голосов из пятидесяти семи.

Через несколько недель после кончины Пуанкаре начал свою работу Пятый международный математический конгресс в Кембридже (Англия). «Кажется, даже английское небо оплакивает потерю великого математика, ибо дождь идет почти непрерывно на протяжении всего конгресса» [III.6, с. 14]. Адамар был вице-президентом конгресса и выступил с докладом «О ряде Стирлинга». По предложению Миттаг-Леффлера было решено провести следующий конгресс в Стокгольме в 1916 г.

Мы уже упоминали двухтомный курс Адамара по элементарной геометрии. Этот учебник был свидетельством постоянного интереса Адамара к проблеме улучшения преподавания математики. В 1914 г. Адамар был активным участником, а позднее главой французской группы Международного комитета по математическому образованию, который был учрежден в 1908 г. на Международном математическом конгрессе в Риме. В работе этого комитета принимали участие представители восемнадцати стран, а его первым председателем был Феликс Клейн.

Адамар стал одним из организаторов Международной конференции по математическому образованию, проходившей с 1 по 4 апреля 1914 г. в Париже, и выступил на этой конференции с докладом [I.188]. В дискуссиях он предостерегал от формализма в образовании и предлагал при введении нового материала руководствоваться здравым смыслом. Адамар говорил о преподавании механики в средних школах и о ее связи с математикой, с одной стороны, и с физикой — с другой. Он задал и общий вопрос: «Что можно сделать для того, чтобы дать учителям возможность достаточно прочувствовать прикладную математику?» Опираясь на свой педагогический опыт, Адамар высказался по вопросам методики (как следует объяснять ряд Тейлора и т. п.). Он также участвовал в дискуссии о взаимосвязи интуиции и строгого доказательства (ему принадлежит афоризм «Логика лишь санкционирует завоевания интуиции»).

Сразу же после конференции по математическому образованию в Париже с 6 по 8 апреля состоялась еще одна конференция по философии математики, и на этой конференции Адамар выступил с тремя докладами на различные темы: внутренние свойства пространства, исчисление функционалов — анализ и синтез, основания математики и математические рассуждения.

Следующее недатированное письмо Адамара Гильберту, по-видимому, написано незадолго до этой конференции в связи с первым докладом:

Многоуважаемый коллега!

Надеюсь, что Ваша усталость, на которую, как мне сообщил месье Ксавье Леон, Вы все еще жалуетесь, сходит на нет. С моей стороны было бы нехорошо обременять Вас вопросами до того, как Вы полностью восстановите силы. Однако я надеюсь, что могу задать Вам вопрос, ответ на который, как мне кажется, не потребует от Вас больших усилий.

Я намерен обсудить на Пасхальной конференции вопрос о пространстве Клейна—Клиффорда. Беру на себя смелость послать Вам предварительный вариант заметки, которую я собираюсь зачитать на конференции, хотя, как Вы увидите, эта заметка не содержит абсолютно ничего нового и ограничивается классической постановкой задачи.

Если я не ошибаюсь, Вы не затрагивали этот вопрос в Вашем фундаментальном исследовании по основаниям геометрии. Я хотел бы точно знать, так ли это, а если я неправ, то отрывок, посвященный этому вопросу, просветил бы меня.

Еще раз льщу себя надеждой, что не очень обременил Вас просьбой о такого рода информации. Заранее благодарю Вас и уверяю в самом сердечном расположении к Вам.

Ж. Адамар [IV.50].

Возможно, усталость, о которой Адамар упоминает в начале письма, была первым признаком злокачественной анемии, которая свела бы Гильберта в могилу, если бы в 1926 г. не был открыт новый замечательный метод лечения[1].

§ 3.3. Адамар и Вольтерра

В статье, представленной Адамаром на соискание премии Вайяна, как и в некоторых других его работах, можно заметить концептуальные связи с развитым Вито Вольтерра исчислением функций от кривых и поверхностей. Вольтерра и Адамар имели много общего. Они оба происходили из еврейских семей с богатой генеалогией. Оба в раннем возрасте проявили свои математические способности: Вольтерра читал «Трактат по арифметике» Бертрана и «Элементы геометрии» Лежандра в возрасте одиннадцати лет, а когда ему исполнилось тринадцать лет, он под впечатлением от романа Жюля Верна «Из пушки на Луну» попытался вывести уравнение траектории полета героев романа. Более того, и Адамар, и Вольтерра были нормальенами: Вольтерра был выпускником Высшей Нормальной школы в Пизе — итальянского эквивалента Высшей Нормальной школы в Париже.

Оба активно участвовали в общественной жизни, придерживались близких политических взглядов и разделяли интерес к математическим проблемам, возникающим в естественных науках. Вольтерра, как и Адамар, еще в молодые годы обогатил математику, решив важные задачи. Он был основателем новых направлений исследований в области анализа, которому он также нашел различные приложения. В 1899 г. Вольтерра был избран членом Академии деи Линчеи в Риме. В следующем году Вольтерра женился на Вирджинии Альмаджа, с которой прожил до своей смерти, и переехал из Турина в Рим, где получил приглашение занять кафедру в университете, остававшуюся вакантной после кончины Бельтрами.

Вот первое письмо от Адамара к Вольтерра из коллекции писем, хранящихся в библиотеке Академии деи Линчеи. Письмо недатировано, но, вероятнее всего,

[1] См. раздел 2.3 в книге К. Рид [III.340].

Вито Вольтерра (1860—1940)

оно написано в конце 1900 г. вскоре после Второго международного математического конгресса в Париже.

Уважаемый месье!

Пишу Вам в Турин, так как не знаю, успели ли Вы обосноваться в Риме, и надеюсь, что письмо в любом случае дойдет до Вас.

Цель моего письма — просить Вас послать мне или, еще лучше, месье Дюпуи, секретарю конгресса, по адресу: бульвар Перейр, 162, Париж, текст доклада, который Вы сделали об уравнениях с действительными характеристиками, так как этот текст нам бы хотелось иметь для публикации в «Трудах конгресса».

Счастлив воспользоваться этим удобным случаем напомнить Вам о себе и передать мои наилучшие пожелания мадам Вольтерра.

Ж. Адамар [IV.44].

На парижском конгрессе Вольтерра был одним из четырёх пленарных докладчиков. Другие пленарные доклады прочитали Пуанкаре, Миттаг-Леффлер и историк Мориц Кантор. В отличие от современных международных конгрессов, все пленарные доклады на этом конгрессе были понятны участникам, а их темы были взяты из истории или философии математики. Доклад, с которым выступил Вольтерра, назывался «Бетти, Бриоски, Казорати — три итальянских аналитика и три подхода к рассмотрению проблем анализа» [III.408] и был данью памяти трем коллегам, умершим за десятилетие, предшествовавшее конгрессу. Вольтерра также представил конгрессу более короткий доклад «Об уравнениях в частных производных» [III.409], о котором упоминалось в приведенном выше письме от Адамара.

Когда тема их исследований совпадала, Адамар развивал идеи Вольтерра. Так было с работой Вольтерра по уравнениям математической физики, особенно по теории волн, и с созданной Вольтерра теорией функций от кривых, названных Адамаром функционалами. Адамар был первым, кто в 1903 г. описал линейные функционалы на пространстве функций. Рассматривая пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, Адамар показал, что каждый функционал есть предел последовательности интегралов

$$U[f] = \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n(t) f(t)\,dt.$$

Эта теорема ознаменовала рождение большой области функционального анализа. От неединственности последовательности $\{h_n\}$, бывшей слабым местом представления Адамара, удалось избавиться в 1911 г. Ф. Риссу, который нашел каноническое представление функционала $U[f]$ в виде интеграла Стильтьеса, — как заметил однажды Адамар, «в математике простые идеи обычно приходят в голову последними».

За два года до того, как Вольтерра прочитал в Сорбонне курс лекций о функциях, зависящих от кривых, в 1910 г. Адамар изложил основы теории Вольтерра в своей книге «Лекции по вариационному исчислению», включив в нее и некоторые из своих собственных результатов. В основу этого фундаментального труда были положены лекции по этому предмету, прочитанные Адамаром в Коллеж де Франс. В 1912 г. Адамар опубликовал статью «Функциональное исчисление» [I.174], в которой предложил предпринять общее исследование функций с аргументом произвольного характера. Фреше впоследствии писал, что это была «пророческая» статья Адамара, которая вдохновила его (Фреше) на создание теории абстрактных пространств [II.13, с. 4084].

Важный вклад в развитие идей функционального анализа, основы которого заложили Вольтерра и Адамар, внесли также ученики Адамара Рене Гато и Поль Леви.

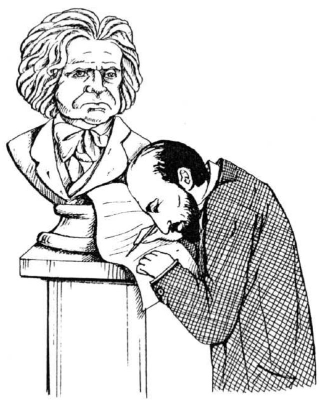
§ 3.4. Жизнь в домашнем кругу

К 1900 г. семья Адамаров переехала в дом на улице Гумбольдта, 25, между бульваром Араго и бульваром Сен-Жак. В соседнем доме жил химик Виктор Оже. Позднее одна из сестер Луизы купила дом неподалеку, а какое-то время спустя соседом Адамаров стал философ Гастон Мило. Жаклин Адамар писала: «Все эти дома, хорошо спрятанные за жилым массивом, были океаном покоя. В конце дороги была ферма со свиньями, индюшками, курами и утками и даже несколькими коровами. К сожалению, позже вместо этой фермы на улице Фобур-Сен-Жак построили огромный жилой дом и большой гараж».

У Адамаров уже было пять детей, две дочери родились в новом доме: Сесиль в 1901 и Жаклин в 1902 гг. В то время некоторые из университетских профессоров пожелали дать своим детям домашнее образование. Такое желание выразили супруги Перрен, Ланжевен, Кюри и Адамар. Адамар писал: «За два года, занимаясь обучением своих собственных детей, я выработал ряд идей о преподавании элементарной геометрии: этот вопрос стоял на повестке дня, по крайней мере во Франции, но мои идеи сильно отличались от тех, которые в то время находились в фаворе» (из письма к Э. О. Ловетту от 12 июля 1912 г. [IV.32]).

В дневное время, когда фрейлейн уводила самых младших в Люксембургский сад, в доме наступала тишина. Это было идеальное время для работы и приема посетителей — и тем, и другим Адамар занимался дома, так как в Коллеж де Франс кабинетов не было. Стиль работы, которого придерживался Адамар, описывает Жаклин:

«Он практически никогда не писал ни единого слова. Он рассказывал мне, что мыслит без слов и что ему очень трудно переводить свои мысли в слова. Он только наскоро записывал уравнения, причем не за столом, а на высоком деревянном постаменте. Такие постаменты в то время обычно использовались в качестве подставок для бюстов (у бабушки, конечно же, был бюст Бетховена). Он мог быстро записывать свои математические формулы, расхаживая по комнате. На протяжении многих лет мне доводилось слышать, как матушка записывает фразы вроде следующей: „Проинтегрировав... пум-пум, мы видим, что уравнение... пум-пум-пум... принимает вид... пум-пум-пум-пум“. Число „пум-пумов“ соответствовало длине пробелов, оставляемых для формул.



Матушка, разумеется, не могла записывать формулы, так как ее математическое образование никогда не поднималось выше простой арифметики. Но зато в ней она превосходила отца, так как он никогда не использовал числа больше четырех — затем следовало n.

Отец не любил считать и в ещё большей степени писать что-либо, и когда возникала надобность в том и другом, его опекала матушка. Например, однажды он получил от своего друга Дюэма (который остался в Бордо) такое очаровательное письмо, что матушка сказала ему: „На этот раз тебе придется ответить“. Отец согласился. Матушка подошла через час: „Много ли удалось написать?“ — „Да не очень“. На самом деле он написал только: „Мой дорогой Дюэм...“ — и всё!» [IV.1, с. I(13)].

Адамар сам рассказал о своей манере работать в книге [I.372, с. 34 (с. 30 русск. изд.)]: «Из рассказов Гельмгольца и Пуанкаре можно заключить, что они обычно работали, сидя за столом. Я этого не делаю никогда, за исключением тех случаев, когда приходится делать письменные вычисления (к которым я испытываю некоторое отвращение). За исключением ночей, когда я не могу уснуть, всё, что я нашёл, я нашёл, расхаживая по комнате; я придерживаюсь на этот счёт точки зрения персонажа Эмиля Ожье, который говорил: „Ноги — колёса мысли“».

Интересно, что для записи нематематических текстов Адамар изобрел свою систему стенографии, которой в совершенстве овладела Луиза. Он диктовал, она стенографировала и затем без его участия подготавливала окончательный текст.

Любезность, привлекательная внешность и музыкальность — таков далеко не полный перечень качеств Луизы. Она была «доброй и интеллигентной женщиной, которая поддерживала Адамара и помогала ему на протяжении всей его карьеры», — писал Фреше [II.13, с. 4081]. Их брак, продолжавшийся 68 лет, был образцом гармонии между двумя необычными и одаренными людьми.

Тетя Лу, как называли Луизу члены ее семьи и друзья, защищала Адамара от мелких житейских проблем, легко приспособившись к особенностям жизни с великим математиком. Жаклин Адамар вспоминала:

«Мы вели восхитительную жизнь, окруженные необычайным обаянием нашей матушки, которая умудрилась привить всем нам уважение к работе отца. Когда мне было два года, мои старшие братья и сестра подвергли меня бойкоту (по крайней мере, мне так показалось) в течение целого дня за то, что я прикоснулась к бумагам отца!

Следует сказать, что не прикоснуться к этим бумагам было трудно. Превыше всего отец боялся, что кто-нибудь вздумает привести их в порядок. После такого наведения порядка он, по его утверждению, не смог бы найти ничего. Поэтому его бумаги повсюду громоздились огромными кипами.

У отца была комната и большой письменный стол. Но насколько я помню, он им никогда не пользовался. Помню только, что этот стол покрылся пятью слоями бумаг, разделенных между собой слоями газет, которые отец расстилал на столе, когда предмет его исследований изменялся. Шестого слоя не было, потому что тогда бумаги лежали бы на столе слишком высоко и пользоваться ими было бы неудобно. Я уверена, что никто (в том числе и сам отец) не знал, что находилось в нижних слоях, которые были вскрыты только в 1935 г., когда мы переезжали на другую квартиру.

Бумажный потоп достигал и гостиной, что создавало проблемы, когда к нам приходили друзья или знаменитые иностранные ученые, так что нам приходилось освобождать стулья, а иногда (летом) и печь. В периоды высокой активности отца бумаги пытались даже захлестнуть стол в столовой; искушение действительно было велико, так как его прекрасная поверхность часами оставалась свободной! Ясно, что возникали трудности, так как во время обедов (какая трагедия!) приходилось освобождать стол. Моя сестра даже утверждает, что один-два раза скатерть пришлось стелить поверх бумаг.

Естественно, что такая аллергия на порядок протекала не без осложнений. Я всегда вспоминаю, как отец жаловался на весь свет, потому что кто-то передвинул его бумаги. Позднее я пыталась исправить ситуацию, предложив ему большой письменный стол с восемнадцатью ящиками, но моя попытка не увенчалась успехом: на большом столе оказалось только больше свободного места, где он мог раскладывать свои бумаги. Но удивительное дело — несмотря на весь хаос, отец никогда ничего не терял... за исключением одного случая, когда какая-то из его

Здесь вы видите... пса по кличке Сфероид, названного так потому, что он состоит в отдалённом родстве с бульдогами [«Boule dogues» — букв. «шары-собаки»] (из «Навязчивой идеи ученого Косинуса» Кристофа [III, 81])

статей была обнаружена у уличного торговца фруктами и овощами — торговец заворачивал овощи в его бумаги.

В доме, естественно, царила математика, и ее господство распространялось даже на животный мир: найденная нами собака, потерявшая хозяина, получила кличку „Икс-штрих". Позднее другую собаку назвали „Дзета от эс" (в то время отец много занимался дзета-функцией). Последняя собака получила кличку „Неперов логарифм", которая вскоре сократилась до „Лог"» [IV.1, с. I(14)—I(15)].

В кругу семьи, 1913

Адамар страстно любил музыку. Встречаясь в своих математических исследованиях с трудностями, он брался за скрипку. Трикоми вспоминает: «Адамар любил музыку и умел превосходно играть на скрипке. Однажды он признался мне, что не знает, что именно доставляет ему больше удовольствия — скрипка или математика» [II.61, с. 378]. Луиза была хорошей пианисткой. Детей воспитывали в твердом убеждении, что им необходимо научиться играть по крайней мере на одном музыкальном инструменте. Старший сын Адамаров Пьер умел играть на скрипке. Инструментом Сесиль стал альт, Жаклин играла на скрипке, а второй сын Этьен был необычайно одаренным пианистом.

Часть времени дети проводили с матерью Жака, которая, достигнув определенной состоятельности, купила большой деревенский дом в Кё-ан-Ивлин в пятидесяти километрах от Парижа. Там они играли в старом саду и разъезжали по всей округе на велосипедах.

Летом всей семьей отправлялись на каникулы, которые продолжались два с половиной месяца, в основном в Бретань, но иногда — в Центральный массив. Жаклин Адамар вспоминает:

«Это было в Коррэзе. Один из коллег отца, профессор Сорбонны месье Перье привил отцу (а заодно и нам) любовь к сбору грибов. В то время никто их особенно не собирал, и в конце лета мы восстали против полного пренебрежения грибами. Но первые же попытки научиться распознавать виды грибов сыграли с нами одну-две забавные шутки. Так, однажды отец, читая описание волнушек, не заметил примечания о том, что они обладают „лёгким слабительным действием“, и добавил их в омлет, а ночью вся семья испытала на себе это „лёгкое действие“! А что было бы, если бы действие было „сильным“?

В Бретани мы никогда не останавливались в гостинице — матушка всегда снимала дом. Мы добирались туда на поезде. У отца была досадная привычка, пока мы все сидели в купе, сходить с поезда и отправляться на поиски того или другого. Однажды поезд ушел без него, а у отца остались все билеты и кошелёк с деньгами на дорожные расходы! В таких случаях матушка всегда беспокоилась, пока он не возвращался» [IV.1, с. I(18)—I(19)].

Двери дома Адамара были всегда открыты для гостей. Среди его близких друзей было много выдающихся людей, таких как Вольтерра, Эйнштейн, Пенлеве, Монтель, Лебег, Ланжевен, Перрен, Бедье. Жаклин Адамар вспоминает:

«Я помню его [Эйнштейна] первый визит. Я была тогда маленькой. Его ясное выражение лица было почти таким же, как у ребенка. Из всех моих давних воспоминаний самым живым остаётся его громкий смех, который был слышен во всём доме. Эйнштейн водрузил себе на колени скамеечку для ног, чего никто, кроме него, никогда не делал, и опёрся локтем на нее, чтобы ему было удобнее разговаривать о математике.

Другим гостем, которого мы любили, был Риве [знаменитый антрополог и этнограф]. Он рассказывал нам о своих путешествиях. Помню его устрашающий рассказ о путешествии в Южную Америку, где ему удалось раздобыть ядовитых пауков (от укусов которых, по его словам, в Бразилии погибло больше людей, чем от укусов змей). Риве вернулся в Рио-де-Жанейро с большим ящиком, в котором находилось около сотни таких пауков, и поселился в гостинице. Его ассистент поднял ящик и уронил его. Ящик разбился, и все эти ядовитые существа, находившиеся в ящике, каждое из которых несло смерть, расползлись по гостинице, наполненной постояльцами! От истории Риве о корриде, которая началась, чтобы вновь поймать пауков, у нас по спине забегали мурашки. Всех пауков удалось поймать довольно быстро, за исключением двух последних, в поисках которых Риве провёл два дня, каждую минуту с ужасом ожидая услышать известие о смерти людей, в которой он считал бы себя виновным. К счастью, пауки были пойманы, все кончилось благополучно, и он наконец мог спать с чистой совестью.

Нередко к нам в гости приходил Пенлеве, математик, сделавший позднее политическую карьеру. В частности, я помню его теорию своенравия неодушевленных предметов, которые способны на самые гадкие шутки. Пенлеве спросил у моего отца: „Разве вы не замечали, что пуговицы от воротничков прячутся, перепрыгивая из одного ящика платяного шкафа в другой? Я видел это своими глазами“.

Мы часто видели Мило, который жил в соседнем доме. Гастон Мило, философ, был необычайно любезным человеком, а его жена сохранила непосредственность ребенка до преклонного возраста. Позднее она продемонстрировала эти свои качества, начав в возрасте старше шестидесяти лет успешную карьеру художника. Старший из их сыновей был товарищем по играм моих братьев, а я (мне тогда было семь лет) с удовольствием кормила из бутылочки самого младшего из сыновей Мило.

Разумеется, мы часто общались с супругами Оже. Виктор Оже, профессор химии в Сорбонне, был прирожденным философом. Он был доволен, когда что-то случалось, и в то же время был счастлив, даже если ничего не происходило. Но на меня очень сильное впечатление произвел такой его поступок: он не позволял, чтобы кому-либо из сидевших за столом подавали тарелку с трещиной, и, заметив как-то раз такую тарелку, разбил ее на две части, что рассердило его супругу. Их дети, наши ровесники, были нашими товарищами по играм, и тот, кто первым выполнял домашнее задание, звал остальных. Мы часто ходили вместе в Люксембурский сад, когда нашим родителям казалось, что мы слишком громко расшумелись, или когда мы что-то ломали.

Но для нас, детей, самыми любимыми гостями были Лебег и Монтель, два математика, очень разные, но оба полные жизни» [IV.1, с. III(31)].

А вот как описывает свои впечатления об Адамаре Стеклов в письме Ляпунову от 17 сентября 1903 г.:

«Адамар каким-то образом... разыскал меня сам. Один раз не застал меня дома, а на другой день явился в половине девятого утра, когда мы едва просыпались. Приехал он на два дня в Париж (экзаменовал на baccalauréat) и в день обратного отъезда в провинцию, где он проводит лето, перед экзаменом зашёл ко мне. Просидел с полчаса и наговорил столько, сколько за целый день успеть трудно. Парижанин типичнейший, подвижен и быстр неимоверно, ведет себя так, как будто мы с ним были давным-давно знакомы и только случайно не видались несколько времени. Вообще это удивительное свойство французов при первом же свидании ставить себя так, что забываешь, что человека в первый раз видишь, а через два, три свидания непременно в „ami“ попадёшь» [IV.39].

Это было необычайно счастливое время для Адамара: новые теоремы, лекции, любящая жена и дети, друзья, комфортабельный дом, наполненный звуками музыки.

§ 3.5. Первая мировая война

В возрасте семидесяти лет Адамар как-то заметил, что красоту жизни он познал с 1892 по 1916 г., «после чего никакая радость не была для меня поистине чистой» [II.27, с. 5]. Первая дата — год, когда он женился, вторая дата приходится на Первую мировую войну, когда Адамар пережил личную трагедию.

28 июля 1914 г. Австро-Венгрия объявила войну Сербии, и в течение одной недели в трагический водоворот событий были втянуты Германия, Россия, Франция, Великобритания и Бельгия. По масштабам — количеству вовлечённых людей, протяжённости фронтов, оснащённости техникой — и по последствиям ни одна из предыдущих войн, которые знало человечество, не шла ни в какое сравнение с разразившейся Первой мировой войной. Это была война за передел уже разделенного мира, и ее пожар вышел далеко за границы Европы. Со стороны Антанты выступали Великобритания, Франция и Россия, к которым позднее присоединилась Италия, а в 1917 г. и США. К концу «войны, которая должна была покончить со всеми войнами», в Антанту вступили 34 государства. Им противостояли Германия, Австро-Венгрия, Турция и Болгария.

Сыновья Адамара учились в лицее Людовика Великого. В июле 1914 г. старший сын Пьер был принят в Политехническую школу. «По отношению к своим братьям и сестрам он чувствовал себя более взрослым, с тайным сознанием своей роли старшего, налагавшей на него моральную ответственность», — писал Адамар [IV.2]. В августе 1914 г. Пьера призвали в армию. Жаклин Адамар вспоминает:

«В 1914 г. мы проводили каникулы в Требуле близ Дуарнене со своими друзьями Оже, когда разразилась катастрофа. Вернувшись с прогулки, мы узнали о мобилизации и о том, что мои родители и старший брат Пьер (который был принят в Политехническую школу) отправились в Дуарнене, чтобы оттуда поездом добраться до Парижа. Мы побежали за ними, и нам удалось догнать их до того, как они сели в поезд. Как и все вокруг, мы были очень взбудоражены.

Через несколько дней родители вернулись и сообщили нам, что мой брат записан младшим лейтенантом в артиллерию. Вскоре он отправился на фронт. После победы на Марне, одержанной в значительной мере благодаря мобилизации такси для быстрой перевозки войск, мы вернулись в Париж.

Но весь Север был оккупирован, и беженцы наводнили Париж. Было необходимо организовать их прием, позаботиться об одиноких детях. Подруга матушки мадам Грумбах (удивительная женщина) организовала благотворительное учреждение, и моя мама помогала ей» [IV.1, с. II(1)].

Луиза Адамар в качестве медсестры. 1915 г.

Следующее письмо Адамар написал Вито Вольтерра 15 января 1916 г.:

Дорогой друг!

Мне было очень приятно получить Вашу сердечную записку. Дружеская поддержка, даже на расстоянии, сейчас крайне необходима, — поддержка, которая ценится во все времена, но означает еще больше и кажется еще искреннее в разгар общей трагедии.

Вполне естественно, что в этот самый момент наши судьбы имеют много общего. Как и Вы, я очень занят, работаю над проблемами, близкими к тем, которым Вы посвятили себя. И также, как следствие этой занятости, я читаю в Коллеж де Франс очень редкие курсы для очень редких студентов — разумеется, я не упоминаю о Политехнической школе, все студенты которой сражаются на фронте, а здание превращено в госпиталь.

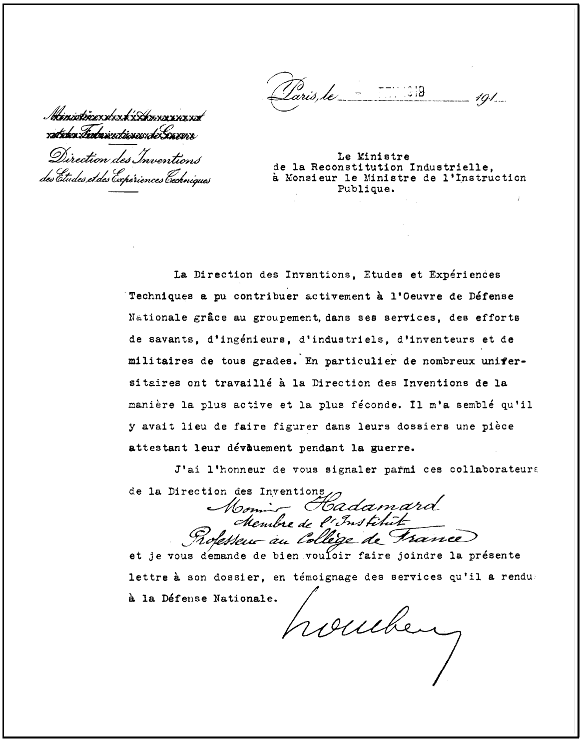
Моя жена шлет наилучшие пожелания мадам Вольтерра и говорит, что она должна быть счастлива, имея столь юных детей в наше опасное время. К счастью, наш старший сын, находясь на войне, до сих пор не получил ни царапины, хотя он принимал участие в самых ожесточенных сражениях.

Благодарю Вас за добрые пожелания и в свою очередь шлю Вам наши наилучшие пожелания вместе с почтением мадам Вольтерра.

Ж. Адамар [IV.44].

Адамар был вовлечен в теоретическую работу военного значения в Управлении технических изобретений, организованном Пенлеве и Борелем в Министерстве общественного образования, изящных искусств и изобретений, представляющих интерес для Министерства обороны, министром которого Пенлеве был в 1914—1915 гг.[1] В досье Адамара, хранящемся в Национальном архиве, можно

[1] Это министерство было создано специально для Пенлеве; в 1917 г. он стал военным министром.



Paris, le 1919 191

Direction des Inventions
des Études et des Expériences Techniques

Le Ministre
de la Reconstitution Industrielle,
à Monsieur le Ministre de l'Instruction
Publique.

La Direction des Inventions, Etudes et Expériences Techniques a pu contribuer activement à l'Oeuvre de Défense Nationale grâce au groupement, dans ses services, des efforts de savants, d'ingénieurs, d'industriels, d'inventeurs et de militaires de tous grades. En particulier de nombreux universitaires ont travaillé à la Direction des Inventions de la manière la plus active et la plus féconde. Il m'a semblé qu'il y avait lieu de faire figurer dans leurs dossiers une pièce attestant leur dévouement pendant la guerre.

J'ai l'honneur de vous signaler parmi ces collaborateurs de la Direction des Inventions

Monsieur Hadamard
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

et je vous demande de bien vouloir faire joindre la présente lettre à son dossier, en témoignage des services qu'il a rendu à la Défense Nationale.

Loucheur

Письмо министра реконструкции промышленности министру образования

найти следующий документ, подтверждающий его участие в военных исследованиях.

От министра реконструкции промышленности

Министру образования.

Управление технических изобретений, исследований и экспериментов внесло активный вклад в решение задачи национальной обороны благодаря координации его службами усилий ученых, инженеров, промышленников, изобретателей и военнослужащих всех рангов. В частности, многие университетские ученые самым активным и плодотворным образом участвовали в работе Управления технических изобретений. Мне кажется, есть веские причины для того, чтобы поместить этот документ в досье университетских ученых с целью засвидетельствовать их патриотизм во время войны.

Среди этих сотрудников Управления технических изобретений я имею честь обратить Ваше особое внимание на

месье Адамара,
члена Института,
профессора в Коллеж де Франс.

Прошу Вас присоединить настоящее письмо к его досье, как свидетельство его заслуг в деле национальной обороны [IV.26].

Управление технических изобретений пользовалось также услугами Вольтерра, в особенности при решении проблемы локации звука. Вольтерра, будучи сенатором, внес большой вклад в подготовку вступления Италии в войну на стороне стран Антанты. Когда это произошло в 1915 г., он вступил добровольцем в армию, записавшись в военно-воздушные силы в качестве офицера инженерного корпуса. Вольтерра работал над созданием стрелкового вооружения для самолетов, принимал участие в опасных военных операциях и входил в состав военных миссий, направленных в Англию и Францию, посещая франко-германский фронт вместе с Пенлеве и Борелем.

В начале 1916 г. Адамар писал Вольтерра:

Мой дорогой друг, Пенлеве только что сообщил мне о Вашем желании иметь в Риме французского профессора и добавил, что Вы имеете в виду меня. Нет нужды говорить, сколь высоко я ценю Ваше обращение ко мне. Вам также известно, с каким огромным удовольствием я принял бы Ваше приглашение в обычное время, поскольку моим самым горячим желанием всегда было посещать Италию как можно чаще.

Вы поймете, что этому препятствует, и, я уверен, Вы предвидели эти препятствия. Дело не только в том, что, как все, я не могу думать ни о чем другом, кроме проблем, связанных с войной, ведь и Ваша идея исходит из этого, и это еще не было бы препятствием, но я с радостью и гордостью принимаю участие в проектах, имеющих непосредственное отношение к обороне. Я связан с Управлением технических изобретений, во главе которого, как Вы знаете, стоят Пенлеве и Борель.

Я не могу допустить и мысли о том, чтобы прервать работу, которой я сейчас занят. Разве не заставила бы меня столь радикальная перемена (усугубляемая расстояниями и необходимостью приспособить мой ум, столь далекий в данный момент от чистой науки, к преподаванию в Римском университете) утратить связь с проблемами, над решением которых я начал размышлять, и в то же время не оставила бы меня в неведении относительно тех проблем, которые сейчас возникают сами собой?

Кроме того, я, как и Вы, сознаю всю важность, которое имело бы утверждение солидарности в области науки для наших двух стран. Я очень желал бы иметь возможность совместить этот свой долг с обязанностями, о которых я только что сказал Вам.

Основной вопрос для меня в сложившихся условиях — продолжительность моего пребывания в Риме. Я вынужден настаивать на сокращении этого срока с таким же упорством, с каким в другой раз я хотел бы его увеличить, причём настолько, насколько это возможно.

Поэтому я начну с вопроса о том, какого рода преподавание Вы имеете в виду и какое минимальное время необходимо, по-Вашему, для воплощения намеченной Вами программы?

Добавлю к сказанному, что, имея в виду те же обстоятельства, я был бы рад отложить свой отпуск, насколько это возможно, чтобы продолжить свое сотрудничество с Управлением технических изобретений до тех пор, пока эта работа не начнет находить практическое приложение.

Я горячо надеюсь, что мы придем к соглашению, которое удовлетворит Вас, и еще раз с самой теплой и сердечной благодарностью заверяю Вас в моих искренних дружеских чувствах.

Ж. Адамар [IV.44].

Адамар прибыл в Рим утром 2 мая. С 4-го по 17-е мая он читал лекции в университете о задаче Коши для гиперболических уравнений. Он снова встретил Вольтерра, который смог прибыть в Рим из армии на короткое время. Вскоре после отъезда Адамара из Рима Вирджиния Вольтерра получила из Франции телеграмму, в которой сообщалось о том, что Пьер Адамар тяжело ранен. Мадам


Indicazioni di urgenza

= SIGNORA VOLTERRA LUCINA 17 ROMA

Ufficio Telegrafico

QUALIFICA | DESTINAZIONE | PROVENIENZA | NUM. | PAROLE | DATA DELLA PRESENTAZIONE | VIA E INDICAZIONI EVENTUALI D'UFFICIO

TORINO 752 17 24 7H45 VISTATO

= TELEFONATO IERSERA GENOVA RISULTANDOMI HADAMARD TUTTORA LA ' GIA

INFORMATO RIPARTE OGGI = FANO =

Stabilimento G. Pitigliani

Телеграмма от Дж. Фано

Вольтерра написала итальянскому математику Дж. Фано[1] в Турин, надеясь через него сообщить Адамару о ранении сына. Фано послал мадам Вольтерра следующую телеграмму:

ВЧЕРА ПЕРЕДАЛИ АДАМАР ПОКА В ГЕНУЕ. ЕМУ УЖЕ СООБЩИЛИ. ВЫЕЗЖАЕТ СЕГОДНЯ. ФАНО [IV.44].

§ 3.6. Гибель Пьера и Этьена

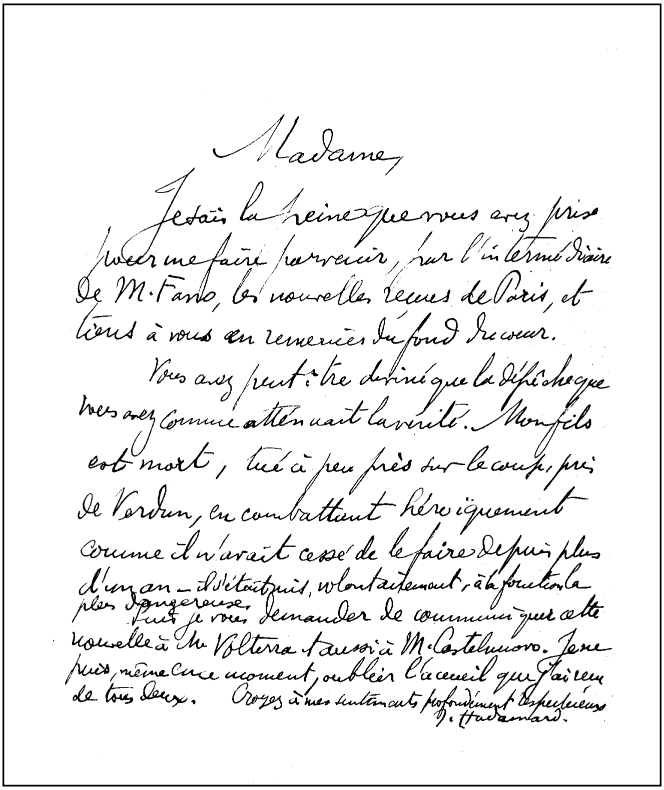
Весной 1916 г. Пьер Адамар вступил в командование артиллерийской батареей под Верденом, городом, который французы упорно обороняли. Крепость в Вердене играла центральную роль в планах немецкого верховного командования на западном фронте в начале 1916 г.: захват крепости открыл бы дорогу на Париж. Битва под Верденом началась в феврале 1916 г. и была столь ужасна по масштабу людских потерь, что даже сейчас, долгие годы спустя после еще более кровопролитной Второй мировой войны, Верден остается мрачным символом огромной человеческой трагедии.

По возвращении домой из Италии Адамар узнал страшную истину:

Младший лейтенант Адамар, Пьер, из 103-й батареи 49-го артиллерийского полка.

Молодой офицер-артиллерист, обладавший большой храбростью и высоким чувством долга, был послан 18 мая 1916 г. к немецким окопам через несколько часов после их за-

[1]Джино Фано (1871—1952) занимался проективной и алгебраической геометрией. Он преподавал в Турине с 1901 по 1938 г., пока не был уволен режимом Муссолини.



Madame,

Je sais la peine que vous avez prise pour me faire parvenir, par l'intermédiaire de M. Fano, les nouvelles reçues de Paris, et tiens à vous en remercier du fond du cœur.

Vous avez peut-être deviné que la dépêche que vous avez connue atténuait la vérité. Mon fils est mort, tué à peu près sur le coup, près de Verdun, en combattant héroïquement comme il n'avait cessé de le faire depuis plus d'un an — il s'était mis, volontairement, à la fonction la plus dangereuse.

Puis-je vous demander de communiquer cette nouvelle à M. Volterra et aussi à M. Castelnuovo. Je ne puis, même en ce moment, oublier l'accueil que j'ai reçu de tous deux. Croyez à mes sentiments profondément respectueux

J. Hadamard.

Факсимиле письма Адамара Вирджинии Вольтерра

хвата для наблюдения за стрельбой мортир. Выполнив поставленную задачу, он покинул свой наблюдательный пункт и вернулся в часть, чтобы принять участие в контратаке. Сражаясь вместе с пехотинцами, которых он вдохновлял своим примером, младший лейтенант Пьер Адамар пал смертью храбрых на поле боя.

Главнокомандующий 2-й армией

Подписано: Нивель [IV.1].

В письме Адамара Вирджинии Вольтерра от 29 мая говорилось следующее:

Мадам,

Я знаю, сколько хлопот доставило Вам довести до меня через месье Фано новости, поступившие из Парижа, и благодарю Вас за Ваши усилия от всего сердца.

Вероятно, Вы догадались, что в сообщении, которое Вы прочитали, истина была смягчена. Мой сын погиб, убитый почти мгновенно, под Верденом, где он героически сражался на протяжении более чем года, — он добровольно выбрал самую опасную службу. Прошу Вас передать эту новость господину Вольтерра, а также господину Кастельнуово. Даже сейчас я не могу забыть тот прием, который они оба оказали мне. Прошу Вас принять мои самые лучшие пожелания.

Ж. Адамар [IV.44].

Вскоре Адамар получил телеграмму:

С ГЛУБОКИМ СОБОЛЕЗНОВАНИЕМ ВЫРАЖАЕМ ВАМ ВОСХИЩЕНИЕ ВАШИМ СЫНОМ, ГЕРОИЧЕСКИ ПАВШИМ ЗА ПРАВОЕ ДЕЛО ВИТО ВИРДЖИНИЯ ВОЛЬТЕРРА[1] [IV.44].

Когда началась война, второму сыну Адамаров Этьену, проявлявшему блестящие математические способности, было всего семнадцать лет. Он учился в лицее Людовика Великого. В июне 1916 г., получив извещение о том, что он прошел вступительные экзамены в Центральную школу искусств и ремёсел, Этьен записался добровольцем в армию и в течение месяца был послан под Верден. Он получил назначение в батарею, расположенную в четырех километрах от того места, где двумя с половиной месяцами ранее был убит его брат Пьер. Через день после прибытия Этьен был тяжело ранен в первом же сражении — осколки снаряда поразили обе его ноги. Транспорта не было, и Этьена оперировали только через два дня после ранения. Его родителям и их младшему сыну Матье удалось прибыть вовремя, чтобы застать Этьена в сознании. После встречи с ними Этьен прожил еще два часа.

Поль Леви вспоминает горестные слова Адамара: «Всё, что я сделал в математике, не идёт ни в какое сравнение с тем, что мог бы сделать он [Этьен], если бы остался жив» [II.37, с. 3]. Похожую фразу Адамара приводит Ж. Николетис, военный инженер, слушавший в молодости лекции Адамара: «Он говорил, что как математик он был „ничто“ по сравнению с этим мальчиком, который только что был принят в Центральную школу». Николетис воевал в одном полку с Пьером и был ему обязан жизнью. «Он втащил меня, полумёртвого, в окоп под Артуа», — писал Николетис [II.49, с. 10]. Адамары были привязаны к Николетису: его присутствие молчаливо напоминало о близких, ушедших навсегда. Жаклин Адамар вспоминает: «Гибель сыновей стала страшным ударом для моих родителей. Но они сумели выдержать его, не перекладывая его чрезмерную тяжесть на нас, молодых (что я осознала гораздо позже). Когда отец скончался в 1963 году, я обнаружила, что он всегда носил с собой письмо от командира моего брата Пьера с описанием того, как Пьер погиб, с лихвой выполнив свой долг, и дружеских чувств, которые питали к нему сослуживцы» [IV.1, с. II(2)—II(3)].

В 1918 г. немцы применили для бомбардировки Парижа дальнобойное орудие «Большую Берту», но без особого успеха. Жаклин Адамар вспоминает:

«Обстрел не был особенно эффективным и, за исключением одного случая, когда снаряд попал в Сен-Жерве во время, кажется, мессы, но жертв не было.

Когда раздавался сигнал тревоги, родители заставляли нас спускаться в убежище. Моя сестра готовилась к экзаменам на звание бакалавра, и, по мнению отца, часы, проведенные в погребе, давали ей шанс позаниматься. Отец не созна-

[1] Следующая трогательная история, рассказанная Хансом Леви, оказалась ошибочной: «Жак Адамар читал в Риме несколько лекций, а затем уехал. Вскоре после его отъезда была получена телеграмма на его имя, которую вскрыл Вольтерра. В ней говорилось: „Ваш сын убит на войне“. Это была Первая мировая война. Адамар только что уехал, поэтому Вольтерра изучил железнодорожное расписание и, выбрав самый быстрый поезд, решил перехватить Адамара на границе, чтобы лично сообщить ему о гибели сына» [III.7, с. 186—187].

Имена сыновей Адамара на мемориальной доске в лицее Людовика Великого

вал, что сестра устала, и считал, что она прилагает недостаточно усилий. Соседи, также спускавшиеся в убежище, были неприятно поражены его суровостью и время от времени вмешивались.

Наши родители, обнаружив, что траектории полета снарядов Большой Берты имели ось юг-север, проходившую над нашими головами, хотели, чтобы мы отправились в деревню. Мы запротестовали и категорически отказались. Поэтому наша семья, а также жившие по соседству родственники переселились на время к другой родне. У них была большая квартира в 16-м округе, в которой мы кое-как разместились. Помню, я спала на бильярдном столе» [IV.1, с. II(35)].

К концу войны младший сын Адамаров Матье, успешно сдавший вступительные экзамены в Политехническую школу в 1918 г., также был мобилизован. Его отправили на более спокойный итальянский фронт, откуда он вернулся живым.

Война закончилась 11 ноября 1918 г., а 19 июня 1919 г. был подписан Версальский мирный договор. Жаклин Адамар вспоминает: «...Перемирие положило конец войне. Сильного ликования не могло быть для огромного числа семей, пребывавших (как и наша) в глубоком трауре. Но для многих, по крайней мере, наступил конец душевных и физических страданий. Для тех людей нашего поколения, которые остались в живых, это был момент разрядки» [IV.1, с. II(37)].

Война стала катастрофой для французской математики, человеческие потери которой были ужасными, потому что, в отличие от немцев и англичан, французы не берегли молодых математиков, а отправляли их на фронт, и в результате многие из них были убиты, что серьезно ослабило французскую математику в послевоенные годы. Из 240 студентов Нормальной школы, призванных 2 августа 1914 г., только 23 вернулись невредимыми, а 120 были убиты [III.195, с. 174].

Среди коллег Адамара, понесших тяжелые потери, были супруги Пикар, потерявшие дочь и двух сыновей, и супруги Борель, лишившиеся своего приемного сына.

Жаклин сохранила записную книжку, исписанную в 1923 г. рукой Адамара. В этой книжке были подробно изложены биографии Пьера и Этьена и обстоятельства их смерти. Засушенный дикий цветок из гербария одного из погибших братьев пришит к странице этой записной книжки, которая начинается так:

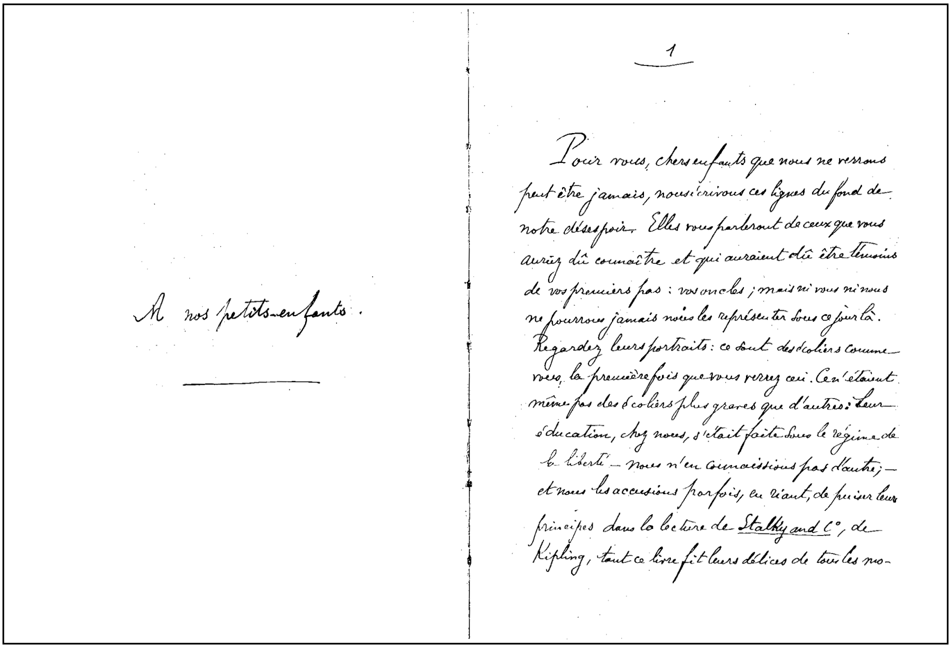
«Нашим внукам.

Для вас, дорогие дети, которых мы, возможно, никогда не увидим, мы пишем эти слова из глубины охватившего нас отчаяния. Они расскажут вам о тех, кого вы должны знать и кто должен был бы быть свидетелем ваших первых шагов, — о ваших дядьях; но ни вы, ни мы не сможем зримо представить их себе в такой роли.

Взгляните на их портреты. Они такие же школьники, какими будете вы, когда впервые увидите эти странички. Они даже не были более серьезными школьниками, чем другие. Дома их воспитывали в атмосфере свободы (мы не знали ничего другого), и иногда мы в шутку обвиняли их в том, будто они черпают свои принципы из повести Киплинга «Сталки и компания», так как этой книгой они непрестанно восхищались до самого дня их отъезда.

Это обвинение было шуткой: в школьные годы они с величайшим тщанием выполняли домашние задания (с самых первых месяцев после поступления в лицей они были среди лучших по успеваемости), их любили и соученики, и учителя, многие из которых позднее рассказывали о них своим более молодым коллегам.

Эту работу, от которой они не уклонялись, они делали, как и всё остальное, с радостью: радость никогда не меркла, она постоянно освещала их детские и юношеские годы, и когда они были вдвоем, то получали от жизни еще больше удовольствия. Не было лучшего союза, чем союз между ними, и мы всегда будем помнить музыкальные импровизации „à deux“, когда они сидели за одним



A nos petits-enfants.

1

Pour vous, chers enfants que nous ne verrons peut être jamais, nous écrivons ces lignes du fond de notre désespoir. Elles vous parleront de ceux que vous auriez dû connaître et qui auraient dû être témoins de vos premiers pas : vos oncles ; mais ni vous ni nous ne pourrons jamais nous les représenter sous ce jour là. Regardez leurs portraits : ce sont des écoliers comme vous, la première fois que vous verrez ceci. Ce n'étaient même pas des écoliers plus graves que d'autres : leur éducation, chez nous, s'était faite sous le régime de la liberté — nous n'en connaissions pas d'autre ; — et nous les accusions parfois, en riant, de puiser leurs principes dans la lecture de Stalky and C°, de Kipling, tout ce livre fit leurs délices de toutes les mo-

Первые страницы записной книжки Адамара с воспоминаниями о Пьере и Этьене

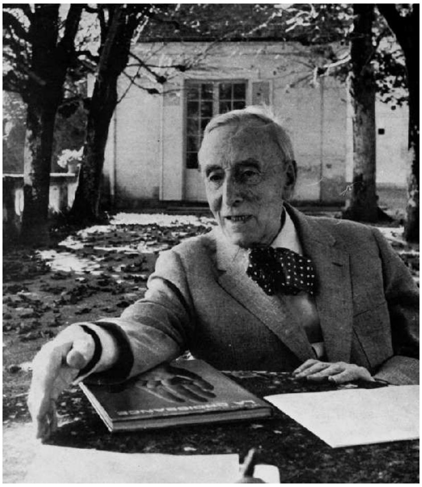
пианино и им требовалось только согласовать жанр пьесы, темп и тональность. Тогда они отключались от действительности, все время перехватывая развитие темы друг у друга и сохраняя гармонию во всех импровизациях, подсказываемых им фантазией.

Именно эти школьники принесли в жертву свои жизни, которые они могли бы прожить, во имя своей страны. И теперь они остались лишь в нашей памяти и в памяти своих и наших друзей, которые, я искренне на это надеюсь, смогут рассказать вам о них; и немного в прекрасной, но столь смутной памяти Франции о легионах своих погибших» [IV.2].

§ 3.7. Робер Дебре об Адамаре

Для француза нет необходимости представлять Робера Дебре, врача, в честь которого названы госпиталь в Париже и многочисленные педиатрические отделения по всей Франции. Его сын Мишель Дебре долгое время был помощником генерала де Голля и стал премьер-министром в первом правительстве Пятой республики, а позднее министром финансов, иностранных дел и национальной обороны.

Робер Дебре был племянником Луизы Адамар и близким другом ее семьи, он был шафером на свадьбе Жака и Луизы Адамар. Следующие строки — это его



Робер Дебре (1882—1978)

неопубликованные воспоминания об Адамаре, написанные по просьбе его кузины Жаклин Адамар:

«Отвечая на твой вопрос, я прежде всего вспоминаю незабываемую атмосферу, окружавшую твоих родителей в молодости. За свою долгую жизнь я много раз наблюдал супружеские пары и их личную жизнь, потому что ко мне часто обращались в тревоге за больных малышей, и мне становилось известно, какая атмосфера царит во многих домах.

Мне доводилось встречать немало счастливых супружеских пар. Но поистине Жак и Луиза Адамар были чем-то исключительным и оставили в моей душе неповторимый образ, несравнимый с впечатлениями от других семей. Дело в том, что супруги Адамар знали, как ценить мельчайшую крупицу счастья: если он видел, как она составляет букетик, он восхищался каждым цветком, даже каждым листочком. Шутка кого-либо из друзей доставляла им радость. Их отличало умение радоваться простым вещам, умение, в конечном счете основанное на их полном счастье.

И оно сочеталось с их доброжелательностью, которую они буквально излучали. Это не было слепой добротой: он ясно видел недостатки и ошибки окружающих. Но это — в атмосфере жизнелюбия, которая делала их образцом для подражания.

Мой дядюшка Жак выполнял свою работу с улыбкой и делал ее безупречно. Но помимо работы он наслаждался всем: чтением, музыкой, искусством, природой, дружбой и семейной жизнью. И самое поразительное было, что это не было наивным, а сопровождалось точным суждением.

И дядюшка Жак, и тетушка Луиза обладали особым пристрастием к воспоминаниям и при каждом удобном случае с удовольствием вспоминали какой-нибудь эпизод из прошлого.

В то же время вызывал восхищение их интеллект, граничивший с гениальностью, интеллект критический и проницательный, причём во многих областях, в том числе в истории и современных событиях (следует помнить, что в то время мышление не руководствовалось заранее принятыми установками).

Для Жака Адамара было характерно неугасающее чувство справедливости по отношению к любому члену общества; он был в стороне от светской жизни, и я думаю, что он не мог бы ее выносить. Адамар обладал глубоким чувством свободы и питал абсолютное уважение к человеческому сознанию — черта, встречающаяся реже, чем принято думать.

Все эти черты, проявлявшиеся у Адамара с детских лет и в юные годы, сохранились и в зрелом возрасте. Отсюда его энтузиазм: великодушие юности, которое удачно контрастировало с жизненной позицией самых заядлых скептиков. Но в то же время Жак Адамар обладал исполненным глубокого достоинства безразличием к практическим проблемам. Это безразличие не было формой презрения, потому что он ни к чему не относился с презрением.

На всех этапах жизни Адамарам были присущи эрудиция, трезвость суждений, здравый смысл в вопросах образования, очень серьезный подход к изучаемым проблемам. Интерес к образованию и формированию личности пробудился у Жака Адамара рано.

Вообще, первое, что вспоминается об Адамаре, — это исходящая от него блестящая интеллектуальная сила.

Второй этап в жизни Жака Адамара был отмечен делом Дрейфуса, которое вынудило Адамара судить о людях исключительно на основе того, кто они — дрейфусары или антидрейфусары. Он был буквально одержим, это заполняло всю его жизнь, заставляя его вчитываться и вслушиваться в каждое слово, прочитывать мельчайшую заметку о деле Дрейфуса в газете. Вокруг Адамаров — люди, такие как Сеньобос, Сеай[1] и сорбоннская группа дрейфусаров. Дома — потеря чувства меры в течение не менее пяти лет, после чего накал страстей утих.

Затем с начала войны 1914—1918 гг. наступил момент, когда разбились их надежды на мир и интернационализм. Идеал пал. Впрочем, в тот момент французы оказались сильно разделенными. Как и все мы, Адамары не придерживались какого-нибудь определенного мнения.

Разумеется, в начале войны я их не видел. Когда я их встретил снова, у меня защемило сердце: они стали совсем другими. Они искали какой-то смысл, порядок. Жак не терял присущей ему научной невозмутимости. Разумеется, он сохранял весь блеск своего интеллекта. Но радость жизни исчезла навсегда.

В заключение я хотел бы сказать, что его влияние на меня было и остается фундаментальным» [IV.1, с. I(20)—I(21)].

[1] Ш. Сеньобос (1854—1942) — историк, автор «Истории цивилизации» и нескольких книг по истории Франции. Г. Сеай (1852—1922) — философ, работавший над теорией и историей искусства, а также над проблемами философии морали. Оба стали членами Комитета Лиги прав человека с момента ее создания.

Глава 4

После Первой мировой войны

§ 4.1. Двадцатые годы

В письме Миттаг-Леффлеру от 24 июля 1919 г. Адамар признавался: «Со своей стороны я вряд ли смогу вернуться к прежней научной жизни, как и к прежней жизни в целом». Но вскоре он возобновил свою работу с прежней интенсивностью, ежегодно публикуя серии работ. «Адамар смог перенести все несчастья и не был ими безнадежно подавлен, благодаря математике, которая оказала огромную помощь потрясенному горем отцу, заставив его отгородиться от реальности», — писал Данжуа [II.8, с. 34].

В 1920 г. Адамар стал преемником Аппеля по кафедре математического анализа в Центральной школе искусств и ремёсел, сохранив за собой свои должности в Политехнической школе и в Коллеж де Франс. Педагогическая активность Адамара достигла широчайшего размаха: он читал сравнительно элементарный курс в Центральной школе, а его лекции в Политехнической школе были значительно более сложными. По словам Поля Леви, «...трудные места были выделены и разъяснялись так, что это вызывало восхищение слушателей» [II.37, с. 4].

Интересная подробность, касающаяся преподавания Адамара в Политехнической школе, хотя она и относится к предвоенным годам, упомянута в статье [III.24, с. 184]: «Адамар повысил требования к содержанию своих курсов, ввел систему примечаний в конце страницы на листках, распространяемых среди студентов, и увеличил число ссылок на последние математические публикации и статьи. Последствия приняли угрожающую для студентов форму: 1000 страниц литографированных курсов для двух отделений 1912—1913 и 1913—1914 гг.; это — рекорд нашего времени».

Майо, генерал, возглавляющий Политехническую школу с 1965 по 1968 г., и бывший студент Адамара, по его собственному признанию, один из последних по успеваемости на курсе, заявил на столетнем юбилее Адамара:

«„Крот“ (здесь — слушатель Политехнической школы), который наблюдал, как Жак Адамар входит в лекционную аудиторию, видел перед собой увлечённого преподавателя, в ходе рассуждений которого точность сочеталась с необычайной подвижностью. В результате лекция превращалась в сражение, в приключение. Не умаляя строгости, Адамар открывал нам важность интуиции, и лучшие студенты были в восторге. А для других студентов интеллектуальная жизнь была менее комфортабельной, но такой увлекательной... И прежде всего мы все отчетливо понимали, что с таким „проводником“ мы никогда не рискуем заблудиться» [II.5, с. 8].

На том же юбилее Мандельбройт вспоминал:

«В течение нескольких лет Адамар также читал лекции в Коллеж де Франс: лекции были длинными, сложными, но бесконечно интересными. Он никогда не пытался скрывать трудности, а наоборот, особо выделял трудные места. Аудитория мыслила вместе с ним, его лекции пробуждали творческую активность слушателей. День после лекции Адамара был богатым, наполненным, и на протяжении всего дня мы размышляли над его идеями.

Именно на лекциях Адамара я впервые познакомился с тайнами дзета-функции Римана, осознал значение аналитического продолжения, квазианалитичности, ряда Дирихле, а также роли функционального анализа в вариационном исчислении» [II.5, с. 26—27].

В 1920 г. Адамар воспользовался приглашениями прочитать лекции в Институте Райса (Хьюстон, штат Техас, США) и в Йельском университете. Первое

HE KNOWS MATHEMATICS

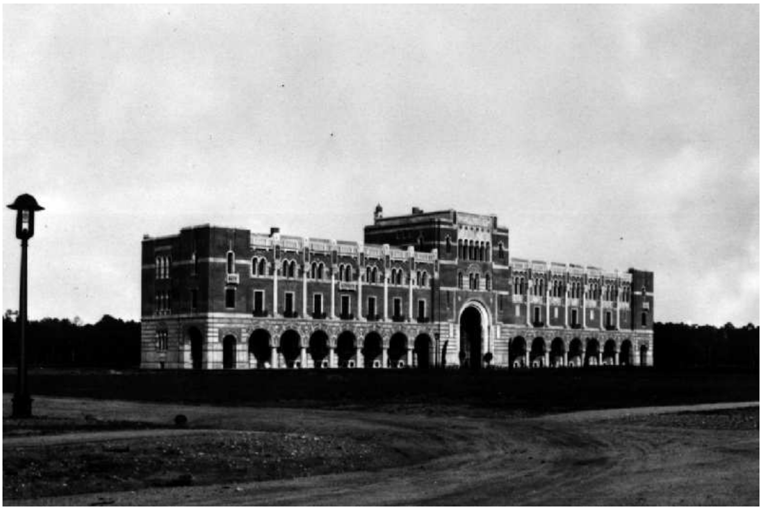
This is Professor Jacques Hadamard, of the Department of Mathematics of the French Institute and College of France, and the French Polytechnic School. He comes to this country to lecture on higher mathematics at Yale University and the Rice Institute of Texas. He is considered one of the foremost mathematical geniuses and expounders of the present day

Портрет Адамара и заметка из нью-йоркской газеты «Town&Country» от 1 апреля 1920 г.

«ОН ЗНАЕТ МАТЕМАТИКУ

Это Жак Адамар, профессор математики Института Франции и Коллеж де Франс, а также французской Политехнической школы. Он приехал в США, чтобы читать лекции по математике в Йельском университете и Институте Райса в Техасе. Он считается одним из самых выдающихся математических гениев и лекторов современности» [IV.33].

приглашение исходило от Эдгара Ловетта, которого Адамар знал с 1900-х гг. Математик и астроном Ловетт был первым президентом Института Райса, основанного в 1908 г. Через двадцать восемь лет он писал: «С благодарностью мы вспоминаем советы профессора Адамара и поддержку, которую он начал нам оказывать при создании нашего института еще до того, как перо прикоснулось к бумаге или лопата к земле. С характерным для него бескорыстием профессор Адамар убеждал своих коллег и обеспечивал их сотрудничество в нашем предприятии» [II.27, с. 68]. В Институте Райса Адамар выступил с докладом о первых научных работах Пуанкаре[1] [I.220].



Когда Институт Райса только открылся, он занимал всего лишь несколько зданий, самое внушительное из которых называется теперь Ловетт Холл

Газета студентов Института Райса «The Thresher»[2] сообщала о визите Адамара в номере от 19 марта 1920 г. в следующей статье:

ВЫДАЮЩИЙСЯ ФРАНЦУЗ — ГОСТЬ ИНСТИТУТА

ДОКТОР АДАМАР, ЗНАМЕНИТЫЙ МАТЕМАТИК, ЧИТАЕТ СЕРИЮ ЛЕКЦИЙ

Доктор Жак Адамар, один из лучших математиков Франции, уже несколько дней является гостем Института Райса. Это третий визит доктора Адамара в Америку, но во время своих предыдущих визитов он не забирался так далеко на юг и не добирался до Хьюстона. Тем не менее, на протяжении нескольких лет доктор Адамар проявлял интерес к Институту Райса; более того, он был одним из тех, с кем доктор Ловетт консультировался еще до того, как началось строительство Института.

Доктор Адамар прочитал три лекции по математике, а также одну открытую лекцию под названием «Военные усилия Франции в прошлой войне». Основной темой, которую

[1] Лекции на эту тему Адамар прочитал и в своем курсе в Коллеж де Франс в 1922 г.

[2] От английского слова thresh, которое имеет два значения: «молотить» и «пытаться решить проблему». — *Прим. перев.*

Эдгар Ловетт (1871—1957)

профессор Адамар затронул в своей лекции, было использование математики в приёмах противовоздушной войны. «Охотник, целящийся в летящую птицу из ружья и вынужденный из-за скорости движения птицы стрелять с упреждением, тем самым иллюстрирует фундаментальный принцип зенитной артиллерии», — заявил доктор Адамар. Самая большая трудность заключается в создании приборов, заменяющих глаза и удаленных на достаточно большое расстояние, но способных мгновенно передавать информацию о летящем объекте. В конце концов эту проблему удалось решить, выстроив цепочку людей и создав тем самым линию связи, проходящую от одного наблюдателя к другому и способную фиксировать и передавать то, что видят наблюдатели. Еще одна проблема, которой коснулся в своей открытой лекции профессор Адамар, — постоянно изменяющиеся на войне условия. В какой-то момент вы можете располагать множеством машин, которые через месяц устареют и превратятся в груду металлолома.

Лекция была прочитана на английском языке без использования технических терминов, что в сочетании с присущим доктору Адамару остроумием сделало ее весьма приятной для всех присутствовавших [IV.34].

Йельские лекции Адамара были поддержаны Силлимановским фондом. Силлиманы — семья, завещавшая университету крупную сумму, чтобы «учредить ежегодный курс лекций, призванных проиллюстрировать присутствие и провидение, мудрость и благость Бога, как в мире природы, так и в мире морали... Завещатели полагали, что любое упорядоченное изложение фактов природы или истории способствует этой цели более эффективно, чем любая попытка подчеркнуть элементы какого-нибудь учения или символа веры; и, следовательно, согласно их воле лекции по догматическим или теологическим проблемам подлежали исключению из сферы попечения этого фонда, темы лекций надле-

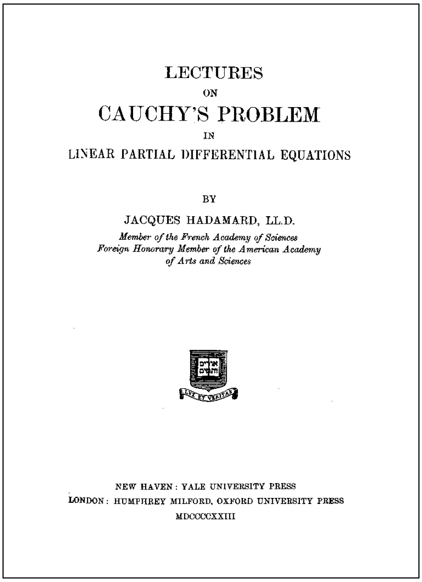
Йельский колледж в Нью-Хейвене, штат Коннектикут (оттиск гравюры)

жало выбирать из области естественных наук и истории, делая особый акцент на астрономии, химии, геологии и анатомии» [I.223, с. vi].

Пятнадцатая в серии силлимановских лекций была прочитана Адамаром и посвящена его работам по гиперболическим уравнениям второго порядка. В этой лекции Адамар подвел итоги своих многолетних исследований. Ранее он читал лекции на эту тему в Колумбийском университете (1911) и в университетах Рима (1916) и Цюриха (1917).

Лекции Адамара, прочитанные им в Барселоне в 1921 г. [I.225], были посвящены работам Пуанкаре по дифференциальным уравнениям в частных производных. В 1923 г. в Америке вышла, вероятно, наиболее известная книга Адамара «Лекции о задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных» (на английском языке), в основу которой положены его лекции в Йеле.

Гиперболическим уравнениям были посвящены также два доклада Адамара на Международном математическом конгрессе в Страсбурге в сентябре 1920 г.: «Об элементарных решениях уравнений в частных производных и о свойствах геодезических» и «О смешанной задаче для линейных уравнений в частных производных». Этот конгресс имел явную политическую окраску. Даже выбор места его проведения был провокационным, так как Страсбург находился на территории Эльзаса-Лотарингии, утраченной Францией в 1872 г. и возвращенной после Первой мировой войны. В работе конгресса участвовали математики из двадцати семи стран, хотя математиков из Германии и ее союзников среди участников конгресса не было, так как их не пригласили. В результате возникло много споров относительно того, можно ли считать этот конгресс «настоящим» международным математическим конгрессом. В частности, Миттаг-Леффлер заявил, что выбор Страсбурга противоречит решению предыдущего конгресса о прове-



LECTURES
ON
CAUCHY'S PROBLEM
IN
LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

JACQUES HADAMARD, LL.D.
Member of the French Academy of Sciences
Foreign Honorary Member of the American Academy
of Arts and Sciences

NEW HAVEN: YALE UNIVERSITY PRESS
LONDON: HUMPHREY MILFORD, OXFORD UNIVERSITY PRESS
MDCCCCXXIII

Титульный лист книги Адамара «Лекции о задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных»

дении следующего в Стокгольме. Харди, Литтлвуд, Миттаг-Леффлер, президент Американской математической ассоциации Д. Е. Смит и другие выступили против проведения конгресса и не приехали. Председательствовал на конгрессе Эмиль Пикар, а Камилл Жордан был почетным председателем (см. [III.6]).

Мы не знаем, испытывал ли Адамар какие-нибудь сомнения, прежде чем принять приглашение на конгресс, но Винер, который в возрасте 26 лет принимал участие в конгрессе, вспоминал:

«Почётное место на конгрессе занимал профессор Жак Адамар из Парижа. Ему тогда было всего пятьдесят пять лет, но он начал играть видную роль в науке ещё до начала нового века, и мы, желторотые птенцы, считали его исторической фигурой. Адамар был кумиром своих младших коллег; небольшого роста, с бородкой, он обладал специфической еврейской внешностью[1], в том стиле, который французы обозначают словом fin[2]» [III.422, с. 67 (с. 62 русск. изд.)].

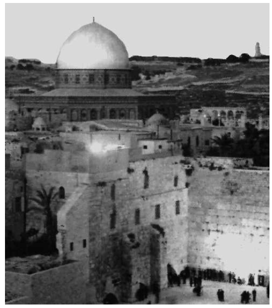
Когда в 1924 г. Адамар принял участие в конференции, посвященной семисотлетию Неаполитанского университета, молодой Трикоми выступил с докладом о своих последних исследованиях по теории дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа, эллиптических в одной части области и гиперболических в остальной ее части. Как выяснилось много позднее, такие уравнения совершенно неизбежно возникают в околозвуковой аэродинамике, но в начале 1920-х гг. их значение еще не было столь очевидным. Адамар сразу же осознал ценность новой теории Трикоми и даже выговорил одному из участников конференции за мелкие придирки в последовавшей за докладом дискуссии. Как

[1] Интересно отметить, что в русском переводе книги Н. Винера «Я — математик» (М.: Наука, 1964) слова Винера о специфической еврейской внешности Адамара были опущены.

[2] Изысканный, изящный (фр.). — *Прим. перев.*

писал Трикоми [III.399, с. 14], тот доклад имел для него самого бесконечную ценность, так как он удостоился высокой оценки со стороны Адамара.

Получив ещё одно приглашение от Ловетта в Институт Райса в 1925 г., Адамар прочитал лекции о более поздних работах Пуанкаре [I.311]. Ловетт вспоминал: «Дважды в истории нашего института Адамар прочитал по нашей просьбе курсы лекций, которые он разрешил нам опубликовать и распространять под эгидой института среди людей науки в нашей стране и за рубежом. На протяжении этой быстротечной четверти века Адамар принимался в нашем институте с таким же гостеприимством, как у себя дома или на семинарах в Коллеж де Франс» [II.27, с. 68].



Адамар участвовал в деятельности быстро растущего Еврейского университета в Иерусалиме, открывшегося 1 апреля 1925 г. Этот университет управлялся международным Попечительским советом во главе с Хаимом Вейцманом. Совет выбирал президента университета, обсуждал бюджет, санкционировал учреждение кафедр и факультетов, назначал профессоров и лекторов. Так как самоуправление в первые годы существования университета было невозможно, был создан временный ученый совет, состоявший из профессоров и выдающихся иностранных ученых.

Эйнштейн играл важную роль в попечительском совете и в ученом совете Еврейского университета в Иерусалиме. На этой фотографии 1923 г. Эйнштейн сажает первое дерево на горе Скопус, где было построено первое здание университета.

Адамар стал членом и попечительского, и ученого советов в сентябре 1925 г. вместе с Альбертом Эйнштейном, Зигмундом Фрейдом, философом Мартином Бубером, математиком Эдмундом Ландау и другими. Они встречались раз в год в различных городах Европы [IV.36]. На втором заседании ученого совета, состоявшемся в августе 1929 г. в Цюрихе, Адамар поддержал включение в учебный план прикладной математики. Он заявил: «Очень важно бороться против наметившейся у молодых студентов тенденции к возведению в умах мысленных стен, разделяющих различные дисциплины». Изучение исключительно теоретической математики часто характеризовалось как вредное, и Адамар считал существенным, чтобы преподавание теоретической математики было дополнено изучением прикладной [IV.35].

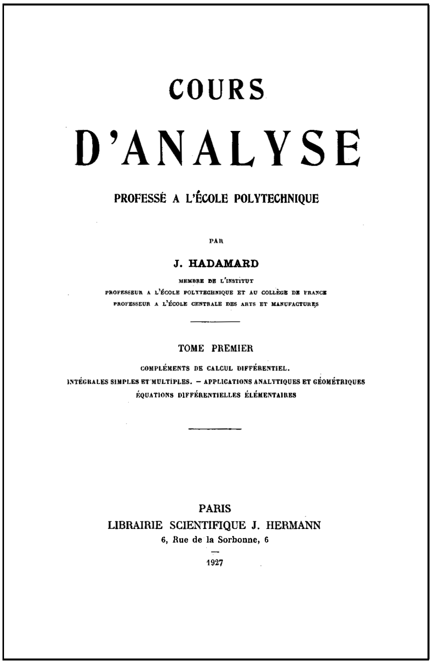
В 1928 г. Адамар провел неделю в Чехословакии. Следующий отчет о его визите появился в чешском журнале «Časopis pro pěstování matematiky a fysiky», посвящённом вопросам преподавания:

«Выдающийся французский математик Жак Адамар, профессор Коллеж де Франс в Париже и член Французской академии наук, 22 мая прибыл в Прагу вместе со своей супругой. Он был приглашен факультетом естественных наук Карлова университета прочитать три лекции. Лекции состоялись 23 мая утром и днем и 24 мая утром.

Темой своих лекций профессор Адамар избрал принцип Гюйгенса. Прежде всего он сформулировал принцип Гюйгенса в виде трех различных теорем и рассказал об их математическом значении. Значительная часть лекций состояла из результатов его собственных научных исследований. К изучению принципа Гюйгенса профессор Адамар пришел в ходе своих исследований по теории дифференциальных уравнений в частных производных. Изложение профессора Адамара полностью выдержано в духе великой французской математической традиции, оно преисполнено огромнейшим богатством математических идей и отличается замечательным духом и ясностью. В своих лекциях профессор Адамар никогда не упускает случая обратить внимание на вопросы, которые еще не получили удовлетворительного решения и которые поэтому могут стать основой для новых исследований. Благодаря своему проницательному интеллекту профессор Адамар сумел обнаружить большое число таких вопросов.

В честь профессора Адамара и его супруги факультет естественных наук устроил обед в здании мэрии, на котором присутствовали председатель и несколько других членов Союза [чехословацких математиков и физиков]. Профессор Адамар 24 мая отбыл в Брно, чтобы прочесть на следующий день лекцию на ту же тему в Университете имени Масарика. 29 мая он принял участие в заключительном заседании VI Конгресса чехословацких естествоиспытателей, врачей и инженеров в Пантеоне. После экскурсии в Татры профессор Адамар вернулся в Париж» [III.429].

Первый и второй тома учебника Адамара «Курс анализа в Политехнической школе» были опубликованы в 1927 и 1930 гг. При создании этого курса Адамар не намеревался написать новый трактат, аналогичный учебникам, написанным его учителями Жорданом, Пикаром и Гурса, многие главы которых носили характер монографий. Курс Адамара преследовал педагогические цели и предназначался для физиков, астрономов и инженеров. Текст содержал элементы теории функций комплексного переменного, математической физики, вариационного исчисления и теории вероятностей.



COURS

D'ANALYSE

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

J. HADAMARD

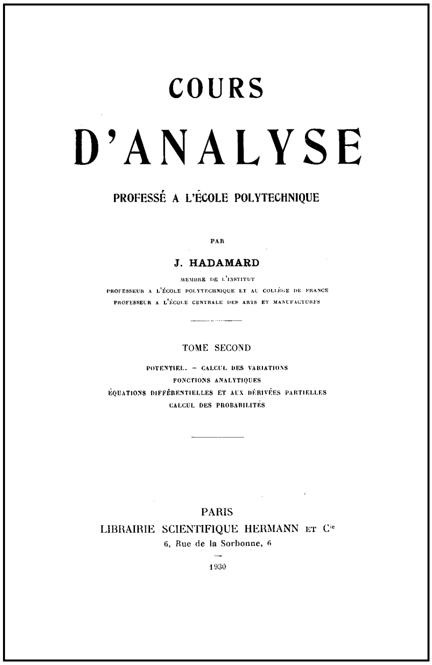
MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET AU COLLÈGE DE FRANCE
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

TOME PREMIER

COMPLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.
INTÉGRALES SIMPLES ET MULTIPLES. – APPLICATIONS ANALYTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ÉLÉMENTAIRES

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE J. HERMANN
6, Rue de la Sorbonne, 6

1927



COURS

D'ANALYSE

PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

J. HADAMARD

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET AU COLLÈGE DE FRANCE
PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

TOME SECOND

POTENTIEL. – CALCUL DES VARIATIONS
FONCTIONS ANALYTIQUES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
CALCUL DES PROBABILITÉS

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN ET Cie
6, Rue de la Sorbonne, 6

1930

Титульные листы двух томов «Курса анализа» Адамара

В 1926 г. вышло второе издание книги «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение» [I.253], подготовленное Адамаром в соавторстве с двадцатисемилетним Шолемом Мандельбройтом. Книга отражала последние достижения в этой области. В то же время Адамар посвятил несколько статей совершенно иной области математики — теории марковских цепей в теории вероятностей. Доклад Адамара на Международный математический конгресс в Болонье в 1928 г. назывался «О тасовании карт и его отношении к статистической механике». По мнению Поля Леви, «эта работа имела первостепенное значение, так как она дала импульс теории марковских процессов, ныне являющихся одним из основных разделов теории вероятностей» [II.37, с. 17].

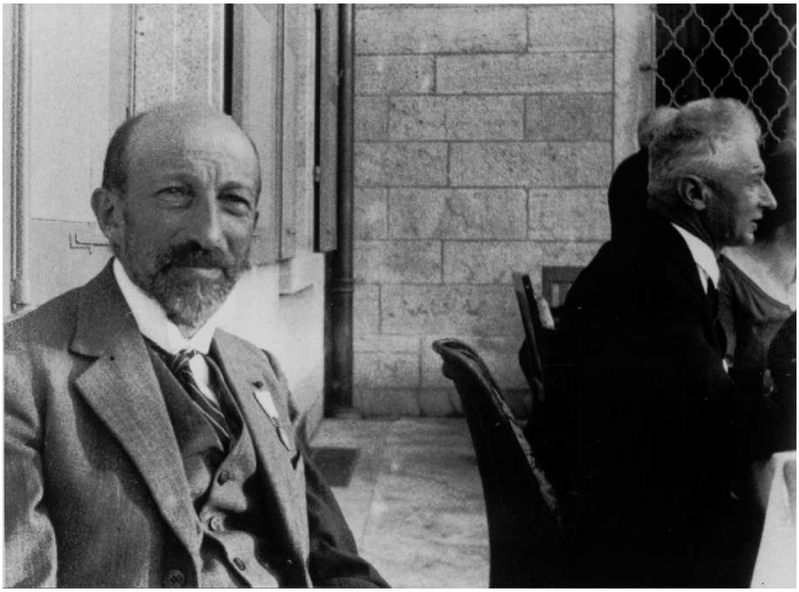
Адамар много путешествовал. Помимо уже упоминавшихся поездок в США (1920, 1925), в Испанию (1921), в Чехословакию и Италию (1928) и в Швейцарию (1929), он в 1924 г. посетил Бразилию, в 1930 г. — Аргентину и в 1933 г. — Египет.

Адамар в Египте

Адамар возглавил французскую делегацию на Международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1932 г., на котором он выступил с докладом «Об уравнениях в частных производных высокого порядка». В июне 1935 г. он председательствовал на цикле международных лекций по теории дифференциальных уравнений в частных производных, организованных Женевским университетом, и прочитал доклад о корректных и некорректных краевых задачах. Несколько статей Адамар опубликовал за рубежом: в Барселоне (1923), Неаполе и Рио-де-Жанейро (1924), Мадриде (1925), Казани (1926), Праге (1929), Харькове (1930) и Токио (1933).

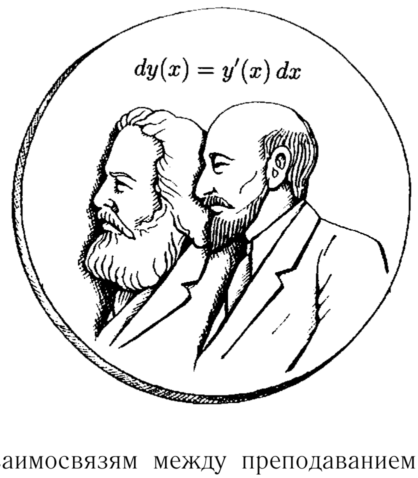
В 1920-е и 1930-е гг. Адамар продолжал работать над проблемами образования, как математического, так и общего. Он написал много работ о методах преподавания, статей и писем, посвящённых программам математического образования и улучшению изложения различных предметов. В помощь тем, кто преподавал математический анализ, он написал статьи «Понятие дифференциала в образовании» [I.224], «К теории целых рядов» [I.251] и другие работы, а также изложил некоторые трудные вопросы алгебры: «Неразрешимость в радикалах уравнения пятого порядка» [I.323], «Теория уравнений первого порядка» [I.331], а также написал работы по геометрии «Об одной теореме элементарной геометрии» [I.216], «Развертывающиеся поверхности, описанные вокруг сферы» [I.329].

В работе [I.224] Адамар подтвердил мнение Пуанкаре [III.319] о том, что, говоря о производных в курсе математического анализа, следует избегать сложных объяснений, связанных с символом d. Выдвинутые Адамаром аргументы позднее были использованы некоторыми марксистскими историками математики в подкрепление философских рассуждений Карла Маркса о производных и диффе-



Адамар во время конгресса в Цюрихе, 1932 (справа Луи Кольро)

ренциалах [III.269]. Существует даже понятие дифференциала как операторного символа в смысле Маркса—Адамара [III.209], [III.150]. Сошлемся на последнюю фразу статьи [III.150]: «Определение дифференциала в курсе Адамара[1] показывает, что математики также начинают приходить к тому же пониманию общей природы дифференциального исчисления, к которому диалектика в руках философа-материалиста привела полвека назад».



В 1926 г. Адамар опубликовал полемическую статью [I.252], выражавшую его взгляд на новую программу по математике. Его также интересовали вопросы, относящиеся к гуманитарным дисциплинам, и этот интерес нашел яркое выражение в обширной статье «По поводу среднего образования» [I.210], посвященной взаимосвязям между преподаванием языков, литературы и истории. Изложению идей Адамара по поводу развития культуры в процессе среднего образования посвящена его статья «Среднее образование и дух науки» [I.212].

[1]В гл. 1 «Курса анализа» [I.258].

В 1932 г. Адамар был избран председателем Международного комитета по математическому образованию. На протяжении многих лет он писал для журнала «L'Enseignement Scientifique». К семидесятилетию профессора Адамара этот журнал опубликовал подробный обзор его работ по проблемам образования [II.9].

§ 4.2. Jeux d'esprit[1]

Научная любознательность Адамара была неисчерпаема с юных лет и ничуть не уменьшилась с возрастом. Жаклин Адамар вспоминает:

«Заседания Академии наук были для него необыкновенным источником знаний. Наш друг Мага[2] рассказал мне, что однажды ему довелось побывать на одном заседании. Его поразило, что большинство членов Академии тихо сидели в своих креслах. Но двое — Жан Перрен и мой отец — непрерывно курсировали из ряда в ряд. Не знаю, что побуждало к этому Перрена, но мне очень хорошо известно, что заставляло перемещаться по залу заседания моего отца: ему нужно было спросить у одного коллеги-специалиста, на какой стадии развития находится генетика, выяснить у другого, как называется орел, которого отец увидел во время каникул, расспросить третьего об успехах такой-то и такой-то химической теории и т. д.

Возвращаясь с заседания, на котором он, как и другие члены Академии, не слышал того, что говорил с трибуны докладчик, отец обдумывал ответы, которые он получил на свои вопросы, покупал пакетик жареной картошки и поедал лакомство, очарованный „своим клубом". К сожалению, взглянув на наручные часы и увидев, что у него есть четверть часа до возвращения домой, он считал, что располагает временем, чтобы зайти в музей или библиотеку... и забывал о времени, и это он, который, как ни странно, был поразительно пунктуален, когда речь шла о расписании его занятий. Но в остальных случаях он совершенно утрачивал ощущение времени. Матушка, видя, что он опаздывает на час или два, начинала беспокоиться. Я с трудом удерживала её от звонка в полицию или больницу.

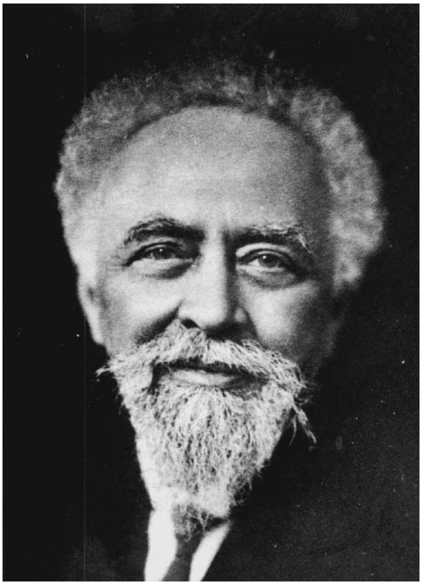
А затем отец приходил домой совершенно спокойный и очень удивлялся, что время уже позднее: „Я только зашел взглянуть на выставку грибов!"» [IV.1, с. III(27)].

Хотя Адамар, по словам Л. Шварца, определял философов как тех, кто ищет черную кошку в темной комнате, в которой ее нет, и кто находит ее там [III.358, с. 45][3], он тем не менее стал членом Французского философского общества с самого его основания 1 февраля 1901 г. Он был участником многих заседаний этого

[1] Игры ума (фр.).

[2] Мишель Мага (1908—1978) — известный физхимик.

[3] Ср. с определением, приписываемым Чарльзу Дарвину: «Математик — это слепой в темной комнате, ищущий черную кошку, которой там нет» (`http://en.wikiquote.org/wiki/Charles_Darwin`), Впрочем, безотносительно к профессии, трудность поиска упомянутой кошки была отмечена еще Конфуцием.



Жан Батист Перрен (1870—1942)

Эксперименты Жана Перрена по броуновскому движению подтвердили теоретические предсказания Эйнштейна и Смолуховского. Перрен первым экспериментально доказал реальность существования атомов. В 1926 г. ему была присуждена Нобелевская премия. Перрен был главным организатором Национального центра научных исследований (CNRS) и основателем Дворца открытий в Париже. Ж. Перрен и П. Ланжевен похоронены в Пантеоне.

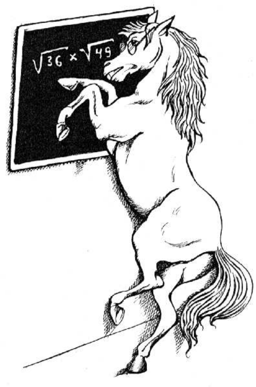
общества, которые проходили несколько раз в год. Он также принял участие в работе общества по составлению философского словаря, которая началась в 1902 г. и продолжалась двадцать лет.

Заседания Философского общества начинались с главной лекции, за которой следовала дискуссия. Отчеты о заседаниях публиковались в бюллетене общества. Аудитория, разумеется, менялась в зависимости от темы заседания. За годы деятельности общества на его заседаниях можно было встретить таких людей, как философы Эмиль Бутру, Анри Бергсон, Ксавье Леон, Эмиль Мейерсон, социолог Эмиль Дюркгейм, психолог Анри Делакруа, историк и философ Леон Бруншвиг, поэт и философ Поль Валери, математики Жюль Таннери, Эмиль Борель, Поль Пенлеве, физики Поль Ланжевен, Жан Перрен и многие другие. Темами предвоенных заседаний, на которых в дискуссиях принимал участие Адамар, были: «Об объективной ценности физических законов», «Место и характер философии в среднем образовании», «Материя и движение», «Значение прагматизма» и даже «Ученые лошади из Эльберфельда».

Можно только дивиться, что общего у лошадей с философией. Но в начале XX в. было немало разговоров о разумных животных, особенно о лошадях-вы-

Карл Кралл (1863—1929), ювелир и дрессировщик животных, ревностный сторонник фантастической идеи о разуме животных. Много интересного материала о Кралле и его экспериментах с лошадьми и собаками собрано в Городском архиве Вупперталя. Там имеется, в частности, книга Кралла «Мыслящие животные. Умный Ганс и мои лошади Мухамед и Зариф» (Лейпциг: изд-во Ф. Энгельмана, 1912).

числителях. Эта тема стала популярной после экспериментов дрессировщика Кралла из Эльберфельда, пригорода города Вупперталя (Германия). Клапаред, известный швейцарский психолог, наблюдавший эксперименты Кралла, был приглашен Философским обществом выступить с отчетом на заседании 13 марта 1913 г.



Клапаред заявил:

«Наибольшее впечатление на меня произвели ответы, которые давали лошади, когда все, включая самого Кралла, выходили из помещения. Эти ответы проверялись только через «глазок», проделанный в больших деревянных воротах, отделявших конюшню от двора. В этих условиях Зариф и особенно Мухамед дали некоторые поразительные ответы, такие как $\sqrt[4]{614656} = 28$. (Это число было выбрано мной из списка целых степеней; задавая вопрос, я не знал ответа.)» [III.234].

Участники дискуссии высказали по поводу выступления Клапареда весьма различные мнения. Адамар призывал к осторожности: он попросил Клапареда рассказать о «некоторых деталях экспериментов, в которых тот принимал участие, — о присутствии или отсутствии дрессировщика, когда лошади давали правильные и неверные ответы, о том, каким образом задавались вопросы».

Клапаред завершил дискуссию следующими словами, близкими сердцу вычислителя:

«В статье, опубликованной в журнале „Archives", я уже пытался привлечь внимание к тому факту, что способность вычислять не является свидетельством интеллекта, и привел в качестве примера чудо-вычислителей. Мне приятно видеть, что господа Кутюра и Лаланд разделяют это мнение. В декабрьском номере журнала «Rivista di Psicologia» за 1912 г. доктор Феррари спрашивал, не умеют ли лошади пользоваться более простой числовой системой, чем десятичная, например двоичной системой, применявшейся в Китае. Но система обучения Кралла основана на десятичной системе, и совершенно невозможно, чтобы лошади самостоятельно заменили десятичную систему какой-нибудь другой системой счисления!» [III.234].

Адамар был вполне компетентным участником заседаний, посвященных философским проблемам физики, находившейся тогда на стадии бурного развития. (Он был в курсе самых новых физических идей, обсуждаемых на ланжевеновских «вторниках» в Коллеж де Франс и в беседах с Ланжевеном и Перреном.) Когда темой заседания, состоявшегося 6 апреля 1922 г., была избрана теория относительности Эйнштейна, Адамар выступил с сообщением о связи специальной теории относительности с реальностью. Реакция Эйнштейна была следующей:

«Я должен сказать только одно слово по поводу замечаний г-на Адамара. Г-н Адамар утверждал, что теория должна, во-первых, быть логической, а во-вторых, находиться в согласии с экспериментом. Я не думаю, что этого достаточно, и, во всяком случае, это априори не очевидно. Утверждение, что теория логична, означает, что она состоит из символов, связанных друг с другом по определенным правилам, а утверждение, что теория согласуется с экспериментальными данными, означает, что говорящий обладает правилами, устанавливающими соответствие между этими символами и фактами. Специальная теория относительности возникла из экспериментальной необходимости; эта теория логична в том смысле, что ей можно придать дедуктивную форму, но для этого необходимо знать четкие правила, которые устанавливают соответствие между частями этой теории и реальностью. Таким образом, существуют три постулата, а не два, как полагал г-н Адамар» [III.227, с. 97].

В ответном комментарии Адамар заметил: «Иначе говоря, изучению подлежит логическая теория и совокупность правил, устанавливающих ее соответствие реальности».

На другом заседании общества, состоявшемся 12 ноября 1929 г. и посвященном теме «Детерминизм и причинность в современной физике», Луи де Бройль говорил о фундаментальных идеях квантовой механики в присутствии Эйнштейна, Ланжевена, Перрена, Бореля и Адамара. В ходе последовавшей дискуссии Адамар вспомнил свои беседы с Дюркгеймом в Бордо:

«Физика, чему мы только что получили убедительное подтверждение, все более склоняется к принятию своего рода индетерминизма, можно даже сказать, к признанию некоторой свободной воли во внутренней области атома. Но тот

Поль Ланжевен (1872—1946)

Особо известны его теории парамагнетизма и диамагнетизма. Занимался исследованиями ионизованного газа, работал в области кинетической теории и термодинамики, электромагнитной теории и теории электронов, теории относительности. Эйнштейн писал [III.120а]:

«Ланжевен обладал ясным и проницательным умом, сочетавшимся с меткой и уверенной интуицией. Эти качества привели к тому, что его лекции оказали решающее влияние на несколько поколений французских физиков-теоретиков. Но он знал и значительную часть экспериментальной техники; его критика и конструктивные предложения всегда оказывали плодотворное действие. Его собственные исследования решающим образом повлияли на развитие науки, в основном магнетизма и ионной теории...

Мне кажется, он бы развил специальную теорию относительности, если бы это уже не было сделано, ибо он ясно осознал ее существенные черты».

факт, что существование такого свободного арбитра в силу закона больших чисел вполне совместимо с естественным детерминизмом, который показывает нам опыт, был давно замечен метафизиками. Я должен был бы это знать, потому что задолго до того, как эта идея забрезжила в головах физиков, ее сообщил мне Дюркгейм в наших беседах, проходивших между 1893 и 1896 гг.» [III.102, с. 151].

Тема заседания Философского общества 28 января 1928 г. называлась «Художественное творчество». Докладчиком выступил Поль Валери. Адамар присутствовал на этом заседании и принял участие в дискуссии [III.220, с. 18—20]. Он давно питал интерес к психологии открытия, подкрепляемый его собственной работой и памятью об интеллектуальных процессах, неудачах и озарениях вдохновения. Адамар следил за современными психологическими исследованиями механизмов творческой деятельности, и на него произвела глубокое впечатление лекция об открытии в области математики, прочитанная Пуанкаре в 1908 г. в Психологическом обществе Парижа, — первое исследование в этой области.

Поль Валери (1871—1945)

За восемь месяцев до своего выступления на заседании Философского общества Поль Валери, который часто черпал вдохновение из физических и математических ассоциаций, писал Адамару:

Месье и знаменитейший коллега!

Если бы я не был перегружен работой и хлопотами в связи с неизбежной поездкой в Англию, то непременно прибыл бы к Вам лично, чтобы поблагодарить Вас за Ваш дружеский и любезный ответ. Как только у меня выдастся свободное время, я непременно отправлюсь в библиотеку, попрошу там «Nouvelles Annales» и попытаюсь усвоить начала анализа, о которых мне известно, что они столь совершенны и богаты всеобъемлющими приложениями. В частности, я не знаю более сильного средства для построения карты нашего разума и его внутренних отношений, если какой-нибудь вопрос потребует этого.

Вы сразу же видите всю причудливость моей идеи и то, как странно и нелогично она связана с математикой!... Именно поэтому я часто провоцировал Ваших утончённых богов, когда мне приходилось сражаться с беспорядком впечатлений и отношений, не поддающихся словарю и синтаксису, — и с возможным читателем. В некоторых исследованиях (для экономии времени я буду называть их «философскими») я тысячу раз желал, чтобы появился математический демон — не Максвелла, но Римана — и помог бы мне выстроить схему возникающих у меня мыслей. Из-за простоты начальных условий, а также чёткого и идеального разделения операций геометр имеет счастливую возможность понять то, что художник слова ощущает и теряет в каждый момент из-за сложности объектов, нестрогости и усреднённого характера обычного языка и его форм... На этом я закончу... Я намеревался написать вещи, противоречащие логике и, возможно, здравому смыслу. Аналогия наводит на искушения самого опасного свойства. Для вас, счастливых геометров, она описывает саму себя и проявляется в точности через тождество форм или их преобразования. Но для нас она возникает в области (совсем не аналитической) грёз.

Прошу Вас, мой дорогой и знаменитейший коллега, еще раз принять мою благодарность и уверения в глубоком уважении.

Поль Валери

Прошу также извинить меня за то, что я перевернул эту страницу; из неё следовало бы сделать одностороннюю поверхность! [III.404, с. 171].

Адамар всерьёз обратился к проблеме изобретения в области математики, когда занялся подготовкой доклада к одному из заседаний «Международного центра синтеза» (Centre International de Synthèse) в Париже. Это было общество, основанное в 1924 г. историком и философом Анри Берром. «Недели синтеза», проводимые в Центре, были посвящены обсуждению различных аспектов человеческой мысли и деятельности. Темой девятой «недели», проходившей с 18 по 22 мая 1937 г., было изобретение. Выступавшие Луи де Бройль и Эдмон Бауэр говорили о процессах мышления в экспериментальных науках. Доклад Поля Валери был посвящен творчеству в поэзии, а Адамар выступил с анализом открытия в области математики. В своем докладе он заложил основу своих будущих исследований в этой области.

§ 4.3. Переписка с Миттаг-Леффлером

Гёста Миттаг-Леффлер окончил Упсальский университет в 1872 г. и в следующем году отправился в Париж для продолжения своего математического образования. Он был тепло встречен Эрмитом, который немало удивил его, заметив: «Вы совершили ошибку, сэр. Вам следовало бы прослушать курс Вейерштрасса в Берлине. Вейерштрасс является учителем для всех нас» [III.281]. Последовав совету Эрмита, Миттаг-Леффлер слушал лекции Вейерштрасса в Берлине в 1874—1875 учебном году. В 1876 г. Миттаг-Леффлер доказал свою знаменитую теорему о разложении мероморфных функций, аналогичном разложению рациональных функций на элементарные дроби. К концу XIX в. Миттаг-Леффлер приобрел международную репутацию своими работами по теории аналитических функций и дифференциальным уравнениям. В цикле статей по мероморфным функциям, опубликованных после 1900 г., он исследовал аналитическое продолжение степенного ряда вне его круга сходимости. Проведя 1877—1881 гг. в Хельсинки в качестве профессора университета, он переехал в Стокгольм, где возглавил недавно учрежденную кафедру математики в открывшейся незадолго до этого Высшей школе. Выдающийся педагог, Миттаг-Леффлер проработал на этой кафедре вплоть до выхода на пенсию в 1911 г.

В 1882 г. Миттаг-Леффлер учредил журнал «Acta Mathematica». Предложение начать издание скандинавского математического журнала исходило от норвежца Софуса Ли. Миттаг-Леффлер с энтузиазмом воспринял эту идею, и в результате возник большой международный журнал. Математик высокого ранга с широкими связями в математическом мире, ученик Эрмита и Вейерштрасса,

Гёста Миттаг-Леффлер (1846—1927)

амбициозный и обаятельный, он оказался тем человеком, которому реализация проекта была по плечу. История создания «Acta Mathematica» описана в интересной статье И. Домара [III.108]. Упомянем, что большую помощь оказал Эрмит. Он писал Миттаг-Леффлеру о математической жизни во Франции и, в частности, о достижениях своих талантливых молодых учеников — Аппеля, Пикара и Пуанкаре, — которым Миттаг-Леффлер сразу же предложил опубликовать свои статьи в журнале. Особенно важным было обещание Пуанкаре предоставить свои обширные математические статьи для публикации в первом и последующих номерах «Acta Mathematica».

Добиться положительного отношения к журналу со стороны Вейерштрасса и Кронекера было задачей более деликатной, отчасти потому, что новый журнал стал бы конкурентом «Journal für die reine und angewandte Mathematik», который они издавали. Чтобы преодолеть эту трудность, Миттаг-Леффлер заручился и умно воспользовался поддержкой шведского короля Оскара II, поэтому на его обращение немецкие математики, ранее награждённые шведским королевским орденом, ответили благосклонно.

Теперь, когда идея создания журнала получила одобрение со стороны и французского, и немецкого математических сообществ, Миттаг-Леффлер мог начать публикацию международного математического журнала. Всю свою жизнь Миттаг-Леффлер был представителем нейтральной Швеции, выступал в роли посредника в европейском математическом мире, расколовшемся сначала после франко-прусской, а затем Первой мировой войны. Успех предпринятого Миттаг-Леффлером издания «Acta Mathematica» «грянул, как гром среди ясного неба, а то, каким образом он добился успеха, отражает не только его воображение и дерзновенность, но и его необычайный талант к научной дипломатии», — писал Д. Э. Рове [III.348, с. 599].

На протяжении многих лет Миттаг-Леффлер постоянно пытался добиться, чтобы восходящие математические звезды публиковали свои статьи в журнале, и, разумеется, в свое время в списке появился и Адамар. Переписка Адамара с Миттаг-Леффлером началась в 1893 г., незадолго до переезда Адамара в Бордо. В Институте Миттаг-Леффлера в Юрсхольме хранятся тридцать пять писем от Адамара и девятнадцать писем от Миттаг-Леффлера.

В первых письмах Миттаг-Леффлера речь идет о предложении опубликовать в «Acta Mathematica» некоторые результаты Адамара. Из писем видно, что Адамар сначала отказывался от предложения, да и потом долго думал, не следует ли ему вторично отказаться, ибо у него была лишь статья, которую он считал не заслуживающей публикации в таком авторитетном журнале, как «Acta Mathematica». Наконец, Адамар пообещал представить свою статью, но попросил некоторой отсрочки. «Вы, несомненно, несколько удивились, так и не получив мою рукопись, — писал Адамар позднее, в 1894 г. — Причина задержки заключается в том, что в процессе написания статьи я сделал некоторые добавления, отчего она вышла несколько длиннее, чем я рассчитывал сначала. Думаю, однако, что смогу вскоре выслать Вам свою работу» [IV.46]. Статья о рядах с положительными членами [I.19] появилась в «Acta Mathematica» в том же году.

В августе 1900 г. Миттаг-Леффлер со своей супругой Сигне нанесли визит чете Адамаров во время Второго международного математического конгресса в Париже. С того времени письма Миттаг-Леффлера к Адамару начинаются не с официального обращения «Cher Monsieur» (дорогой месье), как прежде, а с «Mon cher ami» (дорогой друг). (Адамар, бывший на двадцать лет моложе Миттаг-Леффлера, обращался к нему в письмах «Cher Monsieur».)

Многие из последовавших писем от Миттаг-Леффлера также касались публикаций Адамара в «Acta Mathematica». Ниже мы приводим начало письма от 24 марта 1907 г., в котором упоминается большая статья Адамара о задаче Коши [I.148] и знаменитая библиотека будущего Института Миттаг-Леффлера:

Дорогой друг!

Сожалею, что с публикацией Вашей статьи произошла задержка, и могу самым определенным образом заявить, что этого в будущем больше не произойдет. Объясняется происшествие тем, что я был целиком занят перестройкой дома, чтобы освободить как можно больше места для библиотеки. В процессе перестройки все находилось в полном беспорядке, и только по получении Вашего письма я обнаружил Вашу статью, которая немедленно была послана в типографию с инструкциями срочно набрать её и приостановить работу над теми статьями, которые уже начали набирать. Прошу извинить меня и принять мои заверения, что такое никогда не повторится. Для Вас в журнале всегда будет место, и Ваши работы будут опубликованы безотлагательно и прежде работ других авторов [IV.45].

В следующем письме Миттаг-Леффлера речь идет о статье Адамара для «Acta Mathematica» с обзором работ Пуанкаре:

Тельберг, 8 августа 1913 г.

Дорогой друг!

Миттаг-Леффлер в своем доме в Юрсхольме, пригороде Стокгольма

Ваше любезное письмо застало меня в деревне, где у меня имеется небольшая собственность[1]. Прилагаю фотографию моего загородного дома. Думаю, что практичнее всего будет, если Вы закончите Вашу статью как можно быстрее. Для меня по некоторым соображениям важно получить ее вскоре. В противном случае ее публикация столкнется с некоторыми осложнениями. Мое предложение отнюдь не мешает Вам внести в статью некоторые изменения по возвращении в Париж.

Правда, трудность заключается в том, что работы Пуанкаре относятся к таким разделам математики, основы которых заложил он сам. Но два различных человека видят один и тот же объект по-разному и судят о нем по-разному, даже если речь идет о математике. Вы, несомненно, имеете свой собственный взгляд на работы Пуанкаре, и среди современных геометров нет никого, чье мнение было бы столь же интересным, как Ваше.

[1] Карлеман пишет: «Помимо дома в Юрсхольме Миттаг-Леффлер построил великолепную летнюю резиденцию Тельгорден в Далекарлии, расположенную в очень красивом месте на юго-западном склоне Тельберга, откуда открывается великолепный вид на озеро Сильян, окаймленное горами, покрытыми лесом. Именно в этой резиденции он каждый год проводил лето и, как правило, праздновал Рождество и Новый Год на протяжении последних двадцати лет своей жизни» [IV.47].

Я сам также очень устал и обязательно должен отдохнуть какое-то время. Мадам Миттаг-Леффлер присоединяется ко мне в просьбе к мадам Адамар, Вашему любезному и не знающему усталости секретарю, не забывать нас [IV.45].

По-видимому, к осени 1913 г. Миттаг-Леффлер получил две главы рукописи Адамара, посвященной теории функций и обыкновенным дифференциальным уравнениям. Недоставало только третьей главы, посвященной работам Пуанкаре по теории дифференциальных уравнений в частных производных, и Адамар написал ее очень быстро.

Юрсхольм, 11 октября 1913 г.

Дорогой друг!

Третья глава Вашего обзора работ Пуанкаре теперь в моих руках. У меня еще не было времени прочитать то, что Вы написали, пока я смог лишь бегло просмотреть некоторые части. Но у меня уже сложилось впечатление, что, как я и ожидал, Вы воздвигли нерушимый памятник своему великому предшественнику. От души благодарю Вас и со своей стороны сделаю все, что в моих силах, чтобы Ваша работа получила должную известность.

Прошу Вас передать мой почтительный привет и наилучшие пожелания мадам Адамар, а также мою благодарность за все, что она сделала, чтобы облегчить Вашу работу.

Когда я целиком прочитаю Вашу статью, я немедленно отошлю ее в набор. Это произойдет через два или три дня.

Примите, мой дорогой друг, уверения в моей высочайшей оценке Вашего математического гения и мою глубокую благодарность [IV.45].

В трудные годы Первой мировой войны Миттаг-Леффлер делал все, что было в его силах, чтобы помочь математикам воевавших стран в публикации их статей в «Acta Mathematica». Дж. У. Даубен приводит следующий отрывок из письма Миттаг-Леффлера Фейеру от 29 ноября 1917 г.:

«Как Вы, несомненно, заметили, я всегда публиковал статьи из различных стран рядом друг с другом. Математика — наука национальная в минимальной степени, и я надеюсь, что когда-нибудь математики смогут преодолеть разобщенность и снова наступит время восстановить международные научные контакты» [III.93].

В 1916 г., когда Миттаг-Леффлеру исполнилось семьдесят лет, он и его супруга передали права на владение своим домом в Юрсхольме Королевской шведской академии наук. В их доме разместился будущий Математический институт[1],

[1]В настоящее время Институт Миттаг-Леффлера проводит годичные исследовательские программы по математике, приглашая около двадцати активно действующих специалистов в определенной области. Богатая библиотека Миттаг-Леффлера систематически пополняется, а его архив

который официально открылся в 1919 г. Миттаг-Леффлер был его директором до своей кончины в 1927 г. Его преемником стал Карлеман.

Переписка Миттаг-Леффлера с Адамаром, прерванная войной, возобновилась в 1919 г.:

Тельберг, 8 апреля 1919 г.

Дорогой друг!

Я только что получил номер «Comptes Rendus» от 17 марта, в котором обнаружил Вашу замечательную заметку «Об остаточном интеграле». Не хотели бы Вы написать более длинную статью на эту тему для моего журнала «Acta Mathematica»?

Том этого журнала, посвященный памяти Пуанкаре, в котором Ваша статья была среди наиболее длинных, напечатан давно. Однако мне не хотелось распространять его до того, как будет заключен мир и на земном шаре воцарится хотя бы немного спокойствия. Я надеюсь, что мне удастся приехать в Париж, чтобы лично презентовать этот том Академии наук.

Надеюсь, что Вы, как и Ваша семья, не слишком пострадали от этой ужасной войны, которую Франция выдержала с таким героизмом и славой.

Напомните, мой дорогой друг, мадам Адамар о нас обоих, мадам Миттаг-Леффлер и мне.

Надеюсь вскоре иметь возможность пожать Вам руку.

Преданный Вам

Миттаг-Леффлер [IV.45].

Узнав об ужасных потерях, которые пережил Адамар, Миттаг-Леффлер направил ему следующее письмо. (Оно представляет интерес еще и потому, что в нем упоминается молодой Карлеман.)

Тельберг, 9 сентября 1919 г.

Дорогой друг!

От души благодарю Вас за Ваше письмо от 25 июля. Мне было очень больно узнать, что Вам, так же, как и многим другим моим друзьям, пришлось пострадать и пережить трудности, которые причинила всему человечеству эта трагическая война.

Для меня лично четыре года войны были очень трудным временем из-за состояния моего здоровья. Но я не хочу сейчас говорить об этом. Однако позволю себе послать Вам два сообщения, которые, надеюсь, заинтересуют Вас. Их передал мне г-н Карлеман, который должен стать первым стипендиатом моего Института. Полагаю, что сделал в его лице неплохой выбор первого стипендиата, и многого ожидаю от г-на Карлемана в будущем. Но я хотел бы послать его в Париж, как только будут преодолены трудности, еще остающиеся после войны, и как только такая поездка сможет принести ему пользу. Тогда увидим, согласитесь ли Вы со мной.

Том «Acta Mathematica», посвященный Пуанкаре, уже напечатан. Недостает только введения, отложенного из-за войны. Как только поездка станет не слишком трудной, я надеюсь, что смогу лично прибыть в Париж и презентовать этот том Академии.

А пока прошу Вас передать мадам Адамар нашу, мадам Миттаг-Леффлер и мою, просьбу не забывать нас и уверяю Вас в моей старой и верной дружбе и моем восхищении теми открытиями, которыми Вы уже обогатили нашу науку и за которыми, смею надеяться, в не слишком далеком будущем последуют многие другие открытия [IV.45].

содержит бесценный материал для историков математики. Институт выпускает два журнала: «Acta Mathematica» и «Arkiv för matematik».

Том «Acta Mathematica», о котором шла речь, вышел в 1921 г., и в нём наряду с другими статьями появился обширный обзор математических трудов Пуанкаре, написанный Адамаром перед войной. «Настоящий том был почти напечатан пять лет назад, но из-за бремени несчастий, обрушившихся на весь мир, мы сочли невозможным выпустить его ранее», — писал в предисловии Миттаг-Леффлер.

Последние два письма от Адамара были написаны в 1924 г. В первом из них Адамар обсуждает предложение Миттаг-Леффлера опубликовать обзор своих собственных работ.

Париж, 9 февраля 1924 г.

Дорогой месье!

Посылаю Вам, как Вы просили, исправления к моей статье 1908 г. Было бы полезно сказать читателям, что эта теория снова стала предметом рассмотрения в моей йельской работе.

А теперь я подхожу к Вашему предложению написать обзор моих работ. Мы говорили об этом с месье Лебегом, которому Вы, естественно, сделали аналогичное предложение. Мы оба считаем, что в Вашем проекте должны были бы участвовать не только французские математики, и были бы признательны, если бы Вы информировали нас о тех иностранных математиках, которые присоединились бы к нам.

Независимо от этого принципиального вопроса существует одна трудность, которую я не считаю возможным скрыть от Вас. Надеюсь, я не слишком стар, относительно чего Вы выразили легкое опасение; к сожалению, я несколько лет был полностью завален делами различной срочности. Поэтому я должен сообщить Вам, что мне удастся написать обзор, о котором идет речь, если только

1) Вы не очень торопитесь,

2) я могу принять за исходный пункт свой старый «Обзор последних результатов», написанный для Академии наук. Но даже в этом случае мне придется ограничиться только весьма немногими изменениями (небольшими смещениями акцентов в некоторых отрывках, которые необходимы в силу новых обстоятельств). Написать весь текст с самого начала представляется мне невозможным.

Я очень хочу выполнить Вашу просьбу и надеюсь, что эти условия, о которых я вынужден просить Вас, не остановят Вас.

Искренне Ваш

Ж. Адамар [IV.46].

Очевидно, Миттаг-Леффлер принял условия Адамара, но прошел почти год, а обзор не был готов, и 21 декабря 1924 г. Адамар написал Миттаг-Леффлеру, объясняя причины задержки:

«Я не забыл о Вашей просьбе, для меня большая честь поговорить с Вашими читателями о моих работах, что, правда, я делаю не без труда, так как писать о себе всегда нелегко. Но я только что вернулся из продолжительной поездки в Бразилию, из-за которой был вынужден отложить многие из своих дел и теперь по возвращении должен к ним вернуться. Я вынужден снова просить Вас запастись толикой терпения. Но заверяю Вас, что не забыл своего обещания и начну писать так скоро, как только возможно» [IV.46].

Мы не знаем начал ли Адамар работать над своим обзором, но этот обзор так и не был опубликован.

Миттаг-Леффлер скончался 12 июля 1927 г. Среди многочисленных газетных статей, написанных Адамаром, имеется одна под названием «Тесное сотрудничество французских и шведских исследователей», появившаяся в переводе на шведский язык 27 октября 1939 г. в ежедневной газете «Svenska Dagbladet» вместе со статьями Вольтерра и двух астрономов У. С. Адамса и Э. Стрёмгрена по случаю двухсотлетия Королевской шведской академии наук. Статья Адамара начинается с его оценки трудов почившего шведского друга:

«Считаю своим приятным долгом вспомнить все, что шведская математическая школа значит для математической науки в целом, для науки моей страны и моей собственной научной жизни.

Когда я думаю о проблемах, которые были предметом моих собственных исследований, мне на ум раньше других приходит одно великое имя — Миттаг-Леффлер. Когда я еще был на школьной скамье, он сформулировал классическую теорему — прекрасное обобщение одного результата Вейерштрасса. Но с 1900 г. он занялся исследованием совершенно других проблем, его открытия приняли более личный характер, стали даже более неожиданными и глубокими, чем только что упомянутая теорема, и повлекли за собой совершенно новое развитие тех теорий, которым мы посвятили наши главные статьи» [III.99].

§ 4.4. Адамар и Андре Блох

Имя Адамара всплывает в некоторых историях об Андре Блохе (1893—1948), блестящем математике, жизнь которого сложилась трагически. Не так давно были опубликованы две статьи о Блохе. Первая из них, написанная Д. М. Кемпбеллом [III.65] и напечатанная в журнале «The Mathematical Intelligencer», содержит воспоминания других математиков, а вторая, написанная А. Картаном и Ж. Ферраном [III.71], дает документированный отчет о жизни Блоха.

В 1917 г., вернувшись в Париж после контузии на фронте, Блох убил своего брата, дядюшку и тетушку, чтобы исполнить свой «евгенический долг: пресечь ветвь своей семьи, которую он считал дефективной» [III.71]. Блоха поместили в психиатрическую клинику Сен-Морис, где он провел тридцать один год — до самой смерти. Все это время Блох работал в области математики. Наряду с исследованиями в области теории мероморфных и голоморфных функций его статьи посвящены рассмотрению проблем теории чисел, геометрии, теории алгебраических уравнений, кинематики и преподаванию математики. Незадолго до своей кончины Блох был удостоен Академией наук премии Беккереля.

Картан и Ферран пишут:

«Андре Блох состоял в переписке с некоторыми математиками, среди которых были и такие, кто не знал о его состоянии, так как он просто указывал свой адрес: Гранд-рю, 57, Сен-Морис, не сообщая, что это — психиатрическая клиника. Чтобы не выдать себя, он уклонялся от встреч под предлогом плохого самочувствия. О характере его заключения в психиатрической больнице можно судить по письму, написанному Блохом П. Монтелю 16 января 1940 г., в котором Блох предлагал предпринять необходимые шаги, чтобы получить разрешение на свидание с Монтелем: „Мне было разрешено отлучиться из клиники один раз пятнадцать лет назад“» [III.71].

Адамар был среди тех, кому Блох писал и посылал свои статьи. Некоторые из статей Блоха в «Comptes Rendus» за 1924—1925 гг. представлены Адамаром, а паратактические окружности Блоха Адамар включил в «Лекции по элементарной геометрии». Знал ли он о том, в какой ситуации находился Блох? Встречался ли он с Блохом?

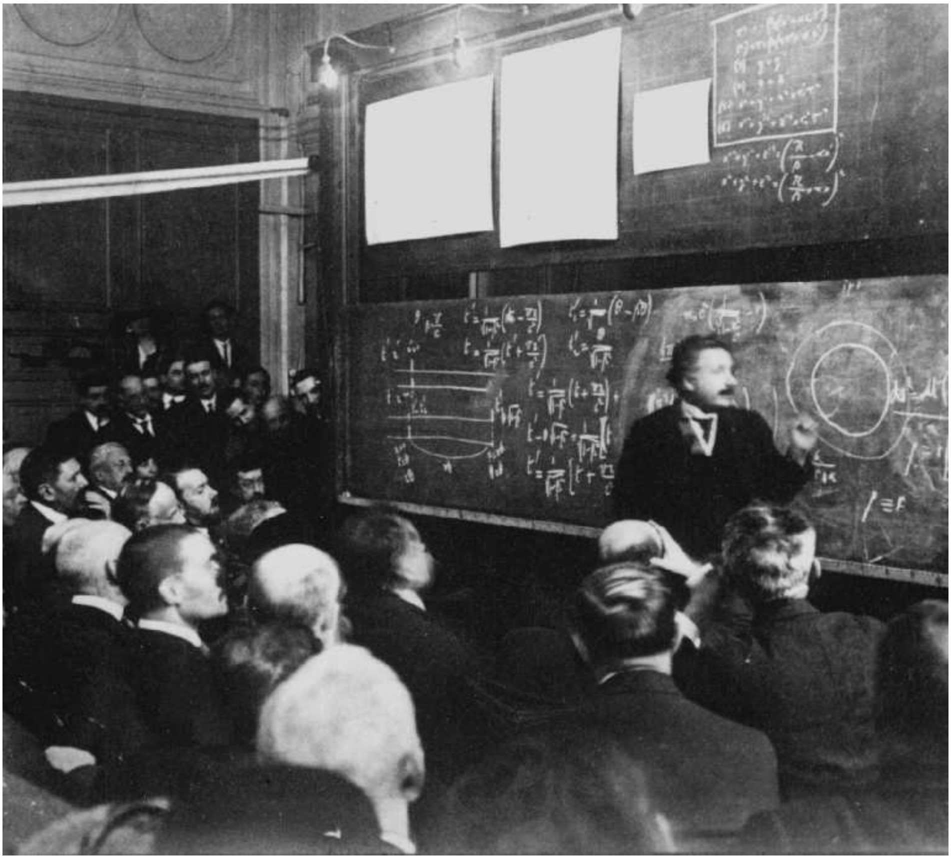
Ссылаясь на самого Адамара, Морделл в своих «Воспоминаниях восьмидесятилетнего математика» дает утвердительные ответы на эти вопросы:

«Он рассказал мне, что в бытность свою редактором математического журнала получал весьма хорошие статьи от некоего незнакомца и как-то пригласил того на обед. Корреспондент Адамара писал, что в силу обстоятельств, над которыми он не властен, он не может принять приглашения, но в ответ пригласил Адамара навестить его. Адамар так и сделал и к своему большому удивлению обнаружил, что автор понравившихся ему статей заключен в психиатрической клинике тюремного типа. Очевидно, он был вполне в здравом уме, если не считать убийства родственников. Его имя было А. Блох, и он был очень хорошим математиком» [III.284, с. 953].

§ 4.5. Встречи с Эйнштейном

В марте и апреле 1922 г. Эйнштейн прочитал в Париже свои первые лекции. Он был приглашен в Коллеж де Франс по инициативе Ланжевена, которому пришлось преодолеть сопротивление людей, придерживавшихся антигерманских настроений. Это были годы наибольшего триумфа Эйнштейна. В 1917 г. известный английский физик и астроном Эддингтон предложил метод экспериментальной проверки предсказанного Эйнштейном эффекта — наличия у света гравитационной массы. Двумя годами позже две экспедиции, организованные Эддингтоном, сделав фотографии неба в момент полного солнечного затмения, доказали, что солнечные лучи отклоняются вблизи Солнца. Сообщение Эддингтона и реакция ученых породили мировую сенсацию. Разговоры о «массе света» и «кривизне пространства» вошли в моду. Вот как объясняет причины беспрецедентной известности Эйнштейна Леопольд Инфельд:

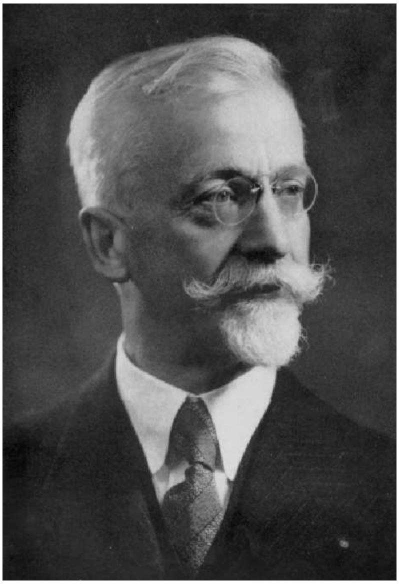
«Это происходило после Первой мировой войны. Люди пресытились ненавистью, смертями и международными интригами. Траншеи, бомбы, убийства оставили горький вкус. Книги о войне не читались и не покупались. Каждый ожидал наступления эры мира и хотел забыть о войне. Поэтому предсказанное Эйнштейном явление смогло поразить воображение людей. От могил, покрывших поверхность Земли, глаза людей устремились к звездному небу. Абстрактное мышление уносило человека далеко от печалей повседневной жизни к загадке солнечного затмения и мощи человеческого интеллекта. Романтическая обстановка, кратковременная тьма, картина искривляющихся световых лучей, — все



Эйнштейн в Коллеж де Франс, 1922 (в первом ряду видна лысая голова Адамара)

это столь отличалось от подавляющей человека реальности. И еще одна причина, возможно, самая важная: новое явление было предсказано немецким ученым и проверено английскими учеными. Физики и астрономы, еще недавно принадлежавшие к враждующим сторонам, ныне работают вместе! Разве это не начало новой эры, эры мира? Человеческое стремление к миру, как мне думается, и есть основная причина все возрастающей популярности Эйнштейна» [III.191].

Эйнштейн прочитал четыре лекции в самой большой аудитории в Коллеж де Франс. После каждой лекции разворачивалась дискуссия по специальной и общей теориям относительности. Особенно много слушателей собралось на первой лекции 31 марта. Андре Вейль вспоминал: «В аудиторию пускали только по пригласительным билетам. Насколько мне помнится, я получил свой билет благодаря Адамару. Учёные, философы, представители высшего света собрались в таком количестве, что пришлось обратиться к республиканской гвардии для поддержания порядка» [III.418, с. 30]. А 6 апреля в Сорбонне



Эли Жозеф Картан (1869—1951)

Окончил Высшую Нормальную школу в 1893 г., профессор Сорбонны с 1912 г., член Академии наук с 1931 г. Основные направления его исследований: геометрия римановых пространств, теория групп, теория инвариантов, дифференциальная геометрия и теория относительности. В 1922 г. Картан ввел понятие пространства с абсолютным параллелизмом (пространства без кривизны). Эйнштейн использовал термин «Fernparallelismus», эквивалентный общеупотребительному термину «далекий параллелизм».

состоялось заседание Французского философского общества, уже упоминавшееся в § 4.2, на котором Ланжевен говорил о философских аспектах теории относительности, а Адамар принял участие в дискуссии наряду с Эйнштейном, Э. Картаном, Пенлеве, П. Леви, Перреном, Беккерелем, Бруншвигом, Бергсоном, Леруа и Мейерсоном. Дискуссии происходили и за пределами лекционной аудитории: «Я даже помню, что дома у месье Адамара я попытался дать Вам простейший пример риманова пространства с Fernparallelismus [далёким параллелизмом]...», — сообщал Э. Картан в письме к Эйнштейну [III.70, с. 5].

Отношение Адамара к идеям Эйнштейна было несколько особым: для него не вставал вопрос о том, принять эти идеи или отвергнуть, так как его собственные работы в области механики, математической физики и геометрии позволили ему понять их. Вот что писал по этому поводу сам Адамар:

«По крайней мере, к тому времени я был подготовлен к принятию релятивистской точки зрения; во всяком случае я был заранее в состоянии весьма резко возразить тем (я клянусь Вам, что мне недавно доводилось слышать подобные мнения от признанных людей науки), кто не только заявлял о своем неверии в теорию относительности, на что они, разумеется, имели право, но кто также называл ее бессмысленной, „противоречащей здравому смыслу“, и кто якобы не мог понять, как столь сумасшедшее открытие могло бы быть кем-нибудь принято» [I.239, с. 67].

В предисловии к книге Жюве по тензорному исчислению, опубликованной в 1922 г., Адамар выразил свои большие ожидания по поводу влияния общей теории относительности на будущее развитие дифференциальной геометрии:

«По нашему мнению, в дифференциальной геометрии существовал кризис, а создание теории относительности разрешило этот кризис. С самого начала теория относительности пролила неожиданный свет на предыдущие работы по геометрии, продемонстрировав фундаментальную возможность абсолютного дифференциального исчисления Риччи и Леви-Чивита, которое оставалось почти без внимания с момента своего появления. Какого бы мнения мы ни придерживались относительно обоснованности новых гипотез, они отводят геометрии новую роль и открывают для нее новую эру, причём эта новизна не ограничена рамками математики, оторванной от реального мира, а исходит из самой природы вещей» [I.222].

Адамар считал одной из своих жизненных неудач то обстоятельство, что не он открыл специальную теорию относительности. В 1924 г. он выступил на Международном философском конгрессе в Неаполе с докладом «Как я не открыл специальную теорию относительности» [I.239], в котором попытался объяснить, почему исследователь часто проходит мимо фактов, находящихся буквально рядом. Он сообщил, что ещё на заре занятий теорией волн пришёл к преобразованиям уравнения светового конуса в себя, но счел их не имеющими физического смысла. (Адамар имел в виду преобразования Лоренца, глубоко исследованные Пуанкаре и сыгравшие решающую роль в построении Эйнштейном специальной теории относительности.) Адамар писал: «Я действительно считаю, что должен покаяться в весьма личной mea culpa[1], потому что я проявил необычайное упрямство, упорно не желая извлечь следствия из исследований, которые я сам провел в продолжение классических результатов Кирхгофа и Вольтерра» [I.239, с. 66].

После подробного анализа собственных рассуждений Адамар резко осуждает себя:

«Подумать, будто точка зрения Кирхгофа не имела физического смысла, — такая дерзкая мысль не приходила мне в голову. Подобно всем математикам, я восхищался огромным и все расширявшимся объемом работы, произведенной физиками, и к этому восхищению примешивалось почтение, порождаемое моей собственной некомпетентностью. Я еще не понял отчетливо, что наступил тот самый момент, когда следовало бы перестать испытывать почтение к физике.

И именно так я, математик с ограниченным воображением, оказался совершенно неспособен правильно интерпретировать тот вывод, к которому меня неудержимо вынуждала математическая теория; я ограничился почтительным поклоном перед точкой зрения Кирхгофа. Мораль этой истории заключается в том,

[1] Моя вина (лат.).

что в своей собственной области ученый не должен с почтением относиться ни к чему — к словам Кирхгофа следует относиться с ничуть не бо́льшим почтением, чем Коперник отнесся к трудам Аристотеля или Птолемея; именно так мы и поступаем со времен Эйнштейна. Это история о яйце Христофора Колумба; интересно, не верна ли она по отношению к ряду математических открытий» [I.239, с. 66—67].

Такие сообщения с признанием неудач чрезвычайно редки в математической литературе как до, так и после Адамара. Обычно принято сообщать только об успехах, достигнутых автором. Через двадцать лет Адамар упомянул об упущенной возможности открыть специальную теорию относительности и о других упущенных им возможностях в своей книге о психологии математического мышления [I.372].

Через неделю после того, как Эйнштейн покинул Париж, 16 апреля 1922 г., Адамар писал ему: «Париж определенно рукоплещет Вам, воздавая Вам славу» [III.120, с. 117]. На это Эйнштейн ответил: «Я весьма удовлетворен моим пребыванием в Париже, рад познакомиться с парижскими математиками и физиками и надеюсь, что мне удалось внести свой вклад в восстановление дружеских связей между французскими и немецкими учеными» [III.120, с. 117].

Выступая в 1930 г. в Буэнос-Айресе в Академии наук, Адамар сказал: «Я хотел бы упомянуть Эйнштейна, каким я его помню на наших знаменитых заседаниях в Коллеж де Франс, излагающего, уточняющего, отстаивающего свои блестящие идеи, которые новы не только для современной физики, но и для всей философии, а поскольку мне довелось видеть его и у себя дома на неформальных встречах, я помню его мощный ум и детскую улыбку, его щедрость духа и идеи, сделавшие его нашим лидером не только в научном, но и в моральном плане» [II.54, с. 79].

§ 4.6. Домашний оркестр

Всякий раз, когда Эйнштейну доводилось бывать в Париже, он непременно навещал Адамара, и, по воспоминаниям Поля Леви, двое ученых мужей разговаривали больше о музыке, чем о теории относительности [II.5, с. 23]. Кроме того, Эйнштейн играл на скрипке в любительском оркестре, организованном Адамаром у себя дома[1]. Описание этого домашнего оркестра дает Жаклин Адамар:

«Каким образом моим родителям пришла мысль создать оркестр, я не знаю. Начали мы с некоторых родственников и друзей. Это была нелегкая задача. Проблемы с партитурами не было: оркестры были и в Политехнической школе, и в Центральной школе, и мы

[1] Фреше упоминает, что участниками квартета были Адамар и его коллега Анри Вилла, также член Академии наук [II.13, с. 4].

заимствовали произведения из их репертуара; в случае необходимости ноты нам прислали бы из издательства «Maison Wolf» в Страсбурге.

Что касается дирижера, мы, к счастью, знали нескольких молодых композиторов, которые с радостью согласились попрактиковаться в своей будущей профессии. Первым был Морис Франк; он, несомненно, не представлял себе, какие трудности могут возникнуть при работе с музыкантами-любителями, которые, естественно, не были столь хорошими исполнителями, как профессионалы, и, что хуже всего, работали не столь усердно и играли довольно вяло. Множество самых различных людей приходило к нам домой, и нам даже удалось найти исполнителей на духовых инструментах. Мы были рады заполучить Жоржа Дюамеля[1], очень искусного флейтиста, в качестве первой флейты. Позднее он упомянул наш оркестр в одной из своих книг. Однажды нам удалось даже найти трубачей (для исполнения произведения, в котором требовались трубы). Чтобы несколько приглушить звук труб, мы отправили трубачей репетировать в чулан.

Моя матушка исполняла партии недостающих инструментов на фортепиано, поскольку в дни репетиций мы непрерывно терзались мыслью: кто ещё позвонит и внезапно откажется от исполнения в последнюю минуту? Ведь невозможно от любителей требовать того же, что от профессионалов. Помню, как однажды вечером у нас было только два скрипача, но зато пять виолончелистов, как на концерте Колонна![2]

Но, несмотря на все трудности, репетиции продолжались, хорошие исполнители демонстрировали свое превосходство над плохими (одним из которых была я). Больше всего страху я (и не только я одна) натерпелась в те вечера, когда дирижер хотел услышать звучание всех инструментов оркестра сразу, потому что, следует признаться, когда наступала очередь вступать вторым скрипкам, кроме сравнительно медленных анданте, я играла только одну ноту из четырех! С другой стороны, на меня можно было рассчитывать, когда нужно было выдерживать темп, в отличие от моего батюшки, настроенного слишком романтично. Он был органически не способен удержаться от того, чтобы ускорить или замедлить темп, в зависимости от своего настроения.

В результате наш оркестр звучал, должно быть, чудовищно, и мне было очень жаль дирижера. К счастью, слушателей не было, и, так как мы жили в доме на отшибе, близких соседей также не было. Если бы мы жили в многоквартирном доме, то соседи непременно бы стали жаловаться! Важно, что все мы получали от участия в оркестре огромное удовольствие, и я не думаю, что можно по-настоящему познать работу над исполнением симфонической музыки, не принеся столь тяжких жертв, как наши.

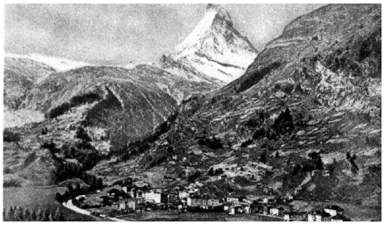
Были у нас и счастливые дни; это случалось, когда в Париж приезжал Эйнштейн. Он всегда брал с собой свою скрипку, с удовольствием участвовал в репетициях оркестра и играл очень хорошо. Я уверена, что в такие дни все оркестранты «выкладывались» в десять раз больше, чем обычно.

[1] Ж. Дюамель (1884—1966) — знаменитый французский романист.

[2] Эдуард Колонн (1838—1910) — скрипач и дирижер, основавший в 1871 г. Национальное концертное общество, позднее названное в его честь.

Так как Эйнштейн, как и отец, слабо выдерживал темп, наш дирижер решил в такие дни в качестве исключения повысить меня из вторых скрипок в первые. Подразумевалось, что, если я буду сидеть рядом с Эйнштейном, то, даже играя всего одну ноту из восьми, я буду помогать ему выдерживать темп» [IV.1, с. III(24)].

§ 4.7. Сколько змей убил Адамар?

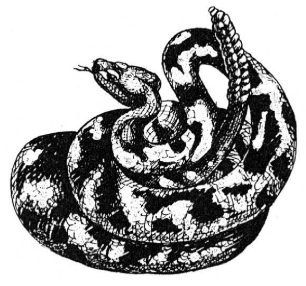


Адамар был неутомимым путешественником. Физическая активность, несомненно, помогала ему поддерживать исключительную работоспособность. Он любил длительные пешие прогулки, плавание, походы в горы. В возрасте за 60 лет он совершил восхождение на Монблан, собирал ботанические коллекции в горах Мексики, удивляя попутчиков выносливостью и смелостью. Французские и Швейцарские Альпы не имели от него секретов, и никакой подъём его не пугал. П. Монтель, который однажды шёл с ним и Ф. Трикоми из долины Роны к леднику Алетш, вспоминает, что Адамар «отказался делать обычные часовые привалы, сказав, что не будет отдыхать, пока не дойдёт до цели» [II.5, с. 21]. «Все было великолепно, — пишет Ф. Трикоми, — но вечером возвращение несколько затянулось, поскольку Адамар через каждые десять шагов останавливался, чтобы оглянуться и еще раз полюбоваться на вершину Юнгфрау, позолоченную последними лучами заходящего солнца» [II.5, с. 24].

О размахе планов путешествий Адамара можно судить по следующему отрывку из его письма к Э. О. Ловетту от 31 января 1911 г.: «Могу ли я попросить Вас оказать мне помощь, которая не доставит Вам много хлопот? Прошу Вас поставить меня в известность, если Вы услышите, что кто-нибудь собирается отправиться в конце 1911 г. в путешествие в тропическую часть Америки: в Мексику, Вест-Индию или, возможно, Колумбию... Я бы хотел присоединиться, если возможно, к нескольким спутникам, как можно более приятным, не слишком безрассудным и, прежде всего, разумеется, отправляющимся в путешествие для того чтобы, как я, наслаждаться природой, а не из снобизма» [IV.32].

Николетис, бывший спутником Адамара в Бразилии в 1924 г., вспоминал: «В окрестности бухты Рио Адамар посвятил меня в радости альпинизма. Адамар был неутомимым альпинистом. Он взбирался по кручам, плавал, совершал пешие переходы, и я много раз слышал, как он упорно доказывал необходимость поддержания равновесия между телом и духом» [II.49, с. 10].

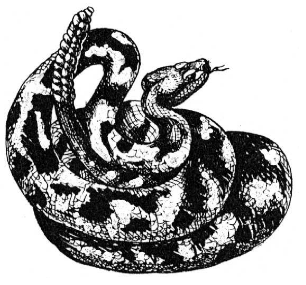
Два сообщения о путешествиях Адамара в Южную Америку мы находим у Поля Монтеля и Жаклин Адамар. Монтель пишет: «Приглашённый в Аргентину для лекционного турне, он высадился в Бразилии, чтобы увидеть орхидеи в полном цвету, углубился в тропический лес, попытался ударом камня убить гремучую змею, чтобы снять с неё кожу, и, отказавшись от морского путешествия,



отправился в Буэнос-Айрес верхом в сопровождении жены, для которой такой способ передвижения был новым» [II.5, с. 21].

Жаклин Адамар предлагает следующую версию: «Отправившись читать лекции в Рио-де-Жанейро, он решил добраться до истоков реки Игуасу, где, по слухам, росли удивительно красивые папоротники и где он надеялся увидеть некоторые прекрасные орхидеи и послушать пение птиц. Для этого он не отправился прямо в Рио, а решил верхом пересечь леса Параны. Именно тогда моей матери пришлось по его настоянию провести несколько дней в седле, это был ее первый опыт использования такого вида транспорта» [IV.1, с. III(3)].

Хотя географические подробности расходятся, общая атмосфера и некоторые детали обеих историй совпадают. Если истории Поля Монтеля и Жаклин Адамар описывают одно и то же путешествие, то каков же был пункт назначения — Рио-де-Жанейро или Буэнос-Айрес? Жаклин Адамар приводит еще одну историю о путешествии Адамара в Южную Америку: «В другой раз он отправился в Южную Америку, а потом ему нужно было побывать в Соединенных Штатах. Разумеется, он выбрал необычный маршрут, потерял по дороге свой багаж, забыл, что ему предстоит переместиться из южного полушария в северное, и прибыл в Нью-Йорк посреди снежной метели в белом костюме, но триумфально неся хвост гремучей змеи, которую он собственноручно убил камнями» [IV.1, с. III(3)—III(4)].



Эта история ставит новый вопрос: была ли змея, о которой говорит Жаклин, той же, о которой упоминает в своей истории Монтель? Этот вопрос отчетливо показывает, с какими трудностями сталкиваются биографы великих людей.

§ 4.8. Папоротники и грибы

За свою долгую жизнь Адамар побывал во многих странах. Он читал лекции в Соединенных Штатах, Советском Союзе, Италии, Швейцарии, Испании, Португалии, Германии, Великобритании, Бельгии, Чехословакии, Румынии, Канаде, Египте, Израиле, Китае, Индии, Бразилии и Аргентине. Эти поездки были привлекательны для Адамара ещё в одном отношении. Дело в том, что его страстью с молодости была ботаника. «В последние годы XIX века, — вспоминал Поль Леви, — Адамар, ученик моего отца[1], бывал иногда у нас дома, и однажды

[1] Люсьен Леви (1853—1912), отец Поля Леви, несколько лет преподавал математику в лицее Людовика Великого. Он был учителем Адамара в классе риторики. В течение двадцати трех лет Люсьен Леви был экзаменатором в Политехнической школе. Его работа по геометрии была удостоена награды Королевской академии Бельгии. Он также написал несколько учебников.

за столом я увидел, как он вытащил маленькую лупу из своего жилетного кармана и пояснил: „Я всегда ношу её с собой, чтобы рассматривать незнакомые растения“. Тогда я подумал: „Этот господин — ботаник“, — а позднее узнал, что он математик и, возможно, величайший в своём поколении» [II.5, с. 9].

Едва Косинус углубился шагов на десять в руины, он обнаружил поистине девственный лес, а обильная и разнообразная флора заставила его полностью забыть о Сфероиде.
Но он пришёл в себя при виде новой разновидности. «Я назову её *Briocheia-parisiensis Br.*», — промолвил он.

В своей книге о психологии открытия Адамар заметил, что «изучение биологии, например, как отмечал Эрмит, может оказаться очень полезным даже для математиков, так как при этом могут обнаружиться скрытые и в конечном счете плодотворные аналогии» [I.372, с. 9 (с. 12 русск. изд.)]. Наибольший интерес у Адамара вызывали папоротники и грибы. По словам Фреше, даже ботаники консультировались с ним по поводу папоротников и грибов [II.13, с. 4082]. Роже Хайм, член Института Франции и директор лаборатории споровых растений при Национальном музее естественной истории, вспоминал в 1967 г.:

«В 1927 г., когда я еще был молодым человеком, я вместе с профессором Жаком Адамаром отправился в узкие долины в горах Гапенсэ, чтобы поискать редкий папоротник, которого не было у него в гербарии. Профессор Адамар, один из величайших математиков XX века, с юношеским жаром был увлечен исследованием Природы, особенно ботаникой, выдающимся знатоком которой он был. Его одарённость проявилась в математическом анализе, но ему было мало математики. К ней он добавил страстную любовь к папоротникам и блестящее их знание, но это относилось не к тем папоротникам, которые растут в теплицах или садах, а к тем, которые живут в своей естественной среде — на крутых скалах, на обочинах дорог, на швах в кладке стен... Он мог бы стать выдающимся птеридологом[1] и заниматься математикой для собственного удовольствия» [III.173, с. 142—143].

Собранная Адамаром коллекция папоротников увеличивалась с каждым путешествием и считалась третьей среди лучших коллекций папоротников во Франции после коллекций Музея естественной истории и принца Ролана Бонапарта. Но Адамар никому не разрешал собирать образцы для своей коллекции, как явствует из того, что пишет Жаклин Адамар о своей поездке в Индокитай:

«Разумеется, на протяжении двух месяцев путешествия я не забывала о своей семье и особенно о страсти отца к папоротникам. Наконец мне удалось сорвать с древовидного папоротника небольшой листок длиной метра полтора. Но, к моему большому огорчению, отец пренебрежительно отверг подарок, стоивший мне таких усилий. Ни один образец папоротника, который он не сорвал своими руками, не был достоин приобщения к его коллекции» [IV.1, с. III(22)].

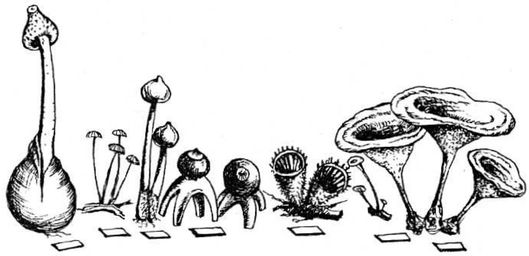
Затем Жаклин описывает, как Адамар обращался с образцами:

«К своим обожаемым папоротникам он относился с бесконечным терпением. У него был поразительный антиталант в обращении с вещами, и он вполне мог пытаться открыть чемодан со стороны петель, но он часами прикреплял каждый образчик папоротника к большому листу картона, разглаживая каждый отросточек. Образцы крепились к листу картона волосками, прикленными с двух концов (эти волоски мой батюшка получал от меня, потому что своих у него почти не осталось), поэтому ничто не мешало любоваться каждой деталью листа папоротника. Когда отец разглядывал образцы своей коллекции, членам семьи запрещалось открывать окна и двери из опасения, что дуновение ветерка может повредить образец» [IV.1, с. III(22)].

Летом 1936 г. после четырехмесячного пребывания в Китае Адамар и его супруга возвращались домой. Они воспользовались возможностью проделать путь с востока на запад по Транссибирской железной дороге. Семьдесят лет назад путешествие по железной дороге из Владивостока в Москву занимало гораздо больше времени, чем сегодня, главным образом из-за продолжительных остановок на станциях и полустанках. Адамар использовал эти остановки для пополнения своих ботанических коллекций, и его жена очень беспокоилась, как бы он не отстал от поезда. По сообщению Монтеля, Адамар «открыл в России новую разновидность папоротника, которой было присвоено его имя: *Hadamardus*» [II.25]. К сожалению, это название не упоминается ни в одном из справочников по папоротникам, к которым мы обращались.

Лоран Шварц вспоминал, что Адамар также интересовался грибами, и не только их гастрономическими, но и ботаническими свойствами. Однако если

[1] Птеридология — раздел ботаники, занимающийся изучением папоротников.



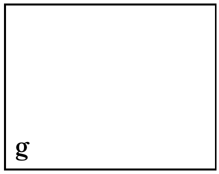
уровень познаний Адамара о папоротниках был почти профессиональным и эта область ботаники привлекала его всю жизнь, интерес к грибам пробудился уже в зрелом возрасте и был скорее любительским.

§ 4.9. Головоломка Адамара

Адамар был человеком с большим чувством юмора и находчивостью. «В честь своих друзей он писал очаровательные стихи, которые, к сожалению, исчезли во время последней войны» [II.5, с. 22]. «Он любил юмор и однажды прочитал мне свою довольно злую сатиру в стихах на одного кандидата в Академию», — вспоминал Фреше [II.13, с. 4086].

Дьёрдь Пойа вспоминает в своей книге «Альбом с картинками: встречи математика»: «На конгрессе в Болонье заседания начались в Болонье, а закончились во Флоренции. Поездка во Флоренцию на поезде занимала три часа, и для этой цели был выделен специальный поезд. Я вспоминаю, что в купе, где мы оказались, было очень шумно, а Адамар устал и хотел немного покоя. Поэтому он задал пассажирам в купе трудную задачу — головоломку. Как только он сформулировал условие задачи, все принялись размышлять над ней, и внезапно наступила такая тишина, что Адамар смог заснуть» [III.324].

Возможно, речь шла о следующей головоломке Адамара (о которой нам рассказал Л. Шварц). Требуется нарисовать картинку, на которой «Le roi Pépin[1], sans air, sans eau, sans lit, sans pain, ayant perdu le peu qui lui restait, gémit tout seul dans un coin». Читатель, знакомый с французским языком, поймет, что решением служит следующая картинка:



[1]Пипин — имя нескольких королей в VIII и IX вв., самый знаменитый из них Пипин Короткий (715—768) — король франков и отец Карла Великого (742—814).

Головоломка основана на игре слов и гласит: «Король Пипин, без воздуха, без воды, без постели, без хлеба, утратив то немногое, что у него осталось, стонет один-одинёшенек в углу». Сказанное также означает: «*roi Pépin* без *r*, без *o*, без *i*, без *pin* (произносится так же, как *pain*) утратил *pe* (произносится так же, как *peu*), которое у него осталось, и только буква *g* стоит в углу».

Глава 5

Мэтр

§ 5.1. Семинар Адамара

Любимым детищем Адамара был семинар в Коллеж де Франс, который он организовал в 1913 г. Адамар начал со своих собственных обзоров работ Пуанкаре, охвативших различные области математики. Затем он ввел практику студенческих докладов о математических работах.

Заседания семинара были прерваны Первой мировой войной, но возобновились в 1920 г. и затем происходили регулярно. Семинар Адамара очень быстро завоевал высокую репутацию. Его участниками стали не только начинающие, но и многие активно работающие ученые.

Конечно, сама идея семинара уже в то время была не новой. Еще в 1899 г. молодой Адамар увлечённо работал в физическом семинаре Марселя Бриллюэна в Коллеж де Франс. За границей существовали и более или менее специализированные математические семинары. Однако семинар Адамара стал явлением уникальным не только для математиков Франции, но и для всего мирового математического сообщества. «Благодаря своей эрудиции и способности овладевать любой областью Адамар распространил работу семинара на все части математики», — писал М. Фреше в некрологе Адамару [II.13, с. 4085].

Семинар Адамара просуществовал более двадцати лет. С докладами на его заседаниях выступали многие французские и зарубежные ученые, в том числе математики Эмиль Борель, Поль Монтель, Анри Лебег, Поль Леви, Морис Фреше, Жан Шази, Анри Вилла, Гастон Жюлиа, Арно Данжуа, Жорж Валирон, Эли Картан, Андре Вейль, Вито Вольтерра, Туллио Леви-Чивита, Годфри Харольд Харди, Эдмунд Ландау, Джордж Биркгоф, Сергей Бернштейн, Николай Лузин, Михаил Лаврентьев, Андрей Размадзе, Дьёрдь Пойа, Рольф Неванлинна, Ларс Альфорс, а также физики Макс Борн и Луи де Бройль.

Вот как описывает работу семинара Андре Вейль:

«В Париже, пока я учился в Нормальной школе и еще долгое время спустя, работал единственный семинар, заслуживающий свое название; это был семинар Адамара. В начале года мы встречались в библиотеке дома у профессора Адамара на улице Жана Долана, и он раздавал участникам математические статьи, доклады о которых он хотел услышать на заседаниях семинара. Статьи были по большей части оттисками, которые он получал со всего мира, или, по крайней мере, оттисками тех работ, которые он считал заслуживающими обсуждения. К этим статьям он добавлял заголовки различных источников, а также заголовки работ, предлагавшихся участниками семинара, ибо профессор Адамар всегда учитывал наши предложения. Большинство этих работ были опублико-

«Адамар указал нам цель нового семинара — faire la gazette (создать журнал)», — вспоминал Дьёрдь Пойа (1887—1985), один из участников семинара в начале 1914 г. (из неопубликованной речи Д. Пойа на юбилее Адамара в 1936 г. [IV.22]). Пойа работал в области теории функций комплексного переменного, математической физики, теории вероятностей и астрономии. Знаменитая книга «Неравенства» Харди, Литтлвуда и Пойа вышла в свет в 1934 г. Двухтомник «Задачи и теоремы из анализа» (1925) стал богатым источником вдохновения для поколений аналитиков.

ваны за последние два-три года, но это условие не было обязательным. Что касается широты тематики, цель профессора Адамара заключалась в том, чтобы дать такую широкую панораму современной математики, какую только возможно. Может быть, панорама не была исчерпывающей, но, по крайней мере, он к этому стремился. Для каждого объявленного заголовка профессор Адамар старался найти добровольца, часто объясняя, почему данная работа его заинтересовала. После того как темы докладов были распределены, назначались даты докладов, и после общей беседы мы все расходились.

В то время семинар собирался раз в неделю; позднее заседания проводились два раза в неделю. В работе семинара участвовали и высококвалифицированные, и начинающие математики. Среди самых „верных“ участников семинара был Поль Леви, бывший ученик Адамара. Профессор Адамар вел себя так, как если бы доклады делались главным образом для него лично; выступая с докладами,

Андре Вейль (1906—1998) внес существенный вклад в алгебраическую геометрию, теорию чисел, теорию групп, топологию, дифференциальную геометрию и комплексную аналитическую геометрию. В частности, он доказал гипотезу Римана для алгебраических функциональных полей размерности единица. В этой главе мы цитируем его автобиографию «Ученичество математика» [III.418].

мы обращались именно к нему. Он понимал все, если объяснение было хорошим; когда же выводы были не вполне ясными, профессор Адамар требовал пояснений или, что случалось нередко, давал пояснения сам. Он всегда оставлял за собой возможность добавить собственные замечания в конце доклада, иногда это были несколько слов, иногда замечания были более развернутыми. Профессор Адамар никогда не проявлял внешне своего превосходства: кто бы ни делал доклад (я умышленно не употребляю слово „лекция“, ибо перед лицом Адамара было невозможно читать лекцию), профессор Адамар выслушивал докладчика как равного.

Сказанное в полной мере относится и ко мне, неопытному студенту, каким я был тогда, вскоре после поступления в Нормальную школу. Адамар принял меня как полноправного участника семинара, никак меня не выделяя. Я был убежден, что у меня есть кое-какие идеи о функциях нескольких комплексных переменных; я сделал несколько замечаний (мне казалось, что они оригинальны, и, возможно, они действительно были таковыми) по поводу области сходимости степенных рядов от нескольких переменных, обобщающих классическую теорему Адамара о рядах от одной переменной; но, что даже более важно, в библиотеке Школы я обнаружил работы Хартогса. Хотя эти работы уже были известны в течение некоторого времени, во Франции о них почти никто не знал, и они никогда не обсуждались на семинаре Адамара. Я предложил эту тему, и профессор Адамар принял предложение с удовольствием.

Библиотека[1] Нормальной школы и семинар Адамара ⟨...⟩ — вот что сделало из меня математика» [III.418, с. 39—40].

Ш. Мандельбройт вспоминает, как распределялись темы докладов:

«В начале учебного года, в октябре, Адамар собирал людей, которые, по его мнению, могли выступить с докладом на семинаре. Среди них были парижане и математики, работавшие в провинциях, но не было иностранцев, которые не могли приезжать по срочному вызову. Мадам Адамар угощала собравшихся деликатесами. Вся комната была завалена работами, и мы обсуждали их содержание, а также кто о какой статье будет докладывать. „А вы, Мандельбройт, не расскажете ли об этой работе?“ Я соглашаюсь. „Об этой работе расскажет Шази, а об этой — Валирон“. Что касается иностранцев, то мы посылали им приглашения. Так, мы приглашали Биркгофа, Пойа, Планшереля приехать во Францию, чтобы выступить с докладом на семинаре, обычно на хорошо известную им тему, которую они выбирали сами» [III.265, с. 17].

Основная часть выступления Ш. Мандельбройта на столетнем юбилее Адамара была посвящена воспоминаниям о семинаре:

«Заседания семинара, проходившие по вторникам и пятницам, несомненно, были самыми яркими событиями во французской математической жизни в промежутке между двумя мировыми войнами. Любой математик, французский или иностранный, считал за честь и высокую оценку своих научных трудов приглашение знаменитого мастера выступить на семинаре с докладом о своих исследованиях или просто дать обзор и комментарий недавно опубликованных работ.

Вито Вольтерра приезжал на семинар с докладами о нелинейных функционалах или функциональном анализе в целом, а Леви-Чивита — о своих исследованиях по римановой геометрии, и на семинаре часто обсуждался абсолютный параллелизм. Адамар с удовольствием слушал выступления Джорджа Биркгофа, посвящённые эргодической проблеме. Пойа объяснял свои красивые результаты об аналитическом продолжении и распределении особых точек ряда Тейлора — раздел, берущий начало с диссертации Адамара. Ландау делал доклады по теории чисел или по рядам Дирихле. Сергей Бернштейн излагал проблемы взвешенного полиномиального приближения и теории наилучшего приближения, которой занимались многие русские математики. Именно на семинаре Адамара Рольф Неванлинна поведал математическому миру свою знаменитую теорию целых функций, а Ларс Альфорс — свою теорему искажения.

Каждый приезжал в Париж на несколько дней, чтобы доставить свежие плоды своих последних исследований парижской математической публике и другим

[1]Ключ от библиотеки Нормальной школы Вейль получил, работая помощником библиотекаря [III.418, с. 35].

математикам, бывавшим в Париже проездом, — всем тем, кто составлял аудиторию семинара, и прежде всего Адамару.

Я вспоминаю увлекательные заседания, посвященные теориям Брауэра, в которых принимали участие Лебег, Винтер, Поль Леви и Вавр (из Женевы). Эти теории озадачили нас; представьте себе, что другие молодые (в то время!) люди боялись, как и я, подробно в них разбираться и предпочитали продолжать свои собственные исследования в более привычных областях.

Адамар, который часто понимал существо рассматриваемого предмета лучше, чем приглашенный ученый, хотя тот и был специалистом в соответствующей области математики, сравнивал новые результаты со старыми и иногда обнаруживал взаимосвязь между совершенно различными областями математики.

Таким образом, мы все работали в изоляции, каждый из нас считал, что его собственная область математики — единственный интересный или, по крайней мере, самый интересный ее раздел.

Впрочем, каждый молодой математик имел основания так считать: его действиями руководило вдохновение, а трудности, с которыми он встречался и в которых он теперь не признаётся, опасаясь, что их сочтут „техническими“, были трудностями преодолимыми с помощью любви и упорства, которые исследователь вкладывал в проблему в надежде постичь ее суть, создать поэму — ибо как еще можно назвать эти шедевры чистого воображения, изолированного, но столь яркого?

Общие теории, задающие структуры математических явлений, были немногочисленны: в лучшем случае они составляли автономную часть математики или даже метаматематики, которую никто не отваживался затронуть. Здесь и вступал в действие широкий, энциклопедический и прежде всего глубокий ум Адамара: он один создавал тот синтез, которого так недоставало. Сколько раз он формулировал на семинаре принцип, который сейчас представляется нам очевидным, но в тот момент таковым не казался: „Обобщайте, чтобы упрощать или чтобы лучше понять!“.

Он ясно и быстро видел, что некоторая теорема из теории аналитических функций представляет собой не что иное, как вариант некоторой топологической теоремы, что другую теорему можно было бы сформулировать в терминах теории функционалов и тогда она могла бы породить новые результаты в нескольких областях математики, априори не связанных между собой.

Неявным образом Адамар кристаллизовал структуру математических явлений — поэмы становились частями грандиозного эпоса» [II.5, с. 25—26].

Та же интонация восхищения слышна и в воспоминаниях Поля Леви:

«Иногда во время заседаний семинара я не мог уследить за слишком увлекающимся докладчиком, и меня восхищало, что Адамару ничто не казалось трудным. Всегда внимательный, он часто вмешивался, чтобы уточнить пункт, плохо разъясненный докладчиком, и если случайно какое-либо обстоятельство ускользало от него, то ложная гордость не препятствовала ему сказать об этом и попросить дополнительных объяснений» [II.36, с. 4].

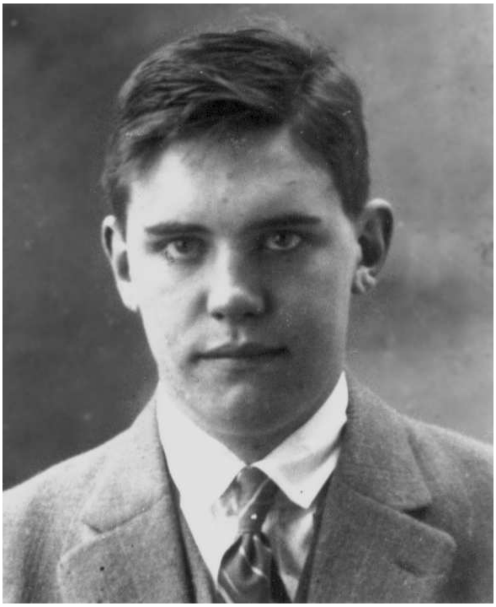
В своих воспоминаниях Ш. Мандельбройт отмечает:

«Ныне много говорят о коллективной работе в математике или других науках. Труды Бурбаки созданы примерно десятком людей. В прежние времена такого сотрудничества не было, и семинар Адамара был своего рода предшественником Бурбаки. Адамар был чем-то вроде эталона, если говорить абстрактно, нравственным эталоном Бурбаки. Думаю, что это имело фундаментальное значение как для французской математики, так и для математики в целом» [III.265, с. 17].

В этом хвалебном хоре слова Дьёдонне звучат некоторым диссонансом:

«В то время нас связывал с внешним миром только семинар Адамара, который был профессором в Коллеж де Франс, хотя и не очень блестящим преподавателем. (Он был достаточно великим ученым, чтобы я мог сказать это без опасения нанести ущерб его репутации.) У него была идея (по-видимому, почерпнутая им за рубежом, потому что во Франции ничего похожего никогда не было) создания семинара, посвященного анализу текущих математических работ. В начале учебного года он распределял среди тех, кто хотел выступить с докладом, статьи за последний год, которые он считал наиболее важными. Докладчикам предстояло объяснять содержание этих статей у доски. В то время это было неслыханной новацией, необычайно ценной для нас, потому что мы могли встречаться с математиками, работавшими во многих различных областях. Кроме того, семинар Адамара вскоре стал центром притяжения для иностранцев; они стекались на семинар толпами. Для нас, молодых студентов-математиков, семинар Адамара был источником знакомства с идеями и взглядами, с которыми мы не встречались в формальных курсах математики, читавшихся в университете.

Такое положение дел продолжалось несколько лет — до тех пор, пока некоторые из нас, начиная с А. Вейля и К. Шевалле, побывав за пределами Франции и повстречавшись с итальянцами, немцами, поляками и др., не поняли, что если



Жан Дьёдонне (1906—1992) в 1924 г.

Работал в области математического анализа, топологии, спектральной теории, теории групп, алгебраической геометрии. Дьёдонне был одним из основателей группы Бурбаки.

мы будем продолжать двигаться в прежнем направлении, то Франция неизбежно зайдет в тупик. Мы, несомненно, будем оставаться весьма блестящими специалистами в теории функций, но в остальном французская математика вскоре окажется забытой. Такое развитие событий означало бы прерывание двухсотлетней традиции, потому что от Ферма до Пуанкаре великие французские математики всегда пользовались репутацией универсальных учёных, работающих как в теории чисел, так и в алгебре, анализе или геометрии. Таким образом, мы узнали о разнообразии новых идей за пределами Франции, и некоторым из нас представился шанс отправиться и узнать из первых рук о том развитии математической мысли, которое происходило вне наших стен. Впоследствии после ухода Адамара на пенсию в 1937 г. его семинаром продолжал руководить в несколько иной форме Г. Жюлиа. Он сосредоточил внимание на более систематическом изучении грандиозных новых идей, которые поступали со всех сторон. Именно тогда возникла мысль о создании обобщенного труда, уже в форме не семинара, а книги, которая охватила бы главные идеи современной математики. Эта мысль привела к рождению трактата Бурбаки» [III.104, с. 135—136].

Так ли странно замечание Дьёдонне? Вероятно, нет. Дело в том, что, несмотря на разнообразие тематики, семинар Адамара был посвящен главным образом проблемам анализа, понимаемого в весьма широком смысле, в то время как деятельность семинара происходила в период, когда главными разделами математики становились топология, теория вероятностей и абстрактная алгебра. Дьёдонне стал одним из основателей группы Бурбаки, организованной в 1934 г. именно с целью создания учебника анализа[1]. Вместо этого Бурбаки создали многотомный трактат «Элементы математики», представляющий собой обширный обзор фундаментальных структур математики, написанный на современном уровне строгости и на основе самых общих принципов. Приведенное выше замечание Дьёдонне, по-видимому, ближе к позиции Бурбаки 1940-х и 1950-х гг., оно довольно точно определяет, что такое универсальный математик. Не пытаясь полно ответить на этот вопрос, процитируем А. Вейля, еще одного участника группы Бурбаки:

«Я поставил себе целью стать, подобно Адамару, „универсальным математиком“, подразумевая под этим, что я хочу знать о каждой математической теме больше, чем неспециалист, и меньше, чем специалист. Естественно, я не достиг ни той, ни другой цели» [III.418].

Нашу подборку цитат о семинаре Адамара мы хотим завершить преисполненным энтузиазма отзывом Ш. Мандельбройта и Л. Шварца:

«Те из нас, кому выпала привилегия посещать семинар Адамара в Коллеж де Франс, где он преподавал с 1909 по 1937 гг.[2], вероятно, не смогут припомнить более вдохновляющих часов, посвящённых математике. Просьбу Адамара выступить на семинаре с изложением и доказательством своих последних результатов или свежих результатов в этой же области, полученных другими исследователями, известные математики всего мира почитали за честь, сопряжённую иногда с большим риском. Но, не пытаясь приуменьшить роль таланта лекторов, мы должны сказать, что наши чувства, вдохновение и желание продолжить предложенные работы или, по крайней мере, обдумать темы, только что рассмотренные на семинаре, в основном определялись анализом доклада, который проводил Адамар, его критическими замечаниями, комментариями во время доклада и прогнозами, которые он высказывал по поводу будущего развития темы доклада.

Одной из характерных особенностей семинара Адамара было разнообразие его тематики. Семинар не был посвящён какой-то одной области математики — он был посвящён всей Математике, чистой и прикладной, в частности, численному анализу, а также философии математики. Часто доклад становился важным математическим событием — на нем в первый раз сообщалось о важном математическом результате. Иногда новые результаты рождались на семинаре и публиковались через несколько недель в „Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris“.

Математическую жизнь в Париже в двадцатые — начале тридцатых годов большей частью можно было описать двумя словами: *семинар Адамара*» [II.43, с. 117—118].

[1]Предысторию группы Бурбаки см. в статье Л. Больо «Парижское кафе и десять протобурбакистских заседаний (1934—1935)» [III.21].

[2]В Коллеж де Франс Адамар был заместителем профессора с 1897 по 1909 гг. и профессором с 1909 по 1937 гг.

§ 5.2. Шолем Мандельбройт об Адамаре

Воспоминания Шолема Мандельбройта, записанные его племянником, создателем фрактальной геометрии Бенуа Мандельбротом [III.265], были опубликованы в 1985 г. Блестящий рассказчик, Ш. Мандельбройт мог многое сказать об Адамаре, сыгравшем важную роль в его жизни и оказавшем на него большое влияние как на математика.

Шолем Мандельбройт (1899—1983) работал в области математического анализа, теории функций комплексного переменного, теории рядов Дирихле, теории чисел, теории приближений. В 1972 г. он стал членом Академии наук.

Детство Шолема Мандельбройта прошло в Варшаве, и у него рано появилась страсть к математике (в возрасте тринадцати лет он открыл метод вычисления квадратных корней). С 1917 по 1919 гг. Ш. Мандельбройт изучал математику в Варшавском университете, слушал курсы у Янышевского, Мазуркевича, Райхмана и Серпинского по теории групп, общей топологии, тригонометрическим рядам и теории множеств. Он провел холодный и голодный год (1919—1920) в Харькове, где его профессором был Сергей Бернштейн.

Уже к девятнадцати годам Бернштейн получил высшее образование в Париже и через пять лет решил девятнадцатую проблему Гильберта об аналитичности решений регулярных вариационных задач и эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных для случая двух независимых переменных. Эти результаты он включил в свою диссертацию [III.32], представленную совету, членами которого были Пикар, Пуанкаре и Адамар. Позднее интересы Бернштейна сместились в область теории вероятностей и теории приближений, а в Харькове он читал курс лекций по теории аналитических функций. После нескольких докладов из участников семинара остался только Шолем Мандельбройт. Он вспоминает: «Бернштейн не был блестящим преподавателем. Отнюдь! При каж-

Сергей Натанович Бернштейн
(1880—1968)

дом слове было видно, как он мучается, когда требовалось сослаться на нужное свойство, поговорить о нужной функции. Наблюдая за тем, как он мыслил, слушатель ощущал его разум, живой и трепещущий, и я трепетал вместе с ним, он говорил размышляя, а я слушал и размышлял. Это было чудесно. Я научился теории функций у Сергея Бернштейна» [III.265, с. 5—6].

Но мечтой Мандельбройта было продолжить математическое образование во Франции, и в 1920 г. он прибыл в Париж, который считал центром мировой математической жизни. Благодаря своим способностям ему удалось добиться получения стипендии, но она была так мала, что он ел в основном помидоры, которые «в то время были очень вкусными».

Впервые Мандельбройт увидел Адамара осенью 1921 г. на инаугурационной лекции Лебега в Коллеж де Франс. Он вспоминает:

«Когда Лебег читал свою инаугурационную лекцию, он вошел в зал через профессорскую дверь в сопровождении важных персон. В их числе были министры (в то время инаугурационная лекция в Коллеж де Франс была значительным событием) и профессора Коллеж де Франс, которые не были математиками, а затем показался невысокий человек с забавной козлиной бородкой, и я сказал себе: „Как он осмелился войти в эту дверь, словно он важная персона“. И только я так подумал, как кто-то сказал: „Это Адамар“. И я понял, почему он вошел в зал через эту дверь. Так я впервые увидел Адамара. Впоследствии я стал посещать его семинар, но мне исполнился уже двадцать один год, а потом и двадцать два года, а я ни разу не перемолвился с ним ни словом, если только он сам не обращался ко мне. Должен сказать, что теперь некоторые поговаривают об учёных-„мандаринах“[1]. В то время я не знал, существуют ли вообще „мандарины“, но были люди, которые считали, что профессора должны быть „мандаринами“. Я к ним не принадлежал, возможно, потому, что приехал из Польши, слишком издалека. Однако студенты питали к профессорам огромное уважение» [III.265, с. 10—11].

Мандельбройт вставал в четыре часа утра и читал диссертацию Адамара и другие его работы начиная с 1896 г., а также различные статьи по теории целых функций. Кроме того, он изучал небольшую книжку Адамара о ряде Тейлора, работы Аристотеля, а по вечерам занимался французским языком, заучивая наизусть стихотворения Рембо.

«Так началось мое математическое творчество. У меня всегда были результаты, которые я, должен признаться, не считал существенными. В диссертации Адамара мне встретились некоторые определители из коэффициентов ряда Тейлора. Я сказал себе: „Ага, рассмотрение этих определителей с другой точки зрения приводит к забавным результатам“. Забавным! Я считал это просто забавным. Один из результатов такого рода теперь называют лакунарным. Я взял его на заметку и сказал себе: „Есть ещё теорема об умножении особенностей“. С ее помощью я нашёл теоремы, другие методы, получил новые результаты. Но я считал их просто упражнениями. Мне казалось, что создавать настоящую математику, писать диссертацию, серьезную работу — это сделать открытие такого же масштаба, как открытия Ньютона, Эйнштейна или как интеграл Лебега (я знал, за что Лебег получил степень доктора) — обязательно что-то бесконечно важное» [III.265, с. 11—12].

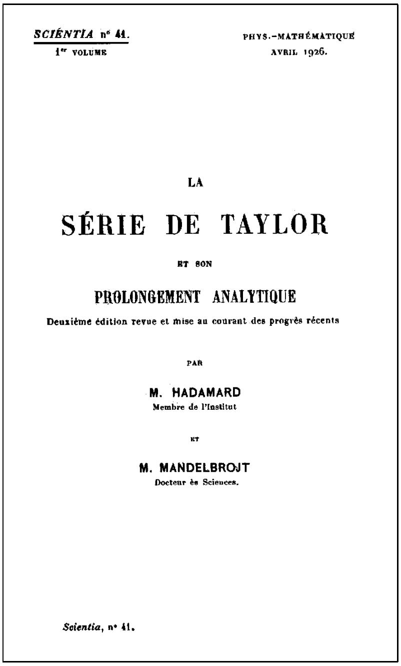
Подготовив две статьи для «Comptes Rendus», Ш. Мандельбройт к своему удивлению услышал от Монтеля: «А вы знаете, что у вас готова диссертация?». И действительно, в ноябре 1923 г. он стал доктором наук[2].

Когда Мандельбройт показал свою диссертацию Монтелю, тот посоветовал ему повидаться с Адамаром и позвонил последнему. В результате Ш. Мандельбройт впервые отправился к Адамару. Адамар просмотрел диссертацию, и она произвела на него настолько хорошее впечатление, что он немедленно предложил Мандельбройту написать вместе книгу о ряде Тейлора. Адамар имел в виду второе издание своей небольшой книжечки [I.80]. Они начали работу в 1924 г., одну часть писал Адамар, другую Мандельбройт, и в 1926 г. книга была опубликована [I.253]. Она была перепечатана в «Избранных трудах» Мандельбройта [III.264]. В своей диссертации Мандельбройт написал: «Выражаю глубокую благодарность месье Адамару, который первым проявил интерес к моим исследованиям, когда я приехал в Париж» [III.265, с. 40].

Во время одного из визитов Вольтерра в Париж Адамар представил ему Мандельбройта, и вскоре Мандельбройт совершил поездку в Рим за счет рок-

[1]Во Франции тогда так называли самых знаменитых и недоступных профессоров по образцу китайских мандаринов. — *Прим. ред.*

[2]Более точно, он получил степень «Docteur és Sciences avec mention trés honorable».



SCIÉNTIA n° 41.
1er VOLUME

PHYS.-MATHÉMATIQUE
AVRIL 1926.

LA
SÉRIE DE TAYLOR
ET SON
PROLONGEMENT ANALYTIQUE
Deuxième édition revue et mise au courant des progrès récents

PAR
M. HADAMARD
Membre de l'Institut
ET
M. MANDELBROJT
Docteur ès Sciences.

Scientia, n° 41.

Книга «Ряд Тейлора и аналитическое продолжение», написанная в соавторстве Адамаром и Мандельбройтом

феллеровского гранта. В Риме он познакомился с Ловеттом, который пригласил его посетить Институт Райса.

По возвращении в Париж в 1925 г. Мандельбройт вел такую же жизнь, как и до своего отъезда:

«До завершения моей диссертации я ходил на семинар Адамара, но только не вступал с Адамаром в разговоры. Но после 1923 г. он стал ко мне весьма расположен. По четвергам я наблюдал, как Адамар, одетый в длинный домашний халат, весьма живо и страстно говорил на различные математические темы. Однажды мне нездоровилось. Я жил тогда в гостинице 20-й категории на четвертом этаже. Адамар был тогда уже не молод, но, узнав, что я приболел, пришел навестить меня в мой номер. Мне требовалась небольшая операция. Адамар отрекомендовал меня одному из своих племянников по фамилии Шварц[1] (отцу Лорана Шварца). Адамар был необыкновенно добр ко мне. На его семинаре я узнал массу интересного. Кроме того, Адамар читал курс лекций по рядам Дирихле. Это было совсем не то, что принято понимать под рядами Дирихле ныне; ряды Дирихле в современном понимании в то время назывались общими рядами Дирихле. Чаще всего речь шла о функциях, напоминающих дзета-функцию Римана. И на этот раз забавно отметить, что курс, который Адамар читал не блестяще, мне очень понравился, ибо к тому времени я терпеть не мог блестящих курсов. Курс, который читал Адамар, прежде чем исторгнуться из его уст, должен был пройти через его тело, через его сердце. Он должен был пройти через весь

[1] Ансельм Шварц был не племянником Адамара, а мужем племянницы Луизы Адамар.

его мозг. Он размышлял о теоремах, обдумывал их, и о каждой теореме можно было сказать, что Адамар почти выстрадал ее» [III.265, с. 16].

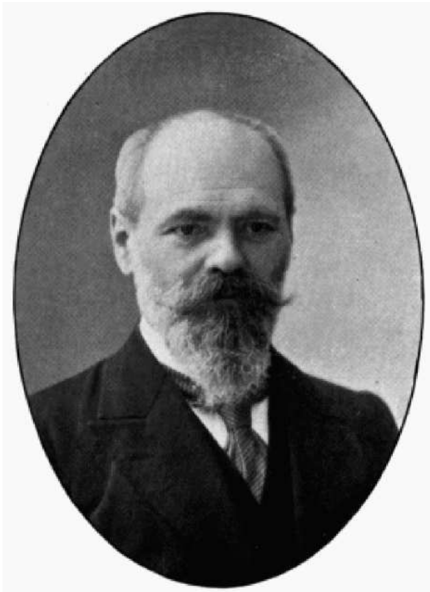
Мандельбройт говорил, что несколько раз он менял область своих исследований и что импульс к очередному изменению тематики исследований исходил главным образом от семинара Адамара или от работ, которые Мандельбройт читал после заседаний семинара; часто этот импульс определялся тем, как Адамар интерпретировал результаты. «С этой точки зрения, — заявил Мандельбройт, — я могу сказать, что был учеником Адамара» [III.265, с. 18]. Считал ли Адамар какую-нибудь область математики наиболее красивой, а остальные области неинтересными? «Нет. На его семинарах мы слушали доклады по гидродинамике, математической логике, теории функций, топологии, а также на темы, которые он совсем не знал, но о которых хотел узнать. Нет, нет, нет, Адамар считал, что на его семинаре мы должны узнать либо о том, что ему нравится, либо о том, чего он не знает. Более того, он предпочитал доклады о том, чего он не знал, потому что хотел это узнать» [III.265, с. 18].

Ощущался ли с годами возраст Адамара на семинаре?

«Нет, нет, определенно не ощущался. Вы понимаете, что обычно семидесятилетний человек кажется тридцатилетнему старым. Но я, которому в ту пору было меньше тридцати, не считал Адамара старым. Его замечания всегда были по сути дела, весьма уместными, очень интересными. Я помню многие замечания, сделанные Адамаром, которые полностью сводили на нет сказанное докладчиком и изменяли предмет последующей публикации. Докладчик объяснял содержание статьи, Адамар делал несколько замечаний, а через две-три недели благодаря этому другой участник семинара получал решение своей задачи либо сам докладчик уточнял свою теорему. Это случалось очень часто. Если математику действительно „пекли“ (в это слово я не вкладываю никаких уничижительных оттенков), то „пекли“ именно на семинаре Адамара во Франции» [III.265, с. 18—19].

Мандельбройт вспоминает, что Адамар сыграл решающую роль в его натурализации:

«Я хочу рассказать вам о том, как я сам получил французское гражданство в 1926 г. Ситуация была весьма забавная. Адамару очень понравились мои работы. Совершенно естественно (может быть, я хвастаюсь, но это не имеет значения), что меня стали считать очень хорошим математиком. В 1923 г., когда я закончил свою диссертацию, в Париже находился Сергей Бернштейн. Всем было известно, что я знал его. Адамар и Монтель, весьма наивные в вопросах такого рода, сообщили Бернштейну: „Теперь, когда Мандельбройт написал такую прекрасную диссертацию, он должен стать профессором в Варшавском университете“. Я никогда не вёл разговоров ни о чем таком. Бернштейн, русский подданный, а не поляк, заявил им: „Послушайте, в Польше существует глубоко укоренившийся антисемитизм, и Мандельбройту ни за что не дадут стать профессором, по крайней мере в ближайшее время. На это не следует рассчитывать. В Варшавском университете сейчас нет ни одного профессора-еврея“. После этого в Париж приехал Заремба, хороший польский математик, бывший



Станислав Заремба (1863—1942)

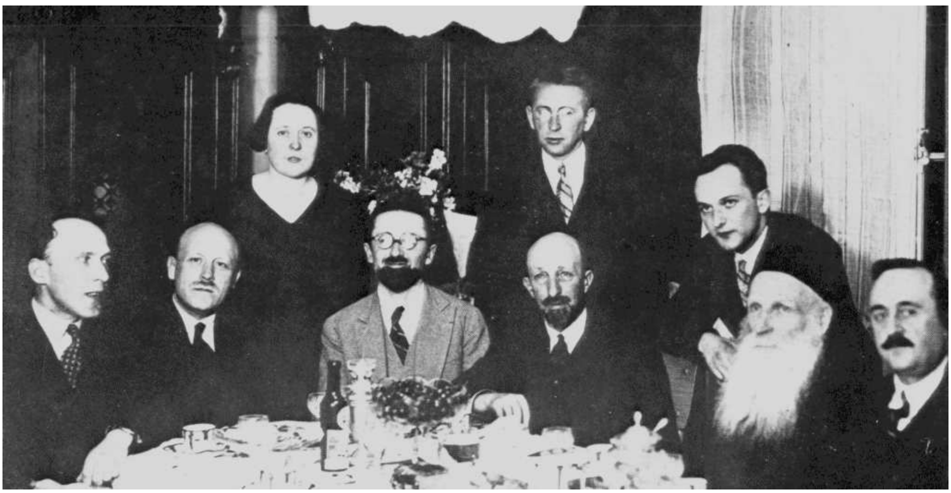
В молодости польский математик Станислав Заремба преподавал во Франции. В Польшу он вернулся в 1900 г., получив назначение на кафедру в Ягеллонском университете в Кракове. Занимался исследованиями в области дифференциальных уравнений в частных производных, теории потенциала, вязкоупругости и кристаллографии. Краевая задача для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных с данными Неймана и Дирихле на различных участках границы называется задачей Зарембы. Заремба поддерживал активные контакты с французскими математиками и, в частности, сотрудничал с Пенлеве и Гурса.

гораздо либеральнее других своих коллег, профессор Краковского университета. Адамар спросил у Зарембы: „Действительно ли Мандельбройт не может стать профессором?“ — „Не может. Но если хотите, я могу сделать его своим ассистентом“. Это было в 1924 г. Адамар и Монтель были оскорблены в своих лучших чувствах. Они попросили вмешаться мадам Кюри, потому что она была полячкой. Но она объяснила им, что в Польше для меня нет перспектив. Поэтому Адамар порекомендовал мне натурализоваться (получить гражданство) во Франции...

Немного позднее, когда я находился в Риме, я сказал Адамару, что был бы рад натурализоваться во Франции. Адамар переговорил с кем-то в Министерстве юстиции. Существовал специальный закон, который давал гражданство любому лицу, оказавшему важные услуги Франции. Было решено, что я оказал Франции важные услуги. В этой связи я вспоминаю один весьма забавный случай. Необходимо было обратиться в Государственный совет — в противном случае натурализации пришлось бы ждать пять-шесть лет. Я отправился в Государственный совет, и советник спросил меня: „Говорят, вы очень хороший математик. Вы как Паскаль?“ — „Нет, месье. Паскаль совершил одно открытие, когда ему было двенадцать лет. Я написал диссертацию (кажется, хорошую), но мне было двадцать четыре года“. — „Вы знаете Ланжерона?“ В то время в Париже был префект по фамилии Ланжерон. „Нет, я не знаю Ланжерона“. — „Каждый интеллектуал во Франции должен знать Ланжерона. Он один из величайших физиков в мире“. — „Вы имеете в виду месье Ланжевена?“ — „О да, конечно!“

В 1925 г. состоялась моя помолвка с Глэдис, но я не хотел получать гражданство вследствие вступления в брак: когда вы женаты, получить его проще, но мне хотелось натурализоваться до брака, поскольку я мог это сделать на основании специального закона. Я получил гражданство 11 мая 1926 г. и женился 25 мая 1926 г. уже как французский гражданин. Вот так-то. В день свадьбы я получил телеграмму с приглашением в Институт Райса. Ловетт не знал моего парижского адреса, но знал адрес Адамара, так как Адамар несколько раз бывал в Институте Райса. Адамар был свидетелем на моей свадьбе и в тот же день вручил мне телеграмму с приглашением от Ловетта» [III.265, с. 22—23].

Сына Мандельбройта, родившегося в 1929 г., назвали Жаком в честь Адамара.



В доме отца Ш. Мандельбройта в Варшаве, 1930. Сидят: Ш. Мандельбройт, его брат (отец Бенуа Мандельброта), А. Данжуа, Ж. Адамар, отец Ш. Мандельбройта, П. Монтель.

В связи с фотографией на следующей странице приведем отрывок из разговора Бенуа Мандельброта со своим дядей:

«*Б.* Я вспоминаю несколько ваших визитов в Варшаву, когда смотрю на эту семейную фотографию с Адамаром, Монтелем, Данжуа и Вами. На фотографии также хорошо видна бутылка, о которой говорили, что это была единственная бутылка бордо во всей Варшаве. Вы заезжали туда по пути в Москву.

Ш. Да, встреча была очень интересной, и даже теперь те ее участники, кто еще остался в живых, Монтель и Данжуа, вспоминают ее. В 1930 г. в Харькове состоялся съезд русских математиков, и русские пригласили четырех математиков из Франции. Гончаров[1] встретил нас на границе и сопроводил до Харькова. Но по пути мы заехали в Варшаву. Я не знаю, кто из нас сообщил о нашем прибытии польским математикам; Серпинский пришел встретить нас на вокзале. Мой отец, красивый старик с длинной белой бородой, был очень рад и горд выпавшей ему честью пригласить к себе французских математиков. И хотя они были приглашены польскими математиками, все предпочли отправиться в дом к моему отцу, и он оказал им очень хороший прием. Я вспоминаю, с каким восхищением Монтель писал мне об отце и как много мы беседовали о нем с Адамаром. Обед был устроен в доме моего отца, присутствовали мои сестры и твой отец» [III.265, с. 27—28].

Именно Адамар устроил в Париже встречу Винера с Мандельбройтом. Вот что пишет об этом Винер: «Как я уже говорил, мне давно хотелось лично встретиться с Мандельбройтом и обсудить с ним некоторые вопросы, тесно связанные с его и с моими исследованиями. Адамар сообщил мне, что Мандельбройт тоже хотел поговорить со мной. Для меня это было особенно важно, так как Мандельбройт принимал деятельное участие в организации Международного математического конгресса в Осло (1936), на котором я собирался быть в то лето. Адамар написал Мандельбройту и договорился, что я заеду к нему по дороге в Осло и, может быть, задержусь на несколько дней, если нам захочется вместе поработать» [III.422, с. 191]. Состоявшаяся встреча привела к появлению нескольких совместных статей по лакунарным рядам Фурье и квазианалитическим функциям.

После ухода Адамара на пенсию в 1938 г. Мандельбройт, бывший тогда профессором в Университете Клермон-Феррана, стал его преемником в Коллеж де Франс.

Следующее письмо, отправленное Мандельбройтом Луизе Адамар из Америки по случаю ее восьмидесятилетия, свидетельствует о теплых чувствах, которые Ш. Мандельбройт питал к семье Адамаров:

21 октября 1948 г.

Уважаемая мадам!

Глэдис написала мне, что Вы отмечаете весьма знаменательный день рождения. Я мысленно принимал участие в праздновании Вашего юбилея, сидя в кресле и размышляя о красоте Вашей жизни и жизни Вашего супруга, моего мэтра.

От души целую Вас.

Ш. Мандельбройт.

P. S. Посылаю коробку шоколадных конфет для Вас, но прошу Вашего разрешения предложить несколько конфет месье Адамару [IV.21].

[1] В. Л. Гончаров (1896—1955) — профессор Харьковского института народного образования, специалист в теории функций и теории приближений.

§ 5.3. Лоран Шварц: «Он оказал на меня огромное влияние»

28 октября 1992 г. мы нанесли визит Мари-Элен и Лорану Шварц в их квартире на улице Пьер-Николь в Париже. Шварц — внук одной из сестер Луизы Адамар, а Мари-Элен — дочь Поля Леви. Л. Шварц следующим образом описал влияние Адамара на свое математическое развитие:

$$\mathbf{1^{-z} + 2^{-z} + 3^{-z} + \ldots = 0}$$

«Я могу сказать, что он оказал на меня огромное влияние, но не прямо, потому что он не был очень хорошим педагогом. Он не сознавал точно уровень своего ученика и говорил или слишком быстро, или слишком медленно. Однажды, когда мне было шестнадцать лет, он рассказывал мне о нулях дзета-функции, и я не понял ни слова. Тогда он заметил: „О, вы не очень сильны в математике“. Затем он спросил меня об уравнении второго порядка $z^2 + pz + q = 0$, и я дал ему решение. „О, да вы многое знаете!“ — заметил он в ответ.

$$\boldsymbol{z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Ясно, что не было смысла много с ним разговаривать, так как он не приспосабливался к уровню своего ученика. Я понял, что он не мог бы быть моим профессором».

Шварц продолжал свои воспоминания:

«Сразу после окончания лицея я попытался ходить на семинар Адамара и побывал на двух или трех заседаниях. Адамар попросил меня сделать доклад по одной из работ Пойа. Мне тогда едва исполнилось девятнадцать лет. Я прочитал статью Пойа и понял, что не смогу доложить ее на семинаре. В то время мне показалось, что ходить на семинар для меня слишком трудно, и я прекратил бывать на семинаре, а затем посещал его заседания от случая к случаю.

Позднее я всерьез изучил работы Адамара: радиус сходимости, порядок особых точек, теоремы о роде функции, о факторизации, о нулях дзета-функции, о вариационном исчислении и т. д. И все это — из работ Адамара, но не от него непосредственно. Я всегда предпочитал читать книги.

Что касается конечной части расходящегося интеграла, я нашел ее самостоятельно (только для размерности 1), когда был студентом, и обнаружил некоторые красивые приложения. Позднее я заговорил об этом с Адамаром. Он сообщил мне, что давно ввел конечную часть для произвольной размерности, и сослался на книгу по дифференциальным уравнениям в частных производных гиперболического типа (изданную в Йеле). Свою цель он видел в получении элементарных решений таких уравнений, тогда как моей целью было аналитическое продолжение. Разумеется, когда я, к примеру, привёл полученный результат в моей книге об обобщённых функциях, я употребил название „конечная часть по Адамару“, так как он нашел ее задолго до меня, и это был не подходящий момент, чтобы говорить о моих личных достижениях. Но теперь я пишу свои мемуары и сообщаю то, что сказано выше.

Лоран Шварц у себя дома в 1992 г.

Лоран Шварц (1915—2002) работал в области топологии, функционального анализа и математической физики. Его выдающимся вкладом в математику стала теория обобщенных функций, которая позволила по-новому взглянуть на дифференциальные уравнения в частных производных, математическую физику, функции многих комплексных переменных и т. д. Воспоминания Л. Шварца «Математик в споре с веком» были опубликованы в 1997 г.

Огромное впечатление на меня также произвело предложенное Адамаром определение корректной задачи, так как после введения обобщенных функций я должен был сказать, что все задачи, имеющие единственное решение, корректны по теореме о замкнутом графике. Поэтому все результаты Адамара, о которых я упоминал выше, были очень важны для меня».

На наш вопрос о реакции Адамара на слабые работы Л. Шварц ответил: «Она была очень отрицательной. Некоторые работы вызывали с его стороны просто фантастическую критику».

§ 5.4. Адамар и молодые коллеги

Трудность прямого контакта с начинающими, проявившаяся в первые годы преподавания Адамара в лицее Бюффона и вновь отмеченная Лораном Шварцем, не помешала Адамару стать идеальным преподавателем на более поздних этапах математического развития. Как-то раз он заметил по поводу своего отношения к ученикам: «С радостью принимая студентов, которые приходят ко мне просить темы для диссертационных работ, я всё же питаю тайное предрасположение к тем, у кого имеется своя собственная идея, особенно если она кажется соответствующей моим научным вкусам» [I.377, с. 168].

Успех семинара был обусловлен не только исключительным математическим талантам Адамара, но и его сердечностью, гуманитарной культурой и чувством юмора. Андре Вейль писал: «Все, кто был знаком с Адамаром, знали, что до конца своей очень долгой жизни он сохранил необычайную свежесть ума и живость характера; во многих отношениях его реакции напоминали реакции четырнадцатилетнего мальчика. Его доброта была безграничной» [III.418, с. 29].

В воспоминаниях Рольфа Неванлинны о его первой встрече с Адамаром в Сорбонне читаем: «Я представлял себе Адамара усталым пожилым человеком, потому что уже в то время, 35 лет назад, он снискал мировую славу своими пионерскими открытиями в области аналитической теории чисел. Однако меня приветствовал человек, буквально излучавший энергию, в черных волосах и бородке которого не было ни одного седого волоса»[1].

Винер описывает необыкновенно демократичную манеру общения Адамара с более молодыми математиками:

«Французские математики ⟨...⟩ строго соблюдают табель о рангах: после того как профессор удалился в свой кабинет и расписался в журнале, где регистрируются лекции, студенты и младшие товарищи по работе для него больше не существуют.

Адамар — редкое исключение из этого правила. Он живо интересуется студентами, считает своим долгом заботиться об их будущем, и любой из них всегда может к нему обратиться. Если нынешнее поколение французских математиков начинает ломать традиционный барьер, разделяющий маститых и начинающих учёных, то это, безусловно, личная заслуга Адамара» [III.422, с. 62].

На столетнем юбилее Адамара Трикоми вспомнил следующую историю:

«Помимо важных дел, которыми он часто был занят, Адамар любил беседовать с молодыми людьми, расспрашивал об их исследованиях, не скупясь на похвалы, а в случае необходимости высказывая полезные критические замечания.

Говоря об этом, я неизменно вспоминаю экскурсию на Цюрихское озеро во время Международный математический конгресс 1932 г. Мы находились на мостике яхты, сидели за столом. С Адамаром, Эли Картаном и другими, кого я не могу вспомнить, был молодой (в то время!) итальянский математик, ныне покойный. Молодой человек очень энергично, хотя и весьма неосмотрительно, объяснял, каким образом он, располагая некоторыми функционалами, мог бы проинтегрировать «произвольную систему дифференциальных уравнений». Затем я увидел, как Адамар, сначала слушавший юношу несколько рассеянно, „навострил уши“ и с большим энтузиазмом произнес: „То, что вы говорите, просто изумительно; это величайшее математическое открытие нашего века!“ После чего

[1] *R. Nevanlinna*. Muistettua, Helsingissä, Kustannusosakeyhtiö. Otava, 1976.

Норберт Винер за своим письменным столом в Массачусетском технологическом институте, 1920-е гг.

Норберт Винер (1894—1967) в детстве был вундеркиндом, в юности он получил широкое образование по философии, языкам, инженерно-техническим дисциплинам и математике. В 1919 г. он получил должность на математическом факультете Массачусетского технологического института, где и работал вплоть до своего выхода на пенсию. Винер внес фундаментальный вклад в гармонический анализ, теорию потенциала, теорию интегрирования в бесконечномерных пространствах, доказательство эргодических теорем, теорию случайных процессов, теорию относительности и квантовую теорию. Его перу среди прочих принадлежит книга «Кибернетика» (1948) и две автобиографические книги «Экс-вундеркинд: мое детство и юность» (1953) и «Я — математик» (1956).

юноша совсем сник и совершенно другим тоном добавил: „Да, да, но речь идет о системах с постоянными коэффициентами“. И Адамар, спустившись с небес на землю, поведал ему: „Но тогда, молодой человек, ваше открытие — почти глупость! Всякий знает, как интегрировать системы с постоянными коэффициентами!“ [II.5, с. 24].

Мы уже упоминали влияние Адамара на молодого Фреше, который называл Адамара своим «духовным отцом» [II.18], а также на других его учеников Поля Леви (1886—1976) и Рене Гато (1880—1914). Адамар заметил П. Леви еще в 1904 г., когда тот сдавал вступительные экзамены в Нормальную и Политехническую школы. Леви был принят первым в Нормальную школу с блестящими оценками по математике, которые поставил ему Адамар, но решил поступить в Политехническую школу (см. [III.241, с. 30]). Леви вспоминает следующий эпизод из 1909—1910 учебного года, когда Адамар читал курс вариационного

Джакомо Трикоми (1897—1978)

Франческо Джакомо Трикоми — автор около 300 работ по дифференциальным и интегральным уравнениям. Уравнение Трикоми $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ играет важную роль в газовой динамике.

исчисления в Коллеж де Франс: «Чтобы показать, как Адамар вел себя со студентами, я расскажу вам, что однажды после лекции я сообщил ему, что он забыл рассказать об одной важной задаче. „Знаю, — ответил он, — я полагал, что мне не следует рассказывать о проблеме интегрируемости, пока я не решу ее. Но поскольку вы заговорили о ней, предлагаю её вам“. Этот эпизод стал началом моих исследований по функциональному анализу. Я всегда был глубоко признателен профессору Адамару за то, что он помог мне найти предмет моих исследований» [II.37, с. 7]. Адамар и Вольтерра были официальными руководителями диссертации Леви, защищенной в 1911 г.

Поль Леви известен также своим фундаментальным вкладом в теорию вероятностей. «Если кто-нибудь и оказал более глубокое, чем другие, влияние на формирование и развитие теории вероятностей, так это Поль Леви», — пишет С. Дж. Тейлор [III.392]. Однако эта часть работ Леви получила во Франции признание гораздо позже, чем в других странах, — только в конце его жизни. Адамар также, по-видимому, недооценивал вероятностные результаты Леви, хотя в двадцатые годы сам активно интересовался марковскими цепями и статисти-

Поль Леви (рисунок, сделанный Мишелем Мендес-Франсом в 1957—1958 гг.)

ческой механикой. Вот что сказал Л. Шварц об отношении Адамара к работам Леви по теории вероятностей:

«Между двумя войнами ведущее положение во французской математике занимал Адамар вместе с Анри Лебегом и Эли Картаном, и еженедельный семинар Адамара стал замечательным местом встречи математиков всего мира. Адамар высоко оценивал работы Поля Леви по анализу, но не очень интересовался его работами по теории вероятностей. Это тем более любопытно, что Адамар чрезвычайно интересовался физикой, особенно всем, что имело отношение к дифференциальным уравнениям в частных производных. Но он считал, что математики должны интересоваться физикой, а не становиться физиками; они должны оставаться апостолами математической строгости. И однажды Адамар с неудовольствием заметил Полю Леви, что тот стал заниматься исключительно теорией вероятностей и оставил математику ради физики. Отметим, что даже если бы теория вероятностей Поля Леви напоминала физику больше, чем математику того времени, отношение Адамара необъяснимо. Оно не могло не задевать Поля Леви. Адамар был его учителем, и Поль Леви глубоко (и вполне обоснованно!) восхищался им. Вот что писал Поль Леви, по-видимому об Адамаре, в предисловии к своей книге 1937 г. о сложении случайных переменных (2-е издание, 1951, с. XII): «Я хотел бы высказать несколько слов предостережения некоторым аналитикам, причем не самым слабым, которые не приемлют теории вероятностей или по крайней мере противопоставляют себя вероятностникам, якобы утратившим чувство математической строгости и с этой точки зрения не могущим способствовать прогрессу анализа со времен Коши и даже поддавшимся искушению забыть о том, что непрерывная функция не всегда дифференцируема... Такая критика, возможно, была бы обоснована в XIX веке. Но для того, чтобы повторять ее сейчас, необходимо игнорировать новейшее развитие теории вероятностей...». И оно действительно полностью игнорировалось! Поль Леви очень хотел стать членом Академии, но был избран лишь как преемник Жака Адамара, очень поздно, в 1964 г., в возрасте 78 лет — через 30 лет после того, как его кандидатура впервые была выдвинута на выборах в Академию [III.357, с. 16].

Но в письме непременному секретарю Академии наук от 4 ноября 1965 г. Леви писал: «Прежде чем стать преемником Адамара в Академии наук, я был его учеником, затем его коллегой в Политехнической школе, и всегда был его другом» [IV.23].

Гато получил свои основные результаты в 1913—1914 гг. Уходя на фронт, он оставил свои рукописные материалы Адамару. Гато был убит в сентябре 1914 г. В 1916 г. Академия наук посмертно наградила его премией Франкёра. После войны Адамар обратился к П. Леви (который по возвращении с фронта продолжил свои исследования по функциональному анализу) с предложением подготовить работы Гато к печати. Две статьи появились в «Bulletin de la Société Mathématique de France» в 1919 г. [III.146] с предисловиями Адамара и Леви.

Отношение Винера к Адамару всегда было очень теплым:

«Я сам многим обязан адамаровской широте взглядов. У него не было никаких оснований обращать особое внимание на юного варвара из Нового Света, делающего первые самостоятельные шаги. Никаких оснований, кроме доброжелательности и стремления открыть ещё один талант, возникавшего у него каждый раз, когда он замечал хотя бы самые скромные способности.

Много лет спустя, встречаясь с Адамаром на различных математических конференциях, я бывал приятно поражён тем, что он помнит о нашей страсбургской встрече и внимательно следит за моими работами. Так случилось, что эта поездка на конгресс привела, в частности, к тому, что я пополнил собой многочисленный отряд математиков, питающих к Адамару чувство глубокой признательности и обязанных ему благополучием своей научной карьеры» [III.422, с. 67—68; с. 62—63 русск. изд.].

Та же сердечность ощущается и в воспоминаниях Андре Вейля:

«Теплота, с которой Адамар принял меня в 1921 г. [Вейлю было тогда пятнадцать лет], сразу же исключила какую бы то ни было дистанцию между нами. Он казался мне скорее «ровней», который знает бесконечно больше, но вряд ли старше меня; ему не приходилось делать никаких усилий, чтобы быть доступным для меня. Вскоре Адамар оказал мне услугу, которая решающим образом повлияла на мое будущее. Каждый год лицей Св. Людовика присуждал премию лучшему учащемуся по элементарной математике. Премия состояла из выраженного в книгах эквивалента годовых процентов с капитала, подаренного фонду. Мне было позволено самому выбрать книги для себя, и я попросил Адамара посоветовать, какие книги лучше выбрать. На ежегодной торжественной церемонии вручения наград ⟨...⟩ я получил трехтомный «Курс анализа» Жордана и двухтомный «Трактат по натуральной философии» Томсона и Тейта. Благодаря Адамару я выучил анализ по Жордану (что бесконечно лучше, чем изучать анализ по курсу Гурса, как делали большинство моих соучеников) и познакомился с началами дифференциальной геометрии по Томсону и Тейту» [III.418, с. 29—30].

Фреше, Гато, Поль Леви, Мандельбройт, Булиган, Андре Вейль, Винер и Лоран Шварц — таков далеко не полный перечень молодых математиков, испытавших на себе влияние или поддержку Адамара. Например, Адамар сделал все, что было в его силах, чтобы помочь молодому физику и математику Мирону Матиссону получить работу в 1930-х гг. (см. письма Адамара к Эйнштейну [III.120, с. 122—126]). Другой пример его поддержки — следующее письмо, которое он написал Винеру с рекомендацией Джесси Дугласу, тогда неизвестному, но впо-

Джесси Дуглас (1897—1965)

следствии ставшему вместе с Альфорсом одним из двух первых лауреатов Филдсовской медали за предложенное им решение проблемы Плато о минимальных поверхностях, которое было прорывом в вариационном исчислении:

Рио-де-Жанейро
20 мая 1930 г.
Уважаемый профессор Винер!

Насколько я понимаю, доктор Дуглас может претендовать на место в Вашем университете. Я хочу сообщить Вам, как нам было интересно видеть и слышать его в Париже и какое высокое мнение сложилось у меня о нем. Он был одним из лучших участников моего семинара в Коллеж де Франс. Кроме того, мы все были в восторге от его прекрасной работы по проблеме Плато, которую он решил самым оригинальным и успешным образом. Его решение неожиданно изящно и является одним из наиболее интересных результатов, полученных в последние годы, особенно если учесть трудность предмета. Я считаю этого учёного одним из наиболее многообещающих молодых американских математиков. Кроме того, я хочу особо подчеркнуть замечательную ясность и строгую упорядоченность его изложения, поэтому с любой точки зрения было бы достойно сожаления, если бы американская наука и американское образование были бы лишены участия доктора Дугласа.

Искренне Ваш

Ж. Адамар [IV.31].

Среди многих молодых математиков, посещавших лекции Адамара и его семинар в разные годы, были Зигмунд Янишевский, Джерзи Нейман, Рафаил Салем, Нина Бари, Мари-Луиза Дюбрей-Жакотэн, Эйзенс Лейманис.

На праздновании своего семидесятилетия Адамар сказал:

«Нет ничего приятнее, чем видеть сегодня вокруг себя молодых исследователей, которым я помог сделать их первые шаги на научном поприще и надеюсь помогать в дальнейшем, а также более старших учеников, которые ныне стали моими друзьями, усилиями которых удалось развить некоторые направления математики до такой степени, что они иногда кажутся мне непостижимыми. Ничто не может быть более драгоценным для ученого, чем сознание того, что кому-то удалось обогнать его на том самом пути, который он некогда начинал прокладывать...» [II.27, с. 55].

§ 5.5. Лузин и Меньшов об Адамаре

Лузин известен своими работами по метрической и дескриптивной теории функций, теории аналитических функций и дифференциальной геометрии. Выдающийся педагог, Лузин был одним из многих математиков, которые, хотя и не были учениками Адамара, но многое почерпнули для себя из его педагогической деятельности и математических работ.

С декабря 1905 г. 22-летний студент Московского университета Николай Лузин провёл полгода в Париже. «Лекции Hadamard'а рекомендую Вашему вниманию, — писал своему ученику Д. Ф. Егоров в феврале 1906 г., — он читает[1] великолепно и очень содержательно» [III.119, с. 338].

Весной 1913 г. Н. Н. Лузин, уже приват-доцент Московского университета, едет в Гёттинген и Париж. Из скупых строк его отчёта о командировке, длившейся больше года, можно узнать, что он слушал лекции Э. Пикара, Э. Бореля, М. Бохнера и был участником математического семинара Адамара в Коллеж де Франс.

По возвращении в Москву Н. Н. Лузин в 1914—1916 гг. сформировал активный научный коллектив — «первое поколение Лузитании» (см. [III.260]). Однако с годами талантливые ученые из его окружения выбирали свои пути в науке, уходили от традиционной тематики. Вот почему во время третьей поездки во Францию, зимой—весной 1926 г., Лузина не покидало беспокойство за судьбу московской математической школы, ощущение её кризиса. Отсюда и его пристальный

[1] Во втором полугодии 1905/06 учебного года Адамар читал в Сорбонне курс высшего анализа два раза в неделю.

Николай Николаевич Лузин
(1883—1950)

интерес к математической жизни Парижа. «Сейчас, когда я живу в соприкосновении сразу с несколькими математическими „школами“ (венгерской, польской, сербской, румынской, скандинавской), я, как в зеркале, читаю без всякого труда то, что происходит в недрах каждой из них», — писал Лузин О. Ю. Шмидту[1] из Парижа в феврале 1926 г. [III.254, с. 280]. Его восторгает «современная открытость, доступность для наблюдения французской школы». Мысленно оглядываясь на свои прежние поездки в Париж, он размышляет:

«Невольно сравниваешь актуальный момент с прежним временем, когда пышный декорум жизни академического чертога и величавая недоступность были так красиво-стильны, что мгновенно отступала на задний план собственная духовная жажда.

Что же изменило прежний внешний характер? Размышление указывает на ряд внешних условий, — между прочим, на некоторый недостаток нормалистов [выпускников Нормальной школы], достаточно подготовленных для творческой деятельности: война имела следствием убыль молодёжи. Внутренний же фактор — огромная организующая сила Hadamard'а, сильно „демократизировавшего“ науку» [III.254, с. 283].

В другом месте того же письма Н. Н. Лузин вновь подчеркивает роль Адамара: «Семинарий Hadamard'а — это целое событие эпохи для французской школы...

[1] Отто Юльевич Шмидт (1891—1956) — необычайно разносторонний советский ученый, работавший в математике, астрономии, географии и геофизике. Шмидт был известным полярным исследователем. Он возглавлял экспедиции пароходов «Г. Седов» (1929—1930), «Сибиряков» (1932) и «Челюскин» (1933—1934). В 1937 г. он организовал работу дрейфующей станции «Северный полюс-1». Как математик, внес вклад в развитие теории групп и ее приложений.

Сокращая факты, скажу только, что в таком Париже я нашел бесконечное поле для размышлений» [там же].

Среди работ Лузина имеется статья «О задаче Адамара об униформизации множеств» (на французском языке), представленная для публикации Адамаром в «Comptes Rendus» 10 февраля 1930 г. В этой статье Лузин изложил решение проблемы, сформулированной Адамаром в его первом письме Борелю во время эпистолярной дискуссии по теории множеств между Борелем, Лебегом и Бэром [I.123].

В 1936 г. Лузин стал объектом травли со стороны советского математического сообщества. Среди прочего его обвиняли в непатриотичном преклонении перед французской математикой и в том, что свои лучшие работы он опубликовал за рубежом.

В 1914 г. по возвращении Лузина из Парижа Д. Е. Меньшов слушал его лекции по теории функций действительного переменного. Однажды Лузин задал своим слушателям вопрос, эквивалентны ли интегралы Данжуа и Бореля. Вскоре Меньшов представил Лузину доказательство того, что интеграл Данжуа обладает большей общностью, и это стало началом их прочного математического содружества. Меньшов стал признанным специалистом по теории тригонометрических и ортогональных рядов, конформных отображений и теории функций действительного переменного.

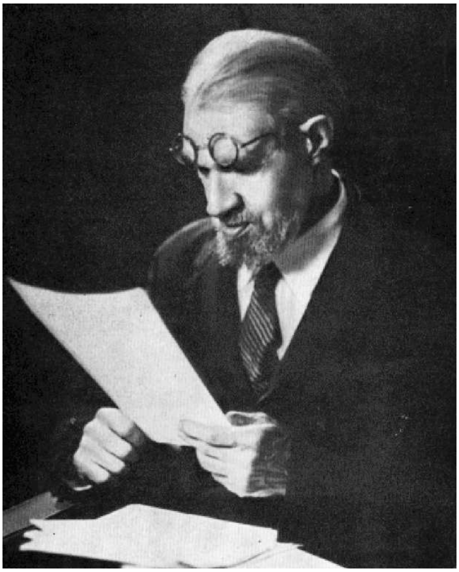
Д. Е. Меньшов вспоминал, что Лузин помог ему отредактировать французский текст его статьи и затем «послал со своей рекомендацией парижскому академику Ж. Адамару, который представил ее в „Comptes Rendus“» [III.274, с. 321]. Вот что пишет Д. Е. Меньшов:

«От Адамара проблематика теории функций действительного переменного была далека, но он вполне доверял Лузину. Помню, что в ответном письме Адамар выразил удовлетворение, что в Москве ведётся серьезная научная работа, и было видно, что он высоко ценит роль Н. Н. Лузина в её организации. Любопытно, что статьи в „Comptes Rendus“ строго не должны были превосходить некоторого размера, а у меня получилось намного больше. Но в то время — это был разгар Первой мировой войны — отношение к России и русским во Франции было особенно хорошим, и мою статью не сократили... Мне хотелось бы отметить еще один момент. К обобщению интеграла Данжуа, данному А. Я. Хинчиным, независимо пришел сам А. Данжуа. Разница во времени представления и появления их работ по этому вопросу была очень невелика. Адамар писал, что приоритет хронологически принадлежит Хинчину. Не знаю, быть может, это было сделано только из вежливости» [III.274, с. 322].

А вот что Д. Е. Меньшов рассказывает о своей стажировке во Франции:

«В Париж я поехал в 1927 г. на годичный срок в качестве стипендиата Рокфеллеровского фонда. Такие стипендии предоставлялись специальным научным комитетом ученым не старше 35 лет: мне было тогда 34 года... Жил я в Париже в небольшом отеле „Parisiana“[1], близ Пантеона, в д. 4 по улице Турнефор.

[1] Отель «Parisiana» просуществовал до 1994 г.



Дмитрий Евгеньевич Меньшов
(1892—1988)

Там обычно останавливался Н. Н. Лузин, который мне рекомендовал эту гостиницу. Здесь устроились приехавший вскоре после меня, только на более короткий срок, М. А. Лаврентьев, а также приехавший весной того же года Н. Н. Лузин с женой.

...Тут же я стал регулярно посещать известный семинар Ж. Адамара в Collège de France. Здесь ставились и обсуждались доклады по самым разнообразным вопросам математики и ее приложений. Например, один французский ученый сделал на нём сообщение о работах Э. Шрёдингера по квантовой механике. Сам я выступил на семинаре с двумя докладами о своих работах — по теории конформных отображений и по теории ортогональных рядов. При этом я убедился, что Адамар действительно мало знаком с современной теорией функций: он попросил меня напомнить определение меры множества. Упрекать за это Адамара нельзя: ему было тогда 62 года, и он продолжал научную работу в избранных им ранее классических областях анализа» [III.274, с. 332].

Глава 6

В тридцатые годы

§ 6.1. Политическая активность

Для французской интеллигенции всегда был характерен интерес к политике, в разное время многие французские ученые становились министрами. Среди математиков министерские посты занимали Монж, Лаплас, Борель, а Пенлеве был даже премьер-министром. Адамар никогда не занимал никаких государственных должностей, но он, без преувеличения, всегда был проникнут озабоченностью политическими событиями, которые происходили в течение его долгой жизни и главные из которых столь трагически сказались на судьбе его семьи.

Адамар в 1930-е гг.

После Первой мировой войны Адамар продолжил свою деятельность в Центральном комитете Лиги защиты прав человека. Его статьи по социальным и политическим вопросам представляли интерес сами по себе. В 1920-х гг. Адамар печатается в «Cahiers des droits de l'homme»[1]. В одной из статей он даёт определение агрессора:

«Под агрессором надлежит понимать:

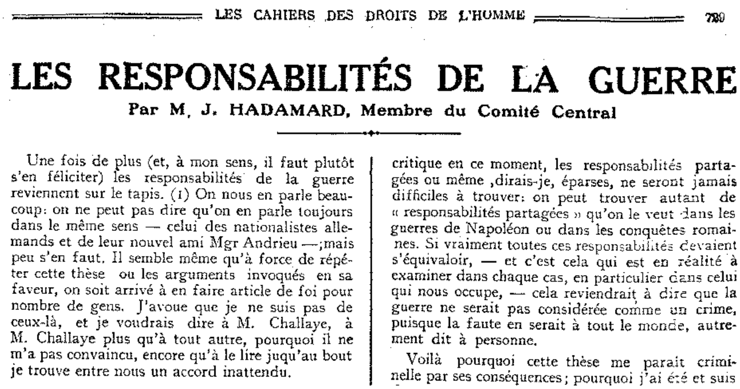
1. Всякого, кто первым объявит войну или откроет военные действия, не выдвинув причины конфликта постоянно действующему международному суду или, если необходимо, временному суду.

2. Всякого, кто первым откажется подчиниться решениям таких судов или начнёт военные действия во время изучения такими судами причин конфликта.

3. Всякого, кто откажется выполнить решения таких судов» [I.219].

Эти формулировки в почти неизменном виде были использованы в речи, произнесенной в 1924 г. премьер-министром Эррио от имени французского правительства на Женевской конференции по разоружению. В связи с этим Адамар писал 16 сентября 1929 г. Эйнштейну:

«Женевский протокол 1924 г. сформулировал точные правила, позволяющие определить агрессора. Я испытываю, возможно, почти отеческое чувство к этому определению агрессора, так как за два года до выступления Эррио я предложил его в „Cahiers des droits de l'homme", даже дополнив его двумя пунктами, которые, по моему мнению, следовало бы добавить» [III.120, с. 118].



LES CAHIERS DES DROITS DE L'HOMME 729

LES RESPONSABILITÉS DE LA GUERRE

Par M. J. HADAMARD, Membre du Comité Central

Une fois de plus (et, à mon sens, il faut plutôt s'en féliciter) les responsabilités de la guerre reviennent sur le tapis. (1) On nous en parle beaucoup: on ne peut pas dire qu'on en parle toujours dans le même sens — celui des nationalistes allemands et de leur nouvel ami Mgr Andrieu —;mais peu s'en faut. Il semble même qu'à force de répéter cette thèse ou les arguments invoqués en sa faveur, on soit arrivé à en faire article de foi pour nombre de gens. J'avoue que je ne suis pas de ceux-là, et je voudrais dire à M. Challaye, à M. Challaye plus qu'à tout autre, pourquoi il ne m'a pas convaincu, encore qu'à le lire juqu'au bout je trouve entre nous un accord inattendu.

critique en ce moment, les responsabilités partagées ou même ,dirais-je, éparses, ne seront jamais difficiles à trouver: on peut trouver autant de « responsabilités partagées » qu'on le veut dans les guerres de Napoléon ou dans les conquêtes romaines. Si vraiment toutes ces responsabilités devaient s'équivaloir, — et c'est cela qui est en réalité à examiner dans chaque cas, en particulier dans celui qui nous occupe, — cela reviendrait à dire que la guerre ne serait pas considérée comme un crime, puisque la faute en serait à tout le monde, autrement dit à personne.

Voilà pourquoi cette thèse me parait criminelle par ses conséquences; pourquoi j'ai été et suis

Начало одной из статей Адамара в «Cahiers des droits de l'homme»

Следующие подробности о политических дискуссиях между Адамаром и Эйнштейном взяты из книги «Эйнштейн о мире» [III.291, с. 99—100] под редакцией О. Натана и А. Нордена.

«Друг Эйнштейна, французский математик Жак С. Адамар (сам ярый пацифист), в письме от 16 сентября 1924 г. поднял острый вопрос в связи с решением о полном неучастии в войнах, которое Эйнштейн провозгласил ранее в том же году в своем заявлении для чешского журнала „Die Wahrheit". Адамар привел

[1] «Выпуски по правам человека».

обширный перечень исторических данных, чтобы показать, что страны, отказывавшиеся защищать себя от агрессии, тем самым не предотвращали агрессию и что агрессоров не сдерживала ни оппозиция в их собственной стране, ни давление со стороны мирового общественного мнения. А что можно сказать о Лиге наций? Должна ли она также воздерживаться от применения силы? Адамар считал Женевский протокол 1924 г., в котором была предпринята попытка дать определение агрессии, важным шагом на пути к миру. Не желая противоречить Эйнштейну по такой важной проблеме, Адамар воздержался от публикации статьи, написанной еще до того, как ему стала известна декларация Эйнштейна, стремясь отложить до лучших времен выяснение тех пунктов, в которых они расходились во мнениях. 24 сентября 1929 г. Эйнштейн прислал ответ, на который он иногда ссылался в последующие годы, после того как победа нацистов в Германии заставила его изменить свои пацифистские взгляды:

„Я был очень рад получить Ваше письмо, во-первых, потому что оно от Вас, а во-вторых, поскольку оно показывает, с какой величайшей серьезностью Вы рассматриваете тяжелые проблемы Европы. Я отвечаю Вам с некоторыми сомнениями, ибо отчетливо сознаю, что, когда речь заходит о делах людских, мои эмоции одерживают верх над моим интеллектом. Однако я беру на себя смелость обосновать мою позицию. Позвольте мне прежде всего сделать небольшую оговорку. Я отнюдь не отваживаюсь подобным образом читать проповедь какому-нибудь племени в африканской глубинке; ибо пациент умер бы задолго до того, как лечение могло бы принести ему какую-нибудь пользу. Но ситуация в Европе, несмотря на Муссолини, совершенно иная...“

В ноябре 1929 г. Эйнштейн и Адамар встретились в Париже и обсудили вопросы, по которым они столь серьезно расходились во мнениях. Адамар подготовил тогда заявление, с которым ознакомил Эйнштейна до публикации. Адамару удалось до некоторой степени сузить поле разногласий. Ссылаясь на заявления Эйнштейна, он признал, что тот опередил свое время, и заметил, что существуют вопросы, которые должны быть сформулированы еще до того, как настанет их время пролагать дорогу в будущее. С другой стороны, Адамар упорно придерживался своей точки зрения, согласно которой самая возможность для страны одержать победу без единого выстрела послужила бы расцвету деспотизма».

Адамар опубликовал статьи «Культура, которую не следует разрушать» [I.295] и «Физика и общая культура» [I.288] в газете «L'Œuvre», а также другие статьи по моральным и юридическим проблемам: «Об ответственности за войны: как определить, что такое агрессор?» [I.219], «Смертная казнь и уголовный кодекс» [I.276] и «Ответ на анкету о ревизии договоров» [I.306].

В Национальном архиве в Париже хранится следующее анонимное послание, связанное со статьей [I.219]:

В министерство внутренних дел
Париж, 7 марта 1929 г.
Конфиденциально.

Имею честь присовокупить к данному письму для информации копию отчета, исходящего из Службы префектуры полиции, о митинге Университетской лиги республиканцев и социалистов, на котором месье Адамар, профессор Коллеж де Франс, говорил об ответственности за войну.

Министру внутренних дел
Членам Государственного совета
Генеральному секретарю министра
Директору Сыскной полиции [IV.26].

Во время Маньчжурской войны между Китаем и Японией Адамар предложил послать в зону военных действий международные миротворческие силы под эгидой Лиги наций. Эта идея была с большим журналистским запалом зло высмеяна Клеманом Вотелем в номерах «Le Journal» за 17 и 20 ноября 1931 г. и 28 февраля 1933 г.:

«Господин Писака-Адамар — живое воплощение тех ужасно опасных пацифистов, которые охотно сражались бы за горами. Но почему, в конце концов, ему не сформировать самому легион солдат-миротворцев и не повести их самому в Маньчжурию, чтобы научить уму-разуму японцев и китайцев?» [17 ноября 1931 г.].

Ответ Адамара гласил:

«Идея отправить в Маньчжурию французские войска, возможно, весьма оригинальна. Но господин Клеман Вотель — ее единственный изобретатель. Я же говорил о международных войсках, составленных из контингентов — безусловно, добровольных, — представляемых теми странами, которые входят в Лигу наций и не являются заинтересованными сторонами в конфликте» [20 ноября 1931 г.].

Но Адамару не удалось убедить Вотеля, аргументы которого были полны сарказма:

«Все это фантастично. Прежде всего заметим, что страны, которые „не являются заинтересованными сторонами в конфликте“, должны делать одно: не дать вовлечь себя в конфликт. С точки зрения здравого смысла для этого не существует более мудрого рецепта, чем следующий: занимайтесь своим делом.

...Вообразите встречу отчаянных миротворцев Адамара с солдатами микадо. Первые кричат на всех языках, даже на эсперанто: „Да здравствует мир!“ Вторые кричат: „Банзай!“ О, профессор! При такой встрече Вы увидите поражение Ваших пацифистских героев... Я также советую Вам никогда не отправляться в Маньчжурию. Впрочем, думаю, Вы туда и не собираетесь» [20 ноября 1931 г.].

Заключительная реплика Вотеля в этих дебатах последовала в 1933 г.:

«Реальность такова: когда какая-нибудь страна, будь то Парагвай или Япония, решает начать войну, она начинает ее и ничто не может помешать ей сделать это. Возможно, эту ситуацию удастся изменить через три-четыре столетия, но в настоящее время она такова».

Начало 1930-х гг. было во Франции временем экономической и политической нестабильности, которая привела к поляризации крайне правых и крайне левых. После крупного скандала, возникшего в связи с тем, что известные политические фигуры оказались замешанными в финансовых махинациях, правые организовали 6 февраля 1934 г. массовую демонстрацию, вылившуюся в беспорядки и подавленную вооруженной полицией. Адамар писал Вольтерра: «Что касается нас, то мы, как Вы можете представить, очень опечалены тем, что сейчас происходит в Париже» [IV.44]. Правительство, возглавляемое радикалами[1], ушло в отставку. После беспорядков был создан Народный фронт, в который вошли социалисты, коммунисты, радикалы, а также другие группы левого толка. К Народному фронту присоединилась также Лига защиты прав человека, в которую входили Адамар, Ланжевен и другие известные люди. На общих выборах в апреле—мае 1936 г., последовавших после отставки правительства, Народный фронт победил с небольшим перевесом. Во время избирательной кампании Адамар был одним из двух президентов бюро Комитета левых в своем 14-м округе [IV.22].

§ 6.2. Три письма к Вольтерра

Отношения между Адамаром и Вольтерра всегда были прекрасными и с годами становились все теплее. Так, 10 июля 1928 г. Адамар писал:

Мой дорогой друг, если Вы считаете, что в Сен-Жерве для Вас слишком жарко, и захотите воспользоваться моим советом, то можете поехать в Сен-Никола-де-Верос. Я хочу

Вито Вольтерра

исправить одно упущение, которое допустил в разговоре с Вами: мы знаем там один прелестный дом, самый красивый в округе. Люди, которые живут в нем, поддерживают с нами

[1]Движение французских радикалов — умеренная форма французского социалистического движения и не имеет ничего общего с экстремизмом.

очень хорошие отношения, это светские дамы, которые сдают комнаты немногочисленным жильцам. Я напишу им, и, если Вы захотите отправиться туда, они окажут Вам гостеприимство и устроят все для Вас наилучшим образом, чему я буду очень рад. Разумеется, я никоим образом не собираюсь извещать их о Вашем приезде без Вашего согласия. Адрес следующий: мадам Оссан, План-Шан, Сен-Никола-де-Верос. Кроме того, если Вы захотите просто съездить туда на прогулку, то можете зайти к ним и выпить чаю у них на лужайке.

Мадам Адамар не сможет приехать повидать мадам Вольтерра, как ей бы хотелось, и она поручила мне передать ее наилучшие пожелания и искренние поздравления со счастливым событием, о котором Вы мне сообщили.

Прошу Вас, мой дорогой друг, принять мои сердечные приветствия и передать мое глубокое уважение мадам Вольтерра.

Ж. Адамар [IV.44].

Вито Вольтерра на обеде в гостинице «Лютеция» (Париж, 24 июня 1937 г.) в честь Монтеля. Слева от Вольтерра Монтель, справа Лере.

Как вспоминает Трикоми, Адамар часто совершал поездки в Италию «вплоть до тех лет, когда долгая политическая болезнь не покрыла лицо страны маской, выражение которой было не то трагическим, не то комическим — во всяком случае не было её истинным обликом» [II.5, с. 23]. Когда Вольтерра в 1931 г. отказался принести клятву верности режиму Муссолини, он был изгнан из Римского университета и на следующий год исключен из числа итальянских академиков. Распространение фашизма вынудило его проводить как можно меньше времени в Италии. Вольтерра читал лекции в Сорбонне в Париже, а также в Чехословакии, Румынии, Испании, Бельгии и Швейцарии. Как показывает следующее письмо от 8 ноября 1933 г., Адамар пытался помочь ему в получении должности:

Мой дорогой друг!

В ответ на письмо, которое я написал в Египет, пытаясь подсказать им мысль пригласить Вас, я получил уведомление, что приглашение уже послано несколько месяцев назад профессору Чепмену. Я очень огорчен, тем более что оказия была единственная в своем роде: начиная со следующего года Египетский университет планирует вместо приглашенных профессоров практиковать назначения постоянных.

Должно быть, Вы разделяете нашу боль в связи со смертью Пенлеве, нашего старого друга и одного из лучших людей нашего времени.

Наилучшие пожелания от моей жены и мое самое глубокое уважение мадам Вольтерра, а также наилучшие пожелания Вам, мой дорогой друг.

Ж. Адамар [IV.44].

Последнее письмо супругов Адамар к Вольтерра, хранящееся в библиотеке Академии деи Линчеи, датировано 1938 г.:

Дорогие друзья!

Мы много думаем о вас, но не имеем возможности сказать вам об этом. Мы думаем о вас на пороге нового года точно так же, как мы не переставали думать о вас весь текущий год, который заканчивается, полный страданий и боли. Заверяем вас в нашей искренней дружбе.

Луиза Адамар, Жак Адамар [IV.44].

Вольтерра скончался 11 октября 1940 г. в Риме.

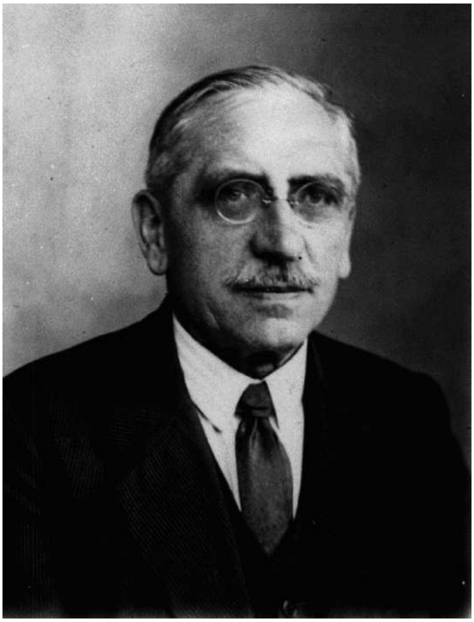
§ 6.3. Адамар и Лебег

В 1936 г. старая дружба Адамара с Лебегом подверглась испытанию. Анри Лебег был одним из основателей современной теории интегрирования и теории функций действительного переменного. Особую известность он приобрел, когда предложил новое понятие интеграла в 1902 г. Интеграл Лебега, а также введенные им понятия меры множества и измеримой функции расширили границы математического анализа.

Лебег был на десять лет моложе Адамара. И Адамар, и Лебег учились в лицее Людовика Великого, они были «архикубами», т. е. выпускниками Нормальной школы, оба стали профессорами в Коллеж де Франс и членами Академии наук. Но Лебег не разделял политических взглядов Адамара и его обеспокоенности угрозой нацизма. Их споры приняли настолько ожесточенный характер, что Лебег перестал бывать у супругов Адамар, чтобы избежать серьезной ссоры. 1 декабря 1936 г. Лебег написал Адамару следующее письмо:

Мой дорогой друг!

Я мог бы ответить Вам немедленно, еще вчера: «Благодарю Вас, но я не приду к Вам на обед», но счел за лучшее объясниться, не надеясь, что Вы поймете меня и не сочтете, что я потерял рассудок.



Анри Лебег (1875—1941)

Конечно, Вы на протяжении долгого времени чувствовали, что я далеко не согласен с Вами по политическим вопросам. Наши разногласия начались, разумеется, не сегодня и не вчера. Но ныне политические вопросы задевают за живое каждого, и Вы сами всё время думаете о них.

Поэтому если бы я пришел к Вам, то Вы оказались бы в весьма затруднительном положении: Вы изо всех сил старались бы не говорить о последних событиях, и тем не менее каждое сказанное слово заставляло бы Вас возвращаться к ним, и Вам приходилось бы постоянно сдерживаться, отчего наши разногласия ощущались бы более болезненно и заставляли бы нас лихорадочно ожидать, когда же пробьет час расставания.

Это — в лучшем случае. Но скорее всего нам бы не удалось избежать опасной темы в разговоре.

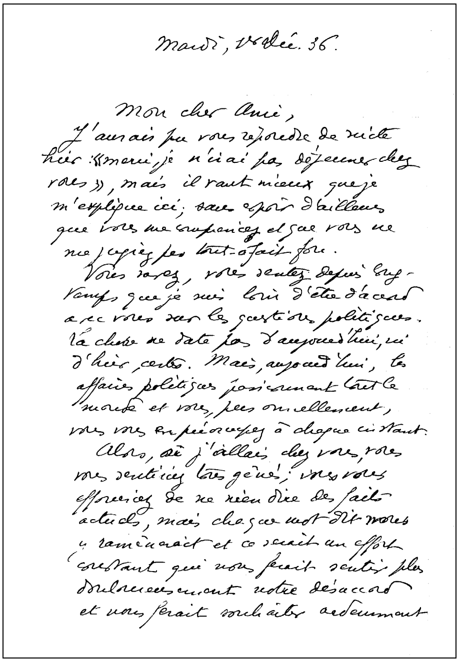
Ведь так? Вы знаете, что я бываю резок и вспыльчив. Что, если бы я обидел кого-нибудь из вас в пылу спора? О! Я бы этого не желал, и это было бы вопреки моим чувствам, но такое вполне могло бы случиться. Возможно, Вы уверены в себе, а я совсем не уверен в себе. Поэтому, может быть, будет лучше, если я не приду.

Иногда наступают времена, когда лучше избегать споров и дискуссий; сейчас именно такое печальное время. Пусть оно пройдет, и, когда настанут лучшие времена, мы сможем лучше понять, что было правильно и благородно, с позиций, которые мы в данный момент не можем постичь, и наша дружба, не омрачённая спорами, снова окажется столь же чистой и цельной, как сейчас. Ведь она не переставала быть такой ни на один миг.

Передайте мадам Адамар и Жаклин, что я глупец, но глупец, который очень их любит.

Ваш А. Лебег [IV.16].

Жаклин Адамар навестила Лебега зимой 1940—1941 гг., когда Париж был оккупирован немцами. Она писала: «Мы пали друг другу в объятья. Он сказал мне, что понял свою ошибку и что его дружеские чувства к нашей семье ничуть



Mardi, 1er déc. 36.

Mon cher Ami,
J'aurais pu vous répondre de suite hier : « merci, je n'irai pas déjeuner chez vous », mais il vaut mieux que je m'explique ici ; sans espoir d'ailleurs que vous me compreniez et que vous ne me jugiez pas tout-à-fait fou.
Vous savez, vous sentez depuis longtemps que je suis loin d'être d'accord avec vous sur les questions politiques. La chose ne date pas d'aujourd'hui, ni d'hier, certes. Mais, aujourd'hui, les affaires politiques passionnent tout le monde et vous, personnellement, vous vous en préoccupez à chaque instant.
Alors, si j'allais chez vous, vous vous sentiriez très gêné ; vous vous efforceriez de ne rien dire des faits actuels, mais chaque mot dit nous y ramènerait et ce serait un effort constant qui nous ferait sentir plus douloureusement notre désaccord et nous ferait souhaiter ardemment

Первая страница письма от Лебега

не ослабели и даже усилились. Позднее я имела удовольствие повторить эти слова моему отцу, поскольку сам он так и не смог больше поговорить с Лебегом, скончавшимся во время оккупации» [IV.1, с. III(32)].

§ 6.4. Первые поездки Адамара в СССР

Мы уже упоминали нескольких русских математиков, которые общались с Адамаром. Он был избран членом-корреспондентом Российской академии наук в 1922 г. и иностранным членом Академии наук СССР в 1929 г. То был период формирования советской математической школы, когда к более старшим по возрасту профессорам Д. Е. Егорову, Н. М. Крылову, С. Н. Бернштейну, Н. Н. Лузину и другим присоединился ряд новых блестящих имен. Ляпунова и Стеклова уже не было в живых, когда Адамар в 1930 г. впервые приехал в СССР. Узнав о кончине Стеклова, Адамар написал президенту Академии наук СССР А. П. Карпинскому:

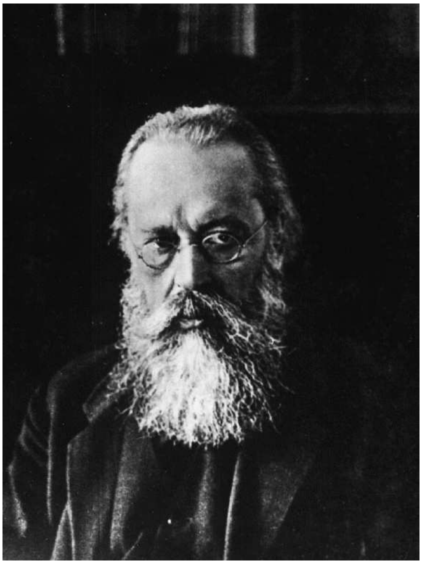
3 ноября 1926 г.

Господин президент!

Поскольку я имел честь быть коротко знакомым с таким великим ученым и человеком, выдающимся во всех отношениях, каким был Владимир Стеклов, я вдвойне скорблю об утрате, которую понесла русская и, как Вы справедливо отметили, мировая наука.

Соблаговолите принять и передать Академии мои глубокие соболезнования и поверить в мои самые преданные чувства.

Ж. Адамар [IV.40].



Владимир Андреевич Стеклов
(1863—1926)

Адамар трижды приезжал в нашу страну. Впервые это произошло в 1930 г., когда он был участником Первого всесоюзного съезда математиков в Харькове. В состав французской делегации входили также Монтель, Данжуа, Мандельбройт и Э. Картан. 26 июля 1930 г. Адамар председательствовал на торжественном заседании съезда, посвященном 50-летию Харьковского математического общества, членом которого он состоял с 1903 г. Доклад Адамара «Уравнения в частных производных и теория функций действительного переменного» [I.336] состоялся на пленарном заседании 27 июня. На следующий день он вёл утреннее пленарное заседание, а на вечернем читал доклад «Принцип Гюйгенса и теория Гюгонио» [I.337].

После съезда Адамар посетил Киев и Ленинград. В Киеве его принимал Н. М. Крылов, который в 1907—1908 гг. слушал лекции Адамара в Париже[1], а в 1926—1927 гг. участвовал в работе семинара Адамара. Н. М. Крылов широко известен своими работами по теории приближений, математической физике, вариационному исчислению и нелинейной механике. Вместе со своим учеником Н. Н. Боголюбовым он разработал мощный асимптотический метод в теории нелинейных колебаний.

Единственная деталь о визите Адамара в Ленинград в 1930 г., известная из его отчета [IV.22] — это его посещение Пулковской обсерватории, которая произвела на него сильное впечатление.

Следующую поездку в Советский Союз Адамар совершил в мае 1934 г. в составе делегации из девяти французских ученых по случаю недели французской науки в СССР. Делегация посетила Москву, Ленинград и Харьков. Адамара при-

[1]Составленные Н. М. Крыловым конспекты этих лекций хранятся в Архиве Российской академии наук.

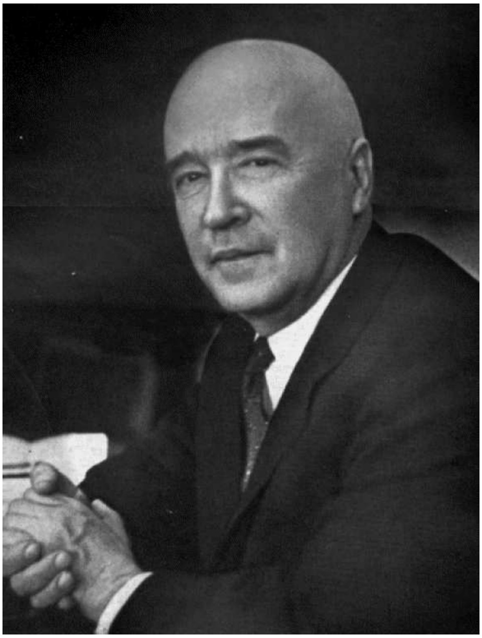
В музее украинского поэта Т. Г. Шевченко, Киев, 1930. Сидят (слева направо): Ш. Мандельбройт, А. Данжуа, Н. М. Крылов, Ж. Адамар, П. Монтель.

нимали с большим почетом: в то время, по единодушному мнению, он считался математиком номер один.

А вот какую историю нам рассказал Лоран Шварц, который услышал ее от И. Г. Петровского: «На первой лекции, прочитанной Адамаром в Московском университете, Петровский представил его по-французски, говоря с сильным акцентом. Адамар ответил: „Я очень признателен месье Петровскому за то, что он представил меня, и уверен, что он выбрал самые лестные выражения. Жаль, что я, само собой разумеется, не смог ничего понять, так как месье Петровский говорил по-русски“». Рассказывая эту историю Шварцу, Петровский завершил свой рассказ словами: «Я решил никогда больше не представлять никого по-французски».

Разумеется, Адамару показали достопримечательности Москвы. В то время прокладывались первые линии московского метрополитена. В строительстве принимали участие тысячи рабочих. Улицы были перекопаны, и повсюду возвышались огромные груды земли.

Как вспоминает Соломон Григорьевич Михлин, которому выпало быть одним из гидов Адамара во время этой поездки, Адамар, перепрыгивая через траншеи, насмешливо бормотал: «Un peu trop de métro [многовато метро]». Встреча с Адамаром стала памятным событием для молодого Михлина, который за пять лет



Иван Георгиевич Петровский (1901—1973) получил результаты в общей теории дифференциальных уравнений, алгебраической геометрии и теории вероятностей, которые ныне признаны классическими. С 1951 по 1973 гг. был ректором Московского университета.

до того окончил Ленинградский университет. Первым математическим результатом Михлина стало обобщение формулы Коши—Адамара для радиуса сходимости на случай двойных степенных рядов [III.278].

В Ленинграде Адамара тепло принял А. Н. Крылов (1863—1945), специалист по прикладной математике и кораблестроитель, с которым Адамар встречался раньше и состоял в переписке. В Санкт-Петербургском архиве Российской академии наук сохранились четыре коротких письма Адамара А. Н. Крылову. Вот одно из них:

25 декабря 1926 г.

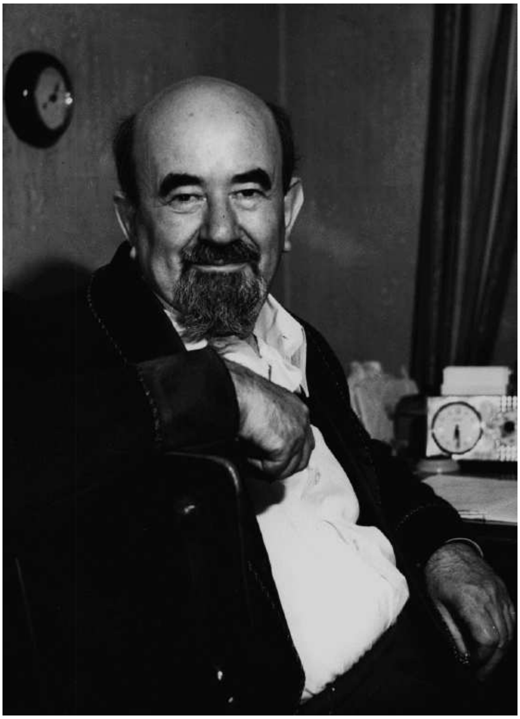
Милостивый государь!

Могу ли я попросить Вас просмотреть статью господина Милна в «American Monthly» и сообщить мне Ваше мнение о ней? Содержит ли она развитие метода Адамса, и стоит ли ее изучать? Я прошу Вас об этом одолжении в надежде, что моя просьба не обеспокоит Вас серьезно, так как Вы превосходно владеете предметом.

Заранее благодарен и уверяю Вас в моих наилучших к Вам чувствах.

Ж. Адамар[1] [IV.41].

[1] Методом Адамса принято называть конечно-разностный метод решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Адамар включил «замечательное изложение Крыловым метода Адамса» во второй части своего «Курса анализа» (1930).

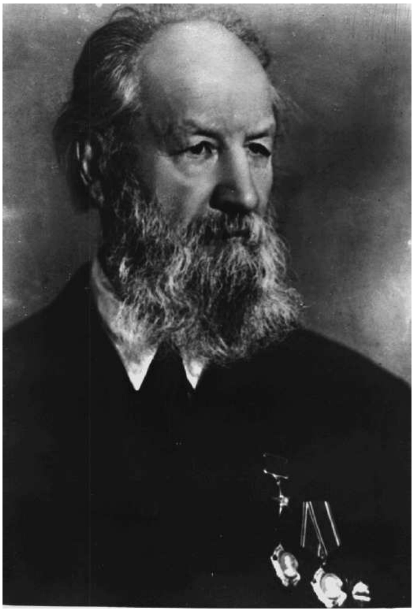


С. Г. Михлин (1908—1990) внес вклад в численные методы решения дифференциальных уравнений, теорию интегральных уравнений и теорию упругости. В 1936 г. он опубликовал в «Математическом сборнике» основополагающую статью, в которой развил теорию многомерных сингулярных интегральных операторов в пространстве L^2. Именно Михлин ввел понятие символа такого оператора. Синтез теорий сингулярных интегралов и общих линейных дифференциальных операторов привел в середине 1960-х гг. к теории псевдодифференциальных операторов, имеющей многочисленные приложения в анализе и математической физике.

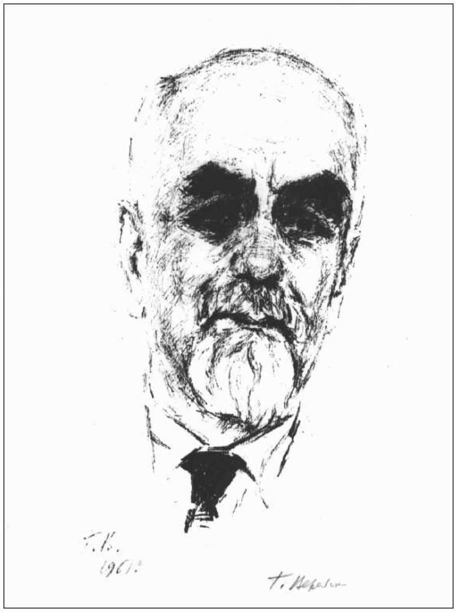
А. Н. Крылов внес существенный вклад в теорию гироскопов, теорию остойчивости судов, баллистику и строительную механику. С 1927 по 1934 г. он был директором Физико-математического института Академии наук. На приеме в честь Адамара А. Н. Крылов сказал:

«Невелика заслуга оказаться старшим по возрасту среди моих коллег — математиков Ленинграда, которые возложили на меня честь приветствовать прославленного мэтра, давшего блестящие вспышки в ярком пламени французской науки. Нет необходимости упоминать о личном вкладе месье Адамара — он стал классическим...» [IV.42].

Адамар встретился с учеными Ленинградского университета и посетил недавно организованный при университете Научно-исследовательский институт математики и механики. Его первым директором был В. И. Смирнов, выдающийся



Алексей Николаевич Крылов
(1863—1945)

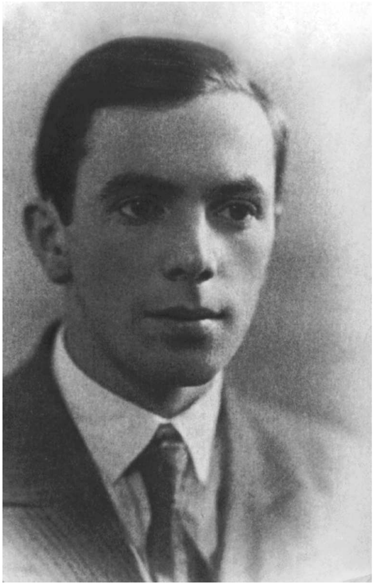


Владимир Иванович Смирнов
(1887—1974) (литография Г. Верейского)

специалист в области теории функций и дифференциальных уравнений в частных производных и автор знаменитого курса высшей математики в пяти томах. Смирнов был учеником Ляпунова и стал профессором в 1915 г. Он отличался редким благородством и, несмотря на то, что занимал весьма высокое положение в советской академической иерархии, ни разу не скомпрометировал себя и не нанес никому вреда даже в самые трудные годы идеологического давления. Наоборот, он использовал все свое влияние, чтобы помочь многим людям.

На встрече в Ленинградском университете присутствовал и 22-летний Л. В. Канторович, будущий академик и лауреат премии по экономике шведского банка в память Альфреда Нобеля (иногда ошибочно называемой Нобелевской премией по экономике), прославившийся работами в различных областях математики и в математической экономике. Поступив в университет в возрасте 14 лет, он в 20 лет стал профессором. Незадолго до этого он выполнил работу о построении конформного отображения круга на область, близкую к нему. Л. В. Канторович вспоминает:

«Во время визита Жака Адамара в Ленинград, кажется, в 1933 г., на встрече с ним в кабинете ректора университета В. И. Смирнов сделал краткий доклад о нескольких достижениях ленинградских математиков, в том числе рассказал и о моей работе о приближенном конформном отображении. Работа заинтересовала Адамара, и он, шутя, высказал опасение, как бы Канторовича не постигла



Леонид Витальевич Канторович
(1912—1986) в 1938 г.

Сергей Львович Соболев
(1908—1989) в 1979 г.

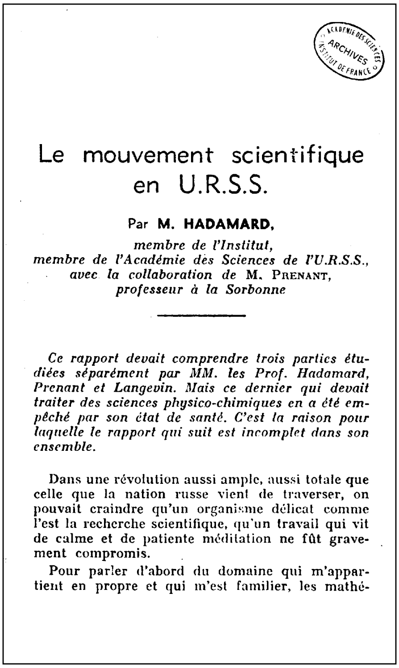
судьба Галуа[1]. В ответ кто-то сказал, что у меня не такой агрессивный характер» [III.208, с. 192].

В Ленинграде Адамар встретился с С. Л. Соболевым, тогда членом-корреспондентом Академии наук СССР. В июле 1985 г. Соболев рассказал нам:

«Впервые я увидел Адамара и слушал его доклад на Харьковском съезде. Помню, что он присутствовал и на моём докладе о новом подходе к решению волнового уравнения с переменными коэффициентами.

Однако поговорить с ним мне удалось только в Ленинграде, в Сейсмологическом институте, где я числился старшим специалистом. Я, тогда ещё совсем мальчишка, был очень доволен, что вижу знаменитого человека. Адамар — среднего роста, с бородкой и короткими усами, живой и подвижный, показался мне весёлым человеком. С ним было легко. Разговор шёл на французском, о связи моего метода и метода его ученика М. Матиссона, также занимавшегося задачей Коши. Адамар воспринял мою идею ещё на съезде и интересовался, не вытекает ли из моей работы результат, полученный Матиссоном. Помню, что он попросил прислать ему оттиск подробной работы на ту же тему, что я, конечно, сделал, когда она появилась в „Математическом сборнике“. Успех дальнейших исследований гиперболических уравнений с переменными коэффициентами многим обязан Адамару. Применение им конечной части расходящегося интеграла — это просто гениальное провидение. Я осознал его смысл намного

[1] Э. Галуа был убит на дуэли в возрасте двадцати лет.



Le mouvement scientifique en U.R.S.S.

Par **M. HADAMARD,**
membre de l'Institut,
membre de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S.,
avec la collaboration de M. PRENANT,
professeur à la Sorbonne

Ce rapport devait comprendre trois parties étudiées séparément par MM. les Prof. Hadamard, Prenant et Langevin. Mais ce dernier qui devait traiter des sciences physico-chimiques en a été empêché par son état de santé. C'est la raison pour laquelle le rapport qui suit est incomplet dans son ensemble.

Dans une révolution aussi ample, aussi totale que celle que la nation russe vient de traverser, on pouvait craindre qu'un organisme délicat comme l'est la recherche scientifique, qu'un travail qui vit de calme et de patiente méditation ne fût gravement compromis.

Pour parler d'abord du domaine qui m'appartient en propre et qui m'est familier, les mathé-

Отчет Адамара о поездке в СССР в 1934 г. начинается словами: «После крупномасштабной и тотальной революции, которую пережил русский народ, можно опасаться, что столь деликатный организм, как наука, т. е. работа, требующая спокойствия и терпеливой сосредоточенности, окажется в серьезной опасности» [IV.22].

позже, когда пытался понять, какая обобщенная функция дает решение задачи Коши».

Напомним, что именно С. Л. Соболев в 1935 г. дал строгое определение обобщенной функции [III.369], [III.370] (обзор см. в книге Лютцена [III.249, с. 8]. Первоначально Соболев называл их идеальными функциями, но вскоре отказался от этого термина, вняв предостережению одного коллеги, что его могут обвинить в идеализме. Соболев ввёл функциональные пространства, впоследствии названные его именем, доказал теоремы вложения таких пространств, широко используемые в современной теории уравнений в частных производных. В конце своей жизни он много занимался вычислительной математикой, в частности теорией кубатурных формул.

§ 6.5. Новая квартира. Юбилей

Старый дом на улице Жана Долана (с 1925 г. переименованной в улицу Гумбольдта), некогда шумный и веселый, напоминал супругам Адамар об их потерях и стал для них чересчур большим. К 1935 г. по инициативе Адамара неподалеку от университетского городка на месте старых парижских фортификаций были построены дома для профессоров. Супруги Адамар решили переехать в новую квартиру по адресу улица Эмиля Фаге, 12. Вспоминает Жаклин Адамар:

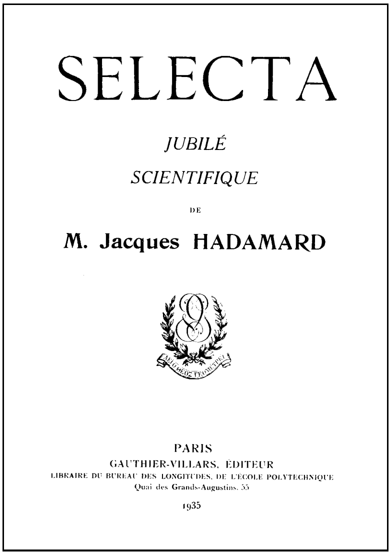
«Переезд потребовал больших усилий, так как дом на улице Жана Долана был трехэтажным и в комнатах было много шкафов, набитых скопившимися

Дом на улице Фаге, 12, где семья Адамаров жила с 1935 по 1940 и с 1945 по 1953 гг.

со временем вещами и коробками с наклейками вроде следующей, которую я видела в доме моей бабушки: „Обрывки веревок, ни на что более не годные“ (именно так!). Самой трудной задачей было заставить моего отца рассортировать его бумаги; эта работа была противна его существу» [IV.1, с. III(29—30)].

В июне 1935 г. в Женеве была организована серия международных математических лекций под председательством Адамара. Его собственная лекция была посвящена корректным и некорректным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными, в частности для гиперболических уравнений, — теме, занимавшей его воображение более трех десятилетий.

8 декабря 1935 г. Адамару исполнилось семьдесят лет. К этому дню его коллеги и ученики подготовили том «Избранных трудов», в который вошли несколько



SELECTA

JUBILÉ

SCIENTIFIQUE

DE

M. Jacques HADAMARD

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1935

Титульный лист «Избранных трудов» Адамара

его статей и библиография, охватившая 280 его работ[1]. Книга начиналась с посвящения:

«Знаменитому ученому, открывшему новые верные пути математических исследований, чей неустанный труд нашёл применение во многих областях математики.

Выдающемуся мастеру, чья неистощимая преданность науке поощряла и поддерживала столь многие исследования.

Человеку необычайной доброты, которому ни одна человеческая забота не была чужда.

От его почитателей, друзей, учеников — собрание некоторых его работ, свидетельство его изумительно плодотворной деятельности».

Чествование Адамара состоялись 7 января 1936 г. в актовом зале Коллеж де Франс. Выступали друзья, коллеги, официальные лица. Среди них были Лебег, Фреше, Пикар, Вессио, Бедье. В конце церемонии министр национального образования М. Рустан сообщил о присвоении Адамару звания командора ордена Почетного легиона[2].

Заканчивая ответное слово, юбиляр процитировал известного микробиолога Эмиля Дюкло, директора Пастеровского института. Когда на одном диспуте

[1] В 1968 г., через 5 лет после кончины Жака Адамара, было опубликовано четырехтомное собрание трудов учёного, в которое вошли его основные математические работы. К сожалению, все опечатки оригинальных публикаций воспроизведены в этом издании, к тому же отсутствуют примечания редактора.

[2] Французский орден, учрежденный Наполеоном Бонапартом в 1802 г. и присуждаемый за исключительные военные или гражданские заслуги, имеет 5 степеней. Командор — третья степень, первые две (кавалер и офицер) были присуждены Адамару 6 декабря 1910 г. и 1 октября 1923 г. Уже после Второй мировой войны, 7 февраля 1948 г., он получил Большой офицерский крест и к 90-летию — высшую награду, Большой крест Почетного легиона.

Крест кавалера Почетного легиона

ему была брошена презрительная реплика: «Через двадцать лет ваш трактат по микробиологии может стать всего лишь старой бумагой», — Дюкло ответил: «Я не только знаю, но и надеюсь на это. Любая научная книга — как приют у дороги. В него стекаются запоздавшие путники, отдыхают новички, после чего им вручают ранец — и в путь! Превзойдите нас, вы, молодые, ибо ваши ноги молоды, но ради Бога двигайтесь, потому что если вы остановитесь и позволите нам медлить, то поистине ни вы, ни мы — никто не исполнит свой долг» [II.27, с. 57].

Отчет о юбилейной церемонии был опубликован в 1937 г. в виде небольшой книжки [II.27], содержащей многочисленные поздравления, подписанные известнейшими математиками и физиками мира. Примечательно, что из Германии 1936 года приветствий не было.

Статьи, посвященные Адамару по случаю его юбилея, были собраны в двух томах «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées» за 1937 и 1938 гг.

§ 6.6. Поездка в Китай

Адамар был председателем Международного комитета по математическому образованию во время проведения Международного математического конгресса в Осло в июле 1936 г., но не присутствовал на конгрессе, так как в то время находился в Китае. Он был приглашен в Университет Циньхуа в Пекине Комиссией по делам франко-китайского сотрудничества для чтения лекций во втором семестре 1935—36 учебного года. Среди лекторов, приглашенных в Китай в 1920-х и 1930-х гг., были Б. Рассел, В. Бляшке, Э. Шпернер, У. Ф. Осгуд и Н. Винер.

Это приглашение стало для Адамара веской причиной совершить дальнюю поездку на Восток вместе с Луизой. Путешествовать супруги Адамар решили главным образом по воздуху. Жаклин Адамар вспоминает:

«Мы с сестрой немного беспокоились: матери было шестьдесят семь лет, а отцу семьдесят. Мы обратились к нашему кузену Роберу Дебре и попросили его осмотреть родителей и решить, не могут ли перелеты оказаться опасными для них. После осмотра он позвонил мне: „Я бы не препятствовал этой поездке. Они оба находятся в отличной форме“. Перед отъездом родители попросили Ланжевена, который уже побывал в Китае, рассказать им о правилах китайского этикета. „Мы можем делать что угодно, это неважно, — сказал Ланжевен, — все равно нам не удастся соответствовать уровню китайской вежливости“» [IV.1, с. III(30)].

Супруги Адамар отправились в Китай ранней весной 1936 г. По пути в Пекин они посетили Индонезию, Индокитай и Японию. По рассказам Монтеля, Адамар воспользовался остановкой на Цейлоне, чтобы отредактировать несколько страниц своих «Лекций по геометрии» [II.5, с. 23].

Семья Адамаров в Китае

В письме от 4 октября 1935 г. Адамар сообщал Винеру, который в 1935—1936 учебном году читал лекции в Университете Циньхуа:

Дорогой профессор Винер!

Благодарю Вас за Ваше любезное письмо. Мы с супругой будем счастливы встретиться с Вами и познакомиться с мадам Винер.

Разумеется, мне очень приятно узнать о полной безопасности жизни в Пекине, и я чрезвычайно признателен профессору Сюну и Вам за то, что вы сообщили об этом. Когда я виделся с господином Яном, я читал в газетах о неприятных происшествиях с путешественниками в Китае — по-видимому, все истории такого рода преувеличены.

Ваше письмо вселило в меня уверенность в полной безопасности, и я завершаю последние приготовления к отъезду. Будем надеяться, что никто из нас не будет принимать близко к сердцу общую тревогу, явно ощущаемую во всем мире, которая стала слишком реальной.

Будьте добры передать наилучшие пожелания профессору Сюну. Поверьте, я с нетерпением жду встречи с вами обоими.

Искренне Ваш

Ж. Адамар [IV.31].

Адамары прибыли в Пекин в то время, когда университет, основанный в 1911 г., «...переживал период реорганизации: из обычного учреждения, занимавшегося подготовкой вспомогательного научного персонала для Соединённых Штатов (в качестве компенсации за Боксерское восстание), он превращался в самостоятельное учебное заведение» [III.422, с. 176]. Преподавание велось как на китайском, так и на английском языке; с последним у Адамара не было затруднений.

Воспоминаний о своем пребывании в Китае Адамар не оставил, поэтому мы воспользуемся отрывками из книги Винера «Я — математик»:

«В начале второго семестра в Китай приехал мой друг профессор Адамар из Парижа. Сначала он устроился недалеко от нас в Старом Южном Компаунде [поселении для европейцев], но потом переехал в город и поселился около или даже в самом дипломатическом квартале. В этом оживлённом районе Адамар и его жена чувствовали себя гораздо лучше, чем в нашем посёлке. Адамару в то время было уже немало лет, и его пугала лишённая комфорта жизнь в далёком университетском городке. Встреча с ним доставила мне большое удовольствие. У него был неистощимый запас воспоминаний о добрых старых временах французской математики, а у его жены — столь же неистощимый запас анекдотов из жизни знаменитых французских учёных (ребёнком она знала Пастера!)» [III.422, с. 189].

Среди студентов Адамара был Хуа Локен, который в то время являлся сотрудником математического факультета Университета Циньхуа (летом того же года он отправился в Кембриджский университет) [III.354], и У-Синмо, с которым Адамар впоследствии встречался в Париже.

Винер пишет, что он, его жена и китайский коллега Ли часто навещали супругов Адамар: «Во время прогулок мы нарочно проходили по запутанным грязным улочкам так называемого китайского города, чтобы порыться в антикварных лавках. Нам нередко попадались древние портреты с изображением преисполненных чувства собственного достоинства мужчин и женщин, сидевших в застывших позах с руками, сложенными на коленях; все они были одеты в роскошные шёлковые платья, служившие мужчинам официальной одеждой, гражданской или военной. При всей помпезной напряженности поз лица на этих портретах отличались замечательной утончённостью, глубоким психологизмом и выразительностью. Однажды мы нашли древний портрет, настолько напоминающий профессора Адамара с его редкой, висящей отдельными прядями бородкой, крючковатым носом и нервными точёными чертами лица, что он

мог бы служить ему удостоверением личности; по этому портрету Адамара узнали бы среди множества людей. Правда, глаза были чуть-чуть раскосые и цвет лица немного желтоватый, но это не нарушало общего впечатления. Мы купили портрет и подарили его тому, кто был на нём столь удачно изображён. Адамар вполне оценил наш подарок, но боюсь, что его жена отнеслась к нему без энтузиазма» [III.422, с. 190].

Винер упоминает также о том, что его рикша как-то раз удивил его вопросом: «Правда ли, что А-та-ма сянь-шен [господин Адамар] действительно такой великий математик, как о нем пишут газеты?» [III.422, с. 193].


23ème Année Nº 16 18 Avril 1936

北京政聞報

LA POLITIQUE DE PÉKIN

REVUE HEBDOMADAIRE ILLUSTRÉE

M. le professeur et madame Hadamard.

Фотография Жака и Луизы Адамар на титульном листе пекинского еженедельника «Политика Пекина». Информация о визите Адамара появилась также в разделе новостей журнала «Наука» (20:5 (1936), с. 416—417).

В Пекине Адамар рассказал Винеру и «забавный случай из времён своей юности», о котором мы уже упоминали в § 2.5, когда он пришёл к Эрмиту в дни процесса Дрейфуса. Впрочем, у Винера история передана не совсем точно. Дрейфуса он произвёл в полковники, а Адамара, защитившего диссертацию за два года до обвинения Дрейфуса, называет юношей, готовившимся к экзаменам перед защитой.

Лекции Адамара были посвящены теории дифференциальных уравнений в частных производных и легли в основу его последней книги. «Мой батюшка был в восторге от слушателей», — писала Жаклин Адамар [IV.1, с. III(31)]. В июне Адамар представил свою статью по гиперболическим дифференциальным уравнениям в недавно созданный «Журнад Китайского математического общества» [I.342]. После четырёх месяцев пребывания в Китае семья Адамаров покинула Пекин и вернулась домой поездом по Транссибирской железной дороге, посетив по пути Москву [IV.22].

В августе 1936 г. правительство Народного фронта выпустило постановление, которое устанавливало для профессоров возраст выхода на пенсию в семьдесят лет. Хотя Адамар еще был полон энергии, ему пришлось оставить работу в Коллеж де Франс и Политехнической школе. 1 октября 1937 г. ему была назначена пенсия после «пятидесяти двух лет, одиннадцати месяцев и двадцати шести дней службы» [IV.29].

§ 6.7. Перед бурей

В 1930-е годы обстановка в мире накалялась, угроза войны в Европе неумолимо возрастала. Режим Муссолини стал более агрессивным, в 1935 г. Италия вторглась в Абиссинию, в 1936 г. в Испании началась гражданская война. Глубокое беспокойство вызывали зловещие действия нацистской Германии: ремилитаризация Рейнланда в 1936 г., нацистский путч в Австрии в 1938 г. и последующая аннексия Австрии, полная милитаризация всей Германии.

Когда многие еврейские ученые были вынуждены бежать из Германии, Адамар делал все, что было в его силах, чтобы подыскать для них работу во Франции и других странах. Винер, бывший членом Комитета по оказанию помощи немецким ученым в изгнании, пытался привлечь филантропов, чтобы помочь ученым найти работу в Америке. В 1935 г. Винер включил в одну из своих статей [III.423, с. 928] следующее письмо от Адамара, чтобы убедить американских читателей в том, что возможности Франции оказания помощи эмигрантам исчерпаны:

Уважаемый профессор Винер!

Задача оказания помощи интеллигентам, эмигрировавшим из Германии, стала для Франции весьма затруднительной, ибо, как Вам известно, к нам прибыло очень много беженцев.

Наша страна мала по сравнению с Вашей, и число университетов у нас ограничено. В настоящее время число талантливых молодых французских ученых велико, и сделать карьеру в научном мире им весьма трудно. Поэтому ни один иммигрант не получил ни одного поста в нашей государственной системе образования, и мы не можем даже думать о подобных назначениях.

В течение примерно одного года мы могли оказывать финансовую поддержку тем, кто уже находился на нашей территории. Однако эта поддержка сейчас прекратилась, так как прошлым летом фонды были исчерпаны.

К счастью, по крайней мере если говорить о математиках, практически все, кто прибыл во Францию, нашли или, я надеюсь, вскоре найдут работу за границей. Сожалею, что они не будут работать в моей стране. Некоторые из них уже уехали в Америку — по моему мнению, это лучше для Вас и хуже для нас. Будет очень важно для Вашей страны и всей цивилизации, если Вы добьетесь успеха в этом направлении. Мы не можем сделать ничего больше, так как в нашей стране сейчас очень много разных иммигрантов, не только учёных.

С другой стороны, я только что написал в Женеву доктору Котшнигу, который сообщит Вам, если Вы ещё не знаете, что было сделано со стороны Верховного комиссара, назначенного Лигой наций.

Прошу Вас принять мои искренние пожелания полного успеха.

Ваш Ж. Адамар

Ту же проблему Адамар затрагивает и в следующем письме от 27 января 1935 г.:

Уважаемый профессор Винер!

Что касается Франции, ситуация немного лучше, чем я обрисовал в моем предыдущем письме. Я только что услышал, что вместо пятидесяти восьми немецких ученых, которые получили поддержку в прошлом году, мы смогли помочь тридцати. Но существует опасение, что и эта последняя поддержка вскоре должна будет прекратиться.

Разумеется, я хотел сообщить Вам точную информацию, и поэтому пишу Вам снова.

Примите мои заверения в глубоком уважении.

Искренне Ваш

Адамар

В качестве члена Комитета защиты детей немецких евреев Адамар пытался организовать прием еврейских детей из Германии, чьи родители были арестованы. В письме к Эйнштейну от 6 июля 1933 г. он сообщает:

Дорогой друг!

В настоящий момент мы пытаемся организовать здесь прием еврейских детей из Германии, чьи родители хотели бы, чтобы они выбрались из ужасных условий жизни, создавшихся в Германии. Этот проект представляется мне очень важным, и я активно участвую в нем: ведь вопрос заключается не только в том, чтобы создать для детей хорошие материальные условия (это подразумевается само собой), но также и в моральной поддержке, чтобы они быстрее смогли адаптироваться к жизни в свободных странах.

Из всех действий по оказанию помощи иммигрантам это кажется мне заслуживающим наибольшего внимания [III.120, с. 123].

В апреле 1938 г. пало правительство Народного фронта, и центристская коалиция сформировала новый кабинет во главе с премьер-министром радикалом Эдуардом Даладье. 29 сентября 1938 г. Даладье подписал мюнхенское соглашение вместе с Гитлером, Муссолини и Чемберленом. Это было предательством по отношению к Чехословакии, надёжному союзнику Франции. После этого Адамар обратился к чехословацким математикам со следующим письмом:

Дорогие друзья!

В эти скорбные дни необходимо сказать, как вы нам близки. По крайней мере не скорбите; вы можете гордиться тем, что не уронили своей чести. Позиция вашего президента, достоинство, которым он ни на минуту не поступился, вызвали всеобщее восхищение и войдут в историю. Нужно надеяться, что справедливость восторжествует. Через головы случайных правительств, предавших вас, предавших нас, мы протягиваем вам руку.

Ж. Адамар, Л. Адамар [IV.22].

Это письмо без даты, но на конверте стоит штемпель: 7 октября 1938 г.[1] 15 марта 1939 г. Гитлер полностью захватил Чехословакию, а 1 сентября, через неделю после того, как Советский Союз и Германия подписали пакт о ненападении, Германия напала на Польшу. Через два дня правительство Даладье заявило, что считает себя обязанным соблюдать условия договора с Польшей.

[1] В архиве Академии наук в Париже хранится письмо, датированное 10 июня 1966 г., от чешского учёного В. Коринека, профессора Карлова университета в Праге, Шолему Мандельбройту, которое начинается словами: «Уважаемый коллега, согласно Вашему желанию посылаю Вам письмо, направленное профессором Жаком Адамаром чехословацким математикам после Мюнхена, через профессора Буджовского» [IV.22].

Глава 7

Вторая мировая война

§ 7.1. Снова война

С сентября 1939 г. по май 1940 г. военных действий между Францией и Германией не было: это был период так называемой «странной войны». Адамар со своей женой и внуками Этьеном и Франсисом жили тогда в Рамбуйе (улица Пастера, 22) — в 50 км к юго-западу от Парижа. «Большинство обитателей этого маленького городка, которые часто видели профессора Адамара, идущего по улице или по лесу, не знали, что этот человек хрупкого телосложения, любезный со всеми встречными, был членом Института Франции и даже, более того, ученым с мировым именем, который интересовался растениями в лесу как ученый, а не просто собирал съедобные грибы» [II.27, с. 312—313].

Жак и Луиза Адамар

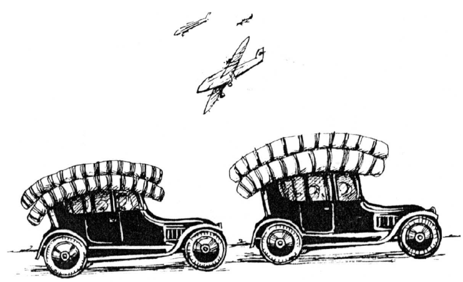
Мальчики учились во втором и в пятом классах в лицее, а их дедушка, которого они называли «Pare» (отец), проявлял большой интерес к их занятиям и домашним заданиям. «Однажды он заговорил со мной не без юмора о последнем переводе с латыни, который я задал в классе, где учился его внук, Этьен Пикар», — писал А. Росса-Миньо [II.58, с. 312]. Франсис Пикар отмечал, что ему особенно запомнилась необычайная доброта его дедушки и бабушки.

Но тучи войны сгущались: после прорыва в Седане и сражения в Дюнкерке немецкая армия быстро продвинулась к Парижу. Жаклин Адамар живо описывает поспешный отъезд своей семьи из Парижа. В то время Жаклин работала в лаборатории Ланжевена. Сотрудники лаборатории 9 июня 1940 г. получили распоряжение эвакуироваться в Тулузу. Жаклин поспешила к своим родителям, которые находились в Рамбуйе, но по прибытии обнаружила, что не вся семья в сборе. Ее отец, движимый присущим ему чувством долга, уехал поездом в Париж, чтобы исполнить обязанности председателя какого-то комитета в Институте Франции, и оказался единственным присутствующим. Железнодорожную станцию, на которой Адамар должен был сесть на поезд, чтобы вернуться в Рамбуйе, разбомбили, и поэтому он смог добраться домой очень поздно.

Адамар с женой и дочерьми Сесиль и Жаклин отправились в Бретань, где дети Сесиль гостили у родственников. Дороги были запружены потоками парижан, спасающихся бегством. Чтобы избежать разрушения города, Париж 13 июня был объявлен открытым городом. Жаклин Адамар вспоминает:

«Мы приехали в Конкарно к родственникам, у которых оставались дети. В их саду мы закопали тщательно завёрнутые в тонкую клеёнку письма двух моих братьев, погибших в 1916 г. Мои родители не хотели, чтобы эти письма попали в руки немцев. Затем мы с тяжелым сердцем слушали радио. Передавали предложение перемирия, высказанное Петеном![1] Излишне говорить, о чем мы тогда думали.

Но среди ночи на 17 июня мой кузен пришел, чтобы разбудить нас: он услышал передачу Би-Би-Си, которая объяснила, что условия перемирия абсолютно неприемлемы. Итак, нам пришлось бежать из тупика, которым оказалась Бретань. В спешке мы заново упаковали чемоданы. Именно тогда моя матушка упала на каменной лестнице дома и сильно ушиблась. К счастью, обошлось без перелома бедра» [IV.1, с. IV(2)].



Семья Адамар покинула Бретань, к которой приближались немцы. Сесиль и Жаклин прикрепили матрацы к крышам двух автомашин — считалось, что это служит защитой при бомбардировке. Они едва успели переехать по мосту через Луару, как мост был взорван. Жандармы пытались остановить поток беженцев, но семье Адамар удалось про-

[1] Маршал Филипп Петен (1856—1951), герой Первой мировой войны, командовал обороной Вердена. Глава коллаборационистского правительства с 1940 г. В 1945 г. приговорен к смертной казни, которая была заменена пожизненным заключением.

должить путь, так как у Жаклин был пропуск, который она получила незадолго до этих событий, чтобы выполнить распоряжение о вывозе платины из лаборатории.

§ 7.2. В Тулузе

После двух трудных дней в пути и одной ночевки под открытым небом семейство Адамар 19 июня 1940 г. прибыло в Тулузу. Вскоре к ним присоединился Матье Адамар с женой и детьми. Жаклин Адамар вспоминает:

«Нас направили в университетский городок, где мы и остановились. Я встретила своих коллег из лаборатории и Ланжевена. Мы отправились туда, где можно было узнать новости. Тулуза была переполнена беженцами. Центром новостей была большая стена, к которой каждый приклеивал записку с сообщением, где его можно найти, и с вопросами о своих родственниках.

В то время для нас очень остро стоял вопрос о том, где можно раздобыть пропитание. Каждому полагалось малое количество мяса и жира, поэтому мы потребляли невероятно много овощей: я все еще помню, как мы чистили по восемь килограммов топинамбуров каждый день! К счастью, для нас нашлось хотя бы это занятие, так как от безделья время тянулось нескончаемо долго и в голову лезли грустные мысли» [IV.1, с. IV(3)].

22 июня Франция подписала перемирие, согласившись на немецкую оккупацию обширных территорий страны. Французское правительство переехало в Виши, небольшой городок в Центральной Франции. Тулуза, находившаяся на юге Франции, оставалась в неоккупированной зоне. Следующую историю из того времени нам поведал Лоран Шварц, чья семья также жила в Тулузе:

«В начале войны, когда Адамар еще был во Франции, он вместе с моим братом отправился купить яиц в лавочку, куда их незадолго до того завезли. Так как продавец, воплощение общественной справедливости, отпускал только по полдюжины яиц на одну семью, они решили не разговаривать друг с другом, чтобы не возбудить подозрений. Вскоре они полностью забыли об этом соглашении и, стоя полчаса в очереди, громко беседовали друг с другом. Когда же они приблизились к продавцу, Адамар внезапно вспомнил о грозящей опасности. Он протянул руку моему брату и сказал: „Дорогой месье, я был счастлив познакомиться с вами“. В результате им удалось приобрести дюжину яиц. Выходя из лавочки, Адамар воскликнул: „До скорой встречи дома!“» [интервью, 28 октября 1992 г.].

Узнав, что Ланжевен вернулся в оккупированный немцами Париж, Жаклин последовала его примеру, но по прибытии в Коллеж де Франс обнаружила, что ее как еврейку исключили из числа сотрудников лаборатории. Жаклин перевезла математическую библиотеку своего отца в Школу физики и химии и передала его коллекцию папоротников и грибов в Музей естественной истории. Она отказалась подчиниться распоряжению немецких властей, согласно которому все евреи должны были зарегистрироваться в Комиссариате, и, чтобы избежать ареста, вернулась к своим родителям[1]. Возвращение не обошлось без больших трудностей, но ей удалось благополучно доехать. Она прибыла в Тулузу, имея при себе только личные вещи и семейный альбом фотографий, и сказала: «Как много людей были депортированы, потому что они оказались не в силах расстаться со своей мебелью!» [IV.1, с. IV(12)]. Когда после первых месяцев оккупации возникло подпольное движение Сопротивления, Жаклин сумела связаться с его участниками и стала их курьером в южной зоне. Между тем Адамар пытался использовать свои международные контакты, чтобы помочь еврейским ученым из Германии, Австрии, Чехословакии, Польши и Франции. Письмо к Эйнштейну по этому вопросу от 16 января 1941 г. Адамар заключил словами:

К этой общей просьбе я добавлю одну просьбу от себя лично. Мой случай, однако, не имеет ничего общего с теми, о которых я Вам говорил, поскольку я вот уже три года как вышел на пенсию. Но для меня было бы полезно и ценно приехать, если это возможно (на время), в Соединенные Штаты; единственный способ, который я могу придумать, чтобы осуществить это намерение, — получить приглашение на какие-нибудь конференции.

Если Вам станет известно о каких-нибудь возможностях такого рода (даже об относительно малочисленных и не очень привлекательных с финансовой точки зрения, которая меня не слишком беспокоит), пожалуйста, протелеграфируйте мне одновременно с более подробным письмом. Для меня это только способ получения разрешения со стороны как французских, так и американских властей.

Еще раз примите горячую благодарность от Вашего преданного друга.

Ж. Адамар [III.120, с. 127].

Это было не первое обращение Адамара с просьбой о помощи. Однако проблема иммиграции ученых в США была сложной, и в Американском математическом обществе существовала влиятельная оппозиция, которая руководствовалась различными мотивами. Подробный анализ ситуации был проделан Р. Зигмундом-Шульце в книге «Математики в бегстве от Гитлера» [III.364a]. В частности, он пишет: «Хотя иммиграцию Адамара в США поддерживали как американцы, так и немецкие эмигранты (Фонд Рокфеллера, Джон Р. Клайн (1891—1955), Г. Вейль, Э. Гумбель), секретарь Американского математического общества Ричардсон, друживший с Биркгофом, попытался отговорить Биркгофа от приглашения Адамара[2]» [III.364a, с. 185].

Зигмунд-Шульце цитирует следующее письмо Ричардсона от 16 апреля 1940 г. немецкому специалисту по математической статистике Э. Й. Гумбелю, иммигрировавшему в США после изгнания по политическим мотивам из Гейдельбергского университета:

«Хотя в полном соответствии с истиной можно утверждать, что Университет Брауна был бы рад приветствовать профессора Адамара и мог бы выплачивать ему скромное денежное содержание, мы не рекомендуем приглашать его в США, и я говорил это другим лицам. В свое время Адамар был весьма значительной

[1] Об антисемитизме во Франции при режиме Виши см. книгу Р. Познанского [III.330].

[2] В 1941 г. бывший аспирант Гильберта в Гёттингене Роланд Дж. Д. Ричардсон организовал программу продвинутого преподавания и исследований механики при Университете Брауна, где была собрана блестящая группа иммигрантов.

фигурой в математике, ему случалось бывать в США, где он встречал теплый прием, но он уже стар и за последние десять лет не сделал ничего значительного. В Европе есть математики, которых американские коллеги гораздо охотнее предпочли бы видеть в США, и в нашей стране есть люди, способные, сотрудничая с какой-нибудь математической группой, сделать больше, чем Адамар» [III.364а, с. 218, 219].

Это письмо было также направлено Дж. Биркгофу, который, по-видимому, не поддержал мнение Ричардсона, о чем свидетельствует письмо Адамара от 16 октября Биркгофу с благодарностью за поддержку» [IV.51][1].

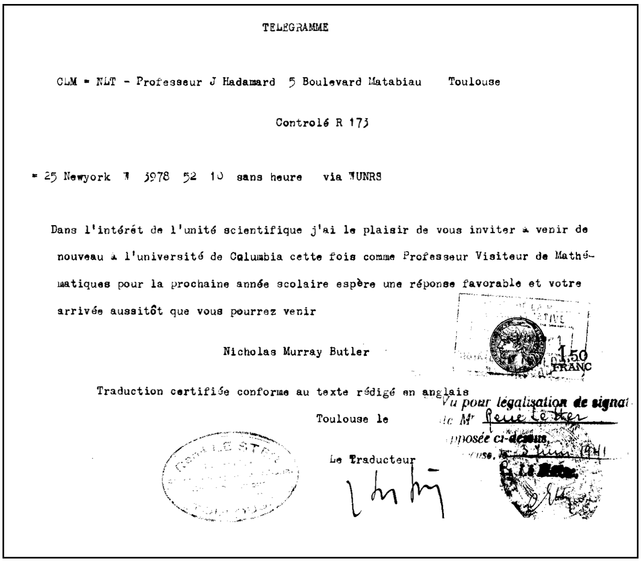
Помощь пришла от Луи Рапкина, молодого человека, сыгравшего чрезвычайно важную роль в спасении многих французских ученых. Рапкин родился в Белоруссии в 1904 г. Его семья переехала в Париж, когда ему было семь лет, а затем эмигрировала в Канаду. Поучившись три года в Университете Мак-Гилла, Рапкин в 1924 г. вернулся во Францию. Несмотря на многие трудности, ему удалось выполнить важную работу по биологии клетки. Но он не ограничивался академической деятельностью. В 1934 г. он организовал Комитет по приему иностранных ученых, который оказывал помощь тем, кто бежал из нацистской Германии. В начале Второй мировой войны Рапкин переехал в США и приступил к организации массовой эмиграции ученых из Франции. Он делал все, что было в его силах, чтобы найти частных лиц, способных пожертвовать финансовые средства для поддержки ученых-эмигрантов по прибытии их в США, для финансирования их исследований и подыскания для них академических должностей в США. Рапкину удалось оказать поддержку около тридцати французским

Луи Рапкин (1904—1948)

[1] Эта информация заимствована из [III.364а, с. 185].

ученым, среди которых были Адамар, Жан Перрен и Андре Вейль. Вейль вспоминал:

«Луи Рапкин, блестящий молодой биохимик из Канады ⟨...⟩, оказался в решающий момент в Нью-Йорке. Он составил и представил в [Рокфеллеровский] фонд список французских ученых, евреев и неевреев, которым, по его мнению, было бы лучше бежать из Франции как можно скорее. Как только Рапкин обнаружил (каким образом ему это удалось, я не знаю), что в октябре 1940 г. я вернулся во Францию, он включил меня в свой список, и в результате я получил предложение от Новой школы. Я обычно называл его „Святой Луи Рапкин“. И поныне меня трогают воспоминания о том, с какой добротой он отнесся ко мне. После освобождения Франции ему с некоторым трудом удалось найти должность в Институте Пастера, и вскоре он умер от рака легких. Его смерть глубоко опечалила меня» [III.418, с. 175—176].


TELEGRAMME

CLM = NLT - Professeur J Hadamard 5 Boulevard Matabiau Toulouse

Controlé R 173

= 25 Newyork 7 3978 52 10 sans heure via 7UNRS

Dans l'intérét de l'unité scientifique j'ai le plaisir de vous inviter à venir de nouveau à l'université de Columbia cette fois comme Professeur Visiteur de Mathématiques pour la prochaine année scolaire espère une réponse favorable et votre arrivée aussitôt que vous pourrez venir

Nicholas Murray Butler

Traduction certifiée conforme au texte rédigé en anglais

Toulouse le

Le Traducteur

Vu pour légalisation de signat
de Mr
posée ci-dessus,
3 Juin 1941

1,50
FRANC

Телеграмма с приглашением из Колумбийского университета

В мае 1941 г. Адамар получил из Америки следующую телеграмму:

Профессору Адамару, Тулуза, бульвар Матабио, 5

В интересах единства науки я имею удовольствие пригласить Вас еще раз посетить Колумбийский университет, на этот раз в качестве приглашённого профессора математики на будущий учебный год. Надеюсь на Ваш положительный ответ и Ваше как можно более скорое прибытие.

Николас Мюррей Батлер[1] [IV.17].

[1] Николас Мюррей Батлер (1862—1947) был президентом Колумбийского университета с 1902 г. В 1931 г. он стал одним из лауреатов Нобелевской премии мира.

Жаклин Адамар писала: «Мы с сестрой очень обрадовались этому приглашению, так как мой отец был из тех людей, которые всегда подвергают себя наибольшему риску, и нашим горячим желанием было поместить родителей в безопасное место, ибо спрятать отца было очень трудно» [IV.1, с. IV(14)].

Семья ожидала виз в консульстве США в Марселе. Быстрому прохождению всех формальностей помог Американский еврейский объединенный распределительный комитет, известный как Джойнт. Наконец, в августе визы были готовы, и можно было отправляться в Лиссабон, чтобы оттуда отплыть в США. Сесиль осталась в Тулузе.

Итак, Жак, Луиза и Жаклин Адамар вместе с группой эмигрантов прибыли в Испанию. Там можно было посидеть в кафе за чашечкой кофе с пирожным. Давно забытое удовольствие! «Не забудь свой портфель, в нем американские визы», — сказала Жаклин, когда все уходили из кафе. «Но визы должны быть у тебя», — возразил Адамар. Виз в багаже не оказалось: их оставили в Тулузе. Когда семейство Адамар обратилось за разрешением вернуться за своими визами в Тулузу, испанская полиция уведомила их, что они могут выехать из Испании, но не смогут вернуться в Испанию снова. Пришлось дать телеграмму Сесиль с просьбой выслать визы в представительство Джойнта в Марселе. Оттуда их можно было бы переслать в Лиссабон с другой группой эмигрантов.

В Лиссабоне выяснилось, что визы ещё не доставлены, и семейство Адамар не пустили на борт судна, на котором они должны были плыть в США. Единственный выход состоял в том, чтобы покинуть Европу на борту итальянского судна, зафрахтованного Джойнтом для большой группы эмигрантов из Германии, не имевших паспортов. По прибытии в США семейству Адамар пришлось бы ожидать в тюрьме, пока визы не будут доставлены авиапочтой. «Американская тюрьма? По сравнению с тем, чего мы боялись, это была не самая страшная перспектива. Мы согласились», — писала Жаклин Адамар» [IV.1, с. IV(16)—IV(17)].

§ 7.3. Жизнь в Америке

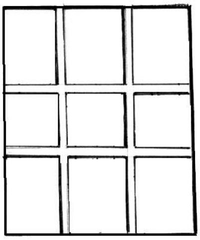
В Нью-Йорке семью Адамар сразу же посадили в такси и в сопровождении вооружённого полицейского отправили на Эллис-Айленд (остров в Верхней Нью-йоркской бухте, на котором с 1891 по 1943 гг. находился фильтрационный лагерь для иммигрантов в США). Вот как Жаклин Адамар описывает тюрьму:

«Это была вполне образцовая тюрьма с большим дневным помещением, имевшим библиотеку, в которой мы проводили весь день (за исключением «прогулок» между стенами из проволочной сетки). С внешним миром оттуда можно было общаться по телефону. Атмосфера там была весьма напряженной, царила подозрительность, каждый пытался бросить тень на других: „Не разговаривайте с ним, он нацистский (или фашистский, или чей-нибудь еще) шпион“. Камеры были безукоризненно чисты, но моя матушка (которой было семьдесят три года!) категорически отказывалась мыться в душе с другими.

Через десять дней мы предстали перед судьей. Нас предупреждали, что мы должны всё время делать вид, будто не знаем, куда подевались наши визы, иначе Джойнту и судовой компании придется заплатить крупные штрафы за то, что они взяли нас на борт без виз. Когда они принялись допрашивать моего отца, я испугалась, что он допустит какую-нибудь ошибку, и предложила свои услуги, пояснив, что он не очень хорошо слышит. Уф! Мое предложение было принято, потому что судья был убежден, будто все эти иммигранты — преступный сброд, зараженный микробами и паразитами, и он запретил моему отцу приближаться к столу, за которым восседал. Я давала показания, стоя в отдалении, и описала ситуацию, которую мы условились рассказывать посторонним: визы были получены нами в Лиссабоне. Куда их засунули? Никто не знает. И мне было приказано сесть на место» [IV.1, с. IV(17)—IV(18)].

В 1940-х г. Эллис-Айленд был центром, где интернировали нежелательных иммигрантов. На снимке регистрационный зал, расположенный на первом этаже главного здания, где иммигранты ожидали решения иммиграционных властей.

И тут в помещении суда появился Луи Рапкин. Он предъявил судье телеграмму от представителя Джойнта в Лиссабоне, в которой говорилось, что наши визы отправлены в США самолетом, и были указаны номера виз. Жаклин Адамар пишет: «Луи Рапкин добавил, что если станет известно, что мистера Адамара, ученого с мировым именем и, кроме того, йельца (т. е. бывшего профессора Йельского университета) держат в тюрьме, потому что его виза затерялась



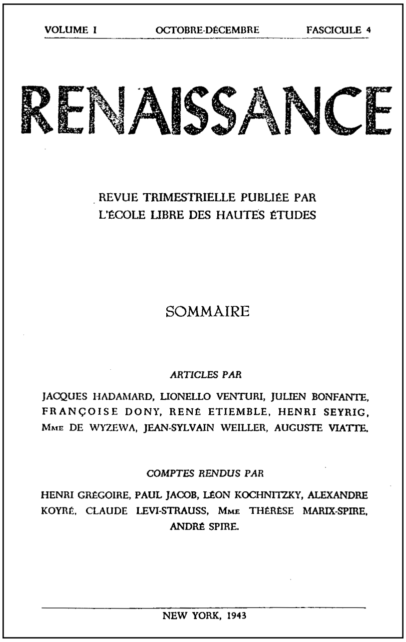
где-то в пути, то это вызовет скандал в университетском мире. И в заключение он добавил: „Почему бы мне не сообщить обо всем происходящем в газеты?“» [IV.1, с. IV(18)].

На следующий день всех членов семьи Адамар отпустили под поручительство Рапкина. Жаклин Адамар продолжает: «Великолепно!... Нет! Мой батюшка отказывается покинуть тюрьму: он начал читать книгу по истории Соединенных Штатов и не хочет выходить из заключения, пока не закончит ее! Наконец, когда я пообещала ему купить эту книгу, как только мы окажемся на свободе, он согласился (между нами говоря, это обещание так и не было выполнено, я о нем просто забыла... как и мой отец)» [IV.1, с. IV(19)].

Адамар стал приглашенным профессором Колумбийского университета, и все семейство поселилось в квартире, принадлежавшей этому университету. Адамар подготовил лекции и опубликовал несколько статей по проблемам математической физики. Как и прежде, его интересовал вопрос о корректности неклассических краевых задач, в частности задача Дирихле для линейного гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными. Узнав о кончине своего учителя Эмиля Пикара, он написал два некролога.

Библиотека и главный вход в Колумбийский университет в 1930-е гг.

В 1943 г. он прочитал курс по психологии изобретения в основанной незадолго до того Свободной школе высших исследований в Нью-Йорке. Роль интуиции в математике давно интересовала его, и он пытался исследовать ее с психологической точки зрения, апеллируя к понятию подсознания. Этой теме посвящена его книга «Исследование психологии процесса изобретения в области математики», которую он написал для издательства Принстонского университета. Рукопись этой книги Адамар отослал издателям в августе 1944 г., накануне отъезда из Америки.



VOLUME I OCTOBRE-DÉCEMBRE FASCICULE 4

RENAISSANCE

REVUE TRIMESTRIELLE PUBLIÉE PAR
L'ÉCOLE LIBRE DES HAUTES ÉTUDES

SOMMAIRE

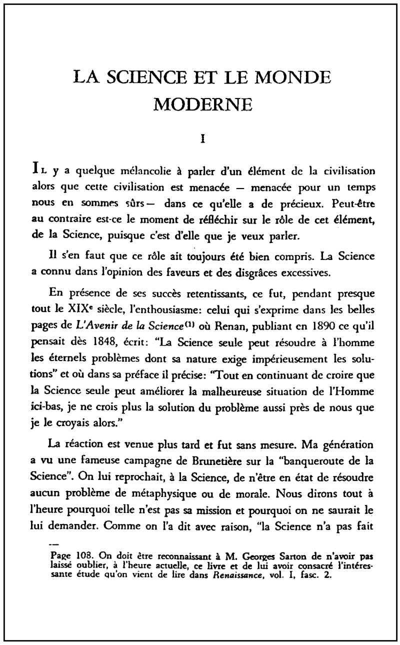
ARTICLES PAR

JACQUES HADAMARD, LIONELLO VENTURI, JULIEN BONFANTE, FRANÇOISE DONY, RENÉ ETIEMBLE, HENRI SEYRIG, Mme DE WYZEWA, JEAN-SYLVAIN WEILLER, AUGUSTE VIATTE.

COMPTES RENDUS PAR

HENRI GRÉGOIRE, PAUL JACOB, LÉON KOCHNITZKY, ALEXANDRE KOYRÉ, CLAUDE LEVI-STRAUSS, Mme THÉRÈSE MARIX-SPIRE, ANDRÉ SPIRE.

NEW YORK, 1943



LA SCIENCE ET LE MONDE MODERNE

I

Il y a quelque mélancolie à parler d'un élément de la civilisation alors que cette civilisation est menacée — menacée pour un temps nous en sommes sûrs — dans ce qu'elle a de précieux. Peut-être au contraire est-ce le moment de réfléchir sur le rôle de cet élément, de la Science, puisque c'est d'elle que je veux parler.

Il s'en faut que ce rôle ait toujours été bien compris. La Science a connu dans l'opinion des faveurs et des disgrâces excessives.

En présence de ses succès retentissants, ce fut, pendant presque tout le XIXe siècle, l'enthousiasme: celui qui s'exprime dans les belles pages de *L'Avenir de la Science*(1) où Renan, publiant en 1890 ce qu'il pensait dès 1848, écrit: "La Science seule peut résoudre à l'homme les éternels problèmes dont sa nature exige impérieusement les solutions" et où dans sa préface il précise: "Tout en continuant de croire que la Science seule peut améliorer la malheureuse situation de l'Homme ici-bas, je ne crois plus la solution du problème aussi près de nous que je le croyais alors."

La réaction est venue plus tard et fut sans mesure. Ma génération a vu une fameuse campagne de Brunetière sur la "banqueroute de la Science". On lui reprochait, à la Science, de n'être en état de résoudre aucun problème de métaphysique ou de morale. Nous dirons tout à l'heure pourquoi telle n'est pas sa mission et pourquoi on ne saurait le lui demander. Comme on l'a dit avec raison, "la Science n'a pas fait

Page 108. On doit être reconnaissant à M. Georges Sarton de n'avoir pas laissé oublier, à l'heure actuelle, ce livre et de lui avoir consacré l'intéressante étude qu'on vient de lire dans *Renaissance*, vol. I, fasc. 2.

Титульный лист и начало статьи Адамара в журнале «Renaissance», издававшемся Свободной школой высших исследований (1945)

В архиве семейства Адамар хранится письмо Эйнштейна к Адамару, присланное в ответ на приглашение принять участие в неделе «Философия и наука», которая должна была состояться в колледже Маунт Холиок с 25 по 30 июня 1944 г.:

14 апреля 1944 г.
Профессору Адамару
Морнингсайд-драйв, 54
Нью-Йорк Сити
Дорогой мистер Адамар!

Очень рад получить от Вас письмо, по прочтении которого у меня создалось впечатление, что дела у Вас в этом странном мире идут неплохо. Однако я совершенно не представляю, чем бы я мог быть полезен в том, что Вы любезно мне предлагаете.

Причина заключается в том, что единственный способ спасти мою душу и мое время в существующих ныне обстоятельствах состоит в воздержании от любой публичной деятельности. Сделай я малейшее исключение, и я бы попал в котел к дьяволу без малейшей надежды выбраться из него. К тому же вряд ли необходимо говорить, что я не могу сказать ничего такого, что имело бы особый интерес или было бы оригинальным.

Надеюсь, что Ваша жизнь в этой стране складывается удовлетворительно, и выражаю искреннюю надежду, что Вам удастся вскоре увидеть Вашу любимую Францию.

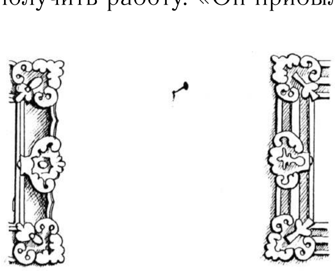
Искренне Ваш

Альберт Эйнштейн [IV.19].

Встречи в колледже Маунт Холиок, проходившие в 1942—1944 гг., стали продолжением так называемых «Встреч в Понтиньи», основанных в 1910 г. в Понтиньи (Франция) и проходивших вплоть до немецкой оккупации во время Второй мировой войны. В этих встречах принимали участие европейские и американские интеллектуалы, музыканты, художники и писатели. Обсуждались проблемы литературы, кинематографии, дипломатии, музыки и науки. В числе участников были философы Жак Маритен, Гюстав Коэн, Рахиль Беспалова, Джордж Боас; художники Марк Шагал и Андре Массон; историк Борис Миркин-Гецевич, художественный критик и историк Лионелло Вентури, писатель Андре Спир.

Так как Адамар занимал в Колумбийском университете лишь временную должность, возникла проблема заработка. В письме от 2 мая 1944 г. Германа Вейля Стивену Дуггану, председателю Чрезвычайного комитета по оказанию помощи перемещенным ученым, говорится: «В общем было невозможно предоставить адекватную позицию престарелым эмигрантам, почти достигшим возрастного предела для выхода на пенсию. Назову лишь несколько имен в моей собственной области: Жак Адамар, Эрих Маркс, Феликс Бернштейн, Макс Ден, Фриц Рейхе, — для которых этот вопрос остро стоит именно сейчас» (цитируется по книге Р. Зигмунда-Шульце [III.364a, с. 211]; оригинал хранится в [IV.52]).

Лоран Шварц вспоминает об одной попытке Адамара получить работу. «Он прибыл в небольшой университет и был принят деканом математического факультета. Адамар объяснил, кто он такой, и вручил декану свое curriculum vitae. Декан заявил: „Наши средства весьма ограничены, и я не могу обещать, что мы возьмем вас“.



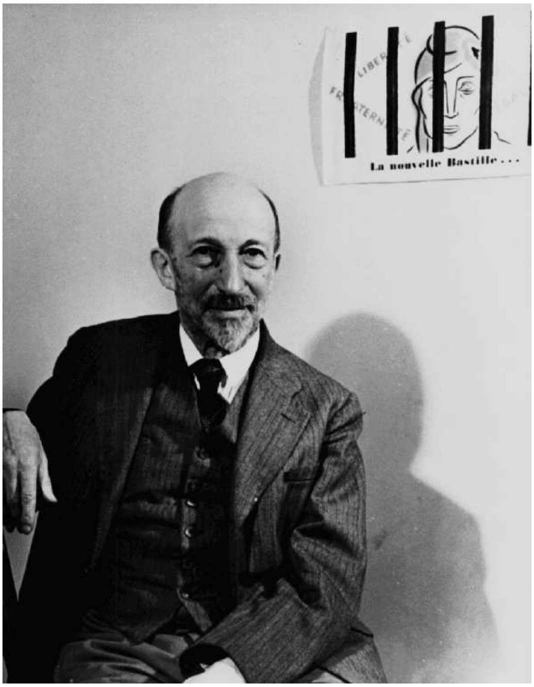
Тогда Адамар заметил среди висевших на стене портретов свой портрет. „Это я“, — сказал он. „Хорошо, зайдите через недельку, мы подумаем над этим.“ Когда Адамар пришёл во второй раз, ответ по-прежнему был отрицательным, а портрет со стены сняли» [интервью, 28 октября 1992 г.].

Торжества 14 июля 1942 г. в Нью-Йорке. Адамар — первый справа во втором ряду. В первом ряду пятый справа Ла Гардиа, мэр Нью-Йорка, второй справа Гюстав Коэн, декан гуманитарного факультета Свободной школы высших исследований (École Libre des Hautes Etudes), профессор Сорбонны. Позади Ла Гардиа слева Пьер Мендес-Франс в форме офицера военно-воздушных сил. В первом ряду третья слева журналистка Женевьева Табуа.

Жаклин Адамар вспоминает: «Все эти годы большую поддержку нам оказывало французское сообщество, разделявшее наши страдания и наши надежды» [IV.1, с. V(8)]. Члены семьи Адамар часто участвовали в собраниях «Свободной Франции», патриотического движения, вдохновленного призывом генерала де Голля к борьбе за освобождение Франции. Жаклин Адамар описывает это так: «Мой отец, естественно, принимал активное участие в дискуссиях. Иногда он выглядел крепко спящим, что пугало меня и мою матушку. Но когда кто-нибудь вдруг просил его высказаться, он, к нашему большому изумлению, задавал ответный вопрос по существу дела, хотя казалось, что он проспал все выступление. Сон всегда был его врагом. У меня еще звучат в ушах его слова: „Я никогда не устаю, но всегда хочу спать“» [IV.1, с. V(8)].

В декабре 1943 года две американские газеты опубликовали декларацию Комитета, организованного, чтобы отметить десятилетнюю годовщину поджога рейхстага. Декларация начиналась словами:

«Однажды зимним вечером в начале 1933 г. нацисты подожгли рейхстаг в Берлине. Герр Гитлер, новый канцлер, поспешил выскочить на сцену и заявил во всеуслышание к сведению иностранных журналистов: „Это сигнал Провидения. Никто не помешает нам теперь железной рукой расправиться с коммунистами“.



Жак Адамар в США во время Второй мировой войны

Мир знал, что Гитлер приготовил свою железную руку не только для коммунистов. Она была уготована всему немецкому народу: евреям и католикам, франкмасонам и членам профсоюзов, рабочим и студентам... Это была железная рука для Австрии, Чехословакии, Норвегии, Нидерландов, Франции, Балкан — для всей Европы... Железная рука должна была поработить Советский Союз и Азию. Железная рука должна была сомкнуться на горле Соединенных Штатов и Латинской Америки... Железная рука для всего мира!» [III.395].

Эту декларацию подписали около двухсот человек, среди которых был Эйнштейн. Следующее письмо от чернокожего певца Поля Робсона, который был председателем комитета, показывает, что Адамар был каким-то образом вовлечен в этот эпизод антинацистской деятельности:

4 января 1944 г.

Уважаемый профессор Адамар!

Прилагаю к письму копию декларации, озаглавленной «Пожар, который пылает десять лет», в том виде, в каком она была напечатана в номере газеты «New York Herald Tribune» за 28 декабря.

Вам будет интересно узнать, что эта публикация стала возможна благодаря положительному отклику на первую публикацию в номере газеты «New York Times» за 22 декабря.

Хочу также сообщить о благоприятной реакции широкой общественности на декларацию. Мы полагаем, что её публикация в двух ведущих газетах способствовала дальнейшему национальному единению в этот критический период, когда мы призваны сосредоточить все наши силы для быстрейшей победы над Осью и установления справедливого и прочного мира.

THE NEW YORK TIMES, WEDNESDAY, DECEMBER 22, 1943.

ADVERTISEMENT ADVERTISEMENT ADVERTISEMENT

HUGO GELLERT

THE FIRE THAT HAS BEEN BURNING FOR TEN YEARS

SIGNERS OF THIS DECLARATION

Louis Adamic
Dr. Thomas Addis
Larry Adler
Canon Thomas Almantora
Hon. Wm. A. Anderson
Carol Aronovici
Lemuel Ayers
Zlatko Balokovic
Albert W. Barker
DeWitt D. Barlow
Professor Adrian J. Barnouw
Howard Bay
Max Bedacht
K. Beight
William Rose Benet
The Metropolitan Benjamin
Mrs. Gertrude Berg
Jean Benoit-Levy
Warren K. Billings
Algernon Black
Peter Blume
Dr. E. M. Bluestone
Joseph Brainin
Millen Brand
Albert Briochert
Max Bronzwick
Alexander Brook
Van Wyck Brooks
Fred A. Brots
Earl Browder
Henrietta Buckmaster
Germaine Bulcke
Professor Hugo Burghauser
Edwin Berry Burgum
David Burliuk
Peter V. Cacchione
Dr. Henry Seidel Canby
Hon. Frank W. Carter
William H. Cary, Jr.
Edward Chodorov
Harold Christoffel
Edwin G. Conklin
Philip Connaly
Eugene P. Connolly
Mrs. Elizabeth Sprague Coolidge
Aaron Copeland
Jon Corbino
Paul Corey
John G. Crane
John W. Crawford
Ephraim Cross
Countee Cullen
Joseph Curran
Walter Damrosch
Dr. Leo M. Davidoff
Jo Davidson
Benjamin J. Davis, Jr.
Rev. Theodore De Luca
Dean Dixon
Dr. Arnold R. Donawa
Mary E. Dreier
Frank Duffo
Thyra Edwards
Dr. Adam Egede Nissen
Professor Albert Einstein
Rev. Frederick May Eliot
Guy Endore
Henry Epstein
Philip Evergood
Prof. Henry Pratt Fairchild
William Feinberg
Mr. Frederick Field
Mrs. Frederick Field
Dorothy Canfield Fisher
Abram Flaxer
Sol Fleer
Mrs. Martha H. Fletcher
Dr. Guy Stanton Ford
Louise Fowler
Wanda Gag
William R. Gallmer
Leo Galagher
Rafael Garcia
Dean and Mrs. Christian Gauss
Hugo Gellert
B. Z. Goldberg
Sol Goldberg
Ben Gold
Dr. Alex Goldman
Morton Gould
William Gropper
Rudy Hanson
Rev. Thomas E. Harten
Mel Heinritz
Lillian Hellman
Donald Henderson
Rev. Chester E. Hodgson
Dr. Milton J. Hoffman
Langston Hughes
Doris Humphrey

Заголовок «Пожар, который пылает десять лет» в газете «New York Times» с портретом Георгия Димитрова

Хочу передать Вам благодарность от себя лично и высокую оценку Комитетом Вашего сотрудничества, способствовавшего успеху этого важного проекта.

Искренне Ваш

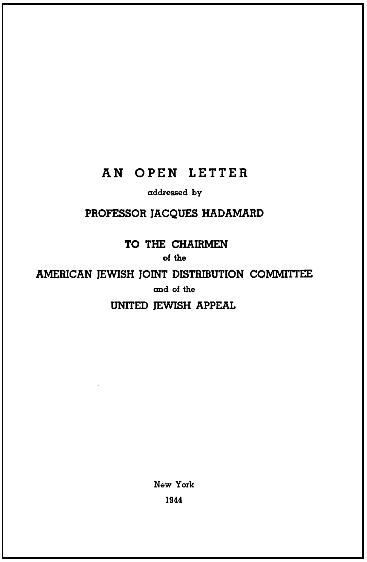
Поль Робсон [IV.18].

Страдания жертв геноцида, чинимого немцами по ту сторону океана, побуждали Адамара к действию. В Нью-Йорке он написал 24 июля 1944 г. открытое письмо в Джойнт:

«Беспрецедентная в истории трагедия европейских евреев, от двух до трёх миллионов которых были истреблены немцами, а оставшиеся в живых страдают от голода и всевозможных лишений, требует энергичного сотрудничества всех человеколюбивых сил, чтобы спасти обреченных на смерть, облегчить нищету живых и создать здоровую и прочную основу для восстановления их социальной и экономической жизни» [I.367, с. 3].

Далее в своем письме Адамар предлагал конкретные меры по оказанию помощи европейским евреям.

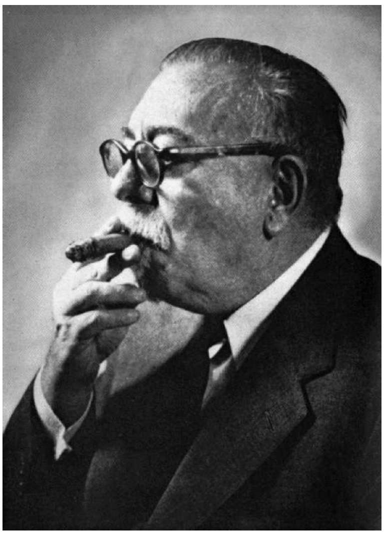
Адамары не могли приспособиться к новой стране: они тосковали по родине, и у них было мало американских друзей. «Важным исключением был один аме-


AN OPEN LETTER
addressed by
PROFESSOR JACQUES HADAMARD
TO THE CHAIRMEN
of the
AMERICAN JEWISH JOINT DISTRIBUTION COMMITTEE
and of the
UNITED JEWISH APPEAL

New York
1944

Открытое письмо Адамара в Джойнт

риканский математик, которого отец знал давно, — Норберт Винер. Он нравился нам: его небольшая табакерка и смех, почти столь же оглушительный, как у Эйнштейна!» — вспоминала Жаклин Адамар [IV.1, с. V(18)].



Норберт Винер (1894—1964)

Они беспокоились о семье, оставшейся во Франции, поскольку в течение многих месяцев не получали от близких никаких известий. Сесиль и ее муж Рене Пикар были участниками Сопротивления. После нескольких месяцев ожидания пришло письмо от Матье, последнего сына супругов Адамар: ему удалось выехать из Франции в Испанию. Позднее после долгого молчания он написал из Алжира, сообщив, что вступил в «Свободные французские силы» де Голля. Матье погиб 1 июля 1944 г. в Триполитании. Жаклин Адамар вспоминает:

«В первое же утро на перекличке вызвали лейтенанта Адамара, и к его изумлению из шеренг вышли двое! Так Матье познакомился с дальним родственником из Авиньона, с которым мы никогда не встречались; его жена, которую, как и меня, звали Жаклин, находилась в Нью-Йорке.

Через несколько дней моя подруга Жанин Бернхайм навестила меня и, оставшись наедине со мной, сообщила, что эта другая Жаклин Адамар получила от своего мужа письмо, в котором говорилось, что мой брат убит! Единственный, кого мы считали уцелевшим, последний сын моих родителей... Как нам было сообщить родителям эту ужасную новость? Это была новая трагедия. Я до сих пор спрашиваю себя, как можно выдержать такие удары.

Так как новость, переданная мне Жанин, носила несколько неопределенный характер, не могло быть и речи о том, чтобы сообщить ее моим родителям. Поэтому я решила ничего им не говорить, скрыть свою боль, и в течение десяти дней я не позволяла себе плакать, даже когда оставалась одна, из опасения, что мать может меня услышать. К счастью, за прошедшие годы мы привыкли или даже научились не думать о плохом по ночам, когда все кажется в десять раз хуже, чем на самом деле.

Поэтому я держалась. Но, увы, новость подтвердилась... Я позвонила своим кузинам и попросила их выяснить судьбу брата, и они подтвердили трагическое известие. Единственный наш брат, про которого мы думали, что он жив и невредим, погиб, и после него во Франции остались жена и двое маленьких детей!» [IV.1, с. V(26)—V(27)].

Смерть Матье усилила желание Адамаров быть ближе к Франции. Кроме того, хотя Адамар хотел заниматься исследованием проблем военного характера, его попытки принять активное участие в военных делах были тщетными. В 1943 г. Рапкин отправился в Великобританию и организовал там Французскую научную миссию, в задачу которой входило привлечение французских ученых к британской военной программе «Исследование операций». С помощью этой миссии Рапкин сумел организовать для группы французских ученых переезд из США в Лондон. Когда стало ясно, что условия для его работы в Лондоне более благоприятны, Адамар решил переехать туда. 21 августа 1944 г. семейство Адамар покинуло Америку. Жаклин Адамар вспоминает:

«На борту океанского лайнера, перевозившего 18 000 американских солдат, нас, гражданских, было только десять человек. Лайнер входил в состав большого конвоя, одного из последних конвоев, пересекавших Атлантику. Самые важные члены миссии — Луи Рапкин, Пьер Оже, Франсис Перрен [сын Жана Перрена] и еще один-два человека — летели в Великобританию самолетом, а мы прихватили с собой их багаж.

Посреди Атлантики на борту лайнера мы узнали по радио об освобождении Парижа.

С чувством облегчения, сияя от радости, мы наслаждались невероятным зрелищем, каким было плавание в составе конвоя: вокруг нас вместо огромного пустынного океана — многие десятки судов (думаю, их было 140), а вокруг них военные корабли — корветы, в задачу которых входило обнаруживать и топить фашистские подводные лодки. Посреди Атлантики эти корветы (у которых заканчивалось топливо) „припали к сосцам своей матки“, т. е. стали пополнять запас топлива из танкера по длинному шлангу, все это на ходу, не останавливая конвой ни на секунду. Кроме того, нас предупредили, что если нас торпедируют, то конвой не станет останавливаться, чтобы подобрать нас, и нам придется ждать, надев спасательные жилеты, пока нас не подберут другие суда (что было маловероятно, так как маршруты, которыми суда следовали через Атлантику, были весьма разнообразны во избежание нападений немецких подводных лодок). Короче говоря, тогда я поняла, почему в старину военные моряки из Бретани отказывались учиться плавать! Оказавшись в воде, лучше быстрее погибнуть...

Мы знали, что идем в Англию, но где именно мы пристанем? И только высадившись на берег, мы узнали, что находимся в Ливерпуле.

На берегу мы, десять гражданских, попросили помощи носильщиков — нет, носильщиц, если так можно сказать, — эту тяжёлую работу выполняли женщины. Тогда моя матушка повернулась ко мне и сказала: „Но в глазах этих женщин есть душа!“ И действительно, мы испытывали ощущение, что вернулись в свой собственный мир, что имеем дело с людьми, которые занимаются тем же, чем мы, с теми же страхами и теми же надеждами. Это было так замечательно!

Нам помогли добраться до вокзала, и тут возникла проблема: у нас было полторы тонны лишнего груза! И у каждого — всего по пять фунтов стерлингов. Как нам оплатить дорогу до Лондона?

Администрация вокзала хорошо поняла наши трудности и вежливо осведомилась: «Сколько вы можете заплатить?» Мы совершенно растерялись. Тогда, основательно порывшись в своих справочниках, железнодорожные власти назвали нам самые дешёвые тарифы (на снегоочистительное оборудование), которые всё же опустошали наши карманы. Но они предупредили нас, что не смогут погрузить все эти ящики в наш поезд, так как вагон слишком мал. Одному из нас придется остаться и подождать с остальными ящиками следующего поезда» [IV.1, с. V(29)—V(30)].

§ 7.4. Год в Лондоне

В Лондоне Адамары вместе с Мандельбройтом сняли меблированную квартиру на Пэлл-Мэлл, неподалеку от Карлтон-Гарденс, где располагалась французская научная миссия.

Адамар вскоре начал участвовать в программе «Исследование операций», которая проводилась группой ученых вместе с командованием ПВО и береговой охраны с целью увеличения эффективности британской радарной сети. Судя по воспоминаниям Жаклин Адамар, ее отец занимался вопросами защиты морских конвоев от подводных лодок. Вот что она пишет об их жизни и работе в Англии:

«Было достигнуто соглашение о том, что нас допустят ко всем документам с грифом „Секретно“, но не допустят к документам с грифом „Совершенно секретно“. Англичане, уже обжегшись на трудностях в общении с де Голлем, наблюдали за нами. Но затем они убедились, что мы скрупулезно соблюдаем условия соглашения, и наконец стали нам доверять.

Вскоре наша жизнь упорядочилась: мы проводили день с той группой, к которой были приписаны боевым командованием: командованием истребительной авиации или командованием береговой охраны (в которую зачислили меня). Эти группы были расположены вне Лондона, и потому мы обычно возвращались домой поздно вечером, за исключением тех случаев, когда приходили к обеду, чтобы работать над составлением рапортов во второй половине дня. В такие дни мы, как и все уважающие себя англичане, обедали в нашем клубе — Клубе приглашенных ученых. По вечерам мы ужинали дома, где на стол накрывал наш замечательный дворецкий.

Адамар в Лондоне, 1944

Наши симпатии к англичанам усиливались день ото дня: мы не скрывали своего восхищения их мужеством и чувством гражданского долга. Им необходимо было мужество при налётах, когда Лондон бомбили каждую ночь с такой интенсивностью, что приходилось эвакуировать все городское население. Значительная часть Ист-Энда (ближайшая к побережью) была разрушена. Затем немцы начали применять ракеты „Фау-1“, появлявшиеся в любое время. Было слышно, как они пролетали над головой, а затем, когда у них кончалось горючее, входили в штопор и наконец врезались в землю, поэтому тот, кто их слышал, не был уверен, что они не упадут ему на голову[1].

Когда мы прибыли в Англию, немцы стали применять „Фау-2“, ракеты с огромным взрывным зарядом, которые летели со сверхзвуковой скоростью и поэтому падали до того, как их становилось слышно. Если вы их слышали, то это означало, что они уже где-то упали.

Многие из тех, с кем нам приходилось встречаться, жили в разрушенных при бомбёжках домах, и совершенно естественно, что нервы у них были напряжены сильнее, чем у нас. Но их реакция на происходящее была восхитительна. Помню, однажды я проходила мимо лавочки, разрушенной „Фау-1“, которая упала ночью поблизости. На витрины большинства лондонских магазинов были наклеены полоски бумаги, а посредине виднелась надпись «Открыто, как обычно». Первое, что сделал владелец этой разрушенной лавочки, — заменил табличку, написав „Открыто шире, чем обычно“!

В другой раз, увидев разрушенный дом и владельца, который смотрел на свою мебель, разбросанную по тротуару, я высказала ему свое сочувствие и услышала в ответ: „О, могло быть хуже, мог пойти дождь“.

Мы благоденствовали в атмосфере, где относились к людям с доверием, где полагались на их честность и чувство долга. Так, меня направили в Центр в Фарнборо для помощи в обнаружении радаром позиций пусковых установок „Фау-2“ методом триангуляции. До Фарнборо я доехала поездом. По прибытии я не могла найти билет, чтобы предъявить его контролеру. Он спросил меня: „Вы ездите сюда каждый день?“ — „С сегодняшнего дня — каждый“. — „Хорошо, тогда отдадите мне билет завтра“. Такое поведение контролера удивило бы меня в Орсэ, но в Англии оно казалось нормальным, и на следующий день я предъявила ему два билета.

По-видимому, в тот день, когда вы обманете это доверие, вы станете в глазах англичанина пропащим человеком, и такое отношение казалось мне разумным» [IV.1, с. VI(3)—VI(5)].

Адамар читал лекции в университетах, а в январе 1944 г. он выступил с докладом перед Лондонским математическим обществом. Представляя его, Г. Харди назвал 80-летнего Адамара «живой легендой математики» [II.4].

В одном из номеров журнала «Nature» за 1965 г. появилась заметка памяти Адамара, где упомянуто, что в 1945 г. он «прочёл лекцию с личными воспоминаниями, о которой до сих пор с удовольствием рассказывают многие его британские коллеги» [II.17, с. 937]. «Мне запомнилась, — писала Мэри Картрайт, — его невысокая фигура в пальто на лекции в холодной аудитории и то, как он, оступившись, не упал, но легко сбежал вниз по ступенькам» [II.4, с. 84].

Мандельбройт на праздновании в честь столетия Адамара в 1966 г. рассказал следующую историю из того времени: «Воспользуюсь представившейся мне возможностью выполнить обещание. Однажды во время войны на лондонской улице, которая только что подверглась бомбардировке „Фау-1“, Адамар внезап-

[1] С 13 июня 1944 г. по 29 марта 1945 г. около 2500 ракет «Фау-1» достигли района Лондона. — *Прим. авторов.*

Г. Х. Харди (1877—1947). Великий мастер математического анализа и его приложений к теории чисел, Годфри Гарольд Харди преподавал в Кембриджском и Оксфордском университетах. В 1910 г. был избран членом Королевского общества.

Мэри Люси Картрайт (1900—1998) получила замечательные результаты в теории функций комплексного переменного и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Она стала первой женщиной, избранной в Королевское общество. В 1969 г. ей был присвоен титул Дамы и она была возведена в ранг Командора Британской империи. Для журнала Лондонского математического общества она написала блестящую биографическую статью об Адамаре (1965).

Луиза Адамар

но сказал мне: „Мандельбройт, если со мной что-нибудь случится, не забудьте рассказать, что я всем обязан моей жене“. Сейчас я выполняю его просьбу» [II.5, с. 27].

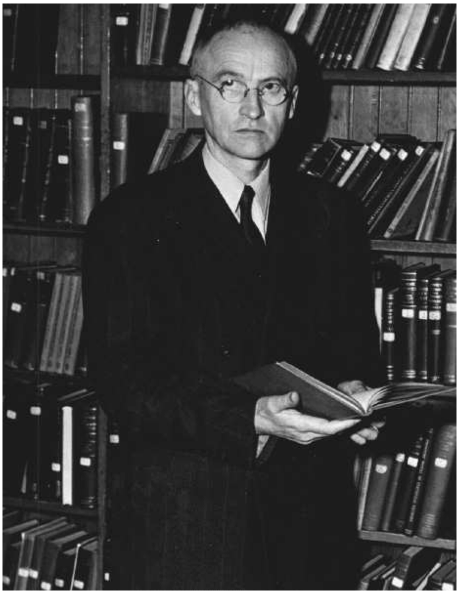
§ 7.5. Возвращение домой

Семейство Адамар вернулось в Париж весной 1945 г. Их большая квартира на улице Эмиля Фаге была пуста, все их имущество разграбили немцы. Осталось только пять или шесть предметов мебели, несколько тарелок и кое-что из столового серебра — то, что сохранили соседи. Книги и ботанические коллекции, хранившиеся во время войны в Школе физики и химии и в Национальном музее естественной истории, были возвращены Адамару. (После кончины Адамара Жаклин Адамар подарила его ботанические коллекции Национальному музею естественной истории, и их поместили в Морской лаборатории музея в Динаре, городке в шестидесяти километрах от Ренна.)

Вот как Жаклин Адамар описывает жизнь своего семейства сразу после войны:

«Мы навели порядок в квартире и позаботились о детях. Мы все жили на головах друг у друга: мои родители, племянники, племянница и я сама, и жизнь в нашей квартире была не очень легкой. Вопрос о центральном отоплении не стоял — у нас был только камин и, к счастью, членам Института Франции выдали немного дров. Поэтому на шесть человек отапливалась только одна комната (это оказалась моя комната, так как в ней был камин). Вспоминаю, как мой отец, расхаживая по комнате, диктует матушке математический текст, мой старший племянник готовится к поступлению в Высшую школу электричества, а двое младших делают домашнее задание. Заниматься одновременно было невозможно, и старший мальчик ждал, пока остальные пойдут спать, чтобы готовиться к своим экзаменам, а я тем временем тоже отправлялась спать» [IV.1, с. VIII(3)].

В 1945 г., в день своего 80-летия Адамар выступил во Дворце открытия с докладом «Подсознательное, интуиция и логика». В том же году он опубликовал статью «Проблемы, кажущиеся трудными» [I.368], а также некролог, посвященный Джорджу Давиду Биркгофу [I.370].



Джордж Давид Биркгоф (1884—1944). Ведущий американский математик первой половины XX в. В числе его достижений эргодические теоремы в статистической механике, новые идеи в теории динамических систем, первое доказательство последней теоремы Пуанкаре о неподвижных точках в кольце. Ему принадлежат важные работы по теории разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Адамар и Биркгоф в течение долгого времени знали друг друга, и Биркгоф часто бывал гостем-докладчиком на семинаре Адамара. Поздравляя Адамара по случаю его 70-летия, Биркгоф писал:

«Моя личная признательность профессору Адамару очень велика. Многие его статьи оказали на меня особенно стимулирующее действие и стали исходными пунктами моих собственных исследований. Меня вдохновляли не только его результаты, бывшие значительным вкладом в науку, но и его неослабевающая доброта ко мне и интерес к тому, чем я занимался. По широте своих интересов и глубине своих работ он всегда был в моих глазах истинным преемником Анри Пуанкаре. В грядущих столетиях его имя, несомненно, окажется в ряду блистательных и непревзойденных знаменитых математиков, которыми по праву гордится Франция».

Сын Биркгофа Гаррет написал нам в 1996 г.: «Я знал Адамара как человека, близкого моему отцу по науке на протяжении тридцати лет, главным образом благодаря обоюдному интересу к вдохновляющим идеям Пуанкаре о динамических системах».

Книга Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики» была опубликована в 1945 г. Принстонским университетом с посвящением «Спутнице моей жизни и моих трудов». В ней Адамар подвел итоги многолетних размышлений о механизме научного мышления и о психологии творческой активности.

Расширенное и пересмотренное французское издание книги Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики», перевод Жаклин Адамар, опубликовано в 1959 г.

Глава 8

После восьмидесяти

§ 8.1. Еще раз в СССР в 1945 г.

Последний визит Адамара в СССР состоялся в июне 1945 г. в связи с юбилейной сессией Академии наук СССР, проходившей с 25 мая по 7 июня в Москве

и Ленинграде и посвящённой ее 220-летию, куда он был приглашён в составе французской делегации. Эта дата отмечалась с большим размахом. Только что отгремели победные залпы, и хотя время было трудное, но настроение — приподнятое. Из отчета, напечатанного в «Вестнике Академии наук» [III.133, с. 149]:

«...Двери академических институтов, лабораторий и музеев были открыты для гостей, съехавшихся из различных стран мира... Они знакомились с научной жизнью Москвы и Ленинграда... Многие иностранные ученые наблюдали выставку портретов академиков в Большом театре. Иностранные делегаты побывали на опере Глинки „Иван Сусанин" в Большом театре... В только что отремонтированном здании бывшего Мариинского театра, которое было жестоко повреждено

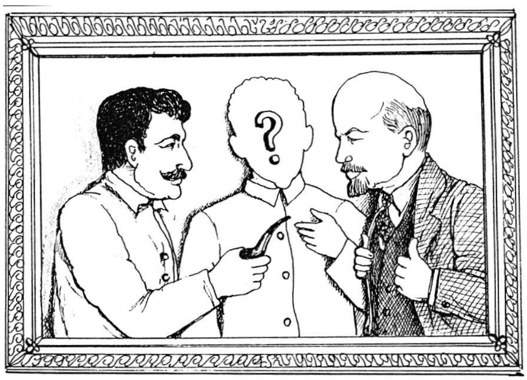
Адамар дает интервью в Пушкине, июнь 1945 г.

бомбардировкой во время блокады Ленинграда, им был показан гениальный балет Чайковского „Лебединое озеро“. Для участников сессии были организованы массовые экскурсии в Кремль,

Третьяковскую галерею, по каналу Волга—Москва, в Ясную Поляну, на выставку „Оборона Ленинграда“, в Пушкин, в Петродворец».

Лоран Шварц рассказал авторам следующую историю, которую он услышал от Ф. Жолио-Кюри, также входившего в состав французской делегации:

«В одном из крупных музеев ученых провели на выставку „официальной живописи“. Остановившись перед одним из полотен, Адамар увидел на портрете Ленина, Сталина и кого-то еще. „Это, наверное, Троцкий“, — сказал Адамар.

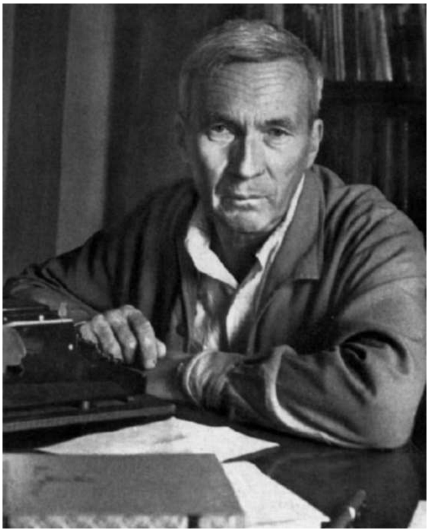


Все спутники промолчали. „Нет, — быстро возразил гид, — это такой-то и такой-то“. У следующего полотна Адамар, не желая расставаться со своей идеей, спросил: „А где Троцкий?“ — „Не здесь“, — последовал ответ гида. Адамар снова и снова задавал свой вопрос, до тех пор пока не услышал: „Троцкий был врагом народа“. — „Что это такое, Жолио? — поинтересовался Адамар. — Это картины для политики или для истории? Если они занимаются здесь политикой, то это не музей“».

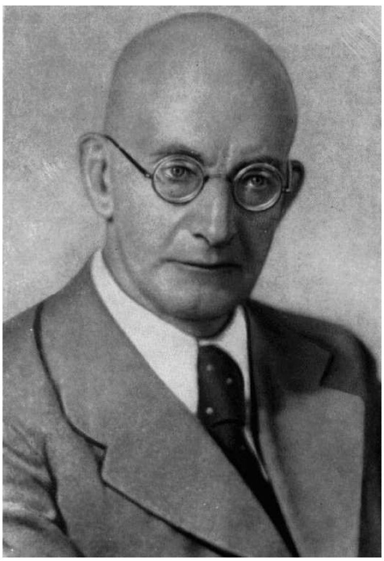
В. И. Арнольд приводит воспоминания А. Н. Колмогорова о следующем эпизоде:

«Адамар был страстным собирателем папоротников. Когда он приехал в Москву, Андрей Николаевич [Колмогоров] с Павлом Сергеевичем Александровым повезли его кататься на лодке (кажется, по Образцовскому пруду на Клязьме). Вдруг Адамар что-то увидел на берегу и попросил срочно пристать. Он перешёл на нос лодки и, когда она приблизилась к берегу, так волновался, стремясь на берег, что упал в воду. Оказалось, что там рос папоротник необычного вида, который он искал везде уже много лет. Адамар был совершенно счастлив. Но его нужно было срочно везти в президиум АН СССР на приём к президенту (кажется, президентом тогда был В. Л. Комаров[1]).

[1] В. Л. Комаров, выдающийся ботаник и географ, был президентом АН СССР с 1936 по 1945 г.



Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987) был математиком необычайной глубины и продуктивности, внесшим фундаментальный вклад в теорию тригонометрических рядов, теорию приближений, теорию вероятностей, топологию и гидродинамику



Павел Сергеевич Александров (1896—1982) прославился своими работами по теоретико-множественной топологии. Он разработал гомологическую теорию размерности и исследовал фундаментальные законы двойственности между топологией множества и его дополнения.

Пришлось переодеть Адамара в костюм Павла Сергеевича. Но это было очень заметно (Адамар был гораздо выше). На приёме все спрашивали Адамара: „Господин профессор, что с Вами случилось? Вы не в своём костюме — уж не упали ли Вы в воду?“ На что Адамар гордо отвечал: „Почему вы думаете, что у профессора математики не может быть никаких других приключений?“» [III.13a, с. 51].

На том же приеме кто-то спросил Адамара[1]: «Профессор, как члену Академии наук, Вам приходится представлять в печать множество математических работ. Как Вы отличаете хорошие работы от плохих?» Адамар ответил следующей восточной притчей:

«Жил некогда один султан, который в плохом настроении послал своего евнуха за новой наложницей. У красавицы, которую выбрал евнух, были глаза газели, но наутро султан выразил недовольство. „Приведи мне другую“, — потребовал он. Евнух постарался и выбрал гурию, которая казалась ему совершенством. Но султан и на этот раз остался недоволен и приказал: „Попробуй еще раз, и если мне опять не понравится, ты лишишься головы“.

Несчастный евнух в отчаянии покинул дворец. „Почему ты плачешь?“ — спросил его оборванный нищий, сидевший у дороги. Когда евнух объяснил ему причину своей скорби, нищий сказал: „Не волнуйся“, — и привел ему девушку, которая не произвела на евнуха особого впечатления. Все же он отвел ее во дворец, и на этот раз султан остался чрезвычайно доволен. „Почему ты был так уверен, что она хороша?“ — позднее спросил евнух у нищего. „Вряд ли ты это поймёшь! Ведь ты же евнух!“ — последовал ответ».

Невозможно достоверно узнать, действительно ли Адамар рассказал этот анекдот на приеме, но se non è vero, è ben trovato[2].

На сессии Академии наук Адамару был представлен 30-летний Ю. В. Линник, который подарил ему оттиски своих работ по асимптотике плотности нулей рядов Дирихле. После этого, встречая Линника на заседаниях, Адамар приветствовал его дружеским восклицанием «Densité de zéros! (Плотность нулей!)».[3]

[1] Эту историю нам пересказал Я. Г. Синай, который слышал ее от С. В. Фомина (1917—1975).
[2] Если это и не правда, то хорошо придумано (итал.).
[3] По рассказу Ю. В. Линника Е. М. Полищуку.

Юрий Владимирович Линник (1915—1972) получил выдающиеся результаты в теории чисел, теории вероятностей и математической статистике

Адамар выступил в Москве 22 июня с докладом «Психология математического творчества» и повторил его 27 июня в Ленинграде, где встретил своего старого знакомого В. И. Смирнова. В то время Смирнов продолжал свои исследования частных решений гиперболических уравнений. Он пригласил Адамара к себе домой, на улицу Рентгена, где они провели приятный вечер в разговорах о гиперболических уравнениях за чашкой чая с вареньем из морошки — ягоды, до той поры Адамару неизвестной.

По возвращении домой Адамар поделился своими впечатлениями с читателями «Revue France — U.R.S.S.» в краткой статье, где он, в частности, писал: «К прискорбию, нам стало известно, что смерть унесла одного из наиболее замечательных молодых представителей советской математической школы. Я имел удовольствие встретиться не только с коллегами и друзьями, знакомыми по моим предыдущим поездкам, но и с теми, которых я знал только по их работам, ибо старые и молодые таланты раскрылись после 1936 г. — даты моего последнего визита».

Вероятно, в начале этого отрывка Адамар имеет в виду блестящего математика Льва Генриховича Шнирельмана, который в 1938 г. покончил жизнь самоубийством.

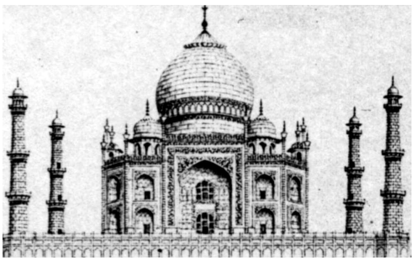
Свою заметку Адамар завершает фразой: «...Потому что одним из незабываемых результатов проделанной нами поездки будет укрепление интеллектуальных связей, существующих между нашими странами, и обогащение французской логики порывом и мощной оригинальностью русского темперамента» [IV.22]. Было ли это выражением того, что принимавшие гостей русские остались ближе романтическому ви́дению математики Адамаром, чем Бурбаки?

В Большой советской энциклопедии издания 1949 г. (т. 1, с. 388) помещена короткая статья об Адамаре без указания автора, написанная весьма адекватно с математической точки зрения. Однако она содержит следующий любопытный отрывок (позволяющий судить об атмосфере в советской науке того времени):

«В своих методологических высказываниях А[дамар] обычно выступает против всякого ограничения в выборе предмета и метода математич[еского] исследования (напр[имер] за неограниченное пользование т[ак] н[азываемой] аксиомой выбора...) и против агностицизма, исходя из естественной для крупного математика убеждённости в разрешимости каждой математической проблемы. Однако философское обоснование этих положительных взглядов на неограниченные возможности научного прогресса у А[дамара] явно неудовлетворительно; оно представляет собой соединение объективного идеализма с узким эмпиризмом».

В [III.216, с. 258] эта статья включена в список публикаций А. Н. Колмогорова.

§ 8.2. Поездка в Индию в 1947 г.



В январе 1947 г. Адамар и его супруга совершили поездку в Индию: Адамару была присвоена степень почетного доктора в Университете Дели, и он получил приглашение на Индийский научный конгресс. Участниками конгресса были ученые из США, Англии, Советского Союза, Канады и Китая. Адамар был единственным делегатом от Франции, так как Жолио-Кюри, который также получил приглашение, приехать не смог.

«Великолепный прием. Интересный конгресс», — писал Адамар в своих заметках о поездке в Индию (возможно, в черновике отчета в Академию наук) [IV.3]. Действительно, конгресс был очень важным событием, так как через шесть месяцев Индия после двухсотлетнего правления Британии должна была стать независимым государством. Джавахарлал Неру, будущий премьер-министр, произнёс на церемонии открытия речь, в которой говорилось о будущем развитии страны и ее роли в борьбе за мир.

Среди индийских ученых на конгрессе присутствовал Ч. В. Раман (1888—1970), известный своими работами по оптике, акустике и молекулярной физике. (В 1930 г. Раман был удостоен Нобелевской премии по физике.) Через два года после поездки Адамара в Индию Раман написал ему следующее письмо:

27 апреля 1947 г.

Дорогой друг!

С Вашей стороны было чрезвычайно любезно сообщить мне о моём избрании членом-корреспондентом Академии в тот самый день, когда состоялось избрание. Теперь я уже получил официальное уведомление и написал непременному секретарю письмо, в котором выразил свою глубокую благодарность за оказанную мне честь. Я действительно бесконечно счастлив присоединиться к Вашей прославленной Академии. Франция буквально осыпала меня почестями, из которых эта — последняя. Я глубоко тронут теплыми чувствами, выраженными в Вашем письме.

Благодарю Вас.

Искренне Ваш

Ч. В. Раман [IV.7].

Во время поездки Адамара в Индию Франция еще оставалась колониальной державой, в ее владения среди прочих стран входили Вьетнам и Камбоджа. Это было время первой индокитайской войны, которая провоцировала сильные антифранцузские настроения в Индии. Адамар вспоминает:

«Я хочу отметить большую симпатию к Франции, проявленную Дж. Неру, который всегда сдержанно высказывается о событиях в Индокитае. Здесь, в Индии, эти события вызывают сильное негодование и подрывают международный авторитет Франции.

Во время пребывания в Бомбее я узнал, что у французского консульства студенты устроили демонстрацию протеста, выкрикивая „Вон отсюда!“» [IV.3].

Но самого Адамара принимали вполне гостеприимно:

«Существующая в настоящее время враждебность по отношению к нашей стране еще не охватила университетские круги... Я должен отметить особенно дружелюбное отношение ко мне Дж. Неру... Английские власти также были к нам внимательны и весьма дружелюбны» [IV.3].

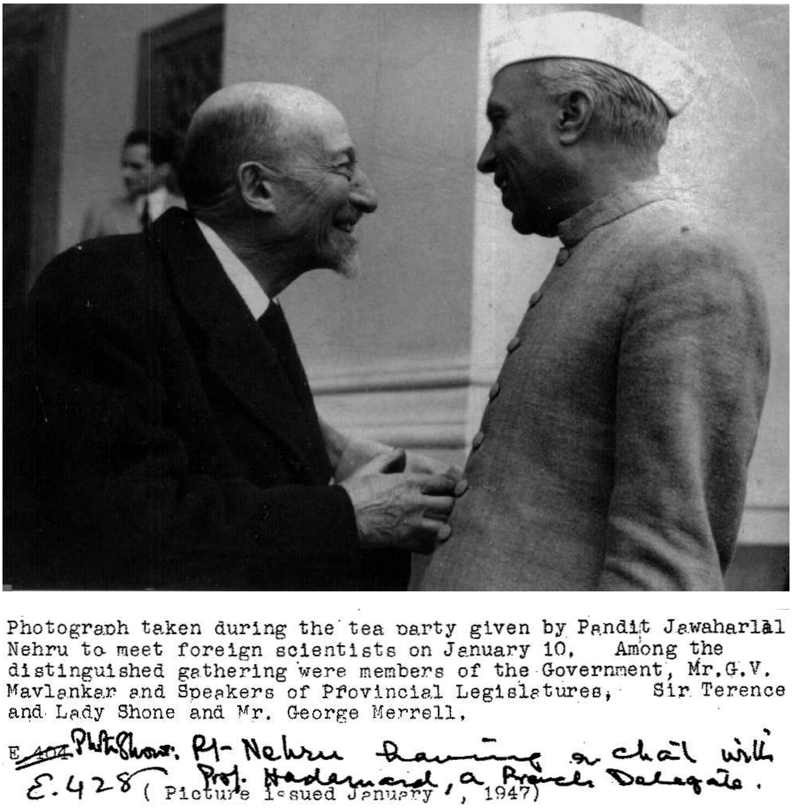
Пресса уделила немалое внимание визиту Адамара, о чем свидетельствуют следующие газетные статьи:

«Профессор Жак Адамар: его глубокие исследования в области чистой математики на протяжении длительного периода отвели ему почетное место в первых рядах математиков мира, и он приумножил свою славу исследованиями психологии открытия в области математики. Профессор Адамар подтвердил тезис, согласно которому математическое мышление возможно и без такого носителя, как язык» [«Times of India», 11 января 1947 г.].

«Под эгидой Института фундаментальных исследований им. Тата трое знаменитых ученых — проф. П. М. С. Блэкетт из Манчестерского университета, проф. Ш. Чжэнь из Academia Sinica[1] (Китай) и проф. Ж. Адамар из Académie des Sciences (Париж), которые находятся сейчас в Индии, — прочтут серию лекций в течение нескольких следующих дней во время их визита в Бомбей. Некоторые из этих лекций будут популярными, остальные доступны специалистам. Посещение лекций свободное для всех желающих» [«Free Press Journal», 14 января 1947 г.].

«Проф. Жак С. Адамар, несомненно, является старейшиной всех современных математиков. Не существует области математики, в которой он бы не оставил свой неизгладимый след. Хотя ему восемьдесят лет, он находится в полном

[1] Academia Sinica (лат.) — старое название Китайской академии наук. В настоящее время — название Академии наук Тайваня.



«Снимок, сделанный во время чаепития, устроенного Джавахарлалом Неру в честь иностранных ученых 10 января. Среди приглашённых были члены правительства, господин Г. В. Мавланкар, спикеры законодательных собраний штатов, сэр Теренс, леди Шоун и господин Джордж Меррелл.

На снимке Дж. Неру беседует с проф. Адамаром, делегатом от Франции» (1947).

расцвете своей интеллектуальной мощи, которой завидуют многие из его более молодых коллег» [«Morning Standard», 14 января 1947 г.].

По обыкновению супруги Адамар совершили много поездок: наряду с Дели и Бомбеем они посетили Бенарес, Майсур, Лакхнау, Алигарх, Бангалор, и, где бы они ни побывали, профессор Адамар читал лекции. «Я получил приглашение прочитать лекции на следующий год», — писал он [IV.3]. В Бангалоре супругов Адамар пригласили в женский колледж, где студентки разыграли сцены из «Сирано де Бержерака» и мадам Адамар обратилась к ним с приветствием. Было также много официальных приемов. Адамар вспоминал:

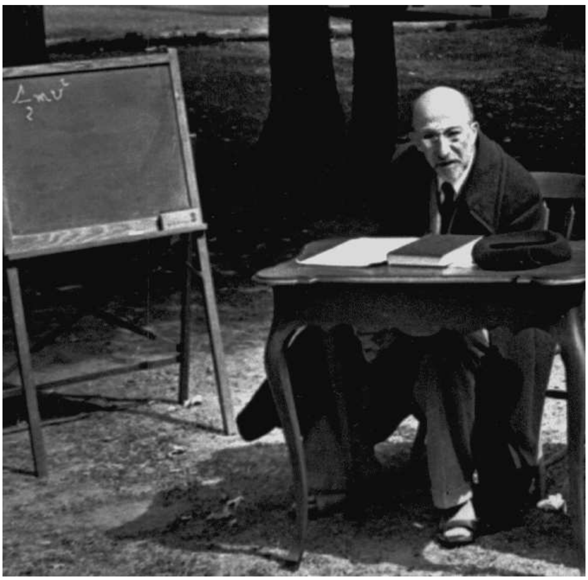
«Консул в Бомбее сделал то, что, по его мнению, следовало сделать, на высшем уровне: помимо помощи в обустройстве нашей жизни в Бомбее он устроил прием в нашу честь, который почтили своим присутствием губернатор Бомбея и леди Колвилл... Губернатор Бомбея пригласил нас, мадам Адамар и меня, на обед, где по его настоянию была исполнена „Марсельеза“, которую мы выслушали стоя. Впервые со времен войны можно было услышать „Марсельезу“.

Со своей стороны губернатор Французской Индии, который узнал о нашем приезде от консула в Бомбее, пригласил нас посетить Пондишери, где мы были его гостями на протяжении всего нашего краткосрочного пребывания» [IV.3].

После двух месяцев, проведённых в Индии, супруги Адамар возвратились домой.

§ 8.3. Математика, как всегда

Адамар продолжал активно работать еще следующие десять лет, его публикации появлялись регулярно. Статьи тех лет были посвящены главным образом задачам математической физики, психологии математического мышления и истории математики.



Адамар за работой на свежем воздухе

Адамар интересовался историей математики всю свою жизнь. Несмотря на свою шутку «Триумф для историка науки состоит в том, чтобы доказать, что никто никогда ничего не открыл» [I.375, с. 35], Адамар воздал должное многим своим великим предшественникам и современникам. Помимо статей с анализом работ Пуанкаре Адамар опубликовал работы о жизни и творчестве Мориса Леви, Пенлеве, Дюэма, Пикара и Джорджа Биркгофа.

В июле 1946 г. в Кембридже и Лондоне состоялись торжества в честь трехсотлетия со дня рождения Ньютона[1]. Адамар был одним из основных докладчиков и прочитал блестящую лекцию «Ньютон и исчисление бесконечно малых» [I.375]. В 1950 г. появилась его статья «Празднование двухсотлетия со дня рождения Лапласа». В 1954 г. он опубликовал статью «К проблемам истории науки: рождение исчисления бесконечно малых», в которой подчеркивал опасность слишком свободной интерпретации фактов истории математики.

Адамар за работой дома

Но были у Адамара и работы на другие темы, в том числе книга «Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций» [I.383], которая вышла в 1951 г. и только на русском языке. Она содержала почти исключительно обзор результатов Пуанкаре в этой области. История этой работы Адамара была следующей. В 1930-е гг. группа советских математиков во главе с В. Ф. Каганом приступила к подготовке издания полного собрания трудов Н. И. Лобачевского. В качестве приложения к полному собранию было решено издать серию монографий «Геометрия Лобачевского и развитие ее идей». Адамар откликнулся на это начинание рукописью, которая была переведена на русский язык и издана в 1951 г.

В 1946 г., за три года до образования Китайской Народной Республики, Адамар возобновил контакты с китайскими учеными, о чем свидетельствует сле-

[1] Юбилей Ньютона пришёлся на 1942 г., но празднование было отложено из-за войны.

дующее письмо от Чжу Цзяхуа, министра образования в Гоминьданском правительстве[1] и президента Academia Sinica:

Цзяоюйбу (Министерство образования)
Чунцин, Китай
10 апреля 1946 г.
Уважаемый профессор Адамар!

Я только что получил Ваше письмо от 30 января с ответом на мою телеграмму от 13 декабря 1945 г. Оно доставило мне истинное удовольствие, и я благодарю Вас за него.

Вы напомнили мне о Вашем визите в нашу страну до Второй мировой войны, во время которого Вы произвели на всех нас глубокое впечатление. Надеюсь, что Вы и далее будете способствовать интеллектуальному и научному сотрудничеству между нашими странами. Уверяю Вас, что со своей стороны я сделаю все, что в моих силах, для развития этого сотрудничества, которое является лучшей гарантией дружбы между нашими народами.

Примите, уважаемый профессор Адамар, наилучшие пожелания.
Доктор Чжу Цзяхуа [IV.6].

По-видимому, именно тогда Адамар вернулся к проекту новой большой книги по дифференциальным уравнениям в частных производных, которая должна была, по замыслу, включать в себя все важнейшие результаты в этой области. Еще в 1936 г., находясь в Китае, Адамар пообещал опубликовать свои лекции, но, по словам Мандельбройта, «произошло много событий, разразилась война Китая против Японии ⟨...⟩ и наконец началась большая война. Адамар не мог приступить к работе над своей книгой. Он ⟨...⟩ не забыл об этом и пронес замысел книги через войну. Он обещал написать книгу в двадцати двух главах» [III.265, с. 19].

Как показывает следующее письмо А. Василеско, ответившего на вопрос Адамара, в 1947 г. Адамар работал над второй главой своей книги, над разделом о регулярных и иррегулярных точках в смысле Винера:

Париж, 24 сентября 1947 г.
Достопочтенный сэр!

Я только что получил Ваше письмо. Два понятия, которые Вы упоминаете, тождественны. Понятие емкостного потенциала ввел Винер. Это самое старое понятие стало непосредственным обобщением аналогичного классического понятия, полученного из обобщения классической задачи Дирихле. С другой стороны, понятие емкостного потенциала, введённое Валле Пуссеном, происходит из *прямого доказательства* того факта, что для заданного замкнутого множества может существовать одно и только одно распределение массы, потенциал которого равен 1 почти всюду на этом множестве, за исключением подмножества нулевой ёмкости. Хотя оно получено независимо от обобщенной задачи Дирихле, это доказательство показывает *тождественность* двух понятий проводящего и емкостного потенциалов. Такой потенциал называется емкостным, потому что обусловлен *единственным* распределением массы, равным емкости множества. Подводя итоги, можно утверждать, что прогресс, достигнутый по сравнению с первым понятием, предложенным Винером, сводится к доказательству этой единственности.

Остаюсь всецело в Вашем распоряжении.
Искренне Ваш А. Василеско [IV.30].

[1] Гоминьдан — националистическая политическая партия Китая.

В начале 1954 г. Адамар получил официальное приглашение опубликовать свою книгу в Китае. Приглашение было подписано Хуа Локеном, выдающимся специалистом по теории чисел, который в 1950 г. вернулся из Соединенных Штатов в маоистский Китай. Хуа Локен стал директором математического факультета Университета Циньхуа и через два года был назначен главой Института математики Academia Sinica. Напомним, что Хуа Локен был одним из слушателей Адамара весной 1936 г., так как в то время он работал на математическом факультете Университета Циньхуа.

Хуа Локен (1910—1983)

В письме Хуа Локена Адамару от 5 января 1954 г. говорилось:

Профессор,

Мы очень рады узнать, что после многих лет упорного труда работа, возникшая из Ваших лекций по теории дифференциальных уравнений в частных производных, прочитанных в 1936 г. в Университете Циньхуа, наконец, подошла к завершению. Учитывая ценность этой работы в научном мире, Academia Sinica весьма охотно взяла бы на себя все заботы по изданию Вашей книги на французском языке в Пекине. Профессор, если бы Вы любезно согласились с этой идеей, то мы бы просили прислать Вас окончательный вариант текста в Институт математики через наше дипломатическое представительство в Берне.

Чтобы облегчить чтение Вашей работы, мы бы хотели, разумеется, с Вашего разрешения, издать Вашу работу на китайском языке. Это издание можно было бы рассматривать как публикацию Института математики.

Издание Вашей работы на китайском языке позволило бы нашему институту уделять больше внимания развитию в Китае исследований в области теории дифференциальных уравнений в частных производных. Наши молодые исследователи начнут неутомимо изучать полученные Вами важные результаты в этой области. Мы очень хотели бы получить от Вас ценные рекомендации, которые, несомненно, помогут нам в достижении этой цели.

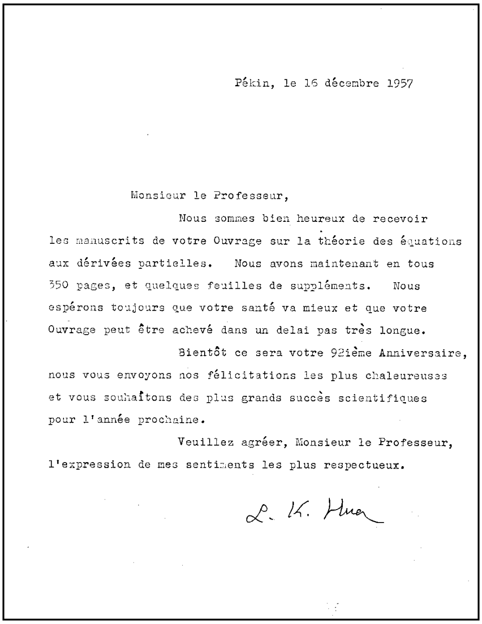
Прошу Вас принять уверения в моем глубочайшем почтении

Хуа Локен,

Директор Института математики

Academia Sinica

Пекин, Китай [IV.8].



Pékin, le 16 décembre 1957

Monsieur le Professeur,

Nous sommes bien heureux de recevoir les manuscrits de votre Ouvrage sur la théorie des équations aux dérivées partielles. Nous avons maintenant en tous 350 pages, et quelques feuilles de suppléments. Nous espérons toujours que votre santé va mieux et que votre Ouvrage peut être achevé dans un delai pas très longue.

Bientôt ce sera votre 92ième Anniversaire, nous vous envoyons nos félicitations les plus chaleureuses et vous souhaîtons des plus grands succès scientifiques pour l'année prochaine.

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'expression de mes sentiments les plus respectueux.

L. K. Hua

Письмо от Хуа Локена

В 1994 г. Бенуа Мандельброт прислал нам следующую историю об Адамаре («которую я часто рассказывал и которая, как мне кажется, всех заинтересует и позабавит»), относящуюся к тому времени.

«В 1949—1950 учебном году я имел трогательную и забавную встречу с Жаком Адамаром. В то время ему было около 85 лет. Его дочь Жаклин принимала активное участие в крайне левых политических акциях и была в то время особенно тесно связана с маоистским Китаем. Она устроила так, что к ее отцу обратились с просьбой издать в Китае специально написанную книгу. Адамар решил написать книгу по теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Он старался быть в курсе самых современных достижений в выбранной им области и стал посещать лекции Жана Лере[1] в Коллеж де Франс, требовавшие

[1]Жан Лере (1906—1998) внёс значительный вклад в топологию банаховых пространств и алгебраическую топологию. Ему принадлежит основополагающие исследования уравнений Навье—Стокса. Принцип неподвижной точки Лере—Шаудера стал мощным средством доказательства разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В 1950-е гг. Лере работал над различными аспектами задачи Коши для линейных гиперболических уравнений в частных производных.

высокого уровня знаний от слушателей, но не смог регулярно ходить на лекции и попросил моего дядюшку Шолема (его преемника в Коллеж де Франс) подыскать для него подходящие конспекты, которыми он мог бы воспользоваться.

Мой дядюшка попросил конспекты у меня, но, подобно Адамару, я уже не ходил на эти лекции. Однако один из моих друзей, Леон Триллинг, очень аккуратно посещал лекции и вел конспекты. Я попросил Леона, если это возможно, написать еще один экземпляр конспектов и лично передать его Адамару. Леон не смог отказаться от такого предложения, и в должное время мы отправились на квартиру к Адамару близ Орлеанских ворот.

Адамар попросил нас подождать, пока он просмотрит конспект. Он листал его страница за страницей, не останавливаясь для внимательного чтения, а лишь постоянного кивая: „Да, да". Затем Адамар внезапно замер и посмотрел на Леона Триллинга: „А это что такое?" Леон признался, что не знает. Адамар отозвался примерно так: „Ничего, ничего. Лере применяет метод Фурье к волновому уравнению. Я знаю то и другое и сумею установить взаимосвязь между ними".

Он продолжал листать конспект страницу за страницей, пока снова не остановился: „А это что такое?" Мой друг опять признался, что не может объяснить. Он пропустил одну лекцию и позаимствовал ее конспект из записей своего приятеля. „Ничего, ничего", — откликнулся Адамар и далее листал страницы без замечаний.

В конце концов книга Адамара была издана. Судя по отзывам, она не оказала особого влияния на развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных. Но, спускаясь в лифте, мы с Леоном Триллингом могли только удивляться, как этот человек, с виду пожилой и очень хрупкий, так легко схватывает самую суть в середине очень сложных рассуждений Лере и с одного взгляда может понять, что что-то не в порядке».

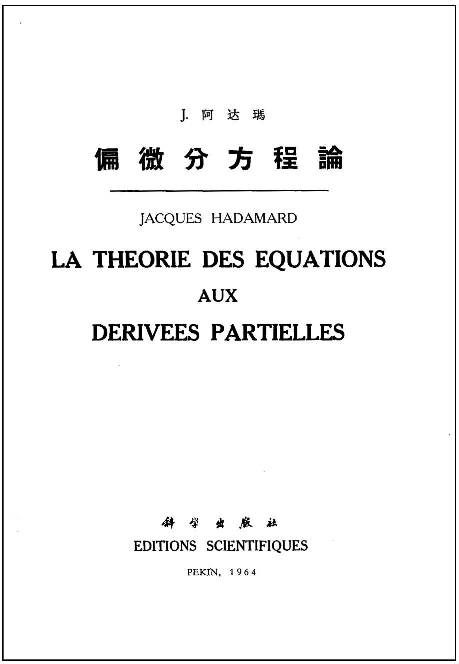
Ш. Мандельбройт, часто бывавший в семье Адамара, вспоминает:

«Адамару в то время было девяносто или почти девяносто, он уже не очень хорошо видел и не мог читать обо всем, что происходит в науке, но он получал «Математический сборник». Помню, как я навещал его... „О, Мандельбройт, тут один автор рассматривает дифференциальные уравнения в частных производных. Расскажите мне, что он там утверждает". Вот так, случайно, не продумывая, я был вынужден пересказывать ему чужие работы. Если результат был интересен, то Адамар помещал его в свою книгу... Но работал он все время. Мысленно я все еще вижу, как он работает дома, разгуливает туда и обратно по своему кабинету, размышляя... Мадам Адамар вязала и печатала на пишущей машинке то, что диктовал ей Адамар. Ей то и дело приходилось отрываться от вязания» [III.265, с. 19—20].

У-Синмо, бывший студент Адамара в Университете Циньхуа, занимался подготовкой книги Адамара к печати в Пекине и периодически переписывался со своим старым учителем. Вот что он писал 27 января 1959 г.: «Наши коллеги очень рады и признательны Вам за то, что Вы сделали для научного прогресса нашего народа. Мне приятно сообщить Вам, что Ваша работа выросла до 420 страниц. В Вашем возрасте это потребовало от Вас очень больших усилий, и было бы очень важно, если бы Вы смогли закончить Вашу работу до десятой годовщины нашей Народной Республики, которую мы в этом году будем торжественно праздновать 1 октября» [IV.9].

Каждую законченную главу Адамар по очереди посылал в китайское посольство в Берне, так как в Париже в то время китайского посольства не было. К весне 1959 г. в Китай было отправлено восемь глав. Жаклин Адамар описывает последний период работы над книгой:

«Его работоспособность уменьшилась, и мы с матушкой видели, что работа стала для него тяжким бременем. Кроме того, нас не переставала беспокоить еще одна мысль: моему отцу было за девяносто лет, было ли то, что он писал, достойно Жака Адамара? Поэтому мы обратились за помощью к моему кузену Лорану Шварцу, молодому математику, и дали ему копии рукописи, которые отсылал отец. Лоран Шварц заверил нас в том, что математическое содержание рукописи безупречно. Так отпала эта забота. Но отец быстро уставал, и нам было больно это видеть. Наконец нам удалось убедить его прекратить работу. Мы написали китайским математикам, что весьма преклонный возраст отца не позволяет ему продолжить работу над рукописью и что он приготовился вернуть Пекину часть той небольшой суммы, которую ему выплатили авансом. Но ответа и на этот раз не было. Через несколько лет после смерти моего отца меня вызвали в китайское посольство, где мне вручили экземпляры его книги...» [IV.1, с. VII(21)].


J. 阿达瑪

偏微分方程論

JACQUES HADAMARD

LA THEORIE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

科学出版社

EDITIONS SCIENTIFIQUES

PEKÍN, 1964

Титульный лист последней книги Адамара «Теория уравнений в частных производных», вышедшей в 1964 г., через год после кончины Адамара

Адамар не терял интереса к текущим событиям в развитии математики, особенно в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Он посещал семинары, и его глубокое понимание совершенно новых результатов удивляло его коллег. 10 февраля 1952 г. он отправил Ф. Бюро следующее письмо в связи с заметкой, незадолго до того опубликованной Бюро в «Comptes Rendus» о методе Фурье для гиперболических уравнений:

Дорогой друг!

Излишне говорить Вам, что Ваша заметка вызвала у меня большой интерес. Когда я в свое время предложил эту тему на премию Бордена Академии [в 1933 г.], я долгое время видел в ней интересную загадку и буду очень рад познакомиться с подробностями Вашего решения.

Вам пришлют гранки для правки. В отсутствие [математических] доказательств, которые Вы обязуетесь привести позже (и в которые я очень верю), отмечу, что в первых строках на второй странице, где система «предполагается несовместной», возможно, требуются пояснения.

Искренне Ваш

Ж. Адамар [III.64, с. 8].

Как вспоминает Лоран Шварц, Адамар слушал доклады на семинарах, пока ему не перевалило за девяносто:

«Несколько раз он посетил семинар Бурбаки. Он был единственным пожилым человеком среди молодёжи, заполнявшей аудиторию. Его называли „папаша Адамар“ и относились с большим почтением! Все уважали этого старого человека.

И сколь отличным от его времени должен был ему казаться язык! Трудно понимать уже то, что делает математик моложе на пять-десять лет. Адамар узнавал в новых понятиях старые, которые были ему знакомы, и в конце заседания спрашивал: „Скажите, а не означает ли то, о чём Вы говорите, то, что я называю ...?“ и т. д. И оказывалось, что так и есть. Он понимал главное, не вдаваясь в детали» [интервью, 28 октября 1992 г.].

Даже в глубокой старости Адамар активно поддерживал контакты с коллегами по всему миру, как показывает следующее письмо от Гаррета Биркгофа, который начиная с 1950 г. работал над составлением книги «Первоисточники по классическому анализу») [III.39] и получил список предложений от Адамара:

22 августа 1956 г.

Уважаемый мистер Адамар,

Весьма признателен Вам за Ваши девять предложений для сборника, который я пытаюсь составить. Они очень ценны для меня, и я надеюсь прочитать Ваши оттиски, когда в сентябре вернусь в Кембридж, — все лето я провел на западе страны.

Если по возвращении в Париж Вы найдете время написать мне и о других темах, то я прочту это с живым интересом и буду очень тронут.

Надеюсь, что Вы провели приятное лето, и это письмо застанет Вас в превосходном здравии.

Искренне Ваш

Гаррет Биркгоф [IV.10].

Жак и Луиза Адамар в Париже,
в марте 1947 г.

В последние годы жизни Адамар все еще оставался весьма активным членом Академии наук. Вот что пишет Жаклин Адамар:

«...Прикинув, что средний возраст академиков слишком велик и что некоторые молодые люди заслуживают места [в Академии], он внес следующее предложение: члены Академии старше семидесяти лет (а таких было немало) должны становиться почетными членами. Излишне говорить, что отца поддержали лишь немногие из его коллег и его предложение не было принято. И все же он заведомо был „самым молодым“ из этих „старцев“, по крайней мере по своему складу ума. Я не уверена, что кто-нибудь из них разделил бы его излюбленное удовольствие: после заседания есть на ходу чипсы из бумажного пакетика» [IV.1, с. VII(3)].

Адамар не переставал посещать собрания Академии наук. Он ставил стул поближе к выступающему и, усаживаясь, направлял ухо в его сторону, стараясь не пропустить ни слова. По окончании заседания он быстро вставал, оживленно включаясь в общую дискуссию. Этот неугасающий интерес ко всему окружающему отгонял мысли о бренности бытия и вселял уверенность, что так же будет и на следующем заседании.

О том же вспоминает и Н. Винер, посетивший Париж в 1951 г.: «Мы часто бывали у милого старого Адамара и его жены; нам казалось, что они оба окончательно лишились признаков возраста, хотя им перевалило уже за восемьдесят» [III.422, с. 321].

§ 8.4. На конгрессе в Гарварде

Первый послевоенный Международный математический конгресс открылся в Кембридже, штат Массачусетс (США), 30 августа 1950 г. Адамар был избран почетным председателем вместе с Кастельнуово и Валле Пуссеном. На этом

На конгрессе в Гарварде, 1950

конгрессе Филдсовские медали были присуждены Лорану Шварцу за его теорию обобщенных функций и Атле Сельбергу за важные результаты о нулях дзета-функции Римана и вклад в теорию чисел, в частности за элементарное доказательство теоремы о простых числах.

Однако до последнего момента оставалось неясно, смогут ли Адамар и Шварц принять участие в работе Конгресса. Политическое небо было покрыто тучами холодной войны. Кроме того, в июне началась корейская война. В книге Халмоша «Я хочу быть математиком» читаем: «США находились между эйфорией послевоенного патриотизма (мы победили!) и истерией маккартизма (они выигрывают!). Я уверен, что математические силы, такие как Лефшец, хотели свободного конгресса, а Государственный департамент США, возможно, опасаясь Палаты представителей, или общественного мнения, или Красной угрозы, создавал трудности, преодолеть которые Американскому математическому обществу было нелегко» [III.163].

Все члены французской делегации, кроме Шварца и Адамара, получили американские въездные визы. Шварц объясняет: «Нам отказали, потому что я в прошлом был троцкистом, а Адамар питал симпатии к Французской коммунистической партии» [интервью, 28 октября 1992 г.].

Существует анекдот о том, будто на собеседовании в американском посольстве на вопрос, не намеревается ли он свергнуть правительство США, Адамар ответил: «Я слишком стар для этого».

Американское математическое общество пыталось воздействовать на власти и заставить их изменить принятое решение, и, благодаря личному вмешательству президента Трумена, Шварц получил свою визу за несколько месяцев до начала конгресса. Судьба визы Адамара все еще оставалась неопределенной. В негодовании шестнадцать из двадцати восьми членов французской делегации решили бойкотировать конгресс, если въездная виза Адамару не будет гарантирована. Американские математики продолжали оказывать давление на Вашингтон. Наконец Трумен снова вмешался. Виза была выдана Адамару за пять дней до отъезда из Франции.

Шварц рассказал авторам следующую историю:

«Когда мы, члены французской делегации, пришли на причал, чтобы подняться на борт судна „Queen Mary“, Адамар не мог найти свой билет. Поэтому все мы стояли на причале, пытаясь угадать, где билет мог бы быть. Внезапно Адамар произнес: „О, я все прекрасно вспомнил. Когда я проходил таможенный досмотр, офицер спросил у меня мой билет. Я показал ему билет и совершенно уверен, что таможенник взял его у меня“. Мы попросили разрешения задержать отход судна, что было необычно, и отправились к таможенному офицеру. Адамар заявил: „Я очень хорошо помню, что Вы взяли мой билет“. — „Нет, сэр, — гласил ответ, — я не забрал ваш билет, но видел, что когда я вернул вам его, вы положили его вместе с мелочью себе в карман“. Адамар сунул руку в карман и извлек оттуда билет».

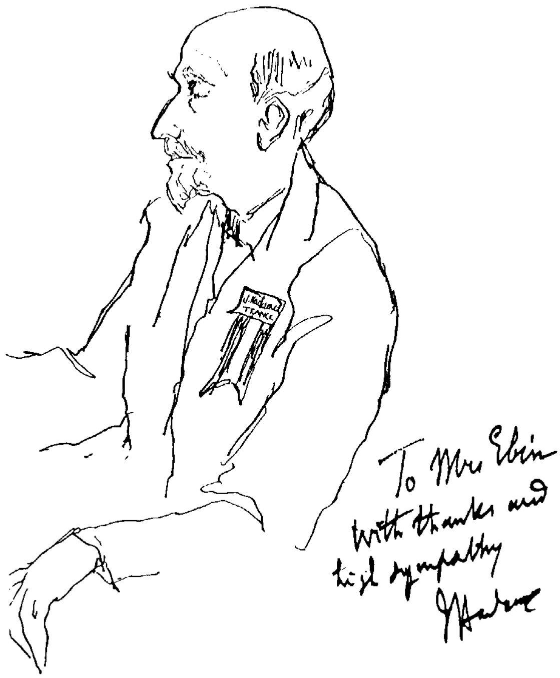
Как раз перед открытием конгресса поступила следующая телеграмма от президента Академии наук СССР:

Академия наук СССР высоко ценит направленное советским ученым любезное приглашение принять участие в работе Международного математического конгресса, который состоится в Кембридже. Но советские математики, сильно загруженные своей обычной работой, не смогут принять участие в заседаниях конгресса. Надеемся, что предстоящий конгресс станет значительным событием в математической науке. Желаем конгрессу успеха в его деятельности.

С. Вавилов, президент Академии наук СССР [III.332, с. 122].

Эта телеграмма была зачитана на открытии конгресса, которое состоялось во второй половине дня в среду 30 августа в театре Сандерса Гарвардского университета. Как вспоминает Данжуа, когда хрупкая фигура Адамара появилась на сцене, все 2000 участников встали и зааплодировали ему» [II.56, с. 737].

Мы воспроизводим здесь портрет Адамара, нарисованный на конгрессе, вместе с письмом от Александра Эбина (президента Американского института человека), написанным через три недели после смерти адресата.



Портрет Адамара с дарственной подписью «Миссис Эбин
с благодарностями и глубокой симпатией. Адамар»

Вот начало письма Эбина, которое проясняет происхождение этого портрета:

8 ноября 1963 г.

Дорогой профессор Адамар!

Прилагаю копию наброска пером Вашего портрета с Вашей дарственной надписью художнице. Надеюсь, этот набросок напомнит Вам приятное происшествие на Международном математическом конгрессе 1950 г. в Гарварде. Молодая художница спросила, не согласитесь ли Вы позировать ей для наброска портрета. Вы согласились позировать для двух портретов: в профиль и анфас. Вам больше понравился портрет анфас, и художница оставила его Вам со своей подписью. Тогда Вы оставили для неё автограф на портрете в профиль.

Теперь я расскажу Вам подоплеку этого события. Эта художница — моя жена, она профессиональный иллюстратор и преподает изобразительное искусство. Я присутствовал на конгрессе как член Американского математического общества, а моя жена, которая ничего не знает о математике или математиках, пришла со мной. Я ожидал, что ей будет интересно ознакомиться с музеями и достопримечательностями Кембриджа. Но вместо этого жена подошла ко мне очень оживленная и сообщила, что увидела необычайно интересного человека и он согласился позировать ей для наброска портрета. Я спросил у неё, как его зовут, но она не знала. Когда моя жена с триумфом вернулась в отель и показала набросок с автографом, я воскликнул: «Господи, да это же наш прославленный гость — почетный президент этого конгресса!»

Адамар с А. Гаффари (в центре) и Т. Мотцкином на конгрессе в Гарварде (1950)

Эта новость не произвела на мою жену никакого впечатления; она находилась под сильным впечатлением от Вас как от личности. Я всегда считал, что быть мужем художницы интересно: никогда не знаешь, к чему приведёт её энтузиазм.

Как и все участники конгресса, я считаю Вас живым воплощением математической мысли Франции. В результате многолетних математических и исторических изысканий я обнаружил некоторые неожиданные факты, о которых мне хотелось бы сообщить французским математикам, и сделать это уместно в личной форме. Я сожалею, что не настолько хорошо владею французским языком, чтобы правильно перевести моё сообщение. Я вынужден писать на моем родном английском языке, ибо я родился в Англии, но хочу придать моему английскому современное галльское звучание, чтобы выразить восхищение, которое по различным причинам моя жена и я питаем к Вам. Я пользуюсь высокой привилегией обратиться к носителям математической мысли Франции через Вас. Я верю и надеюсь, что то, что я намереваюсь сообщить, оправдает мою дерзость в Ваших глазах и в глазах других.

А теперь к нашим математическим баранам ⟨...⟩[1].

С восхищением и глубоким уважением

Александр Эбин [IV.11].

Адамар не выступил с математическим докладом на этом конгрессе. Но на секции логики и философии он прочитал доклад «Испытываем ли мы недостаток слов?». Он говорил о проблеме подыскания надлежащих терминов для новых математических понятий, которая интересовала его в течение некоторого време-

[1] Оставшаяся часть письма посвящена истории математики.

ни. Три года назад он так сформулировал ее в докладе о Ньютоне: «Создание слова или обозначения для класса идей может быть (и часто является) научным фактом огромного значения, потому что означает объединение этих идей в наших последующих размышлениях» [I.375, с. 38]. В заключительных замечаниях своего доклада на конгрессе Адамар сказал:

«Чтобы избежать нехватки слов, полезно не тратить их понапрасну; я имею в виду не употреблять несколько слов там, где требуется лишь одно. Зачем говорить о „корнях“ уравнения или многочлена, если уравнение имеет решения, а у многочлена есть нули. Не существует также причины называть решения дифференциальных уравнений „интегралами“, т. е. применять термин, который используется и в другом смысле...» [I.386].

После конгресса со стороны Мандельбройта и Шварца потребовалось немало усилий, чтобы отговорить Адамара от нового путешествия: он вознамерился отправиться верхом на лошади в мексиканские леса, чтобы пополнить свою ботаническую коллекцию. Вместо этого его отвели в соседний лес, где росли интересные папоротники, и он остался вполне доволен» [III.358, с. 48].

§ 8.5. Общественная деятельность

Активное участие Адамара в решении социальных проблем не уменьшилось ни в послевоенные годы, ни в 1950-е годы, период политической нестабильности и опасной конфронтации. Адамара часто можно было видеть на трибуне или в залах общественных собраний, на митингах, организованных противниками войны в Индокитае и Алжире и ремилитаризации Германии. Адамар всегда с готовностью выступал в защиту того, что казалось ему человечным и справедливым, и пытался убедить других. Он был членом Почетного комитета Движения за мир, против расизма и антисемитизма, а также продолжал свою работу в Центральном комитете Лиги прав человека.

В статье «Жак Адамар: великий ученый, прогрессивный человек» [II.39] Мальгранж писал:

«Возможность познакомиться с ним представилась мне на митинге Движения за мир. Мой собеседник, с молодых лет (особенно после дела Дрейфуса) принимавший участие в борьбе за прогресс и мир и вкладывавший в эту борьбу всё своё влияние, родился во Второй империи и был на пять лет старше Ленина!»

Иногда говорили, будто Адамар — коммунист. В действительности он никогда не был членом коммунистической партии, хотя симпатизировал левым. Во время участия в Сопротивлении дочь Адамара Сесиль и ее муж Рене Пикар стали коммунистами. Что касается Жаклин, сначала она не хотела всту-

Адамар со своей дочерью Жаклин

пать в партию из-за показательных процессов в Советском Союзе. Но после войны этот аргумент, по-видимому, утратил свое значение, и по возвращении из Соединенных Штатов Жаклин видела основную опасность в проникновении американского образа жизни во Францию. Поэтому она вступила в коммунистическую партию. В глазах Адамара и его жены поступок Жаклин был вполне естественным. Вот как красочно описывает Жаклин атмосферу, царившую в семье Адамар:

«Ячейка могла собираться у нас дома, потому что у нас была самая большая квартира, а моих родителей, приглашаемых в качестве почетных членов, глубоко интересовали наши дискуссии. Однажды вечером мой отец, узнав, что организуется группа расклейщиков плакатов, спросил у нас, не может ли он войти в состав группы, в надежде, как он пояснил, что, если его арестуют, он сможет предъявить полицейскому офицеру свое удостоверение члена Института Франции с трехцветным французским флагом. Наш отказ разочаровал его, ибо мы лишили его возможности принять участие в таком приключении!

Отец, погруженный в мир абстракций, не всегда следовал за ходом наших рассуждений, но матушка, моя marquise révolutionnaire (революционная маркиза), как я ее называла, обладала врожденным политическим чутьем и четко высказывала свои взгляды. Однажды, когда мы садились в автобус, я заметила ошеломленные взгляды людей, обращенные на эту пожилую элегантно одетую даму в шляпе с вуалью и в перчатках, которая развернула коммунистическую „L'Humanité“» [IV.1, с. VII(4)].

Однажды в январе 1957 г. призыв Адамара голосовать за кандидата-коммуниста был напечатан с его фотографией в «L'Humanité» [IV.22]. Даниэль Майер, президент Лиги прав человека, так прокомментировал политические взгляды Адамара: «Он присоединился к борьбе Сопротивления, потому что это была борьба против фашизма. Тот же дух вел его, когда он боролся против различных проявлений маккартизма, т. е. нетерпимости к инакомыслию. Активность Адамара сближала его с теми, кто подвергался систематическим подозрениям и преследованиям со стороны маккартистов, а симпатии Адамара к крайне левым были не просто результатом семейного единства, но и велением сердца» [II.58, с. 356—357].

В письмах Эйнштейна к Адамару, приведенных в книге [III.120], даются пять ответов на некоторые предложения Адамара в связи с его участием в Движении за мир в 1948—1952 гг. Эйнштейн также был глубоко вовлечен в общественную деятельность, но его программа защиты мира и политические взгляды (в частности, создание всемирного правительства и наднациональных сил безопасности и его призыв к гражданскому неповиновению) были весьма далеки от программы защиты мира и политических взглядов Адамара, и Эйнштейн скептически относился к инициативам Адамара. Например, когда Адамар попросил Эйнштейна написать обращение ко Всемирному конгрессу мира, который состоялся 20 апреля 1949 г. в Париже, Эйнштейн отказался:

«Должен честно признаться, что впечатления от первого такого конгресса, состоявшегося прошлым августом в Варшаве, и от недавнего конгресса в Нью-Йорке приводят меня к мысли, что процедура такого рода не служит реально делу международного понимания. Причина проста: это в большей или меньшей степени советская инициатива, и вся организация идет оттуда. Само по себе это было бы неплохо, если бы русские и их союзники могли действительно свободно выражать свои личные мнения, а не излагали бы официальную советскую точку зрения, как это происходит в данный момент. Впечатление, которое сложилось у большинства людей, характеризуется словами „советская пропаганда“. Тех, кто говорит от лица западных стран, выбирают по принципу лояльности к глобальной модели. Это приводит к обострению глупых споров и дискуссий, характерных для международной ситуации в наше время» [III.120, с. 131].

Во время корейской войны Адамар направил Эйнштейну открытое письмо, в котором обвинял американцев в разработке биологического оружия:

«До нас дошла ужасная новость о возможном распространении самых опасных болезней с самолетов. Следует ли нам думать, что распространение таким образом чумы можно рассматривать как часть военной операции? Я сказал о возможности, так как информацию о том, что такие ужасы уже происходят, официальные круги отрицают.

Но что неоспоримо — работа по подготовке такой войны уже проводится на протяжении ряда лет...» [I.387].

26 марта 1952 г. Эйнштейн ответил в личном письме Адамару:

Месье, наверное, я последним стал бы оправдывать столь отвратительные виды оружия, как атомные бомбы или биологические средства поражения. Кроме того, нет ничего удивительного, если тех, кто, по их собствен- ному признанию, занимается систематической разработкой таких ужасных вещей, подозревают в их применении.

Jacques HADAMARD
MEMBRE DE L'INSTITUT

8e ANNÉE — N° 389

AC

Directeur politique : Yves FA

Lettre ouverte au professeur Einstein

La science américaine accepte-t-elle d'encourir le mépris de la science mondiale ?

Mon cher Ami,

Que devons-nous penser des nouvelles effroyables qui nous parviennent sur les possibilités de dissémination, par des avions américains, des épidémies les plus dangereuses ? Faut-il croire que la propagande de tels fléaux puisse être considérée comme faisant partie des opérations militaires ?

J'ai dit : la possibilité — puisque des informations d'après lesquelles de pareilles horreurs seraient déjà en cours, ont été l'objet d'une dénégation.

Mais, ce qui est indéniable, ce sont les travaux — en cours, eux, depuis plusieurs années déjà — sur la préparation de cette guerre. Il y a, en tout cas, depuis 1946, un « consultant spécial pour la guerre bactériologique », George W. Merck qui, en janvier 1946, a envoyé un rapport sur le travail qui s'est accompli et s'accomplit toujours dans ce sens, au Camp Detrick (Maryland). Malgré le secret dont on avait commencé à entourer, et dont on entoure toujours ce travail, le Baltimore du 17 juillet 1949 a révélé que 4.000 scientifiques y sont employés à des recherches de cette nature. Le silence n'avait pas été interrompu jusqu'à cette date où il le fut par un communiqué du ministre de la Défense. D'autres déclarations, par exemple, celle (juin 1949) du général Waitt, chef du service chimique de l'armée américaine, nous renseignent dans le même sens.

Que faut-il penser de ces préparatifs, et qu'en pense l'opinion américaine, à commencer par celle des savants américains ? Vous ne croirez évidemment pas plus que moi à l'excuse — on a osé l'inventer — qu'il s'agit de préparer le pays à se protéger, car dans ce cas (?) il serait facile aux scientifiques de ne communiquer aux autorités militaires que cette partie de leurs travaux. Or, ce n'est certainement pas le cas, à en juger par les rapports dont nous connaissons l'existence.

Puisque, par essence, la guerre bactériologique s'attaque à l'ensemble des populations, à tout ce qui vit dans une région, qu'on ne peut pas limiter, comment faire cadrer de pareils projets avec la prétention de considérer une telle guerre comme une guerre de libération ? On ne veut plus libérer, à quelque degré que ce soit, les populations : on veut les détruire.

Et la destruction ne se limiterait pas aux pays auxquels on la destine. Que ses auteurs le veuillent ou non, elle aurait tôt fait de gagner l'Europe occidentale aussi bien que l'autre, et peut-être aussi l'Amérique, en dépit de la distance.

En somme, ce projet, dont tous les renseignements affirment l'existence, consiste à détruire presque toute la population de la planète pour forcer les rares survivants à accepter telle conception politique déterminée.

Y a-t-il vraiment des hommes pour vouloir cela ? Et ils ont l'aide de scientifiques ! Et parmi eux, des médecins, puisqu'il s'agit de maladies ! Le médecin n'est-il plus celui qui a la tâche sacrée de guérir ?

Nous savons, par les voyageurs d'outre-Atlantique, que les hommes de science qui font cette vilaine besogne ont déjà la réprobation de nombre de leurs collègues. La science américaine, la médecine américaine accepteraient-elles d'encourir celles de la science et de la médecine mondiales ?

FEU

La réplique à Lisbonne ne s'est pas fait attendre. Le gouvernement de Moscou propose une réunion des Quatre Grands, afin d'examiner un traité de paix qui interdirait à l'Allemagne de devenir un guêpier. En réalité, c'est la neutralisation de l'Allemagne qu'offre M. Gromyko.

Ce document contient un certain nombre de propositions qui, sans aucun doute, susciteront, dans tous les milieux de l'Allemagne occidentale, le plus vif intérêt : l'Allemagne retrouverait son unité et sa souveraineté ; elle se donnerait un régime démocratique qui l'empêcherait de comploter contre la paix ; elle s'engagerait à n'entrer dans aucune coalition militaire ; elle reconnaîtrait les frontières qui lui ont été assignées à Potsdam ; elle disposerait d'une armée limitée aux exigences de sa défense nationale et fabriquerait du matériel de guerre dans des conditions fixées par le traité.

Sur ces points (et les deux derniers), il est nécessaire de marquer notre position, à la fois de

Renforts pour le corps expéditionnaire en Corée

Письмо Адамара к Эйнштейну, опубликованное в газете «Action», март 1952 г.

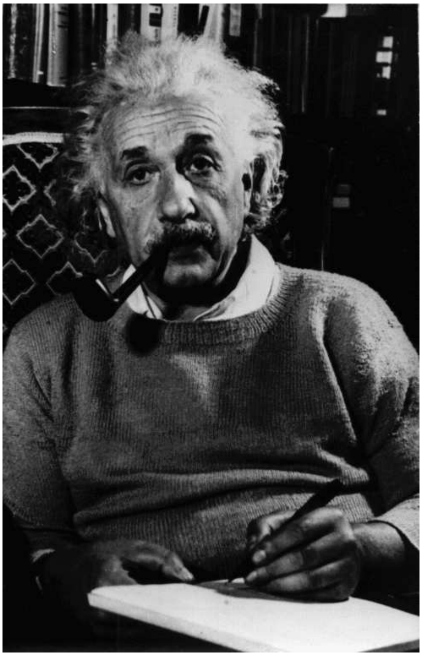
Но зло, в которое мы столь глубоко погружаемся, нельзя приписать только одной стороне. Думаю, что ситуацию нельзя улучшить простыми ссылками на времена, в которые мы живем. Единственным конструктивным выходом стало бы создание наднациональных сил безопасности. Европейские народы могли бы внести в создание таких сил свой вклад, если они не считают, что непременно должны рассчитывать на поддержку со стороны Соединенных Штатов для своей жалкой колониальной политики. К сожалению, следует сказать, что нигде, кроме, возможно, Индии, не существует влиятельного общественного мнения, которое сопротивляется всем этим нездоровым компромиссам.

Искренне Ваш

А. Э. [III.120, с. 132].

Адамар попросил у Эйнштейна разрешения опубликовать это последнее письмо, но Эйнштейн не согласился, заметив: «Это политическая пропаганда и контрпропаганда, которая не может de facto опираться на какие-либо известные сведения, поскольку в результате она вызовет только ненависть и враждебность» [III.120, с. 139].

В 1950 г. в Соединенных Штатах были арестованы и обвинены в выдаче атомных секретов Советскому Союзу Юлиус и Этель Розенберг. Они отрицали обвинения, но, хотя доказательства их вины были слабыми, их приговорили к смертной казни и казнили. Адамар, у которого, по словам Жаклин Адамар, были две страсти — «математика и справедливость», остро переживал за них, поскольку их процесс напомнил ему дело Дрейфуса. В декабре 1952 г. он направил



Эйнштейн в Принстоне

некоторым американским коллегам письма, в которых выразил свое беспокойство. Вот какое письмо[1] он написал Винеру:

31 декабря 1952 г.

Дорогой профессор Винер!

Прежде чем написать Вам, я некоторое время колебался. Имеет ли право иностранец вроде меня говорить Вам о том, что касается Вашей страны? Этими колебаниями объясняется мое долгое промедление с письмом к Вам, хотя вопрос, который я собираюсь Вам задать, очень давно мучает меня.

Разумеется, я не знаю, что Вы думаете о деле супругов Розенберг; но не могу не сказать Вам о том, что очень беспокоит нас в этом деле.

Если супругов Розенберг казнят, то очень многие будут считать их казнь убийством, — убийство, замаскированное юридическими формальностями, остается убийством.

Честь американской юстиции, ее репутация во всем мире, сейчас поставлена на карту.

Таково, да будет Вам известно, мнение многих ученых не только во Франции, но и в других странах, и существует, Вы согласитесь со мной, нечто такое, что мы можем назвать солидарностью ученых всего мира. О многом ученые думают сходным образом.

Простите меня за то, что я пишу это письмо Вам и трем Вашим коллегам. Возможно, мне не следовало бы так поступать, если бы я не был дожившим до наших дней свидетелем дела Дрейфуса, все еще хранящим в памяти кипение страстей той эпохи и энергичное вмешательство интеллигенции. Я не мог удержаться, чтобы не сказать о своих воспоминаниях моим коллегам, которых я высоко ценю.

Искренне Ваш

Ж. Адамар.

[1] Это (и следующее) письмо Винеру Адамар написал на английском языке.

Пользуясь случаем, прошу Вас принять наилучшие и самые искренние пожелания по случаю Нового года от мадам Адамар и меня Вам и миссис Винер [IV.31].

Винер ответил немедленно, но конфиденциально, и через три недели после первого письма Адамар направил ему второе:

19 января 1953 г.

Дорогой профессор Винер!

Благодарю Вас за Ваше письмо. Разумеется, не может быть и речи о том, чтобы говорить о нем с кем-нибудь еще. Содержание его остается строго между нами. Но Вы можете использовать мое письмо, как Вам будет угодно.

Я согласен с Вами в оценке ужасной атмосферы нашего времени и, как и Вы, не считаю разумным или честным вынесение в такой атмосфере не подлежащего обжалованию приговора. Именно такую позицию занял трибунал в деле Дрейфуса, и они не осудили его на смертную казнь.

Разумеется, нет возможности доказать невиновность Розенбергов, невиновность — понятие негативное, и в качестве таковой доказать ее очень часто невозможно. Но приговор, в особенности смертный приговор, — преступление, до тех пор пока обвинение не доказало полностью виновность, не оставив ни одного сомнения, — до тех пор обвиняемых следует предполагать невиновными... [IV.31].

Среди бумаг Жаклин Адамар сохранился черновик письма ее отца Пьеру Мендес-Франсу (1907—1982), выдающемуся государственному деятелю, который в течение семи месяцев 1954—1955 гг. был премьер-министром Франции. Мендес-Франс положил конец войне в Индокитае и подготовил независимость Туниса. Он вел переговоры по поводу плана ограниченного и контролируемого вооружения Германии, одобренного Национальным собранием Франции. Адамар обратился к Мендес-Франсу с призывом предотвратить милитаризацию Германии:

18 декабря 1954 г.

Господин премьер-министр!

Как Вы видите, мне потребовалось очень много времени, чтобы решиться написать Вам по вопросу, который заставляет сжиматься сердца всех французов и, я уверен, Ваше сердце. Но я не могу дольше молчать.

За свою долгую жизнь я потерял всех моих сыновей в войнах, начатых Германией: все они были добровольцами, двое старших в Первую мировую войну и последний в войну 1939 г. Я обращаюсь к Вам с мыслями о моих внуках и о моем правнуке: в свете истории не берите на себя ответственность дать оружие народу (считаю своим долгом сказать Вам это), который еще не полностью излечился от милитаризма, народу, у которого, я полагаю, единственного в мире, есть Kriegsstrasse [улица войны].

Никто более не отважится делать вид, будто нацизм в Западной Германии мёртв: от некоторых министров господина Аденауэра поступило слишком много заявлений, чтобы Германию Бонна можно было назвать пацифистской страной. А когда нам говорят, что перевооружение Западной Германии — гарантия мира, я слишком хорошо помню (Вы, возможно, были тогда слишком молоды, чтобы обратить на это внимание), как Гитлер еще в 1933 г. заявил, что перевооружение Германии — гарантия мира в Европе.

Господин премьер-министр, народ нашей страны не согласен с перевооружением Германии. Доказательство этому — то, что никто не отваживается при всех правительствах, сменяющих одно другое и ратующих за перевооружение Германии, спросить мнение французов, организовав референдум — проведение которого в иной ситуации было бы весьма естественным — по вопросу, имеющему жизненно важное значение для будущего нашей страны.

Не позволяйте Вашему моральному авторитету, который Вы приобрели благодаря заключению мира в Индокитае, лечь на чашу весов в поддержку решения, которое осталось бы мрачной страницей в истории Франции.

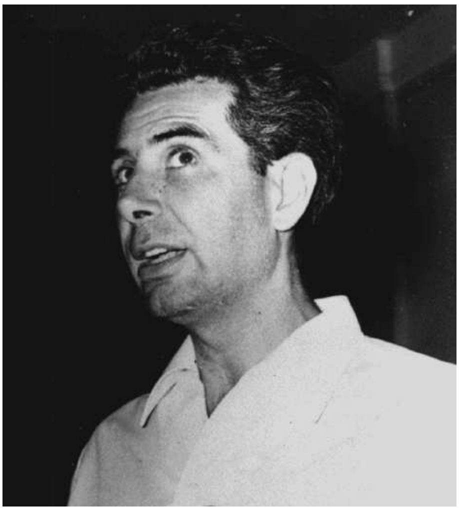
Осмелюсь ли я добавить, что мне невыносимо думать о том, что есть еврей, который использует весь свой авторитет и ставит всю свою политическую карьеру на службу перевооружения нацистов? Я не стал бы напоминать об этом никому другому, но будьте уверены, что другие скажут это и найдут в этом причину для антисемитизма. Позвольте одному из немногих оставшихся в живых основателей Лиги прав человека заявить Вам об этом.

Написать это Вам со всей откровенностью я решился, страдая от сознания того, что готовится непоправимое.

Господин премьер-министр, я по-прежнему возлагаю на Вас все мои надежды [IV.12].

Вероятно, Адамар не отправил это письмо в надежде на то, что Пьер Мендес-Франс в действительности придерживается тех же взглядов. Нам не удалось найти ответное письмо в архиве Института Мендес-Франса.

Даже в глубокой старости Адамар не давал себе послаблений, когда речь шла о гражданском долге. Мандельбройт вспоминает в [II.42, с. 18], что однажды в возрасте за 80 чета Адамар была сбита автомобилем, но ушибы и царапины не помешали Адамару появиться через два дня в президиуме многолюдного собрания.



Жан-Пьер Кахан

Вспоминает Ж. П. Кахан:

«Мне довелось видеть Адамара на различных митингах. Он всегда опаздывал, всегда пробирался на цыпочках на сцену, просил кресло и барабанил пальцами по столу, до тех пор пока его не приглашали сказать несколько слов. Лучше всего мне запомнилось выражение его лица. По фотографиям Вы можете судить о его четких чертах и библейской красоте, но более всего поражала острота его взгляда» [II.29, с. 26].

§ 8.6. Воспоминания Эрнеста Кахана

Многие годы Адамар был членом Союза рационалистов. Эта ассоциация, созданная в 1930 г., была открыта для каждого, чья цель — «распространение рационалистического духа и научного метода». Союз издавал журнал «Cahiers Rationalistes» («Рационалистические выпуски») и регулярно организовывал конференции в Сорбонне. В конце своего выступления на одной из таких конференций восьмидесятисемилетний Адамар сказал: «Исторически научная и моральная истины идут рука об руку начиная с шестнадцатого века. Моральный прогресс, который мы должны защищать, вся наша моральная эволюция, пробуждённая Э. Ренаном и не разрушенная фашизмом, идут рука об руку с научным прогрессом и никогда не должны от него отделяться» [I.389]. Для Адамара это были не просто слова. В его жизни моральные и научные ценности были действительно неразрывны. Когда Адамару было девяносто лет, его избрали почетным президентом Рационалистического союза.

Бывший генеральный секретарь (с 1954 по 1967 гг.), а затем (с 1968 по 1970 гг.) президент Союза рационалистов Эрнест Кахан любезно разрешил нам включить в нашу книгу свои неопубликованные воспоминания об Адамаре, с которым он впервые встретился после Второй мировой войны в бытность свою секретарем Национального профсоюза высшего образования. Кахан был биохимиком и главой Лаборатории органического микроанализа Национального центра научных исследований (CNRS) с 1946 по 1955 гг., а затем стал профессором на факультете естественных наук в университете Монпелье с 1955 г. до выхода на пенсию в 1973 г. Всегда интересовавшийся историей науки Эрнест Кахан писал о Пастере, Тейяре де Шардене, Клоде Бернаре, Лавуазье и многих других. Об Адамаре он вспоминал следующее.

«Жизнь профсоюза не богата забавными случаями. Вот один, который мне приятно вспомнить. Он касается человека, которого я имел удовольствие называть почтенным коллегой Адамаром, а за глаза мы все почтительно и ласково называли „папашей Адамаром“ („le petit père Hadamard“).

Адамар был одним из первых членов Национального профсоюза высшего образования с тридцатых годов, когда профсоюзы гражданских служащих еще были вне закона. В 1945 г. он повторно вступил в наш профсоюз, когда тот был легализован. Адамар был непременным участником демонстраций, на которых выдвигались какие-либо требования (равно как и демонстраций другого рода), и, прибыв на демонстрацию по приглашению или без такового, он без колебаний отправлялся к трибуне в полной уверенности, что именно там его место и что его встретят с радостью — хорошего человека, хорошего товарища! Он также мог внести личный вклад в профсоюзное движение, поскольку ложная и глупая

Эрнест Кахан, отец Ж.-П. Кахана

скромность была чужда ему и он, король математиков, мог предложить свою долю славы на службу профсоюзному движению.

Первая крупная демонстрация после войны была организована парижским региональным профсоюзом образования, департаментской секцией FEN[1], входившей тогда на правах члена в CGT[2], в конце 1946 г. Сбор участников демонстрации был назначен на авеню Опера на углу улицы Людовика Великого, откуда процессия должна была проследовать к министерству финансов в Луврском дворце. Журналист из „Huma“ [„L'Humanité“] вцепился в меня, чтобы я назвал знаменитостей среди тех, кто пришел на демонстрацию. Их было много, и некоторые были очень известны. Я был занят тем, что собирал свою группу, и в спешке назвал ему лауреата Нобелевской премии Жолио-Кюри, директора CNRS Тейссье, профессора Политехнической школы Шаплона, профессора Музея[3] Орселя, группку профессоров Сорбонны и папашу (père) Адамара, не вдаваясь в детали и, как обычно, упомянув лишь самых великих.

Журналист из „L'Humanité“ скрупулезно записывал, и на следующий день в списке известных лиц, участвовавших в демонстрации, фигурировал „отец (père) Адамар“. Я смутился, но Адамар пришел в восторг и смеялся до слез.

* * *

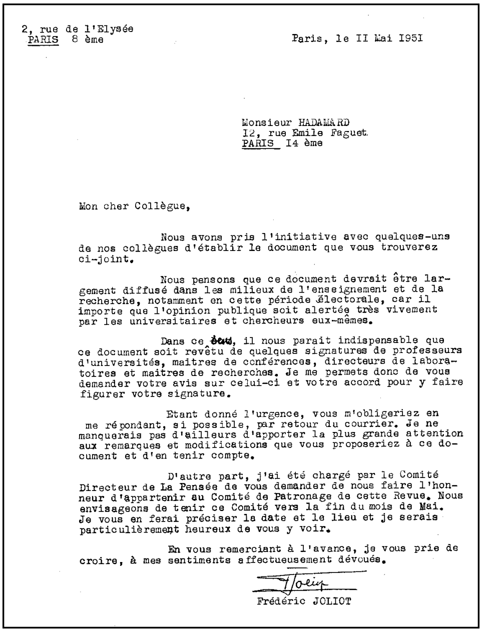
Как мы чтили его! Как мы им восторгались! Иногда мы сетовали на то, как он обращался с нами, когда речь шла о выборе. Он буквально выводил нас из себя, говоря: всё или ничего.

[1] Fédération de l'Éducation Nationale (Национальная федерация образования).

[2] Confédération Générale du Travail (Всеобщая конфедерация труда).

[3] Национальный музей естественной истории (Muséum National d'Histoire Naturelle).

В действительности он просто знал, чего хочет, и не позволял манипулировать собой (и в этом был тысячу раз прав, и от всего сердца я воздаю ему за это должное). Адамар был не из тех людей, которые открыв рот верят всему, что им говорят, или беспрекословно подписывают данную им бумагу. Адамар сохранял благородную критическую ясность суждений неизменной всю свою жизнь и вряд ли мог поступиться ею во имя каких-нибудь “государственных интересов“.



2, rue de l'Elysée
PARIS 8 ème

Paris, le II Mai 1951

Monsieur HADAMARD
12, rue Emile Faguet
PARIS 14 ème

Mon cher Collègue,

Nous avons pris l'initiative avec quelques-uns de nos collègues d'établir le document que vous trouverez ci-joint.

Nous pensons que ce document devrait être largement diffusé dans les milieux de l'enseignement et de la recherche, notamment en cette période électorale, car il importe que l'opinion publique soit alertée très vivement par les universitaires et chercheurs eux-mêmes.

Dans ce but, il nous parait indispensable que ce document soit revêtu de quelques signatures de professeurs d'universités, maitres de conférences, directeurs de laboratoires et maitres de recherches. Je me permets donc de vous demander votre avis sur celui-ci et votre accord pour y faire figurer votre signature.

Etant donné l'urgence, vous m'obligeriez en me répondant, si possible, par retour du courrier. Je ne manquerais pas d'ailleurs d'apporter la plus grande attention aux remarques et modifications que vous proposeriez à ce document et d'en tenir compte.

D'autre part, j'ai été chargé par le Comité Directeur de La Pensée de vous demander de nous faire l'honneur d'appartenir au Comité de Patronage de cette Revue. Nous envisageons de tenir ce Comité vers la fin du mois de Mai. Je vous en ferai préciser la date et le lieu et je serais particulièrement heureux de vous y voir.

En vous remerciant à l'avance, je vous prie de croire, à mes sentiments affectueusement dévoués.

Frédéric JOLIOT

Письмо Ф. Жолио-Кюри к Адамару с просьбой подписать некоторый документ

Однажды мы вспоминали Адамара, когда обсуждали работу наших активистов, и Жолио, любивший рассказывать разные разоблачительные истории и делавший это хорошо, многословно и убедительно, описал нам, как Адамар обошёлся с ним, когда Жолио за чем-то обратился к нему. В тот раз меня не было вместе с Жолио, но мне много раз доводилось быть актером, сталкивающимся на сцене лицом к лицу с Адамаром, и разве я не отмечал, подобно Жолио, мастерство, с которым наш упрямец стремился по-своему повернуть весь сценарий!

„Этот человек — просто садист, — с комическим видом поведал Жолио, — он не давал мне прочитать мой текст, а надевал очки и хотел прочитать его своими глазами. Он яростно критиковал мои записи как по содержанию, так и по форме и везде — по всей работе в целом и в отдельных деталях — требовал объяснений — почему и отчего. Он без конца призывал в свидетели небо и землю, потому что от него требовалось подписаться под текстом, а затем оставлял просителя tête-à-tête со своей женой, очаровательной мадам Адамар, которая от души хотела бы, чтобы все были довольны, и роль которой в конце концов сводилась к роли доверенного лица для выслушивания всего плохого, что можно было подумать о великом человеке.

Профессор Адамар, отнюдь не глухой как столб и виртуозно играющий на своей физической немощи, выходил в соседнюю комнату... и находил способ услышать все, а может быть, обо всем догадывался. Немного погодя, он заглядывал в комнату и спрашивал: «А что еще вы скажете обо мне?» Он с озорным видом ждал объяснений, приставив ладонь к своему уху. Разумеется, никаких объяснений не следовало, и посетитель, взволнованный, обескураженный и несколько сбитый с толку, завершал свой визит и вставал, чтобы уйти. И в этот самый момент папаша Адамар задавал вопрос: «А как же ваша бумага, где она? Что вы с ней сделали? Вы же не можете уйти просто так, без моей подписи!»“

* * *

Дорогой Адамар вовсе не был глух, когда я бежал вслед за ним в одном из полюсов его вселенной, между улицей Пьера Кюри, улицей Ульм, улицей Гей-Люссака и улицей Сен-Жака, потому что я увидел его издалека и хотел предложить ему воспользоваться моей машиной. Он отказывался говорить мне, куда направляется, пока не убеждался, что нам по пути. Тем хуже было для меня, если, предполагая, что он идет домой, я придумывал себе занятие возле Орлеанских ворот, в то время как у него было дело в Институте [Франции], или наоборот: он отказывался от повторного предложения и продолжал путь мерным шагом, не говоря ничего в ответ.

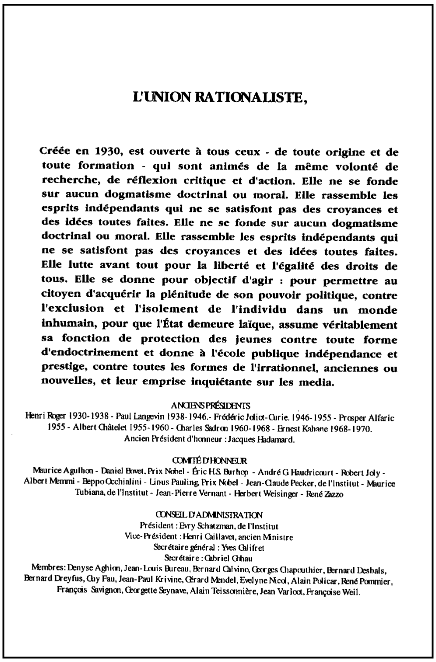
Я чувствовал себя виноватым в том, что злоупотребил доверием этого простодушного человека под тем предлогом, что маршрутов было два и я не знал, какой из них нужен ему, — один по набережным, другой по южным окраинам. В таком случае он совершенно не возражал против того, чтобы его отвезли в Институт или на улицу Эмиля Фаге. Простодушного? Я сказал простодушного? «Вот даёт!» — как сказала бы Зази[1]. Не был ли простодушным я сам, воображая, что провел такого человека, как Жак Адамар?!

* * *

Он оказывал мне честь, обращаясь ко мне за советом, когда у него возникали сомнения, относящиеся к этическим аспектам работы профсоюза, шла ли речь о подписках, финансовых декларациях или персонале. Его доверие было полным и очень меня трогало в сочетании с истинным благоговением, которое я испытывал перед ним. Слово „благоговение“ не является преувеличением. Меня воспитывал мой отец, который утверждал, будто обладает „чутьем на тех, кого следует почитать“, и для которого Жак Адамар был самым достойным почтения человеком, как выдающийся математик и образцовый гражданин. Я был совсем ребенком, когда под влиянием отца поместил Жака Адамара на первое место в моем личном пантеоне. И вот он спрашивает у меня совета — кажется, мир перевернулся. Но в такой блистательной ситуации я не мог оплошать! Ника-

[1]Зази — героиня романа «Зази в метро» (1959) французского писателя Раймона Кено (1903—1976), в котором широко используется нестандартная лексика.

кие усилия по поиску документации, в продумывании или разработке не были соизмеримы с честью, которая была, в моих собственных глазах, мне оказана. А когда наступало время дать ответ на вопрос, который приходил ко мне обычно в виде маленькой записки, краткой и точной, я являлся к нему с досье, более полным, чем память аптекаря. Но у меня не было времени даже для того, чтобы просто открыть досье, ибо этот человек мягко помогал мне расслабиться — если можно так выразиться, так как я был еще более подавлен его отношением к себе и еще более убежден в своей незначительности. „Я задал Вам вопрос, потому что не мог решить эту маленькую проблему сам. Она входит в Ваши профсоюзные прерогативы, мы верим в Вашу компетентность и здравость Вашего суждения, и мне не нужно никаких обоснований, я просто сделаю то, что Вы скажете, и так, как Вы мне посоветуете“. Разве не нужно быть великим человеком, чтобы иметь такие мысли и выражать их с такой простотой?



L'UNION RATIONALISTE,

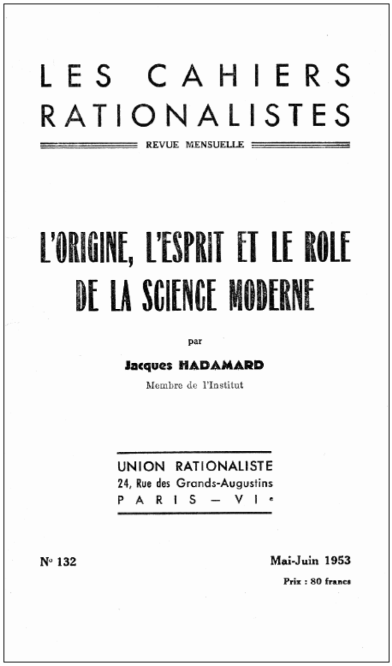
Créée en 1930, est ouverte à tous ceux - de toute origine et de toute formation - qui sont animés de la même volonté de recherche, de réflexion critique et d'action. Elle ne se fonde sur aucun dogmatisme doctrinal ou moral. Elle rassemble les esprits indépendants qui ne se satisfont pas des croyances et des idées toutes faites. Elle ne se fonde sur aucun dogmatisme doctrinal ou moral. Elle rassemble les esprits indépendants qui ne se satisfont pas des croyances et des idées toutes faites. Elle lutte avant tout pour la liberté et l'égalité des droits de tous. Elle se donne pour objectif d'agir : pour permettre au citoyen d'acquérir la plénitude de son pouvoir politique, contre l'exclusion et l'isolement de l'individu dans un monde inhumain, pour que l'État demeure laïque, assume véritablement sa fonction de protection des jeunes contre toute forme d'endoctrinement et donne à l'école publique indépendance et prestige, contre toutes les formes de l'irrationnel, anciennes ou nouvelles, et leur emprise inquiétante sur les media.

ANCIENS PRÉSIDENTS
Henri Roger 1930-1938 - Paul Langevin 1938-1946.- Frédéric Joliot-Curie. 1946-1955 - Prosper Alfaric 1955 - Albert Châtelet 1955-1960 - Charles Sadron 1960-1968 - Ernest Kahane 1968-1970.
Ancien Président d'honneur : Jacques Hadamard.

COMITÉ D'HONNEUR
Maurice Agulhon - Daniel Bovet, Prix Nobel - Éric H.S. Burhop - André G Haudricourt - Robert Joly - Albert Memmi - Beppo Occhialini - Linus Pauling, Prix Nobel - Jean-Claude Pecker, de l'Institut - Maurice Tubiana, de l'Institut - Jean-Pierre Vernant - Herbert Weisinger - René Zazzo

CONSEIL D'ADMINISTRATION
Président : Evry Schatzman, de l'Institut
Vice-Président : Henri Caillavet, ancien Ministre
Secrétaire général : Yves Galifret
Secrétaire : Gabriel Gohau
Membres: Denyse Aghion, Jean-Louis Bureau, Bernard Calvino, Georges Chapouthier, Bernard Desbals, Bernard Dreyfus, Guy Fau, Jean-Paul Krivine, Gérard Mendel, Evelyne Nicol, Alain Policar, René Pommier, François Savignon, Georgette Seynave, Alain Teissonnière, Jean Varloot, Françoise Weil.

Листовка Союза рационалистов



LES CAHIERS RATIONALISTES
REVUE MENSUELLE

L'ORIGINE, L'ESPRIT ET LE ROLE DE LA SCIENCE MODERNE

par
Jacques HADAMARD
Membre de l'Institut

UNION RATIONALISTE
24, Rue des Grands-Augustins
PARIS — VI^{e}

N° 132 Mai-Juin 1953
Prix : 80 francs

Статья Адамара в «Les Cahiers Rationalistes»

Я счастлив тем, что многие годы я пользовался доверием Адамара, даже после того как оставил свои обязанности в профсоюзе, и он часто посылал мне свои записочки с вопросами. Однажды, когда я заявил, что послал бы его вопрос ныне действующему секретарю профсоюза, Адамар секунду подумал, как если бы ему нужно было переварить удивление, и продолжал настаивать на своем: „Я старый

Заседание Союза рационалистов в Сорбонне, посвященное памяти А. Эйнштейна (1955). В президиуме: мадемуазель Ж. Леви, Ж.-П. Вижье, Ж. Адамар, А. Шатле, Э. Шатцман (стоит), мадам П. Ланжевен, М. Пренан.

человек, и мне не хотелось бы менять наставника“. А когда я стал генеральным секретарем Союза рационалистов, он добавил к палитре тех качеств, которые он приписывал мне, способность отвечать на самые разнообразные вопросы, как умные, так и глупые.

* * *

Однажды я договорился о встрече с ним, так как мне нужно было спросить его кое о чем. В Союзе рационалистов был Почетный комитет, но не было почетного президента. „Не согласитесь ли Вы, профессор Адамар, по случаю Вашего девяностолетия стать нашим почетным президентом?“ Адамар не принял наше предложение сразу. Ему надо было сформулировать возражение. „Вам следовало бы дождаться, когда мне исполниться сто лет. Девяносто — разве это возраст?“ И это было не кокетством, а всего лишь невинным озорством. Мы поступили правильно, что не стали вдаваться в обсуждение его возражения, так как он покинул нас прежде, чем мы отпраздновали его столетний юбилей» [IV.13].

§ 8.7. Награды

За свою жизнь Адамар получил многочисленные знаки признания. Ещё в 1936 г. на его юбилее А. Лебег сказал: «Я хотел бы в заключение дать вам представление о почетных званиях, но Адамар был не в состоянии помочь мне составить по-настоящему полный список. Это был единственный раз, когда я обнаружил недостаток его знаний» [II.27, с. 14].

Не ручаясь за полноту нашего перечня, мы можем сообщить читателю, что Адамар был членом Академии наук и иностранным членом старейшей в мире Академии деи Линчеи, Лондонского Королевского общества, Королевского общества Эдинбурга, Академии наук СССР, Национальной академии США, Американской академии искусств и наук, Национальной академии точных наук Аргентины, Королевского Ломбардийского института наук и литературы в Милане, Национальной академии точных, физических и естественных наук Лимы, Академии наук Сарагоссы, а также Бельгийской, Бразильской, Ирландской, Индийской, Египетской, Голландской, Румынской, Польской и Шведской академий наук. Он был избран почетным доктором Гёттингенского, Йельского, Брюссельского, Льежского университетов и университета в Осло, Еврейского университета в Иерусалиме, состоял почетным членом Королевского научного общества в Упсале, Лондонского математического общества, Математического и физического общества Эрлангена, Математического общества Копенгагена, Харьковского математического общества, Математического общества Бенареса и Математического общества Калькутты, членом совета правления Математического кружка в Палермо, Швейцарского общества естественных наук, членом-корреспондентом Королевского научного общества Льежа.

Ещё в 1917 г., спустя восемь месяцев после возвращения из Рима, Адамар стал офицером ордена Короны Италии. Мы уже упоминали, что к 1948 г. он достиг всех степеней ордена Почётного легиона, кроме пятой, самой высшей. Наконец, 2 мая 1957 г. на церемонии в Елисейском дворце президент Франции Рене Коти вручил Адамару Большой крест Почётного легиона.

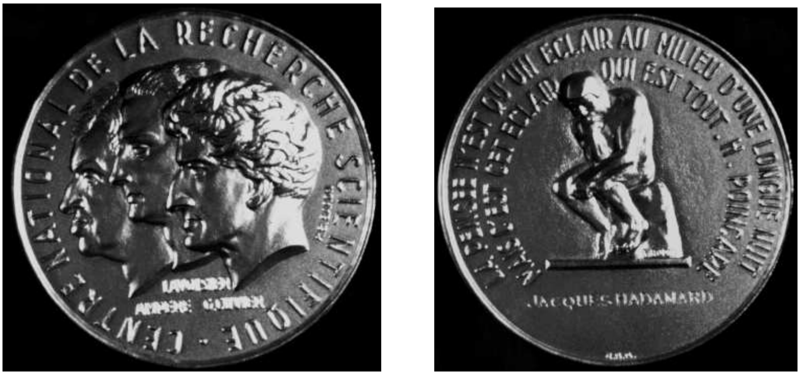
Как известно, Нобелевской премии по математике не существует. Но для математиков имеются другие международные награды, самые знаменитые из которых — Филдсовские медали, учрежденные в 1936 г. и присуждаемые на каждом Международном математическом конгрессе. Другая престижная награда — премия Фельтринелли — учреждена Академией деи Линчеи в 1955 г. Первым лауреатом премии Фельтринелли стал Адамар. В 1948 г. за вклад в науку Адамар был награжден другой премией — принца Альберта I Монакского [II.53, с. 1302].

Жак и Луиза Адамар с президентом Франции Рене Коти после награждения Адамара Большим крестом Почетного легиона (1957)

В 1956 г. Адамар был награжден золотой медалью Национального центра научных исследований (CNRS), третьим после Луи де Бройля (1955) и Эмиля Бореля (1954).

Последняя награда Адамара — специально отлитая золотая медаль, врученная ему Академией наук в 1962 г. по случаю пятидесятилетия его избрания в Академию. Эту медаль Адамару вручили в домашней обстановке А. Данжуа, Г. Жюлиа и два непременных секретаря Академии Робер Куррье и Луи де Бройль. Последний заявил:

«Когда пятьдесят лет назад Вы были избраны в Академию, Вам, как и всем новым членам, вручили малую медаль. Эта очень скромная небольшая медаль изготовлена из серебра, на одной стороне ее изображена Минерва, потому что эта богиня в шлеме всегда считалась олицетворением Мудрости и Науки, а на оборотной стороне медали отчеканено имя вновь избранного члена и дата его избрания. Эта скромнейшая из медалей дает ее обладателям также весьма скромную привилегию — право бесплатного посещения всех музеев и замков, принадлежащих Институту [Франции]. Мы сочли, что в память о Вашем избрании естественно предложить Вам еще одну медаль, похожую на ту, которую Вы некогда получили, но большего размера и изготовленную из более драгоценного металла. Поэтому новая медаль отлита из золота, так как она знаменует Вашу „золотую свадьбу“ с Академией наук. Вряд ли нужно говорить, что предложение на заседании Бюро вручить Вам эту медаль было встречено столь одобрительно и такими единодушными аплодисментами, что необходимость в каком-либо голосовании отпала» [II.56, с. 735].



Золотая медаль Национального центра научных исследований (CNRS)

Золотая медаль Академии Наук

§ 8.8. Конец жизни

На праздновании столетия Анри Пуанкаре 15 мая 1954 г. в большом амфитеатре Сорбонны Адамар говорил о вкладе Пуанкаре в математику.

На следующий год многие французские газеты сообщили о девяностолетии Адамара. Вот письмо из Мадрида, написанное за день до юбилея:

Дорогой месье Адамар!

Завтра Ваша семья будет с Вами. Я не хочу нарушать своим присутствием столь драгоценную близость. Но хотел бы, чтобы Вы ощутили переполняющие меня благодарность и преданность Вам. Вот уже полвека, как мы знакомы, и я обязан Вам столь многим, прежде всего как математику, моему учителю, первому из всех, но в этом отношении я лишь один из многих; и как человеку, удостоившего меня дружбы, которая глубоко тронула меня и которой я горжусь.

Эта дружба зарождалась и крепла в Политехнической школе и в Академии наук, во время наших поездок в Россию и в Альпы.

На Четвертом конгрессе румынских математиков в Бухаресте (1956).
Справа от Адамара на верхней фотографии И. Н. Векуа.

Ваша честность, простота, неиссякаемая любознательность к работе, несмотря на болезненные испытания, выпадавшие на Вашу долю, — всё это служит мне образцом.

Примите пожелания крепкого здоровья, чтобы оно позволило Вам сохранить целостность Вашего великолепного ума на радость друзьям и Вашей достойной всяческого восхищения супруги, которая является одним из главных Ваших открытий.

Моя жена горячо присоединяется к этим пожеланиям.

С почтением,

Поль Монтель [IV.14].

В мае 1956 г. Адамар принял участие в Четвертом конгрессе румынских математиков в Бухаресте. Как и во многих предыдущих случаях, его сопровождала

Луиза. Монтель писал: «К счастью, заботу о нем взяла на себя его замечательная спутница. Мадам Адамар сразу поняла ту роль, которую она могла играть рядом с гениальным мужем. Ей было присуще постоянное благородство, и математика воздействовала на нее как бы по индукции. Однажды утром мадам Адамар позвонила мне: „Сегодня исполнилось ровно семьдесят лет... с тех пор, как мне было восемнадцать“, — сообщила она, претворяя женскую деликатность в арифметику» [II.5, с. 22].

Но годы брали свое. Слух Адамара все более слабел, ему становилось трудно ходить. Его жене приходилось все больше заботиться о нем. Но, когда мадам Адамар было восемьдесят лет, у нее случилась почечная колика, а через два дня после второго приступа 6 июля 1960 г. она умерла. Супруги Адамар прожили вместе шестьдесят восемь лет. «С того дня у моего отца иссякло желание жить», — писала Жаклин Адамар.

На конференции по теории дифференциальных уравнений в частных производных в Коллеж де Франс в июне 1962 г. было принято следующее приветствие Адамару.

Было решено, что трое участников конференции посетят Адамара и вручат ему это приветствие. Вот что вспоминает О. А. Олейник:

«Мне посчастливилось попасть в тройку вместе с учениками Адамара Жаном Лере и Лораном Шварцем. Мы поднялись в квартиру Адамара и затем ожидали его в просторной гостиной. Он появился в сопровождении дочери Жаклин, которая помогла ему устроиться в кресле. Девяностошестилетний Адамар передвигался с трудом. Силы его стали быстро иссякать после смерти жены в 1960 г. Однако он держался приветливо и подтянуто, петлицу его темного костюма укра-

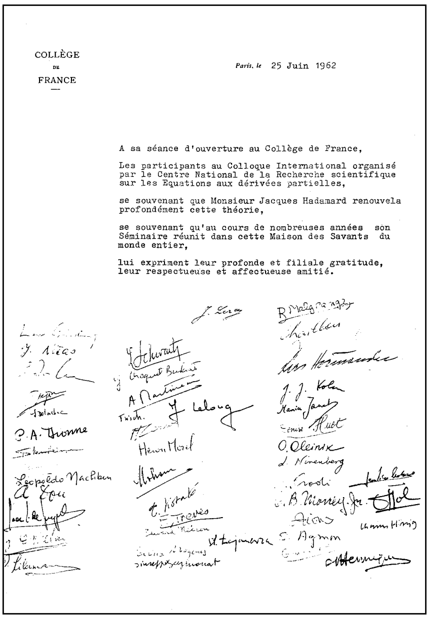
Луиза Адамар (1868—1960)

шала алая розетка ордена Почетного легиона. Слух Адамара к этому времени был сильно ослаблен, и Шварц склонился к нему, рассказывая о конференции и ее участниках. Когда меня представили Адамару, он упомянул о критерии регулярности граничной точки. Я поняла, что он вспомнил мою самую первую работу, в которой известный критерий Винера был распространен на общие эллиптические уравнения второго порядка. Через несколько лет я нашла ссылку на нее в последней книге Адамара, вышедшей в Пекине уже после его смерти.

Визит продолжался недолго. Мы попрощались. У дверей лифта Жаклин взволнованно сказала мне: „Какая Вы счастливая, ведь Вы живете в такой замечательной стране!“» [интервью, апрель 1988 г.].

В том же году Адамара постиг последний в его жизни удар: его внук Этьен Пикар погиб во время восхождения на гору. После этого известия Адамар перестал выходить из дому. Жаклин и медицинская сестра мадемуазель Амо оставались с ним. 17 октября 1963 г. Адамар навсегда уснул, не испытав страданий. Через четыре дня родственники, многочисленные друзья и ученики Адамара проводили его к месту последнего упокоения на кладбище Пер-Лашез.

Сообщения о смерти Адамара опубликовали многие французские газеты [II.22]—[II.26], [II.35], [II45]—[II.48]. Московское математическое общество



COLLÈGE DE FRANCE

Paris, le 25 Juin 1962

A sa séance d'ouverture au Collège de France,

Les participants au Colloque International organisé par le Centre National de la Recherche scientifique sur les Equations aux dérivées partielles,

se souvenant que Monsieur Jacques Hadamard renouvela profondément cette théorie,

se souvenant qu'au cours de nombreuses années son Séminaire réunit dans cette Maison des Savants du monde entier,

lui expriment leur profonde et filiale gratitude, leur respectueuse et affectueuse amitié.

«Участники Международной конференции по дифференциальным уравнениям в частных производных, организованной CNRS, отмечая, что Жак Адамар произвел глубокие преобразования в теории дифференциальных уравнений в частных производных и на протяжении многих лет его Семинар собирал в этом здании ученых со всего мира, выражают ему свою глубокую сыновнюю благодарность, уважение и заверяют в искренней дружеской привязанности» [IV.15].

Могила семьи Адамаров, в которой был похоронен Жак Адамар, на кладбище Пер-Лашез. На надгробии имя Жака Адамара не высечено. (Фотография сделана авторами в 1994 г.)

посвятило памяти Адамара специальное заседание 10 марта 1964 г. [II.60]. На своем заседании 13 ноября 1965 г. Академия деи Линчеи отметила столетие Адамара. Председательствовавший Б. Сегре поделился своими воспоминаниями об Адамаре, с которым он впервые встретился в Париже в 1924 г., а затем огласил некролог об Адамаре, написанный Ф. Трикоми. Столетие Адамара отмечалось 13 января 1966 г. в Политехнической школе. Присутствовали члены семьи Адамара и многие иностранные гости. Председательствовал на церемонии Луи де Бройль, а открыл её генерал Майо. П. Леви и Л. Шварц выступили с обзорами математических результатов Адамара, Ш. Мандельбройт описал работу Адамара в Коллеж де Франс, Ф. Трикоми выступил от имени иностранных математических обществ и Академии деи Линчеи. Среди других выступивших были П. Монтель, М. Руа, бывший тогда президентом Академии наук, и Л. Арман, президент Совета по развитию Политехнической школы. Первые несколько фраз из выступления Монтеля «Жак Адамар, человек и ученый» служат превосходной эпитафией Адамару:

«Блеск великих математических открытий Жака Адамара иногда ослепляет его почитателей и мешает им оценить степень его интеллектуального богат-


LES LETTRES FRANÇAISES ★ N°

MORT D'UN GRAND MATHÉMATICIEN

par Hilaire CUNY

Mort du mathématicien Jacques Hadamard de l'Académie des sciences

Jacques HADAMARD : un grand savant, un homme de progrès

B. MALGRANGE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Jacques Hadamard

Mort du mathématicien Jacques Hadamard doyen de l'Institut de France

CINEMA... THEATRE... SCIENCES... ARTS...

Jacques HADAMA

Une vie de science et de conscie

Georges LEON.

TH. de L'ETOILE

En hommage à la mémoire de J. HADAMARD

délégations et messages au domicile mortuaire

Jacques HADAMARD EST MORT HIER

Illustre mathématicien et homme de progrès il était doyen de l'Académie des Sciences

(Page 8)

Французские газеты о кончине Жака Адамара

ства и его морального величия. Обладавший исключительным математическим талантом, он напоминает один из тех высоких горных пиков, на которые нужно взбираться по всем их склонам, чтобы хорошо узнать их. Ему доставляло удовольствие то, что Анатоль Франс назвал молчаливыми пирами интеллекта. Жак Адамар страстно интересовался многими творениями человеческого разума и внес свой вклад в их реализацию» [II.5, с. 21].

Часть II

Математика Адамара

Глава 9

Теория аналитических функций

§ 9.1. Особенности

Введение. Первые значительные публикации Адамара были связаны с теорией аналитических функций комплексного переменного. Основные понятия этого раздела математики сформировались в работах Коши (интеграл и теоремы о вычетах), Римана (конформные отображения, теория многозначных функций) и Вейерштрасса (представление аналитических функций степенными рядами и аналитическое продолжение). В подходах этих математиков были как совпадения, так и важные различия. Например, теория Римана носила наиболее геометрический характер, а Коши и Вейерштрасс предпочитали использовать степенные ряды и признаки сходимости. При этом Вейерштрасс с недоверием относился к использованию интегрирования и не мог принять геометрические построения Римана и свободное использование Риманом вариационного принципа.

Огюстен Луи Коши (1789—1857)

И хотя между отцами-основателями аналитических функций комплексного переменного не было согласия, взаимодействие их идей привело к созданию тонкой и глубокой теории, которой в те времена, когда Адамар был студентом Высшей Нормальной школы, отдавали должное самые сильные математики. По словам Адамара, внимание математиков было приковано к красивой теории аналитических функций, неожиданные и блестящие результаты которой, казалось, покрывают всю область математической науки. Теория аналитических

Бернхард Риман (1826—1866)

функций комплексного переменного открыла математикам, что «кратчайший путь между двумя истинами в действительной области очень часто проходит через комплексную область» [I.220, с. 111].

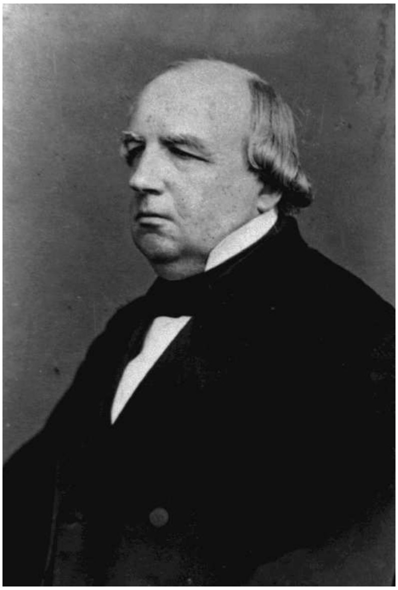
В юности Адамар под влиянием своих учителей Эрмита, Дарбу и Пикара следовал традиции Коши—Вейерштрасса. В своих первых значительных работах 1880-х и 1890-х гг. он получил фундаментальные результаты, касающиеся решения двух основных проблем в теории рядов Тейлора. Первая из этих проблем — взаимосвязь между особыми точками функции и ее коэффициентами Тейлора; вторая проблема относится к целым функциям и связана с зависимостью между ростом функции, распределением ее нулей и убыванием ее коэффициентов Тейлора.

Результаты Адамара открыли новую страницу в исследовании аналитических функций и предопределили на многие десятилетия развитие основных направлений теории функций комплексного переменного.

Круг сходимости. Мы начинаем наше описание исследований Адамара с теоремы, которую он доказал еще в бытность свою студентом Нормальной школы. Напомним, что функция $f(z)$, определенная в области Ω комплексной плоскости, называется аналитической (регулярной, голоморфной) в Ω, если она в каждой точке $z \in \Omega$ имеет производную. Коши показал, что такая функция $f(z)$ представима рядом Тейлора

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots \tag{9.1}$$

в некотором круге $D_\rho(a) = \{z\colon |z-a| < \rho\} \subset \Omega$. Это свойство положено в основу предложенной Вейерштрассом конструкции аналитического продолжения, где значения функции распространяются на более широкую область вдоль цепочки перекрывающихся малых кругов.



Карл Вейерштрасс (1815—1897)

В своем трактате «Алгебраический анализ» [III.73], опубликованном в 1821 г., Коши получил следующий результат: ряд (9.1) сходится при $|z-a| < 1/l$ и расходится при $|z-a| > 1/l$, где l — предел или «наибольший из пределов» последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$. Хотя Коши не объясняет термин «наибольший из пределов», можно понять, что здесь речь идет о верхнем пределе последовательности — понятии, введенном позднее Дюбуа-Реймоном (см. [III.110, с. 267]). Точная формулировка приведенного выше результата вместе с его доказательством впервые появились в работе Адамара 1888 г. [I.10]. Судя по тексту этой работы, Адамар, по-видимому, не знал о теореме Коши и об определении Дюбуа-Реймона[1].

Теорема Коши—Адамара, которую ныне можно найти в любом учебнике, дает формулу

$$r = l^{-1}$$

для радиуса круга сходимости ряда (9.1), т. е. для такого числа r, что ряд (9.1) сходится при $|z-a| < r$ и расходится при $|z-a| > r$.

В той же статье [I.10] Адамар ставит следующий вопрос: какую информацию можно получить из коэффициентов ряда (9.1) относительно особых точек функции на границе круга сходимости?

Особая точка функции — это такая точка, в которой функция в некотором смысле ведет себя плохо и тем самым препятствует аналитическому продолжению. Функция, заданная степенным рядом с конечным радиусом сходимости, всегда имеет особую точку на границе (окружности) сходимости. Простейший класс особых точек образуют полюсы конечного порядка: точка a есть полюс порядка p функции $f(z)$, если a есть нуль порядка p функции $1/f(z)$. В окрест-

[1]Ссылки на эти работы отсутствуют и в диссертации Адамара 1892 г. [I.13], но он приводит эти ссылки в 1901 г. [I.87, с. 24].

ности точки a функция $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = \sum_{n=1}^{p} \frac{d_n}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Первая сумма называется главной частью функции f в точке a. Если $p = 1$, то полюс называется простым.

Аналитическая функция характеризуется своими особыми точками, а также своей областью определения (множеством регулярных точек). Что касается особых точек, то они могут быть нескольких видов: изолированными (полюс, существенно особая точка, точка ветвления многозначной функции, например точка $z = 0$ для функций $\operatorname{ctg} z$, $\sin z^{-1}$, $\sqrt{z}$ соответственно) или предельными точками и даже образовывать континуум. Несмотря на большие успехи теории аналитических функций, вопрос о распределении их особых точек оставался открытым до тех пор, пока в конце XIX в. не появилась работа Адамара по этой проблеме. Отмечая трудности, возникающие в связи с этим вопросом, Гурса писал в своем «Курсе анализа»: «Только за последнее время[1] эта задача явилась предметом ряда работ, которые привели к важным результатам. То обстоятельство, что эти исследования появились лишь недавно, следует приписать не только трудности вопроса, как бы велика она ни была. Функции, которые последовательно изучались математиками, не выбирались ими произвольно; изучение этих функций вызывалось характером возникавших задач» [III.154, т. 2, с. 205]. Функции задавались либо в виде тех или иных конкретных рядов (например, гипергеометрический ряд Гаусса, который можно встретить во многих учебниках), либо в виде тех или иных интегралов (гамма-функция Эйлера), либо как решения дифференциальных, прежде всего линейных, уравнений. Можно сказать, почти всё огромное фактическое достояние теории функций, каким мы видим его в начале XX в., связано с конкретными их представлениями. О взаимосвязи коэффициентов и природы особых точек было известно немного.

Непосредственным стимулом к исследованию Адамара [I.10] стала краткая статья Лекорню [III.230], появившаяся на год раньше, в которой утверждалось, что из существования предела

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} \tag{9.2}$$

следует, что у ряда Тейлора

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{9.3}$$

на границе круга сходимости имеется только одна особая точка z_0. Теорему, в некотором смысле обратную к теореме Лекорню, получили Кёниг [III.217] в 1876 г. и Дарбу [III.92] в 1878 г., доказавшие, что из существования единственной особой точки z_0, которая является простым полюсом на окружности $|z| = r$, следует равенство (9.2). Но доказательство Лекорню было ошибочным, и, более того, условие в его формулировке оказалось слишком слабым. В ра-

[1] Первое издание трактата Гурса вышло в 1902—1905 гг.

боте [I.10] Адамар показал, что утверждение теоремы Лекорню остается в силе, если условие (9.2) заменить более ограничительным предположением

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}-z_0\right|^{1/n}<1.$$

Простой контрпример к формулировке Лекорню, предложенный Адамаром, — ряд

$$\sum_{n\geqslant 1}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)z^n,$$

представляющий функцию

$$z(1-z)^{-1}+\log(1+z).$$

В этом контрпримере условие (9.2) остается в силе для $z_0=1$, но функция имеет две особые точки $z=\pm 1$ на окружности $|z|=1$. Новое условие Адамара очевидным образом нарушено.

Позднее, в статье [I.13], Адамар отметил, что его новое условие также необходимо, если единственная особая точка на границе круга сходимости — простой полюс. В связи с этим упомянем более общую теорему Пеллегрино [III.304], доказанную в 1942 г.: условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}=1$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|1+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k C_p^k\frac{c_{n-k}}{c_n}\right|^{1/n}<1$$

необходимы и достаточны для того, чтобы ряд (9.3) имел в точке $z=1$ полюс порядка p.

В первой части своей диссертации [I.13], представленной в 1892 г. факультету естественных наук Сорбонны, Адамар нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы точка $z=1$ была особой точкой функции $f(z)$. Это условие имеет форму неравенства

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}>\Big(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\Big)^n,$$

где ε — сколь угодно малое число, t — некоторое число из интервала (0, 1), а n принимает бесконечно много значений [I.13, с. 17]. Доказательство этого результата основано только на формуле для радиуса сходимости ряда Тейлора. Используя этот критерий, можно легко получить следующий просто формулируемый результат, известный как теорема Прингсхейма ([III.331, с. 1033], [III.268, с. 24]): если коэффициенты ряда (9.3) с единичным кругом сходимости неотрицательны, то $z=1$ — единственная особая точка суммы этого ряда.

В связи с этим Мандельбройт пишет: «Условия на коэффициенты для особой точки дали Адамару другие интересные результаты, но мы не можем не упомянуть отказ Адамара признать своей теорему, непосредственно вытекающую из его критерия, согласно которому положительная действительная точка окружности сходимости есть особая точка, если все коэффициенты неотрицательны. Некоторые авторы из самых добрых побуждений приписали этот результат Адамару, но он всегда возражал, причем в весьма категоричной форме, считая его результатом Прингсхейма (который, кстати сказать, не отказался от притязаний на авторство!)» [II.37, с. 27]. Адамар в своей книге о психологии математического открытия [I.372, с. 51] рассматривает тот факт, что он не заметил упомянутый выше результат, как свой просчет.

Лакунарные ряды. Занимаясь в гл. 1 своей диссертации [I.13] исследованием особых точек функций, заданных степенными рядами, Адамар обратил особое внимание на функции, у которых все точки на границе круга сходимости особые. Проблема восходит к Вейерштрассу, который еще в 1880 г. [III.416] столкнулся с этим явлением при изучении рядов рациональных функций, таких как, например, следующий ряд:

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{z^n+z^{-n}}. \tag{9.4}$$

Так как

$$\left|\frac{1}{z^n+z^{-n}}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{1-|z|^{2n}} < \frac{|z|^n}{1-|z|}$$

при $|z|<1$, ряд (9.4) сходится в круге $|z|<1$. Но все точки единичной окружности — особые для этого ряда (обратите внимание на то, что полюсы частичных сумм этого ряда

$$e^{\pi i/(2n)},\quad e^{3\pi i/(2n)},\quad e^{5\pi i/(2n)},\quad \ldots$$

всюду плотны на единичной окружности). Иначе говоря, функция (9.4) не может быть аналитически продолжена через единичную окружность. В случаях, аналогичных этому, когда область определения аналитической функции совпадает с ее областью аналитичности, граница такой области называется естественной границей функции. В соответствии с этим определением естественная граница функции (9.4) — единичная окружность.

Эрмит, заинтригованный исследованием Вейерштрасса, получил те же результаты другим методом ([III.174], 1881) и обратил внимание Пуанкаре на функции с неизолированными особенностями. Пуанкаре, который уже встречал это явление в своей теории фуксовых функций (1881), обобщил работы Вейерштрасса и Эрмита в статье 1883 г. [III.316], в которой предложил следующую конструкцию для функций с естественной границей. Пусть $a_n=e^{2\pi i\varphi_n}$, $n=1, 2, \ldots$, где $\{\varphi_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел. Рассмотрим функцию

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 1}A_n(z-a_n)^{-1}, \tag{9.5}$$

где $\sum\limits_{n\geqslant 1}|A_n|<\infty$. Ряд в правой части равенства (9.5) сходится, и предельная функция не имеет особых точек при $|z|<1$. Так как точки a_n всюду плотны на единичной окружности, функция f не может быть аналитически продолжена вне единичного круга.

Но (9.4) и (9.5) — ряды рациональных функций, не являющиеся степенными. Следующий пример степенного ряда, окружность сходимости которого является естественной границей, привёл также Вейерштрасс:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 1} a^n z^{b^n},$$

где $a>0$ и $b\in\mathbb{N}$, $b>1$ ([III.416], 1880). Радиус сходимости этого ряда равен

$$r=\lim_{n\to\infty} a^{-nb^{-n}}=1,$$

откуда следует, что на единичной окружности есть хотя бы одна особая точка z_0. При замене z на $z\cdot e^{-2ki\pi b^{-m}}$, где k и m — произвольные постоянные, изменится лишь конечное число членов ряда. Следовательно, вместе с точкой z_0 особыми будут все точки вида $z_0 e^{-2ki\pi b^{-m}}$. Это означает, что множество особых точек всюду плотно на единичной окружности, поэтому аналитическое продолжение вне этой окружности невозможно.

Совпадение окружности сходимости с естественной границей в этом примере Вейерштрасса оказывается связанным с наличием больших лакун между членами последовательности $\{b^n\}$. В период между работами Вейерштрасса и Адамара Дарбу, Лерх, Мерэ, Ж. Таннери и Фредгольм предложили много других примеров рядов с окружностью сходимости, совпадающей с естественной границей функции.

Первую общую теорему о степенных рядах

$$\sum_{n\geqslant 1} c_n z^{\lambda_n} \tag{9.6}$$

с лакунами в последовательности $\{\lambda_n\}$ доказал в своей диссертации Адамар [I.13]. Теорема Адамара утверждает, что ряд (9.6) не может быть аналитически продолжен за свой круг сходимости, если

$$\lambda_{n+1}>(1+\theta)\lambda_n, \tag{9.7}$$

где θ — некоторая положительная постоянная. Сам Адамар не был вполне удовлетворен своим результатом, так как доказанная им теорема охватывала все известные примеры, кроме одного, принадлежавшего Фредгольму (1890). Ложкой дегтя в бочке меда был ряд

$$\sum_{n\geqslant 1} a^n z^{n^2}, \qquad |a|<1;$$

этот ряд, как и его производная, абсолютно сходится в круге $|z|\leqslant 1$ и тем не менее не допускает аналитического продолжения вне этого круга. Не имея возможности объяснить это явление с помощью своего метода, Адамар рассказал об этой проблеме Борелю. Последний отреагировал на сообщение Адамара, расширив достаточное условие (9.7), которое охватывало пример Фредгольма (1896). В том же году Фабри сформулировал даже менее ограничительное условие: $n/\lambda_n\to 0$. Существует много других обобщений и уточнений теоремы Адамара (см. например, [III.36]).

Полюсы мероморфных функций. Некоторые из первых результатов Адамара относятся к общим свойствам мероморфных, т. е. однозначных аналитических функций, не имеющих других особых точек, кроме полюсов.

Простейший класс мероморфных функций образуют рациональные функции $P(z)/Q(z)$, где P и Q — многочлены. Возможность представления рациональной функции в виде суммы элементарных дробей наводит на мысль о проблеме аналогичного представления мероморфных функций с бесконечным количеством полюсов. Простой пример дает формула разложения Эйлера

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right).$$

Правильность ее подтвердил Миттаг-Леффлер. Вдохновленный лекциями Вейерштрасса, он доказал свою знаменитую теорему о существовании мероморфных функций с априори заданными полюсами и главными частями этих полюсов (1876).

В 1880-е и 1890-е гг. исследованием общих свойств мероморфных функций занимались Пикар, Пуанкаре, Рунге, Адамар, Миттаг-Леффлер и Борель.

Во второй части своей диссертации Адамар рассмотрел следующий вопрос. Пусть ряд (9.3) имеет круг сходимости $D_r = \{z\colon |z| < r\}$. Каковы необходимое и достаточное условия для того, чтобы функция $f(z)$ имела p полюсов и не имела других особых точек на границе $C_r = \{z\colon |z| = r\}$ круга D_r? Адамар дает ответ в терминах определителей

$$\mathcal{D}_{n,p} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{n+p} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{n+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+p} & c_{n+p+1} & \ldots & c_{n+2p} \end{vmatrix},$$

которые Кронекер ввел в 1881 г. [III.219]. Условие Кронекера, необходимое и достаточное для того, чтобы ряд (9.3) представлял рациональную функцию, имеет вид

$$\mathcal{D}_{0,p} = 0$$

начиная с некоторого p.

Так как по формуле Коши—Адамара

$$\varlimsup_{n\to\infty} |c_n^{1/n}| = \frac{1}{r}$$

и так как порядок $p+1$ определителя не зависит от n, мы получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\mathcal{D}_{n,p}^{1/n}| \leqslant \frac{1}{r^{p+1}}.$$

Как показывает Адамар, необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(z)$, заданная рядом (9.3), имела не более p полюсов и не имела других особых точек на окружности C_r, таково:

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\mathcal{D}_{n,k}^{1/n}| = \frac{1}{r^{k+1}}$$

при $k = 0, \ldots, p-1$ и

$$\varlimsup_{n\to\infty} |\mathcal{D}_{n,p}^{1/n}| < \frac{1}{r^{p+1}}.$$

Прошло много лет, прежде чем эти результаты Адамара были обобщены другими авторами. Из длинного списка статей упомянем только работу Д. Пойа [III.322], упростившего трудные доказательства Адамара, и работу Г. Пираньяна [III.313], в которой методы Адамара обобщались на функции, имеющие алгебраические и логарифмически особые точки вида

$$(z-a)^{-s}[\log(z-a)]^k,$$

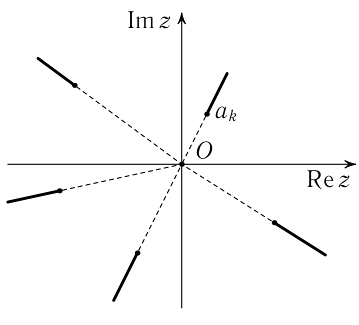
где s — некоторое комплексное число, а k — неотрицательное целое число.

Приложениям адамаровской теории полюсов к аппроксимациям Паде, т. е. к наилучшим рациональным приближениям степенных рядов, посвящена работа [III.155].

Производные дробного порядка и особые точки. Любая аналитическая функция имеет на своей окружности сходимости по крайней мере одну особую точку. В общем случае поведение аналитической функции на окружности сходимости варьируется в широких пределах. Множество особых точек может быть всюду плотно на какой-то дуге или на всей окружности сходимости, и тогда эта окружность есть естественная граница функции. В свою очередь особые точки могут быть различных типов. Действительно, аналитическая функция может принимать в этих точках конечные значения (например, если она непрерывна на замкнутом круге, но не может быть аналитически продолжена вне него) или может обращаться в бесконечность, если особая точка — полюс. Таким образом, существует проблема описания поведения функции на ее окружности сходимости, или, точнее, построения числовой шкалы, характеризующей все возможные типы особых точек.

Эту проблему Адамар сформулировал в третьей части своей диссертации [I.13]. Полученные Адамаром результаты отличались такой общностью и полнотой, что их можно было бы назвать «теорией Адамара особых точек степенных рядов на окружности сходимости». Далее мы будем предполагать, что функция f задана рядом (9.3) и что $C=\{z\colon |z|=1\}$ — ее окружность сходимости.

Чтобы мы могли двигаться дальше, нам понадобится понятие звезды Миттаг-Леффлера ряда (9.3) относительно начала координат, введенное Миттаг-Леффлером в 1898 г. [III.282]. Эта звезда строится следующим образом. Отметим на плоскости полюсы a_k, проведем из каждого полюса a_k луч в направлении Oa_k и разрежем плоскость по этим лучам. Остальная часть плоскости есть звезда Миттаг-Леффлера с вершинами в точках a_k. Иными словами, это наибольшая область, звёздная относительно начала координат[1] O, в которой ряд (9.3) может быть аналитически продолжен вдоль лучей, выходящих из точки $z=0$ (см. рисунок).



Звезда Миттаг-Леффлера

[1] Область называется звёздной относительно $z=0$, если любой отрезок, соединяющий точку $z=0$ с какой-либо точкой области, лежит в этой области.

Сначала отметим, что если функция $f(z)$ регулярна в точке z_0, то её производная $f'(z)$ и первообразная $\int\limits_0^z f(t)\,dt$ тоже регулярны в точке z_0.

Если функция $f(z)$ имеет полюс в точке z_0, то природа особенностей производной и первообразной отчетливо видна. Мы можем легко охарактеризовать действие этих операций на изолированные особые точки других типов.

Интеграл можно охарактеризовать как производную D^{-1} порядка -1, а последующее интегрирование дает производную D^{-2} порядка -2, и т. д. Производная отрицательного целого порядка $-m$ определяется по формуле

$$D^{-m}f(z) = \int\limits_0^z \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!}f(t)\,dt. \tag{9.8}$$

Ясно, что дифференцирование порядка $-m$ не приводит к появлению новых особых точек.

В начале третьей части своей диссертации Адамар рассматривает общую операцию, обладающую таким же свойством. А именно, он показывает, что для функции $v(t)$, суммируемой на интервале (0, 1), звезда Миттаг-Леффлера функции

$$g(z) = \int\limits_0^1 v(t)f(zt)\,dt \tag{9.9}$$

содержит звезду Миттаг-Леффлера функции $f(z)$.

Затем Адамар предлагает некоторую классификацию особых точек аналитических функций с помощью операции дифференцирования отрицательного (не обязательно целого) порядка, которая является частным случаем операции (9.9).

По аналогии с формулой (9.8) можно определить производную Римана—Лиувилля произвольного отрицательного порядка α как интегральный оператор[1]

$$D^{\alpha}f(z) = \int\limits_0^z \frac{(z-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}f(t)\,dt,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Ясно, что функцию $z^{\alpha}D^{\alpha}f(z)$ можно представить в виде (9.9), взяв

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}(1-t)^{-\alpha-1}.$$

Мы имеем

$$z^{\alpha}D^{\alpha}z^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}z^m.$$

Следовательно, для ряда (9.3) справедливо равенство

$$z^{\alpha}D^{\alpha}f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}z^m.$$

[1]Историю этого и аналогичных операторов см. в гл. 8 книги Лютцена [III.250].

Для того чтобы иметь дело с более простым рядом, Адамар модифицировал производную Римана—Лиувилля, положив

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1}.$$

Это приводит к оператору

$$H^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\alpha-1} f(zt)\, dt,$$

который можно также представить в виде ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m m^\alpha.$$

Так как

$$\lim_{m\to\infty} m^{-\alpha} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} = 1,$$

операторы H^α и $z^\alpha D^\alpha$ обладают одними и теми же основными свойствами, но оператор H^α более удобен для изучения степенных рядов. Хотя оператор H^α может улучшить или ослабить скорость сходимости ряда (9.3) в зависимости от знака числа α, он не изменяет радиус сходимости. Оператор H^α называется интегралом Адамара дробного порядка [III.355].

Прежде чем вводить понятие порядка функции $f(z)$, заданной рядом (9.3) с радиусом сходимости, равным 1 (порядок функции — своего рода числовая характеристика ее особых точек на единичной окружности C), Адамар вводит определение функций конечного размаха (écart fini). Под этим он понимает непрерывные функции $u(\varphi)$, определенные на дуге (a, b) окружности C и удовлетворяющие неравенствам

$$\left| n \int_{a_1}^{b_1} u(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi \right| < M, \qquad \left| n \int_{a_1}^{b_1} u(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi \right| < M$$

при $n = 1, 2, \ldots$ для произвольной поддуги (a_1, b_1) дуги (a, b). Нетрудно показать, что функции ограниченной вариации являются функциями конечного размаха.

Число $\omega = \omega(a, b)$ называется порядком функции $f(z)$ на дуге (a, b), если при любом $\varepsilon > 0$ функция $H^{\omega+\varepsilon} f(z)$ непрерывна и имеет конечный размах на (a, b), но по крайней мере одно их этих свойств не выполняется для $H^{\omega-\varepsilon} f(z)$. Если такого числа ω не существует, то порядок функции считается равным $-\infty$.

Адамар показывает, что если последовательность $|c_n| n \log n$ ограничена и

$$\sum_n |c_n| < \infty,$$

то функция $f(z)$ непрерывна и имеет конечный размах на единичной окружности. Он также доказывает, что порядок $\omega(C)$ на всей окружности C задается формулой

$$\omega(C) = 1 + \overline{\lim} \frac{\log|c_n|}{\log n}.$$

Мандельбройт и Шварц писали: «Представляется, что адамаровская идея порядка не была полностью использована математиками младших поколений. Существенно более глубокие результаты, конечно, должны были следовать из этого понятия, столь богатого по содержанию...» [II.43, с. 108].

Умножение особенностей. В томе 22 «Acta Mathematica» (1899) Адамар опубликовал свою знаменитую теорему об умножении особенностей. Рассматриваются два степенных ряда

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \qquad g(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$$

с радиусами сходимости r_f и r_g соответственно. Непосредственно из формулы Коши—Адамара следует, что радиус сходимости r_h ряда

$$h(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n \tag{9.10}$$

не превосходит $r_f r_g$. Адамар показал, что можно утверждать больше, а именно что особые точки $h(z)$ содержатся в множестве $\{\alpha\beta\}$, где α — особые точки функции f, а β — особые точки функции g. (Хотя это утверждение не вполне строго, мы примем его для простоты[1].) Заметим, что функция h, в отличие от функций f и g, может вообще не иметь особых точек. Например, если f и g — произвольные функции вида

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n}, \qquad g(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_n z^{2n+1},$$

то функция $h(z)$ тождественно равна нулю. В основе доказательства Адамара лежит наблюдение, согласно которому при подходящем выборе замкнутого контура C выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\zeta) g\Big(\frac{z}{\zeta}\Big)\frac{d\zeta}{\zeta} \tag{9.11}$$

есть аналитическое продолжение функции $h(z)$ вне ее круга сходимости. Это выражение часто называют композицией Адамара.

За два года после публикации теоремы Адамара появилось несколько статей Бореля, Гурвица и дель Аньолы, развивавших его результат. В частности, Гурвиц [III.185] доказал следующую теорему о суммировании особенностей.

Пусть ряды

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{-n-1}, \qquad g(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_n z^{-n-1}$$

сходятся при $|z|>r_f$ и $|z|>r_g$ соответственно. Тогда ряд

$$\Psi(z)=\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{-n-1},$$

где

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k},$$

[1] Анализ теоремы Адамара можно найти в книге Бибербаха [III.36].

называемый композицией Гурвица, сходится при $|z| > r_f + r_g$.

Теорема Гурвица утверждает, что для функций f и g, имеющих конечные множества особых точек $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ соответственно, функция Ψ имеет особые точки из множества $\{\alpha_i + \beta_i\}$.

В том же 1899 году дель Аньола обобщил теорему Гурвица, используя по аналогии с композицией Адамара представление

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(\zeta) g(z-\zeta)\, d\zeta,$$

где C — контур на комплексной ζ-плоскости [III.96].

Мандельбройт и Шварц писали, что работам Адамара об особенностях аналитических функций и, в частности, «...восхитительной маленькой монографии „Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение“, написанной Адамаром в 1901 г., было суждено вдохновить многих очень известных математиков, и не будет преувеличением сказать, что почти все из 350 публикаций 150 авторов, процитированных в недавней монографии Бибербаха об аналитическом продолжении, возникли прямо или косвенно под влиянием работы Адамара...» [II.43, с. 109].

§ 9.2. Целые функции

Введение. До сих пор мы говорили о работах Адамара об аналитических функциях, имеющих особые точки в конечной части плоскости. Столь же важны его работы о целых функциях, т. е. функциях, задаваемых степенными рядами, сходящимися при всех значениях z. Первые исследования общих свойств таких функций принадлежат Вейерштрассу, Лагерру, Пикару и Пуанкаре. Их результаты были хорошо известны Адамару, они оказали влияние на его работы.

Ясно, что любой многочлен $p(z)$ — целая функция. Если $p(0) \neq 0$, то многочлен можно представить в виде

$$p(z) = p(0)\Big(1 - \frac{z}{z_1}\Big) \ldots \Big(1 - \frac{z}{z_n}\Big),$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — нули многочлена $p(z)$. По аналогии можно рассмотреть задачу факторизации целых функций: разложение функций на множители и восстановление функции по ее нулям. Может случиться, что целая функция не имеет нулей (например, e^z), или имеет конечное число нулей (например, $p(z)e^z$), или имеет бесконечно много нулей. Последний случай наиболее интересен, так как можно ожидать, что такая целая функция представима в виде так называемого бесконечного произведения, т. е. выражения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} (1 + a_n).$$

После взятия логарифма исследование сходимости бесконечного произведения сводится к исследованию сходимости бесконечного ряда.

Первое бесконечное произведение для целой функции было получено Эйлером (1742) (см. представление для синуса в § 1.10). Другой классический пример — формула Гаусса для гамма-функции Эйлера

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-\frac{z}{n}},$$

где C — так называемая постоянная Эйлера. Обратите внимание на то, что экспоненты в бесконечном произведении обеспечивают его сходимость. Основываясь на этой формуле факторизации, Вейерштрасс получил следующий результат[1].

Теорема ([III.415], 1876). *Пусть $f(z)$ — целая функция с нулем порядка m в начале координат, и пусть остальные нули упорядочены по их модулям: $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \ldots$ Тогда функция $f(z)$ представима в виде абсолютно сходящегося произведения (см. формулу (1.3) в § 1.10)*

$$f(z) = e^{Q(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{z_n}\Big) e^{P_n(z/z_n)}, \tag{9.12}$$

где

$$P_n(\zeta) = \zeta + \ldots + \frac{\zeta^{k_n}}{k_n}.$$

Как в формуле Гаусса, эти многочлены выбраны так, чтобы компенсировать первые k_n членов в тейлоровском разложении функции $\log(1-\zeta)$. Элементарные оценки показывают, что выбор $k_n = n$ всегда возможен и что числа k_n можно даже сделать равными такому фиксированному целому числу k, что ряд $\sum |z_n|^{-k-1}$ сходится (удобно выбрать наименьшее значение k).

Если функция Q в произведении (9.12) не является многочленом или если степени многочленов P_n невозможно выбрать независимо от n, то говорят, что функция f имеет конечный род (genre). В противном случае под родом функции f принято понимать $p = \max\{k, q\}$, где k — общая степень всех многочленов P_n, а q — степень многочлена Q.

Например, по формуле Эйлера отношение $\dfrac{\sin z}{z^2}$, рассматриваемое как функция от $\sqrt{z}$, имеет род нуль. Понятие рода целых функций было введено Лагерром в его исследованиях распределения нулей целых функций и их производных (1882).

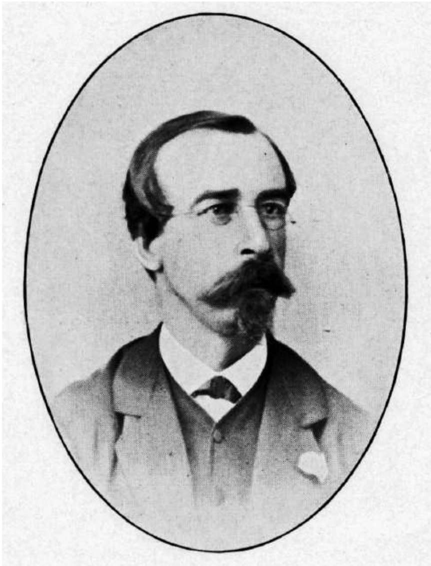
В 1882—1883 гг. Пуанкаре исследовал рост целой функции рода p, а также скорость убывания ее коэффициентов. Например, он показал, что

$$c_n (n!)^{1/(p+1)} \to 0,$$

где c_n — коэффициент при z^n в (9.3).

Другой важный результат в теории целых функций был получен Пикаром в 1879 г. Он описывает множество значений произвольной целой функции. Примем снова за исходный пункт многочлены. Ясно, что для произвольного многочлена $p(z)$, не равного тождественно константе, и для произвольного комплексного числа A существует по крайней мере одно такое значение z, что $p(z) = A$. Теорема Пикара представляет собой обобщение этого элементарного факта на целые

[1] Историю формулы факторизации см. в работе Боттацини [III.53].



Эдмон Лагерр (1834—1886)

функции: целая функция, отличная от тождественной константы, принимает любое значение бесконечно много раз за одним возможным исключением. Большая теорема Пикара утверждает, что во всякой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает любое комплексное значение, кроме, быть может, одного. Как показывает целая функция $e^z \neq 0$, результат Пикара точен. Решающую роль в доказательстве Пикара сыграла одна из так называемых модулярных функций, введенных и исследованных Эрмитом в его работе об эллиптических функциях. Но использование понятия модулярной функции, заимствованного из другой области математики, казалось неестественным, и проблема, состоявшая в том, чтобы избежать чужеродного понятия в доказательстве теоремы Пикара, привлекла общее внимание.

Статья Адамара. В 1892 г. Адамару была присуждена Большая премия Академии наук за его работу «Исследование целых функций, и в частности функции, рассмотренной Риманом» [I.15], тесно связанную и с формулой факторизации Вейерштрасса, и с только что сформулированными теоремами Пуанкаре и Пикара[1].

Работа делится на три части. Первая часть посвящена главным образом соотношениям между скоростью роста максимума модуля $M(r)$ целой функции $f(z)$ на окружности $|z| = r$ и законом убывания коэффициентов c_n. Вначале Адамар нашел мажоранту для $M(r)$, описанную в терминах последовательности $\{c_n\}$. Например, он заметил, что если

$$|c_n| < (n!)^{-1/\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{9.13}$$

то

$$M(r) < e^{Hr^\alpha} \tag{9.14}$$

[1]Историю этого состязания см. в § 1.10 «Первый математический триумф».

при некоторой константе H. Затем Адамар рассмотрел обратную задачу — найти закон убывания коэффициентов исходя из закона роста функции. Эту задачу Пуанкаре рассмотрел для функций, удовлетворяющих неравенству (9.14), и Адамар модифицировал метод Пуанкаре, чтобы включить функции, удовлетворяющие неравенству $M(r) < e^{V(r)}$, где V — произвольная положительная неограниченно возрастающая функция.

В конце первой части работы [I.15] Адамар обратился к упомянутой выше теореме Пикара и доказал ее, не используя модулярные функции. Но ему удалось это сделать только для класса целых функций, удовлетворяющих условию (9.14). В 1896 г. Борель дал первое доказательство теоремы Пикара, не зависящее от модулярных функций и применимое ко всем целым функциям.

Теорема Пикара относится к задаче о распределении значений целых функций. Теория распределения значений мероморфных функций начала развиваться только в 1920-х гг., но ее исходным пунктом стала формула Иенсена

$$\log \frac{r^n |f(0)|}{|z_1 \dots z_n|} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

где $z_1, \dots, z_n, \dots$ — нули функции $f(z)$, $|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \dots$ и $|z_n| \leqslant r \leqslant |z_{n+1}|$ ([III.196], 1897). Вот что пишет Адамар в своей книге [I.372a, с. 41—42] [о формуле, которую он получил в самом начале своего исследования: «...я решил ее не публиковать и добиться вывода из нее важных следствий. В это время все мои мысли, как и мысли многих аналитиков, были прикованы к единственному вопросу: доказательству знаменитой „теоремы Пикара“. Полученная мною формула давала совершенно очевидно один из результатов, который я открыл четырьмя годами позднее гораздо более сложным путем, и я не отдавал себе в этом отчета, пока через много лет Иенсен не опубликовал эту формулу и не отметил, как ее непосредственное следствие, результаты, которые я, к счастью для моего самолюбия, уже получил в этот промежуток времени».

Во второй части своей статьи Адамар рассматривает задачу, обратную той, которую рассматривал Пуанкаре: какую информацию о распределении нулей целой функции можно извлечь из закона убывания ее коэффициентов? Адамар показывает, что род целой функции равен целой части $[\lambda]$ числа λ, если последовательность $|c_n|(n!)^{-1/\lambda}$ стремится к нулю и λ — не целое число. Из этого утверждения он, в частности, заключает, что если неравенство (9.14) выполняется при $\alpha < 1$, то род функции равен нулю[1]. Теорема Адамара менее точна в случае, когда λ — целое число: тогда функция может быть рода λ или $\lambda + 1$.

Результат Адамара был улучшен Борелем [III.49], который использовал две важные характеристики целой функции: порядок роста (Адамар назвал его ordre apparent — кажущимся порядком) и показатель сходимости последовательности нулей (в терминологии Адамара ordre — порядок). Порядок роста есть наибольшая нижняя грань ρ таких чисел α, что выполняется неравенство (9.14). Ее явное

[1] Это замечание использовал Пуанкаре в разделе «Применение теоремы Адамара» трактата «Новые методы небесной механики» [III.318, т. 2].

Людвиг Иенсен (1859—1925)

представление задается формулой

$$\rho = \overline{\lim} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

Для многочлена $\rho = 0$, а для функций e^z, $\sin z$, e^{e^z} порядок равен соответственно 1, 1, ∞. Показатель сходимости нулей μ определяется как наибольшая нижняя грань таких чисел ν, для которых ряд $\sum |z_n|^{-\nu}$ сходится. Порядок характеризует максимальный возможный рост функции, а показатель сходимости μ характеризует плотность распределения нулей функции $f(z)$. Можно проверить, что показатель сходимости задается формулой

$$\mu = \overline{\lim} \frac{\log n}{\log |z_n|}.$$

Сформулируем предложенное Адамаром уточнение формулы Вейерштрасса (9.12), используя понятие порядка.

Теорема Адамара о факторизации. *Если f — целая функция конечного порядка ρ, то целая функция $Q(z)$ в произведении* (9.12) — *многочлен степени не выше чем* $[\rho]$.

Борель получил теорему, в некотором смысле обратную этому результату, показав, каким образом порядок может быть найден из формулы факторизации. Теорема Бореля утверждает следующее. *Пусть $\mu < \infty$, и пусть Q — многочлен степени q в* (9.12). *Тогда $f(z)$ — функция порядка* $p = \max\{\mu, q\}$.

В заключительной третьей части статьи [I.15] Адамар применил свой результат о роде целой функции, доказанный в первой части, к знаменитой дзета-функции Римана. Эта функция играет фундаментальную роль в теории чисел. Она определена и регулярна на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 1$, в которой она имеет полюс порядка 1. В полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$ дзета-функция задана рядом

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-z}.$$

Задача о распределении простых чисел связана с нулями дзета-функции Римана $\zeta(z)$, точнее, с теми ее нулями, которые являются комплексными и лежат в «критической полосе» $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ (вне этой полосы функция $\zeta(z)$ имеет только действительные нули: -2, -4, …, но они не представляют особого интереса в теории чисел). Все это мы подробно обсудим в главе 10, посвященной теории чисел, а пока ограничимся тем, что объясним, каким образом Адамар использовал упомянутые выше результаты, чтобы восполнить пробелы в работе Римана [III.342].

Риман свел исследование дзета-функции к исследованию другой целой функции $\Xi(z)$, определяемой соотношением

$$\Xi(z) = \xi\Big(\frac{1}{2} + iz\Big),$$

где

$$\xi(z) = \frac{z(z-1)}{2\pi}\Gamma\Big(\frac{z}{2}\Big)\zeta(z). \tag{9.15}$$

Записывая ξ в виде ряда

$$\xi(z) = b_0 + b_2 z^2 + b_4 z^4 + \ldots,$$

Адамар доказал неравенство

$$|\,b_m\,| < (m!)^{-1/2-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0,$$

тем самым проверив условия (9.13) при $1/\alpha = 1/2 + \varepsilon$. Поэтому род ξ как функции от $\sqrt{z}$ равен нулю, и

$$\xi(z) = \xi(0)\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{\alpha_k^2}\Big),$$

где α_k — нули функции ξ. Это свойство было приведено в работе Римана [III.342] без строгого доказательства.

§ 9.3. Другие результаты по аналитическим функциям

Ряды Дирихле. Исследование дзета-функции Римана привело Адамара к исследованию рядов вида

$$\sum_{n\geqslant 1} c_n n^{-z}$$

с комплексными коэффициентами c_n, а также их обобщений

$$\sum_{n\geqslant 1} c_n e^{-\lambda_n z}, \tag{9.16}$$

где $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim} \frac{\log n}{\lambda_n} < \infty.$$

Область сходимости любого ряда вида (9.16) есть некоторая полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$. Но, вообще говоря, эти полуплоскости различны для равномерной, поточечной и абсолютной сходимости. В этом состоит одна из трудностей исследования таких рядов.

В работе [I.146] о рядах Дирихле Адамар исследовал необходимые и достаточные условия представления функции $f(z)$, регулярной в некоторой полуплоскости, рядом вида (9.16). Эти условия были первоначально сформулированы в работе Каэна в 1896 г., но Э. Ландау, великий мастер находить ошибки в рассуждениях своих коллег-математиков, показал в [III.222], что в доказательство Каэна вкралась ошибка. В работе [I.146] Адамар попытался исправить доказательство Каэна, однако также допустил ошибку, на которую Ландау указал в письме к Адамару. Наконец, в своей заметке «Исправление к статье „О рядах Дирихле"» [I.147] Адамар принял критику Ландау и привел правильные необходимые и достаточные условия.

В работе [I.71] Адамар нашел различные соотношения между средними значениями функций, представимых рядами Дирихле. В частности, он ввёл среднее значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(\sigma + it)|^2 \, dt$$

для абсолютно сходящегося ряда Дирихле $f(z)$. В работах [I.70] и [I.274] Адамар нашел различные соотношения между средними значениями вида

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2A} \int_{-A}^{A} F(u + iw)\Phi(v - iw) \, dw,$$

где F и Φ — аналитические функции, представленные абсолютно сходящимися рядами

$$F(u) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n u}, \qquad \Phi(v) = \sum_n b_n e^{-\lambda_n v}.$$

Такие средние значения играют важную роль в теории почти периодических функций, разработанной впоследствии Харальдом Бором.

Теорема о действительной части. Теорема о действительной части — это неравенство, которое играет важную роль в факторизации целых функций. Впервые полученная Адамаром в 1892 г. [I.14], она дает оценку максимума модуля аналитической функции в терминах ее действительной части. Мы приведем сейчас доказательство этого результата, близкое к предложенному Адамаром, но с лучшей константой. Пусть

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} a_n z^n.$$

Это означает, что по предположению $f(0)=0$. Введем по определению максимум модуля
$$M(\rho)=\max_{|z|=\rho}|f(z)|$$
и максимальный член $\mu(\rho)=\max_n |a_n|\rho^n$ функции $f(z)$ на окружности $|z|=\rho$. Ясно, что при $r<R$
$$M(r)\leqslant \mu(R)\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{r}{R}\right)^n=\frac{r}{R-r}\mu(R). \tag{9.17}$$

Полагая $u=\operatorname{Re} f$, нетрудно проверить, что
$$a_nR^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\,\theta)e^{in\theta}\,d\theta.$$

Так как
$$\int_0^{2\pi} u(R,\,\theta)\,d\theta=0$$
и $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]}(\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)$, мы получаем
$$|a_n|R^n=\frac{1}{\pi}\max_{\varphi\in[0,2\pi]}\int_0^{2\pi}(1+\cos(n\theta-\varphi))u(R,\,\theta)\,d\theta.$$

Используя тождество
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos(n\theta-\varphi))\,d\theta=2,$$
мы приходим к неравенству
$$\mu(R)\leqslant 2\max_{\theta\in[0,2\pi]}u(R,\,\theta),$$
дающему вместе с (9.17) оценку максимума модуля
$$M(r)\leqslant\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}\operatorname{Re} f,$$
которая и составляет содержание теоремы о действительной части[1]. Эту теорему использовал Борель в своем доказательстве теоремы Пикара, не зависящем от модулярных функций [III.48].

В [III.245a] Литтлвуд приводит 3 различных доказательства этого результата, включая приведенное выше. С помощью остроумного приема он также показывает, что неравенство с постоянной 2 можно вывести из того же неравенства с постоянной 4, полученного Адамаром в [I.14]. Различные доказательства этого неравенства можно найти в ([III.51a], [III.398], [III.245a], [III.71a], [III.426a]).

[1] Другое доказательство этого неравенства см. в [III.398, с. 175].

Следующее обобщение теоремы о действительной части часто называется неравенством Бореля—Каратеодори:

$$|f(z)| \leqslant \frac{R+r}{R-r}|f(0)| + \frac{2r}{R-r} \max_{|\zeta|=R} \operatorname{Re} f(\zeta). \tag{9.18}$$

Оно справедливо для любой функции f, аналитической в круге $\{z\colon |z| < R\}$ и непрерывной на $\{z\colon |z| \leqslant R\}$. Иногда неравенство (9.18), а также связанное с ним неравенство для $\operatorname{Re} f$

$$|\operatorname{Re} f(z)| \leqslant \frac{R+r}{R-r}|\operatorname{Re} f(0)| + \frac{2r}{R-r} \max_{|\zeta|=R} \operatorname{Re} f(\zeta) \tag{9.19}$$

называют неравенствами Адамара—Бореля—Каратеодори (см., например, [III.62a] и приведенные там ссылки на литературу).

В [III.218a] показано, что двусторонняя зависящая от параметра α оценка

$$C(\alpha)\{\min_{|\zeta|=R} \operatorname{Re} f(\zeta) - \operatorname{Re} f(0)\} \leqslant \operatorname{Re}\{e^{i\alpha}(f(z) - f(0))\} \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha)\{\max_{|\zeta|=R} \operatorname{Re} f(\zeta) - \operatorname{Re} f(0)\}, \tag{9.20}$$

выполняется с точной константой $C(\alpha)$, где f — та же функция, что и раньше, α — произвольное действительное число и

$$C(\alpha) = \frac{2r(R - r\cos\alpha)}{R^2 - r^2}.$$

Неравенство (9.20) содержит в себе неравенства (9.17)—(9.19).

Теорема о трех кругах. Мы завершим эту главу еще одним часто используемым неравенством для аналитических функций, полученным Адамаром в 1896 г. Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в кольце $R_1 < |z| < R_2$, и пусть, как прежде, $M(r)$ — максимум функции $|f(z)|$ на окружности $|z| = r$, $R_1 < r < R_2$. В краткой статье [I.40] Адамар высказал утверждение о том, что $\log M(r)$ — выпуклая функция от $\log r$, но доказательство этого утверждения он так никогда и не опубликовал. После работ Ландау, Харди и Харальда Бора на это утверждение стали ссылаться как на теорему Адамара о трех кругах, так как его часто формулировали в виде неравенства

$$M(r_2)^{\log(r_3/r_1)} \leqslant M(r_1)^{\log(r_3/r_2)} M(r_3)^{\log(r_2/r_1)},$$

где $R_1 < r_1 < r_2 < r_3 < R_2$.

Этот результат Адамара имеет важные аналогии. Особый интерес представляет теорема Харди (1915). Харди доказал, что логарифм среднего значения

$$M_p(r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p\, d\varphi\right)^{1/p}, \quad p > 0,$$

— возрастающая функция от r, выпуклая по $\log r$. Это свойство среднего M_p играет фундаментальную роль в теории пространств Харди H^p функций, аналитических на единичном круге и удовлетворяющих условию

$$\sup_{r<1} M_p(r) < \infty.$$

Так как

$$\lim_{p\to\infty} M_p(r) = M(r),$$

мы видим, что результат Адамара является предельным случаем результата Харди.

Еще одно обобщение теоремы Адамара о трех кругах связано с понятием субгармоничности, которое можно рассматривать как обобщение понятия выпуклости на случай n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Непрерывная функция $f(P)$, заданная на D, называется субгармонической на D, если она удовлетворяет следующему условию: для любой подобласти $G \subset D$ с границей ∂G решение задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u\,|_{\partial G} = f$$

удовлетворяет неравенству $u \leqslant f$, т. е. существует гармоническая функция u, график которой лежит ниже графика функции f. В одномерном случае уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ принимает вид $d^2u/dx^2 = 0$, и его решением служит линейная функция $u = kx + b$. Таким образом, субгармоничность обобщает понятие выпуклой кривой.

Следующая теорема, доказанная Монтелем в 1928 г., служит n-мерным аналогом результата Адамара. Пусть $f(P)$ — функция, субгармоническая в слое $\{P \in \mathbb{R}^n\colon R_1 < |P| < R_2\}$. Тогда функция

$$\log\,(\max_{|P|=r} |f(P)|)$$

выпукла на (R_1, R_2) по $\log r$ при $n = 2$ и выпукла по r^{2-n} при $n > 2$.

Обобщения теорем Адамара, Харди и Монтеля для решений эллиптических и параболических уравнений с частными производными второго порядка (теоремы о трех шарах, трех цилиндрах, трех кривых и т. п.) можно найти в книге Проттера и Вайнбергера [III.333] и в статье [III.226, с. 201—204]. Вариант теоремы Адамара, называемый теоремой о трех прямых, служит основой интерполяционной теоремы М. Рисса и Г. Торина для линейных операторов в пространстве L^p [III.430]. Мощный метод комплексной интерполяции, основанной на теореме Рисса—Торина, играет важную роль в теории операторов и в анализе [III.400].

Глава 10

Теория чисел

§ 10.1. Распределение простых чисел

Одним из величайших достижений теории аналитических функций в XIX в. стало доказательство в 1896 г. теоремы о простых числах, полученное Адамаром и Валле Пуссеном, который был профессором в университете Лёвена. Эта теорема заняла особое место в аналитической теории чисел, занимающейся исследованием теоретико-числовых задач методами математического анализа.

Еще Евклиду было известно, что количество простых чисел бесконечно. Древние греки также знали, что все простые числа

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ \ldots \tag{10.1}$$

можно получить с помощью следующего алгоритма, известного под названием решета Эратосфена. Первый шаг состоит в вычеркивании числа 1 из натурального ряда, и число 2 становится первым в ряду (10.1). Предположим теперь, что найдена последовательность простых чисел $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$, p_i. Начиная с p_i, вычеркнем все последующие натуральные числа, которые делятся на все p_j, $j \leqslant i$. Тогда первым числом, которое не делится на p_j, $j \leqslant i$, будет простое число p_{i+1}.

До XVIII в. в последовательности (10.1) не было обнаружено никакой регулярности. В 1747 г. Эйлер писал: «Математики до сих пор тщетно пытались открыть какой-либо порядок в последовательности простых чисел и поэтому поверили, что это — тайна, в которую человеческий ум никогда не сможет проникнуть. Чтобы убедиться в этом, достаточно бросить взгляд на таблицы простых чисел, которые несколько человек дали себе труд продолжить за сто тысяч. Из таблиц увидим, что там нет никакого закона» [III.125, с. 639].

Применение компьютеров в наши дни позволило составить таблицы простых чисел, простирающиеся до совершенно фантастических величин, но это только подтвердило представление о хаотичности их чередования. Тем не менее, нетрудно видеть, что плотность простых чисел убывает. На долю простых чисел приходится 40% среди первых десяти целых чисел, 25% среди первых ста чисел, около 17% среди первых тысячи чисел и примерно 8% среди первого миллиона целых чисел. С одной стороны, существуют сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, не содержащие простых чисел. Например, ясно, что ни одно из чисел $n! + 2$, $n! + 3$, $\ldots$, $n! + n$ не простое. С другой стороны, в последовательности (10.1) встречаются так называемые близнецы, т. е. простые числа, разность между которыми равна 2. Например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 — простые числа-близнецы. Числа 8 004 119 и 8 004 121 — также простые числа-близнецы. До сих пор неизвестно, бесконечно ли количество близнецов.

Пусть заданы x первых чисел натурального ряда, и пусть $\pi(x)$ — число тех из них, которые являются простыми. Что можно сказать об отношении $\pi(x)/x$, когда $x \to \infty$? Эта проблема, занимавшая умы крупнейших математиков, поистине стала классической. После того как Адамар и Валле Пуссен одновременно и независимо нашли главный член в асимтотическом разложении функции $\pi(x)$, другими учеными были найдены решения с помощью иных методов. Последующие исследования показали, как широк спектр теорий, связанных с данной проблемой: тауберовы теоремы, гармонический анализ, ряды Дирихле (список легко продолжить). Окончательный результат формулируется просто:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{10.2}$$

где запись $u(x) \sim v(x)$ означает, что $u(x)/v(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

История вопроса. Проследим за развитием идей предшественников Адамара и Валле Пуссена. Пусть $n = 1, 2, \ldots$ и $p_1, p_2, \ldots$ — последовательности натуральных и простых чисел в их обычном порядке. В огромном наследии Эйлера имеется следующее тождество, выведенное им в 1737 г.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_i^s}\Big)^{-1}, \quad s > 1. \tag{10.3}$$

Оно следует непосредственно из того, что его правая часть равна

$$\prod_{i=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{p_i^s} + \frac{1}{p_i^{2s}} + \ldots\Big),$$

и из представления любого натурального числа n в виде произведения $p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — различные простые числа, а $k_1, \ldots, k_m$ — натуральные числа.

Левая часть тождества (10.3) есть дзета-функция Римана, с которой мы уже встречались в § 1.10 и 9.2. Из (10.3) следует, что

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{i=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_i^s}\Big),$$

а после разложения правой части получаем

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{10.4}$$

где μ — функция Мёбиуса, определяемая следующим образом: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, если n — произведение k различных простых чисел, и $\mu(n) = 0$, если в разложении n на простые множители есть кратный множитель.

Из тождества (10.3) Эйлер пришел к заключению о расходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}. \tag{10.5}$$

Действительно, из (10.3) находим

$$\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = -\sum_{i=1}^{\infty} \log\Big(1 - \frac{1}{p_i^s}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big(p_i^{-s} + \frac{p_i^{-2s}}{2} + \frac{p_i^{-3s}}{3} + \ldots\Big).$$

При $s \to 1$ левая часть стремится к бесконечности, а правая часть есть сумма сходящегося ряда и ряда (10.5). Расходимость суммы чисел, обратных простым числам, показывает, что простые числа распределены среди натуральных весьма плотно, например, плотнее, чем квадраты натуральных чисел, для которых сумма обратных чисел образует сходящийся ряд.

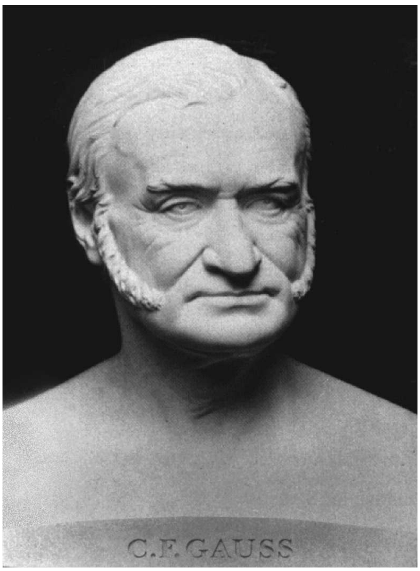
В 1798 г., анализируя таблицу простых чисел, Лежандр высказал гипотезу о том, что при больших x функцию $\pi(x)$ можно с высокой точностью заменить функцией

$$\frac{x}{A \log x + B},$$

где A и B — некоторые константы. В 1808 г. в своей монографии [III.232] Лежандр сформулировал эту гипотезу в следующем виде:

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x - 1{,}08366}. \tag{10.6}$$

Другую эмпирическую формулу для $\pi(x)$ получил Гаусс, который всю жизнь с юных лет интересовался асимптотическим законом распределения простых чисел. На склоне лет Гаусс признался, что любил проводить ежедневно четверть



Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

часа в размышлении над этой проблемой. Гаусс никогда не публиковал результатов своих размышлений, но в письме к Энке от 24 декабря 1849 г. ([III.147, с. 444—447]) написал, что, анализируя таблицу простых чисел в 1792—1793 гг., получил убедительное подтверждение правильности приближенной формулы

$$\pi(x) \approx \mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \tag{10.7}$$

из которой следует формула (10.2).

Гипотезы (10.6) и (10.7) проанализировал Чебышёв в своей статье, представленной в 1848 г. Санкт-Петербургской Академии наук. Первый из полученных Чебышёвым результатов гласил, что для любого натурального числа n сумма

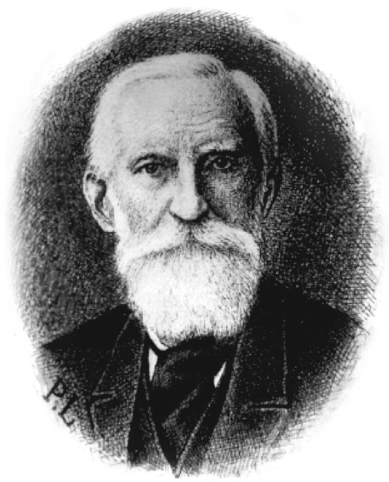
$$\sum_{x=2}^{\infty}\left(\pi(x+1) - \pi(x) - \frac{1}{\log x}\right)\frac{(\log x)^n}{x^{1+\rho}}$$

сходится к конечному пределу при $\rho \to 0+$.

Из этого результата Чебышёв заключил, что если предел отношения $\pi(x)/\mathrm{li}(x)$ при $x \to \infty$ существует, то он должен быть равен 1. Далее Чебышёв сделал вывод, что выражение

$$\frac{x}{\pi(x)} - \log x$$

может стремиться только к -1, и тем самым опроверг гипотезу Лежандра (10.6).



Пафнутий Львович Чебышёв
(1821—1894)

Позднее в работе «О простых числах» ([III.393]) Чебышёв показал, что при всех достаточно больших x выполняются неравенства (2.4). Он ввел функцию

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p,$$

где сумма берется по всем натуральным числам m и по всем простым числам p, для которых при каждом m выполняется неравенство $p^m \leqslant x$, и выбрал за основу своего доказательства тождество

$$\log([x]!) = \sum_{n \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

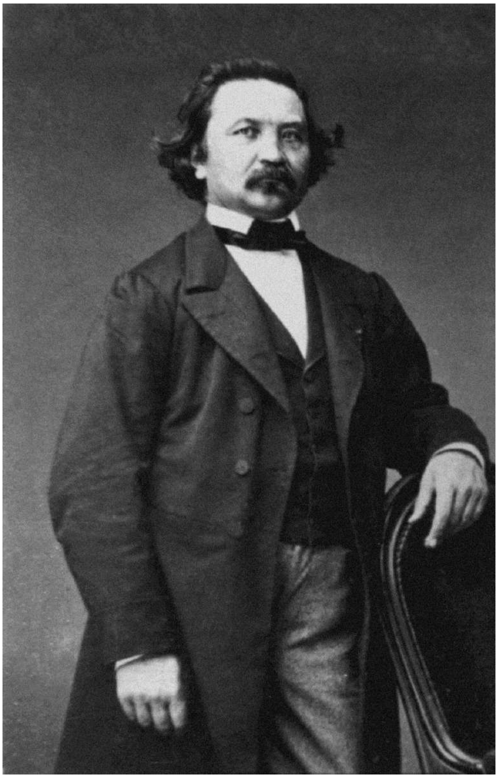
Затем Чебышёв доказал, что при $x \to \infty$ отношения

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \quad \text{и} \quad \frac{\psi(x)}{x}$$

имеют одни и те же верхний и нижний пределы. Таким образом, если одно из этих отношений имеет предел, то и другое отношение также имеет предел, причем оба предела равны. Этот результат играет важную роль в последующих доказательствах теоремы о распределении простых чисел. Соответственно асимптотический закон распределения простых чисел часто записывают в виде

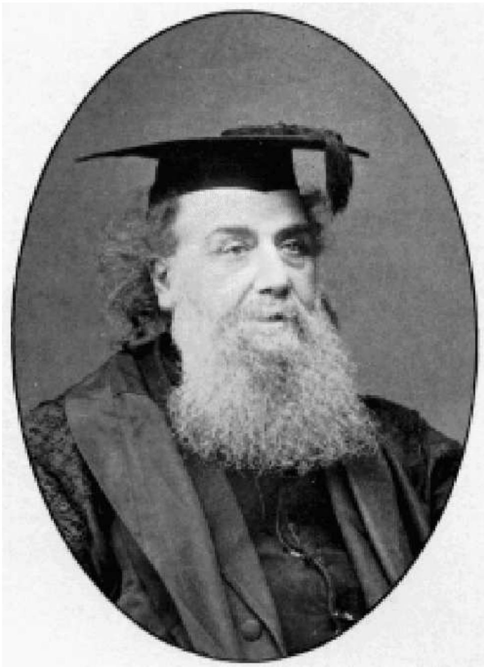
$$\psi(x) \sim x. \tag{10.8}$$

Еще одним достижением Чебышёва стало доказательство так называемого постулата Бертрана, согласно которому в каждом интервале $(x, 2x)$, $x \geqslant 2$, существует простое число.



Жозеф Бертран (1822—1900)

Неравенства (2.4) уточнил Сильвестр в 1881 г. [III.382]. Он показал, что при всех достаточно больших x значение $\pi(x)$ лежит в меньшем интервале, но вопрос о том, как сделать этот интервал как можно более узким, остался открытым. Сильвестр пишет об этом в конце своей статьи: «Чтобы с уверенностью провозгласить существование такой возможности [доказать (10.2). — *Авт.*], нам, вероятно, нужно подождать, пока не родится кто-то, превосходящий Чебышёва по проницательности и глубине, подобно тому как Чебышёв показал свое превосходство в этих качествах по сравнению с другими». По поводу этой цитаты Э. Ландау замечает: «Когда Сильвестр писал эти строки, Адамар уже родился. Адамару удалось достичь результата, причем на пути, которым задолго до этого, но с другой целью, шел Риман» ([III.223, т.1, с. 44]).



Джеймс Джозеф Сильвестр
(1814—1897)

Работы Римана. В 1859 г. Риман опубликовал работу «О количестве простых чисел, меньших некоторой заданной величины» [III.342] (см. также [III.344]). Эта небольшая статья (занимающая всего восемь страниц) оказалась пророческой для аналитической теории чисел и теории функций. Цель работы состояла в выводе представления для $\pi(x)$ в виде ряда с главным членом $\mathrm{li}(x)$. К сожалению, нельзя сказать, что эта цель была достигнута: формула Римана не была полностью доказана, не было также доказано, что $\mathrm{li}(x)$ — главный член асимптотической формулы для $\pi(x)$ при $x \to \infty$. Тем не менее методы Римана оказали сильное влияние на последующие попытки доказать теорему о распределении простых чисел. Главной новинкой было рассмотрение функции $\zeta(s)$ при комплексных значениях $s = \sigma + it$. Этот подход позволил Риману использовать методы теории аналитических функций, такие как интегрирование по контуру, аналитическое продолжение, теорию вычетов и позднее — благодаря работам Адамара и других математиков — теорию целых функций, как инструмент теории чисел. Так как ряд $\sum n^{-s}$ сходится при $\sigma > 1$ и каждый его член представляет собой функцию, регулярную в полуплоскости $\sigma > 1$, из теоремы Вейерштрасса о сходимости рядов регулярных функций следует, что сумма $\zeta(s)$ ряда $\sum n^{-s}$ — регулярная функция при $\sigma > 1$. Идея Римана приводит к обобщению тождества Эйлера (10.3) на случай, когда s лежит в полуплоскости $\sigma > 1$.

Риман доказал, что функцию $\zeta(s)$ можно аналитически продолжить до функции, мероморфной на всей s-плоскости, и единственной особой точкой дзета-функции будет простой полюс $s = 1$ с вычетом, равным 1, т. е.

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \ldots \tag{10.9}$$

Риман также показал, что функция $\zeta(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = 2\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\frac{s\pi}{2}. \tag{10.10}$$

Следовательно, функция ξ, введенная соотношением (9.14), является целой и удовлетворяет уравнению

$$\xi\Big(\frac{1}{2} + it\Big) = \xi\Big(\frac{1}{2} - it\Big).$$

Иначе говоря, $\xi\Big(\dfrac{1}{2} + it\Big)$ — четная целая функция от t, действительнозначная на действительной оси. Это означает, что $-t_0$, $\overline{t_0}$ и $-\overline{t_0}$ — нули функции $\xi\Big(\dfrac{1}{2} + it\Big)$, если t_0 — ее нуль, т. е. нули функции $\xi\Big(\dfrac{1}{2} + it\Big)$ симметричны относительно обеих координатных осей.

Риман понял, что комплексные нули дзета-функции играют особую роль в проблеме распределения простых чисел. Так как ни один из множителей в правой части равенства (10.3) не обращается в нуль и произведение сходится при $\sigma > 1$, мы получаем, что $\zeta(s) \neq 0$ при $\sigma > 1$. Из равенства (10.10) и свойств гамма-функции Γ следует, что в полуплоскости $\sigma < 0$ дзета-функция имеет только простые нули в действительных точках -2, -4, ..., называемые тривиальными нулями. Из тождества

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - \ldots$$

непосредственно следует, что $\zeta(s) \neq 0$ при $s \in (0,\ 1)$. Следовательно, нетривиальные нули функции $\zeta(s)$ комплексны и все лежат в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, которая называется критической полосой. Из сказанного выше о нулях функции $\xi\Big(\dfrac{1}{2} + it\Big)$ мы заключаем, что комплексные нули дзета-функции Римана симметричны относительно действительной оси $t = 0$ и вертикальной прямой $\sigma = 1/2$.

Риман высказал даже более точное предположение. Оно и составляет знаменитую, до сих пор не доказанную, *гипотезу Римана*: все нули дзета-функции, содержащиеся в критической полосе, расположены симметрично на прямой $\sigma = 1/2$. Интересное обсуждение эвристических аргументов, которые могли привести Римана к его гипотезе, можно найти в книге Эдвардса [III.118, с. 164].

Доказательство гипотезы Римана остается нерешенной проблемой, над которой безуспешно бились многие знаменитые математики XX в. Существует известный анекдот о Гильберте, который в ответ на вопрос: «О чем бы Вы спросили, если бы воскресли через триста лет?» — ответил: «Доказана ли гипотеза Римана?».

Риман показал, что число $N(T)$ нулей дзета-функции в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ стремится к бесконечности при $T \to \infty$. После смерти Римана в его бумагах была найдена следующая гипотеза (см. [III.344]):

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{10.11}$$

Работа Римана и развитие его идей более подробно описаны в книгах [III.192], [III.397], [III.118].

Доказательство Адамара. После статьи Римана прошло более тридцати лет, прежде чем в 1896 г. Адамар и независимо от него Валле Пуссен нашли первые доказательства теоремы о распределении простых чисел. Мы опишем здесь главные шаги доказательства Адамара.

I. Используя результаты о целых функциях, полученные в своей статье [I.15], Адамар показал, что род целой функции $(s-1)\zeta(s)$ равен 1 и, следовательно, ее произведение Вейерштрасса имеет на всей комплексной плоскости следующий вид:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} e^{As+B} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}, \tag{10.12}$$

где произведение берется по всем (действительным и комплексным) нулям дзета-функции.

II. Можно ожидать, что прямая $\sigma = 1$ — граница полуплоскости, в которой функция $\zeta(\mathrm{s})$ представима в виде ряда $\sum n^{-s}$, — играет особую роль в этой теории. Адамар доказал, что дзета-функция не обращается в нуль на этой прямой:

$$\zeta(1+it) \neq 0. \tag{10.13}$$

Позднее оказалось, что это утверждение эквивалентно теореме о распределении простых чисел (см. [III.192, гл. 2]).

Не вдаваясь в детали, мы воспроизведем общий ход рассуждений в доказательстве Адамара утверждения (10.13), следуя книге [III.397]. Исходным пунктом служит тождество

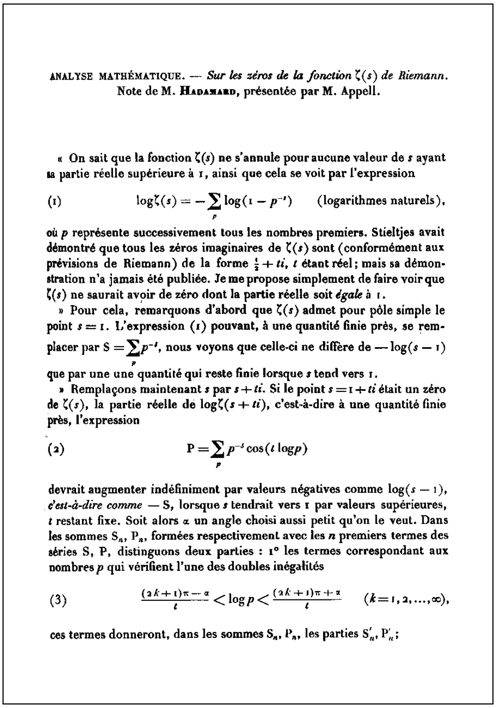
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p} \frac{\log p}{p^{ms}}, \qquad \sigma > 1, \tag{10.14}$$

которое выводится из (10.3). Из равенства (10.14) следует, что

$$\log \zeta(s) = \sum_{m} \sum_{p} \frac{1}{mp^{ms}},$$

где p пробегает все простые, а m — все целые положительные числа. Таким образом, разность

$$\log \zeta(s) - \sum_{p} \frac{1}{p^{s}} \tag{10.15}$$



ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *de Riemann.* Note de M. HADAMARD, présentée par M. Appell.

« On sait que la fonction $\zeta(s)$ ne s'annule pour aucune valeur de s ayant sa partie réelle supérieure à 1, ainsi que cela se voit par l'expression

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s}) \quad \text{(logarithmes naturels)}, \tag{1}$$

où p représente successivement tous les nombres premiers. Stieltjes avait démontré que tous les zéros imaginaires de $\zeta(s)$ sont (conformément aux prévisions de Riemann) de la forme $\frac{1}{2} + ti$, t étant réel ; mais sa démonstration n'a jamais été publiée. Je me propose simplement de faire voir que $\zeta(s)$ ne saurait avoir de zéro dont la partie réelle soit *égale* à 1.

» Pour cela, remarquons d'abord que $\zeta(s)$ admet pour pôle simple le point $s = 1$. L'expression (1) pouvant, à une quantité finie près, se remplacer par $S = \sum_p p^{-s}$, nous voyons que celle-ci ne diffère de $-\log(s-1)$ que par une une quantité qui reste finie lorsque s tend vers 1.

» Remplaçons maintenant s par $s + ti$. Si le point $s = 1 + ti$ était un zéro de $\zeta(s)$, la partie réelle de $\log\zeta(s + ti)$, c'est-à-dire à une quantité finie près, l'expression

$$P = \sum_p p^{-s} \cos(t \log p) \tag{2}$$

devrait augmenter indéfiniment par valeurs négatives comme $\log(s-1)$, *c'est-à-dire comme* $-S$, lorsque s tendrait vers 1 par valeurs supérieures, t restant fixe. Soit alors α un angle choisi aussi petit qu'on le veut. Dans les sommes S_n, P_n, formées respectivement avec les n premiers termes des séries S, P, distinguons deux parties : 1° les termes correspondant aux nombres p qui vérifient l'une des doubles inégalités

$$\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} < \log p < \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t} \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{3}$$

ces termes donneront, dans les sommes S_n, P_n, les parties S'_n, P'_n ;

Первая страница заметки Адамара о нулях дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Адамар пишет: «Стилтьес доказал, что все нули функции ζ(s) (в соответствии с гипотезой Римана) имеют вид $1/2 + ti$, где t — действительная переменная, но его доказательство никогда не было опубликовано. Я просто намереваюсь показать, что функция $\zeta(s)$ не должна иметь нулей с действительной частью, равной 1».

регулярна при $\sigma > 1/2$. Так как функция $\zeta(s)$ имеет простой полюс в точке $s = 1$, мы получаем

$$\sum_p \frac{1}{p^\sigma} \sim \log\frac{1}{\sigma - 1} \quad \text{при } \sigma \to 1+. \tag{10.16}$$

Из тождества (10.4) с учетом неравенства $\operatorname{Re} s > 1$ следует, что

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma) < \frac{\text{const}}{\sigma - 1}$$

при значениях σ, близких к 1, т. е.

$$|\zeta(s)| > \text{const}\cdot(\sigma - 1).$$

Предположим теперь, что $\zeta(1 + it) = 0$. Тогда при $s = \sigma + it$ выполняется асимптотическое соотношение

$$\log|\zeta(s)| \sim \log(\sigma - 1) \quad \text{при } \sigma \to 1+.$$

Следовательно, взяв действительную часть разности (10.15), мы приходим к асимптотическому соотношению

$$\sum_p \frac{\cos(t\log p)}{p^\sigma} \sim \log(\sigma-1). \tag{10.17}$$

Сравнивая соотношения (10.16) и (10.17), на эвристическом уровне можно высказать предположение о том, что для большинства значений p значение функции $\cos(t\log p)$ близко к -1. Тогда $\cos(2t\log p)\sim 1$ при тех же значениях p и, таким образом,

$$\log|\zeta(\sigma+2it)| \sim \sum_p \frac{\cos(2t\log p)}{p^\sigma} \sim \log\frac{1}{\sigma-1},$$

откуда следует, что функция ζ имеет полюс в точке $1+2it$. Но это невозможно, так как функция ζ имеет только один полюс в точке $s=1$, и поэтому мы приходим к неравенству (10.13).

III. Затем Адамар установил асимптотическое соотношение

$$\sum_{p<x} \log p \log\frac{x}{p} \sim x \quad \text{при } x\to\infty. \tag{10.18}$$

Сначала он рассмотрел интеграл

$$J(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} s^{-2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}x^s\,ds, \tag{10.19}$$

где a — произвольное число больше единицы. (Так как подынтегральное выражение — регулярная функция при $\sigma>1$, нет необходимости фиксировать значение a.) Используя равенство (10.14) и легко проверяемую формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} s^{-2}x^s\,ds = \begin{cases} 0 & \text{при } x<1,\\ \log x & \text{при } x>1, \end{cases}$$

Адамар пришел к тождеству

$$J(x) = \sum_k\sum_p \log p\log\Bigl(\frac{x}{p^k}\Bigr),$$

где $p^k<x$, p — простое, k — целое. Как нетрудно проверить, сумма членов, для которых $k>1$, равна $o(x)$ при $x\to\infty$. Действительно, из неравенств $2^k<p^k<x$ следует, что $k<\log x/\log 2$. Кроме того,

$$\sum_{p<x^{1/k}} \log p\log\Bigl(\frac{x}{p^k}\Bigr) \leqslant \log x\log\Biggl(\prod_{p<x^{1/k}} p\Biggr) \leqslant \log x\log\Gamma(1+x^{1/k}) \leqslant \mathrm{const}\cdot x^{1/k}(\log x)^2,$$

и, наконец,

$$J(x) = \sum_{p<x}\log p\log\frac{x}{p} + O(x^{1/2}(\log x)^3). \tag{10.20}$$

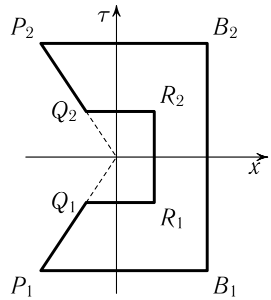
Затем Адамар вычислил интеграл (10.19) другим способом, используя теорему о вычетах и тождество (10.14). Напомним, что если

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

то вычетом A функции $f(z)$ в точке z_0 называется коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$, т. е. $A=c_{-1}$. Пусть $f(z)$ — однозначная функция, регулярная на множестве $\overline{D}$, кроме, возможно, точек $z_k\in D$, $k=1,\ldots,m$. Тогда

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz=2\pi i(A_1+\ldots+A_m),$$

где A_k — вычет функции $f(z)$ в точке z_k.



Пусть τ — достаточно большое положительное число. Начав с отрезка B_1B_2 вертикальной прямой, где $B_1=a-i\tau$ и $B_2=a+i\tau$, Адамар сформировал замкнутый контур $\mathcal{L}=B_1P_1Q_1R_1R_2Q_2P_2B_2$ (см. рис.), так, чтобы нули дзета-функции не содержались в области D, ограниченной контуром $\mathcal{L}$. По теореме о вычетах получаем

$$\int_{a-i\tau}^{a+i\tau}=-\int_{\mathcal{L}}+2\pi i\{\ldots\},$$

где $\{\ldots\}$ означает сумму вычетов подынтегральной функции в области D. Таким образом,

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}=\lim_{\tau\to\infty}\Big[-\int_{\mathcal{L}}+2\pi i\{\ldots\}\Big].$$

Из равенства (10.12) следует, что

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=\sum_{\alpha}\Big(\frac{1}{s-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\Big)+\sum_{\beta}\Big(\frac{1}{s-\beta}+\frac{1}{\beta}\Big)+C-\frac{1}{s-1},$$

где C — константа, первая сумма берется по действительным нулям α дзета-функции, а вторая — по ее комплексным нулям β.

Вычет подынтегральной функции в равенстве (10.19), соответствующий полюсу $s=1$ функции ζ'/ζ, равен x. Действительные нули α лежат вне области D и поэтому не вносят вклад в сумму вычетов. Адамар далее показал, используя методы, описанные в его статье о целых функциях [I.15], что интегрирование по звеньям B_1P_1 и B_2P_2 в (10.14) дает нуль в пределе при $\tau\to\infty$. Затем он показал, что интеграл по ломаной $P_1Q_1R_1R_2Q_2P_2$ и вклад комплексных нулей β ограничены величиной εx, где ε — сколь угодно малое число. Здесь важно, что прямая $\operatorname{Re} s=1$ не содержит нулей. Следовательно,

$$J(x)=x+o(x), \tag{10.21}$$

что вместе с (10.20) приводит к соотношению (10.18).

IV. Теперь нетрудно показать, что

$$\sum_{p<x} \log p \sim x. \tag{10.22}$$

Действительно, вследствие соотношения (10.18) при любом фиксированном h выполняется равенство

$$\sum_{p<x} \log p \log(1+h) + \sum_{x \leqslant p < x(1+h)} \log p \log \frac{x(1+h)}{p} = x(h + o(x)).$$

Так как величина $x(1+h)/p$ во второй сумме заключена между 1 и $1+h$, выполняются следующие неравенства:

$$\frac{1}{x} \sum_{p<x} \log p < \frac{h + o(x)}{\log(1+h)},$$

$$\frac{1}{x(1+h)} \sum_{p<x(1+h)} \log p > \frac{h + o(x)}{(1+h)\log(1+h)}.$$

Переходя к верхнему и нижнему пределу и использовав произвольность h, мы придем к соотношению (10.22), и останется только воспользоваться эквивалентностью соотношений (10.2) и (10.8).

Такова в общих чертах схема доказательства Адамара. В конце работы [I.45] он сообщает, что во время корректуры ему стало известно доказательство асимптотического закона, полученное Валле Пуссеном (см. [III.405]). «Я думаю, — пишет Адамар, — читатель, сопоставивший оба доказательства, согласится с тем, что мое проще». И действительно, как отмечалось в литературе (см., например, [III.192, с. 42]), в ряде пунктов доказательство Адамара проще.

Дальнейшие результаты. В одном очень важном пункте Валле Пуссен пошел дальше: в 1899 г. он показал [III.406], что при $x \to \infty$

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}), \tag{10.23}$$

где c — некоторая положительная постоянная. Этот результат явился исходным для целого ряда уточнений оценки разности $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, полученных другими авторами. Сравнительное изложение исследований Адамара и Валле Пуссена по распределению простых чисел приведен в гл. 4 книги Эдвардса [III.118].

Любопытное высказывание, касающееся обоих ученых, мы находим в очень обстоятельной главе «Теория чисел» книги Дьёдонне [III.105]. Авторы этой главы Уильям и Ферн Эллисон, имея в виду редкое долголетие обоих ученых, пишут:«То обстоятельство, что потребовалось более 100 лет для появления доказательства теоремы о простых числах, породило легенду, что она сделала бессмертными тех, кто ее доказал. Долгое время легенда казалось достоверной, но, к несчастью, была опровергнута, когда в 1962 г. в возрасте 96 лет скончался Валле Пуссен, и рухнула, когда в 1963 г. в возрасте 98 лет умер Адамар!»

После 1896 г. соперничество обоих ученых продолжалась еще некоторое время в связи с их параллельными исследованиями по рядам Дирихле. Валле Пуссену принадлежат также многочисленные выдающиеся результаты в теории потенциала, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории приближения функций (включая гармонический анализ), дескриптивной и метрической теориях функций.

Все упомянутые выше ученые начиная с Эйлера, внесшие вклад в проблему распределения простых чисел, прославились и в других областях науки. Мы назовем имя ещё одного учёного — фон Мангольдта, который не был исключением. Он обратился к аналитической теории чисел, проработав некоторое время в теории аналитических функций. В 1895 г. в своей обширной статье [III.266] фон Мангольдт дал доказательство формулы (10.11) для плотности распределения нулей дзета-функции.

В знаменитой речи Д. Гильберта на Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 г., во многом определившей пути развития математики XX в., были затронуты и проблемы распределения простых чисел. В восьмом разделе этой речи (всего их 23) говорилось: «В теории распределения простых чисел в последнее время сделаны существенные сдвиги Адамаром, Валле Пуссеном, Мангольдтом и другими. Чтобы полностью решить эту проблему, поставленную в заметке Римана «О количестве простых чисел, не превышающих заданного значения», все еще необходимо доказать очень важное утверждение Римана о том, что все нули функции $\zeta(s)$ имеют действительную часть, равную $1/2$» [III.176, с. 85].

Через год, в 1901 г., вклад в решение этой проблемы внес шведский математик Х. фон Кох [III.212]. Пусть τ — такое число, что $\zeta(s) \neq 0$ справа от вертикальной прямой $\sigma = \tau$. Опираясь на результаты Валле Пуссена и фон Мангольдта, фон Кох показал, что

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\tau} \log x).$$

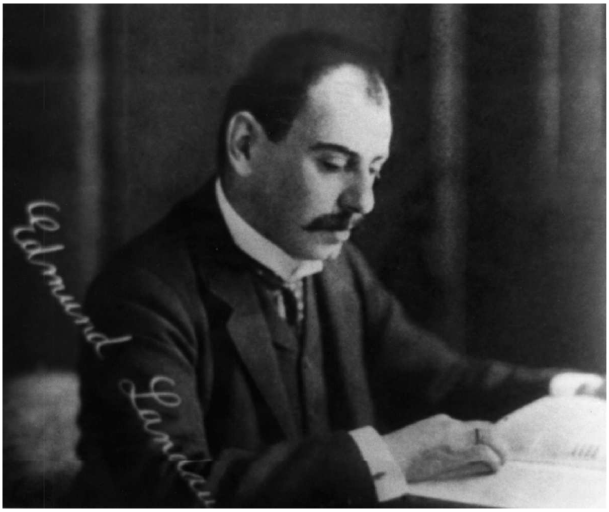
Хельге фон Кох (1870—1924)

Если гипотеза Римана верна, то значение $\tau = 1/2$ допустимо и соотношение фон Коха принимает вид

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

Эта оценка приближения $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ существенно лучше оценки Валле Пуссена и всех других оценок, известных по сей день.

В 1909 г. Э. Ландау опубликовал свой фундаментальный трактат о простых числах [III.223][1]. Это классическое сочинение, содержащее также ряд исторических сведений, является энциклопедией работ до 1909 г. по проблеме распределения простых чисел. Приведя два новых доказательства асимптотического закона, Ландау проанализировал также известные к тому времени доказательства других авторов и показал, что они могут быть упрощены.



Эдмунд Ландау
(1877—1938)

Одновременно с Э. Ландау на математической сцене выступил Харди, к которому позднее присоединился Литтлвуд. Огромный критический анализ, проделанный Ландау, казалось, исключал появление каких-либо сенсационных исследований асимптотического закона или новых результатов в теории дзета-функции, но оказалось, что они возможны. Так, в 1914 г. появилась работа Харди [III.165], в которой доказано, что функция $\zeta(s)$ имеет бесконечно много нулей на прямой $\sigma = 1/2$. Кроме того, Харди доказал, что если $M(T)$ означает число нулей дзета-функции вида $s = 1/2 + it$, где $|t| \leqslant T$, то $M(T) > AT$, где A — некоторая положительная константа, не зависящая от T. Сельберг [III.360] усовершенствовал эту последнюю оценку в 1942 г., доказав неравенство

$$M(T) > AT\log T.$$

[1]Результаты более поздних исследований содержатся в лекциях Э. Ландау [III.225] 1927 г.

Значительный прогресс в исследовании дзета-функции был достигнут с помощью оценок тригонометрических сумм

$$\sum_{n=k}^{l} e^{2\pi i f(n)}, \tag{10.24}$$

где f — некоторая гладкая функция. В случае дзета-функции

$$f(n) = -\frac{s}{2\pi} \log n.$$

А. Вейль, а позднее Харди и Литтлвуд первыми применили оценки тригонометрических сумм (10.24) к теории чисел (см. [III.397]).

Литтлвуд получил следующее уточнение асимптотической формулы (10.23) Валле Пуссена:

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(xe^{-c(\log x \log\log x)^{1/2}}) \tag{10.25}$$

(см. [III.245]).

Продолжали появляться новые доказательства теоремы о распределении простых чисел. Внес свой вклад и Винер, предложив доказательство на основе своей тауберовой теоремы [III.421]. «Элементарные» доказательства, которые не использовали методы комплексного переменного, были предложены Эрдешем и Сельбергом (см. [III.124], [III.361]). Однако их метод не дает таких хороших оценок для остаточного члена в теореме о распределении простых чисел, как методы, основанные на изучении дзета-функции.

Бёрлинг рассмотрел следующее обобщение проблемы распределения простых чисел [III.34]. Назвав члены возрастающей последовательности действительных чисел $\{y_k\}_{k\geqslant 1}$, $y_1 > 1$, «простыми числами», Бёрлинг ввел «целые числа» $y_{n_1} y_{n_2} \ldots y_{n_\nu}$ и обозначил через $\Pi(x)$ и $N(x)$ соответствующие функции плотности. Он обобщил упомянутый выше метод Винера и, пользуясь им, доказал, что из условия

$$N(x) = Ax + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{\gamma}}\Big), \qquad A = \mathrm{const},$$

следует соотношение

$$\Pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

если $\gamma > 3/2$, но эта оценка утрачивает силу, если $\gamma = 3/2$.

Важные усовершенствования формулы (10.25) были получены с помощью метода оценки тригонометрических сумм (10.24), разработанного И. М. Виноградовым и упрощенного Хуа Локеном. Оценка

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(xe^{-c(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}}),$$

найденная в 1958 г. И. М. Виноградовым и Н. М. Коробовым, по-видимому, является наилучшим из полученных до сих пор результатов такого рода (см. [III.121]).

§ 10.2. Простые числа в арифметических прогрессиях

Методы, развитые Адамаром в работе [I.15], оказались полезными в решении проблемы распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. Эта проблема восходит к Лежандру, ещё в 1795 г. высказавшему гипотезу, согласно которой если d и l — взаимно простые числа, то арифметическая прогрессия $\{dm + l \mid m \geqslant 1\}$ содержит бесконечно много простых чисел [III.232] (см. также [III.417, с. 329]). В 1837 г. Дирихле опубликовал в [III.106] доказательство этого утверждения, в котором важную роль играло следующее обобщение дзета-функции Римана:

$$L(s,\, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}. \tag{10.26}$$

Здесь s — действительное число, $s > 1$, а функция $\chi(n)$, называемая характером Дирихле по модулю l, обладает следующими свойствами:

1) $\chi(n) \neq 0$, если и только если n не делится на l;
2) $\chi(n + l) = \chi(n)$ (периодичность);
3) $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ (мультипликативность).

Аналитическое продолжение ряда (10.26) определяет L-функцию Дирихле, свойства которой аналогичны свойствам дзета-функции. В частности, аналог тождества Эйлера для L-функции имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

В статье [I.45] Адамар заметил, что его доказательство несуществования нулей дзета-функции на прямой $\operatorname{Re} s = 1$ основано только на следующих двух простых свойствах: 1) $\log \zeta(s)$ можно записать в виде ряда Дирихле

$$\sum_{n} a_n e^{-\lambda_n s}$$

с положительными коэффициентами a_n; 2) дзета-функция имеет только один простой полюс, который лежит на прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Адамар рассмотрел функцию

$$f(s) = \prod_{\{\chi\}} L(s,\, \chi),$$

где $\{\chi\}$ — множество всех характеров Дирихле по модулю l, и проверил, что f обладает теми же двумя свойствами. Тем самым он получил результат $L(1 + it,\, \chi) \neq 0$. Адамар заметил, что и другие его рассуждения, относящиеся к дзета-функции, переносятся на L-функцию Дирихле, что приводит к соотношению

$$\sum_{p \leqslant x,\, p \equiv l \pmod{d}} \log p \sim \frac{x}{\varphi(d)} \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{10.27}$$

где φ — функция Эйлера, значение которой $\varphi(d)$ равно количеству натуральных чисел, не превышающих d и не имеющих с d общих делителей. Соотношение (10.27) приводит к следующей асимптотической формуле для функции

$\pi(x;\, d,\, l)$, которая дает количество простых чисел в прогрессии $\{dm + l \mid m \geqslant 1\}$, не превышающих x:

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x;\, d,\, l)\frac{\log x}{x} = \varphi(d). \tag{10.28}$$

В работе [III.406] Валле Пуссен получил формулу

$$\pi(x;\, d,\, l) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(d)} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

которая впоследствии была усовершенствована (см. [III.412, с. 182]).

Из соотношения (10.28) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x;\, d,\, l_1)}{\pi(x;\, d,\, l_2)} = 1.$$

Тем самым подтверждается гипотеза Дирихле о том, что в арифметических прогрессиях с взаимно простыми параметрами d, l_1 и d, l_2 простые числа асимптотически распределены с равной плотностью.

В более поздних исследованиях различных авторов (Э. Ландау, Харди, Бор) были доказаны формулы, аналогичные формуле (10.11) Римана—Мангольдта, для числа нулей функции $L(x, \chi)$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$ при $T \to \infty$. Другие важные результаты были получены в 1940 г. Ю. В. Линником.

С помощью остроумного доказательства Бомбьери получил сильную оценку для некоторого среднего по d остаточного члена в теореме о распределении простых чисел для арифметической прогрессии ([III.47], 1965 г.). Эту оценку можно использовать в приложениях вместо гипотезы Римана о L-функции Дирихле.

Это лишь немногие результаты из обширной области исследований. Сделанный в этой главе краткий набросок истории развития теоремы о распределении простых чисел после прорыва Адамара и Валле Пуссена ни в коей мере не является систематическим обзором.

Глава 11

Аналитическая механика и геометрия

§ 11.1. Исследования по аналитической механике

Великие французские математики XVIII—начала XIX вв. Ж.-Л. Лагранж, Ж. Даламбер, П.-С. Лаплас, О. Коши и С.-Д. Пуассон были также и творцами аналитической механики. Благодаря более поздним трудам Ж. Лиувилля, Л. Пуансо, Ж. Бертрана и других французская школа теоретической механики к середине XIX в. сохранила ведущее положение. Начиная с 1880-х гг. ярким светом горит на научном небосклоне звезда А. Пуанкаре, однако в целом к концу XIX в. уже трудно было говорить о доминировании французской механики. Основанная Э. Бетти и Э. Бельтрами итальянская школа теории упругости (В. Вольтерра, Т. Леви-Чивита, Дж. Лауричелла...) во многом опережает французскую. Крупными достижениями в математических методах механики ознаменованы труды К. Вейерштрасса, а также Г. Брунса, Л. Больцмана и Г. Герца. Новые страницы в теории колебаний открыли исследования англичанина Рэлея, столь же знаменательны в небесной механике идеи американца Дж. Хилла и шведа К. Ф. Сундмана. Создание А. М. Ляпуновым теории устойчивости движения, достижения Н. Е. Жуковского в аэродинамике и теории гироскопов, С. А. Чаплыгина и П. В. Воронца в неголономной механике показали, что Россия может успешно соревноваться с Западом.

Среди тех, кто на рубеже веков поддержал традиции своих великих соотечественников, должны быть наряду с Пуанкаре названы в первую очередь Г. Дарбу, П. Аппель, П. Пенлеве и Ж. Адамар. Дарбу вслед за Липшицем развивал геометрическую интерпретацию механики. Работы Аппеля относятся к общим принципам механики, многочисленным ее конкретным проблемам, применениям в механике эллиптических и других специальных функций. Пенлеве принадлежат важные исследования по теории орбит, теории трения и задаче трех тел.

Для работ Адамара по аналитической механике характерно широкое использование геометрических методов и необычайное разнообразие тематики. Среди этих работ Адамара выделяется статья «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [I.48], в которой он рассмотрел круг проблем, связанных с исследованиями Ляпунова и Пуанкаре по теории устойчивости движения.

Приведем лишь краткий обзор работ Адамара в этой области. Начнем с его работы 1894 г. «О движениях качения» [I.25], содержавшей одно из первых исследований по неголономной механике. Предположим, что состояние динамической системы (твердого тела, системы материальных точек) определяется функциями $q_1, \ldots, q_n$ времени t, связанными соотношениями

$$f_k(q_1, \ldots, q_n) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \quad n > m.$$

Из уравнений этих (голономных) связей можно исключить m переменных, например $q_{n-m+1}, \ldots, q_n$. Тогда уравнения движения в форме Лагранжа будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-m,$$

где $\mathcal{L} = T - U$ — функция Лагранжа, равная разности кинетической T и потенциальной U энергий системы.

Рассмотрим теперь случай, когда связи зависят и от производных по времени $\dot{q}_i$, т. е.

$$g_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0, \quad \boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n), \;\; k = 1, \ldots, m.$$

Если эти равенства не эквивалентны соотношениям вида

$$\frac{d}{dt}\Phi_k(\boldsymbol{q}) = 0,$$

то связи называются неголономными; соответственно различают голономные и неголономные системы. Эта терминология, как и первое серьезное иследование неголономных задач, принадлежит Герцу (см. его классическую книгу «Механика» [III.175]).

С простейшим и самым важным случаем неголономных связей мы встречаемся, когда функции g_k линейно зависят от $\dot{\boldsymbol{q}}$:

$$g_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_i c_{ik}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i = 0. \tag{11.1}$$

Типичным примером системы с неголономными связями служит качение, которое характеризуется тем свойством, что в точке касания не существует относительного движения. Простой пример — движение шара, катящегося без проскальзывания по плоскости. Соотношение (11.1) выражает равенство скоростей в точке касания. При исследовании качения невозможно ввести координаты, соответствующие числу степеней свободы тела, как это делается в случае голономных связей.

При наличии связей типа (11.1) уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \mathcal{K}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{11.2}$$

где $\mathcal{K}_i$ — некоторые функции от $\boldsymbol{q}$ (поправочные члены). Если при некотором i уравнение (11.2) лагранжево, т. е. $\mathcal{K}_i = 0$, то говорят, что q_i — голономная координата.

Адамар подробно рассматривает проблему качения и исследует общие вопросы теории неголономных систем в работах [I.21], [I.25]. Центральный вопрос: при каких условиях существуют r голономных координат? Эти условия представимы в виде системы уравнений для функций c_{ik}. Адамар заметил, что вывод уравнений движения существенно упрощается, если учесть, что некоторые комбинации уравнений связей можно использовать так, как если бы они выражали голономные связи. Именно так обстоит дело для кривой качения по поверхности, а также для качения без верчения.

Работа Адамара по теории качения [I.25] была переиздана через пять лет в качестве приложения к книге его учителя Аппеля. В этой книге, в частности, содержится вывод уравнений движения системы, в которых вместо кинетической энергии фигурирует энергия ускорения. Другие важные модификации уравнений движения неголономных систем были в конце XIX в. получены С. А. Чаплыгиным и Вольтерра. Неголономная механика наших дней представляет собой очень обширную дисциплину, нашедшую применение в электромеханике, робототехнике и других областях.

В работах [I.29] и [I.30] Адамар предложил новые доказательства некоторых теорем о движении вращающегося тяжелого тела, закрепленного в одной из своих точек. Например, в [I.30] он рассмотрел задачу об устойчивости такого движения, понимаемой в том смысле, что бесконечно малое изменение начальных условий вызывает бесконечно малое изменение параметров движения. Достаточные условия устойчивости получены путем решения задачи об условном экстремуме некоторой функции, которая в свою очередь получается при рассмотрении корней некоторого алгебраического уравнения.

В работе [I.165] Адамар исследовал класс динамических систем, интегрируемых в квадратурах. Это так называемые системы Лиувилля, для которых кинетическая и потенциальная энергии представимы в виде

$$T = \frac{1}{2}(u_1(q_1) + \ldots + u_n(q_n))(v_1(q_1)\dot{q}_1^2 + \ldots + v_n(q_n)\dot{q}_n^2),$$
$$U = \frac{w_1(q_1) + \ldots + w_n(q_n)}{u_1(q_1) + \ldots + u_n(q_n)}.$$

Процедура интегрирования системы Лиувилля приводит к соотношениям вида

$$H_{j1}(u_1) + \ldots + H_{jn}(u_n) = b_j, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad H_{n1}(u_1) + \ldots + H_{nn}(u_n) = t,$$

где $b_1, \ldots, b_{n-1}$ — произвольные постоянные, t — время, H_{jk} — периодические функции. Анализ свойств решений такой системы состоит в обращении оператора, определяемого левыми частями уравнений. Используя результаты своей более

Жозеф Лиувилль (1809—1882)

ранней работы по точечным преобразованиям [I.138], о которой мы будем говорить подробнее в § 13.2, Адамар доказал глобальную разрешимость этой системы при единственном условии, что соответствующий функциональный определитель должен быть отличен от нуля.

Среди работ Адамара по механике имеется и сугубо прикладная, вышедшая в 1910 г. и посвящённая одной задаче морской кинематики [I.164]. Ее можно интерпретировать как задачу об охране некоторого барража (морского заграждения) от вражеских кораблей. Следует отметить, что эта задача имела важный практический характер. Так, например, во время Первой мировой войны Италия предприняла попытку перекрыть вход в Адриатику сетевыми и минными заграждениями, оснащёнными гидрофонными станциями (Отрантский барраж). В работе Адамара барраж моделируется отрезком длины l, а сторожевое судно и судно противника — двумя точками; все это располагается в одной плоскости. Сторожевой корабль с радиусом обзора R движется вдоль барража вперед и назад с постоянной скоростью V. Корабль противника, имеющий максимальную скорость $v \leqslant V$, пытается пересечь барраж необнаруженным. Задача состоит в том, чтобы выяснить, при каком соотношении величин l, R, V и v вражеский корабль не может пройти незамеченным. До работы Адамара эта задача была решена в предположении, что вражеский корабль движется по прямой с постоянной скоростью; Адамар решил эту задачу в общем виде.

Несколько работ Адамара появились в результате его интереса к методологическим проблемам преподавания механики ([I.54], [I.131], [I.267], [I.275]). В частности, в работе [I.54], написанной по мотивам его лекционного курса, Адамар сформулировал общие законы механики исходя из принципа равенства действия и противодействия как основы определения массы.

§ 11.2. Работы о геодезических

Статья «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [I.48] — одно из наиболее замечательных достижений Адамара и в аналитической механике, и в геометрии. Эта его работа была написана под влиянием созданной Пуанкаре качественной теории решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая открыла дорогу к исследованию свойств решений без нахождения их в явном виде. В связи с предложенной Пуанкаре классификацией всех возможных траекторий для уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями Адамар писал: «Этот результат остался уникальным. Применение к другим типам дифференциальных уравнений методов Пуанкаре привело его к ряду следствий большой важности, однако не дало полного решения[1]. Впоследствии ни одно-

[1]В 1889 г. Пуанкаре посвятил обширную статью проблеме трех тел небесной механики, относящейся, например, к движению Солнца, Луны и Земли под действием взаимного притяжения. Пуанкаре исследовал периодические решения и показал существование решений, асимптотических к периодическому. Особенно поразительным было открытое им существование траекторий с хаотическим долговременным поведением. Пуанкаре пришел к этому открытию при драматических обстоятельствах — после получения премии шведского короля Оскара II за свою статью, в которой была допущена ошибка. Исторические и математические подробности см. в работе К. Г. Андерсона [III.10] и в книгах Дж. Барроу-Грин [III.19] и Ф. Диаку и Ф. Холмса [III.103].

му другому геометру не сопутствовала удача в этом направлении... Проблема, сформулированная Академией на 1896 г. (конкурс на премию Бордена), дала мне случай представить первые применения общего и крайне простого метода, основанного на исследовании максимума или минимума некоторой функции V от рассматриваемых переменных и их производных» [I.87, с. 11].

Работа Адамара 1896 г. начинается с исследования систем первого порядка в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{11.3}$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — векторнозначная функция переменной $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть V — гладкая скалярная функция от $\boldsymbol{x}$. Тогда на любой траектории $\boldsymbol{x}(t)$, $t \geqslant t_0$, возможны два случая:

(а) точка $t = +\infty$ — предельная точка последовательности максимумов и минимумов функции V;

(б) функция V монотонна начиная с некоторого t.

В случае (а) в точке экстремума выполняются следующие условия:

$$\dot{V}(t) = 0 \text{ и либо } \ddot{V}(t) \leqslant 0, \text{ либо } \ddot{V}(t) \geqslant 0. \tag{11.4}$$

Пусть D — оператор, определенный соотношением

$$D(\psi) = \sum_i f_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

(дифференцирование вдоль траектории). Из равенства (11.3) следует, что

$$D(V) = \dot{V} \quad \text{и} \quad D[D(V)] = \ddot{V}.$$

Следовательно, условие (11.4) можно представить в виде

$$D(V) = 0 \tag{11.5}$$

и

$$\text{либо} \quad D[D(V)] \leqslant 0, \qquad \text{либо} \quad D[D(V)] \geqslant 0. \tag{11.6}$$

Уравнение (11.5) определяет $(n-1)$-мерную поверхность. На этой поверхности точки перехода траектории из области, где $D(V) > 0$, в область, где $D(V) < 0$, соответствуют неравенству $D[D(V)] < 0$. Обратное неравенство выполняется для обратного перехода. Общая граница множеств (11.6) состоит из точек, в которых траектория касается поверхности (11.5). Таким образом, в случае (а) траектория бесконечно много раз пересекает поверхность (11.5), проходя последовательно через каждое из множеств, определенных неравенствами (11.6).

Случай (б) требует более тонкого исследования, и оно проводится при дополнительном предположении ограниченности функций V и f_i вместе с их частными производными до третьего и второго порядков соответственно. Это требование обеспечивает ограниченность производных dV/dt, d^2V/dt^2 и d^3V/dt^3 на любой траектории. Следовательно, как показывает результат Адамара о дифференцируемых функциях (см. § 13.5),

$$\lim_{t\to\infty} \dot{V} = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \ddot{V} = 0.$$

Таким образом, в предельных точках траектории (при $t \to \infty$) выполнены равенства

$$D(V) = D[D(V)] = 0. \tag{11.7}$$

Тем самым в случае (б) траектории асимптотически стремятся к $(n-2)$-мерному многообразию, определенному уравнениями (11.7). (Мы оставляем в стороне вырожденные случаи, когда множества (11.5) и (11.7) имеют более низкую размерность.)

При рассмотрении движения материальной точки по поверхности возникают существенные осложнения даже в двумерном случае. Дело в том, что уравнения Лагранжа для движущейся точки имеют второй порядок, который может быть понижен введением скоростей в качестве новых неизвестных. Тем не менее Адамару удалось получить результаты, аналогичные только что описанным, по крайней мере для случая двух степеней свободы.

Адамар рассматривал точку с единичной массой, движущуюся без трения по поверхности под действием силы с потенциалом U. Он определил на поверхности гладкую функцию V, в терминах которой сформулировал свои результаты так же, как в случае (11.3). Рассуждения упрощаются, если считать, что $V = U$. Адамар показал, что если $\dot{U} = 0$, то

$$\ddot{U} = -(\nabla U)^2 + \frac{2T}{(\nabla U)^2}\Big[(\nabla U)^2 \Delta U - \frac{1}{2}\nabla U \cdot \nabla(\nabla U)^2\Big],$$

где T — кинетическая энергия материальной точки, ∇ — градиент, а Δ — оператор Лапласа на поверхности. Далее Адамар использовал рассуждения, аналогичные тем, которые применялись для системы (11.3): он снова рассмотрел случаи (а) и (б), а роль функции $D(V)$ играла функция

$$I_U = (\nabla U)^2 \Delta U - \frac{1}{2}\nabla U \cdot \nabla(\nabla U)^2.$$

Поверхность разбивается на две части: $I_U > 0$ и $I_U < 0$. Первая из них содержит все точки траекторий, доставляющие минимум U, т. е. точки, в которых возможно устойчивое равновесие. Тем самым в случае (а) в эту часть попадает бесконечно много отрезков траекторий, Адамар называет эту область притягивающей. Соответственно вторая область, в которой точка не может оставаться после некоторого момента, названа отталкивающей. Все точки, в которых U имеет максимум, лежат в отталкивающей области, в них эквипотенциальная поверхность обращена выпуклостью в сторону действия силы (последнее объясняется тем, что числитель в формуле для геодезической кривизны совпадает с I_U). В частности, в упомянутом выше примере движения тяжелой точки по сфере нижняя полусфера как раз и является притягивающим множеством.

В случае (б), когда на поверхности имеется лишь конечное число положений равновесия, Адамар (при дополнительном требовании регулярности поверхности и потенциала) устанавливает альтернативу: траектория либо проходит бесконечное число раз через притягивающую область, либо асимптотически приближается к положению равновесия.

Аналогичные, но менее полные результаты получены для траекторий в $\mathbb{R}^n$ при $n > 2$. Показано, например, что если эквипотенциальные поверхности выпуклы в направлении силы, то траектория либо удаляется в бесконечность, либо асимптотически стремится к положению неустойчивого равновесия. К этому кругу вопросов примыкает доказательство обратной теоремы Лагранжа: положение равновесия, в котором потенциальная функция не достигает максимума, является неустойчивым. Адамар указывает, что это утверждение содержится в мемуаре Ляпунова, «к сожалению, написанном на русском языке», но говорит, что все-таки приведет свое доказательство, «так как оно несколько отличается от предложенного Ляпуновым» [I.406, с. 1783].

Значительная часть статьи Адамара посвящена проблеме геодезических. Так называются линии, достаточно малые участки которых являются кратчайшими путями на поверхности. Геодезические на плоскости — прямые, на сфере — дуги большого круга[1]. Если q_1, q_2 — координаты на поверхности S и на ней задана метрика

$$dl^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{q})\, dq_i\, dq_j,$$

то длина линии $\boldsymbol{q}(t)$, $\alpha < t < \beta$, на S выражается интегралом

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i,j} g_{ij}(\boldsymbol{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j \right)^{1/2} dt.$$

Геодезические линии на поверхности могут быть заданы нелинейными дифференциальными уравнениями, выражающими необходимое условие экстремума последнего интеграла. Эти уравнения имеют второй порядок относительно q_i, откуда следует, что через любую точку на S можно провести геодезическую в произвольном направлении и что любые две точки S, по крайней мере достаточно близкие, можно соединить одной кратчайшей геодезической[2]. Важность понятия геодезической линии для динамики определяется тем, что ее уравнения в существенном совпадают с уравнениями движения материальной точки под действием сил, имеющих потенциальную функцию.

Таким образом, теоремы о геодезических дают ответы на вопросы о поведении траекторий динамической системы, и одновременно указанная аналогия позволяет открыть новые свойства геодезических. Такое положение дел было предвосхищено К. Якоби, а позднее Р. Липшиц и Г. Дарбу дали явную геометрическую интерпретацию формализма Гамильтона—Якоби в механике[3].

Результаты Адамара дополнили исследования глобальных свойств геодезических, которые в то время были новой областью. Одна из геометрических теорем в статье Адамара утверждала, что на замкнутой поверхности положительной гауссовой кривизны любая замкнутая геодезическая бесконечное число раз пере-

[1]Ограничение малыми участками в определении геодезической важно. Действительно, один из двух путей, соединяющих две (не противоположные) точки на сфере, не кратчайший.

[2]Первое утверждение следует из локальной разрешимости задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, когда решение и его первые производные заданы в начальный момент времени. Второе утверждение является следствием разрешимости двухточечной краевой задачи на малом интервале.

[3]Исторический анализ взаимодействия между механикой и дифференциальной геометрией на протяжении XIX в. проведён в работе Й. Лютцена [III.252].

Рудольф Липшиц (1832—1903)

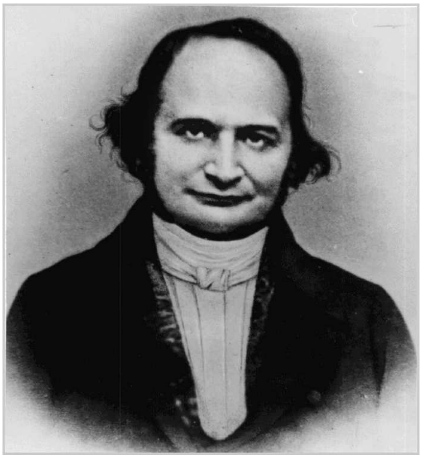
секается любой геодезической (последнюю мы считаем параметризованной всей осью $-\infty < t < +\infty$). Отсюда, в частности, вытекает, что любые две замкнутые геодезические пересекаются. Адамар замечает, что утверждение о двух замкнутых геодезических является также тривиальным следствием формулы Гаусса—Бонне, связывающей интегральную гауссову кривизну области и интеграл от геодезической кривизны по границе. Но чтобы применить эту формулу, требуется выяснить топологический тип поверхности.

Здесь следует иметь в виду, что Адамар в соответствии с традицией своего времени мыслил поверхность лежащей в евклидовом пространстве. Это накладывает сильное ограничение на топологию замкнутой поверхности положительной кривизны: Адамар доказывает, что она гомеоморфна сфере, и устанавливает взаимную однозначность сферического отображения поверхности. (Так называется отображение поверхности Σ в единичную сферу S^2 с центром в начале координат, при котором точке $x \in \Sigma$ соответствует точка на S^2 с радиус-вектором $\nu(x)$ единичной нормали к Σ в точке x.)

В современных терминах доказательство Адамара сводится к следующему. Устанавливается, что сферическое отображение является локальным диффеоморфизмом и, значит, накрытием сферы. Поэтому ввиду односвязности сферы оно представляет собой диффеоморфизм. В отличие от существенно двумерного следствия о пересечении замкнутых геодезических теорема Адамара послужила стимулом для далеко идущих многомерных обобщений. Она даже включена в некоторые учебники дифференциальной геометрии (см., например, [III.40]).

В той же работе Адамар показывает, что к замкнутой геодезической на поверхности положительной кривизны никакая другая геодезическая не может приближаться асимптотически, оставаясь по одну сторону от нее. Если одна геодезическая пересекает другую, замкнутую, бесконечное число раз, то она может пробегать всюду плотное множество некоторой области. Не исключено, что такие геодезические имеют сколь угодно большие участки, произвольно близкие к замкнутым геодезическим.

Для иллюстрации обратимся к задаче о геодезических на трехосном эллипсоиде. Она была полностью решена чисто аналитическим путем Якоби, который в своих «Лекциях по динамике» [III.193] при помощи искусных преобразований показал, что уравнения геодезических на эллипсоиде могут быть проинтегрированы в явном виде, причем интегралы выражаются в эллиптических функциях.



Карл Якоби (1804—1851)

Рассмотрим эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad a>b>c.$$

Каждый из расположенных на нем эллипсов $x=0$, $y=0$, $z=0$ является замкнутой геодезической. Как ведет себя геодезическая, пересекающая, скажем, эллипс $z=0$? Оказывается, что если она имеет малый наклон к этому эллипсу в точке пересечения, то она либо замкнута, либо образует всюду плотное подмножество «кольца» между линиями пересечения эллипсоида с некоторым однополостным гиперболоидом (см. рис. 1 (a)). В случае «крутого» пересечения геодезической с эллипсом $z=0$ геодезическая всюду плотна в «кольце» между двумя линиями пересечения эллипсоида с двуполостным гиперболоидом (см. рис. 1 (b)). Более подробную информацию о поведении геодезических можно найти в книге [III.12].

Через год, в 1897 г., Адамар опубликовал новую работу о геодезических. На этот раз он рассмотрел поверхности с отрицательной гауссовой кривизной. «В этом новом случае, — пишет Адамар, — можно прийти к более полным результатам, чем в первом, и без труда провести общее обсуждение геодезических» [I.406, т. 2, с. 729]. Но новая статья не ограничивалась исследованием геодезических. Например, Адамар показал, что в $\mathbb{R}^3$ существует много разнообразных полных поверхностей отрицательной кривизны, и привёл примеры таких поверхностей различных топологических типов.

Рис. 1. Геодезические на эллипсоиде

Одна из таких поверхностей задается уравнением $x_3 = u(X)$, где $X = (x_1,\, x_2)$ и

$$u(X) = c \log \frac{|X - P_1| \dots |X - P_m|}{|X - Q_1| \dots |X - Q_n|},$$

$c = \mathrm{const} > 0$, а $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ — множества точек на плоскости $x_3 = 0$. Заметим, что функция u гармоническая, а функция $u_{x_2} + iu_{x_1}$ аналитическая вне особых точек $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$. Следовательно, гауссова кривизна

$$K = \frac{u_{x_1x_1}u_{x_2x_2} - u^2_{x_1x_2}}{(1 + u^2_{x_1} + u^2_{x_2})^2} = -\frac{u^2_{x_1x_1} + 2u^2_{x_1x_2} + u^2_{x_2x_2}}{2(1 + u^2_{x_1} + u^2_{x_2})^2}$$

отрицательна вне некоторого множества изолированных точек. Уравнение $x_3 = u(X)$ определяет поверхность с $m + n$ пиками, достигающими значений $\pm\infty$ в точках $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$. Левая поверхность на рис. 2 соответствует случаю $m = n = 1$.

Другие примеры основаны на геометрическом построении, которое впоследствии было разработано другими авторами: объединяются простые по-

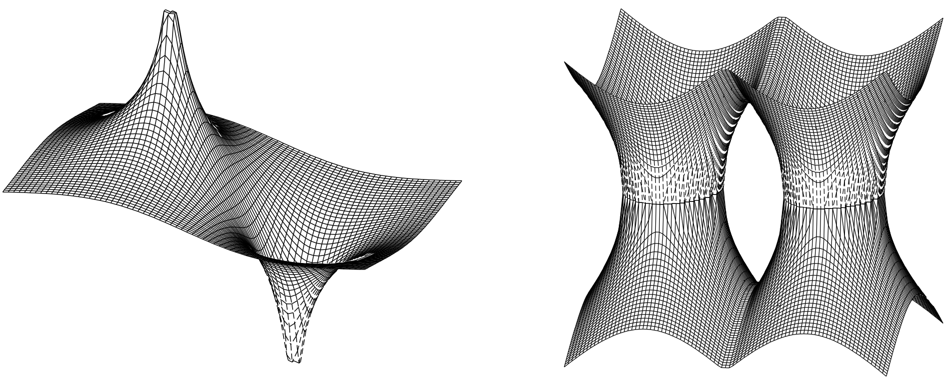


Рис. 2. Поверхности отрицательной кривизны, рассмотренные в статье Адамара

верхности (например, гиперболоиды), а затем проводится сглаживание ребер (см. [III.349]).

Среди прочего Адамар утверждает, что в отличие от поверхностей положительной кривизны поверхности отрицательной кривизны непременно уходят на бесконечность, и приводит кажущийся правдоподобным аргумент в пользу своего утверждения. Этот аргумент оказался недостаточным для гладких неаналитических поверхностей (см. [III.349]), и более того, само утверждение, названное гипотезой Адамара, было недавно опровергнуто Надирашвили [III.290]).

Представление о характере результатов, относящихся к геодезическим, дают следующие два утверждения из первой части работы, в которых речь идет о (внутренне полных) поверхностях отрицательной кривизны. (Формулируя теоремы Адамара, мы будем вынуждены использовать простейшие топологические термины, принятые в наши дни. Однако в оригинале соответствующие понятия определяются непосредственно и называются иначе.)

Теорема 1. *В любом гомотопическом классе путей, соединяющих две точки поверхности, содержится одна и только одна дуга геодезической.*

Теорема 2. *Каждый свободный гомотопический класс содержит единственную замкнутую геодезическую.*

Имеется исключение, соответствующее случаю поверхности с бесконечными нерасширяющимися трубками, но мы не будем обсуждать его здесь.

Далее Адамар разбивает все геодезические лучи (геодезические, продолженные на одну из полуосей изменения t) на три класса. К первому относятся замкнутые геодезические лучи и асимптотически приближающиеся к ним. Во второй класс входят геодезические, уходящие на бесконечность. Их, впрочем, можно охарактеризовать иначе: они и только они пересекают некоторую замкнутую геодезическую. В третий класс входят геодезические, не вошедшие в первый и второй. Каждая из них расположена в ограниченной части поверхности и последовательно приближается то к одной, то к другой замкнутой геодезической. Само существование геодезических третьего класса нуждается в доказательстве, и Адамар проводит его. При этом он использует следующий факт, имеющий и самостоятельное значение.

Множество начальных направлений геодезических, исходящих из произвольной точки поверхности и не удаляющихся на бесконечность, совершенно и вполне несвязно. Иначе говоря, оно замкнуто и не имеет ни изолированных, ни внутренних точек, т. е. очень напоминает знаменитое канторово множество, которое строится следующим образом.

Удалим из отрезка $[0, 1]$ открытую среднюю треть $(1/3, 2/3)$, затем удалим открытые средние трети из двух отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$, после чего удалим открытые средние трети из четырех оставшихся отрезков и т. д. Множество, которое останется от отрезка $[0, 1]$ в результате этого процесса, называется канторовым множеством (см. рис. 3). Можно также сказать, что это множество всех чисел вида

$$\sum_{j\geqslant 1} 3^{-j}\delta_j,$$

где число δ_j равно 0 или 2.

Рис. 3. Построение канторова множества

Приписывая некоторую последовательность $\{\delta_i\}$ каждому начальному направлению геодезической из третьего класса, Адамар нашёл первое приложение так называемой символической динамики, которая характеризует структуру траекторий динамических систем с помощью бесконечных последовательностей «символов» (в случае Адамара нулей и двоек). Символическая динамика позволяет свести исследование сдвигов по траекториям к исследованию гомеоморфизмов подобных последовательностей, что иногда гораздо легче. Далее символическую динамику развил Дж. Д. Биркгоф [III.38] в своих исследованиях динамических систем.

Адамар показал, что бесконечно малое изменение начального направления геодезической, которая не уходит на бесконечность, может вызвать любое изменение в ее конечном положении; возмущенная геодезическая может принадлежать любому из трех названных выше классов. Мандельбройт ([II.42, с. 5]) высказал предположение о том, что, возможно, это явление привело Адамара к понятию корректности задачи. Действительно, в 1901 г. в статье «Замечание о научных работах» [I.87], комментируя свои работы о динамических траекториях, Адамар впервые использует термин «некорректные задачи» (questions mal posées): «Одна из фундаментальных проблем небесной механики — проблема устойчивости солнечной системы — попадает, вероятно, в категорию некорректных задач. Действительно, если вместо исследования устойчивости солнечной системы рассмотреть аналогичную задачу о геодезических на поверхности отрицательной кривизны, становится видно, что каждую устойчивую траекторию можно преобразовать бесконечно малым изменением начальных данных во вполне неустойчивую траекторию, уходящую на бесконечность. В астрономических задачах начальные данные известны лишь с определенной ошибкой. Но сколь ни мала эта ошибка, она может повлечь за собой полное и абсолютное возмущение в требуемом результате».

Живописный обзор статьи Адамара [I.62] можно найти в книге Дюэма «La théorie physique, son objet, sa structure» («Физическая теория: ее предмет и структура») [III.116, ч. 2, гл. 3, § 3], которая вышла в Париже в 1906 г. Дюэм рассматривает задачу о геодезических на поверхности отрицательной кривизны наряду с задачей n тел как примеры глубоких математических проблем, «бесполезных с точки зрения физика». Он утверждает, что эти проблемы лишены какого бы то ни было непосредственного физического смысла из-за чрезмерного упрощения лежащих в их основе физических моделей. Вот как Дюэм описывает поверхности отрицательной кривизны, которые рассматривал Адамар:

«Представим себе лоб быка с выступами, из которых выходят рога и уши, с углублениями между этими выступами; теперь продолжим эти рога и уши так, чтобы они простирались до бесконечности; так и получится одна из тех поверхностей, которые мы хотим исследовать».

На самом деле работы Адамара о поверхностях отрицательной кривизны положили начало теории римановых многообразий неположительной кривизны. Дальнейший вклад в эту теорию, которая ныне является одной из самых развитых и красивых областей римановой геометрии, был внесен Эли Картаном. В основе теории многообразий неотрицательной кривизны лежит следующая теорема Адамара—Картана. Ее формулировка содержит понятие так называемой секционной кривизны, которая при $n = 2$ совпадает с гауссовой кривизной.

Теорема. *Каждое n-мерное полное односвязное риманово многообразие с неположительной секционной кривизной диффеоморфно пространству $\mathbb{R}^n$.*

Теоремы Адамара об асимптотическом поведении геодезических линий на поверхностях отрицательной кривизны нашли продолжение в изящном разделе теории динамических систем — теории потоков Д. В. Аносова [III.11], а неустойчивость геодезических на таких поверхностях до сих пор служит одним из основных примеров хаотического поведения траекторий динамических систем. В статье Ж.-П. Кахана [III.207a] «Адамар и устойчивость Солнечной системы» дается общедоступное описание работ Адамара о геодезических и их влияния на дальнейшее развитие небесной механики.

§ 11.3. Лекции по элементарной геометрии

В 1898 г. появился первый том книги Адамара по геометрии «Лекции по элементарной геометрии» («Планиметрия»). О впечатлении, которое «Планиметрия» произвела на учащихся лицеев того времени, можно судить по воспоминаниям Данжуа:

«Я принялся читать ее с восторгом, почтением и энтузиазмом. Некоторые друзья с неизменным скептицизмом иронизировали: „*Они* называют эту геометрию *элементарной*, чтобы мы поверили, будто *они* знают гораздо больше“. Действительно, в конце тома приводились два приложения: одно — об измерении геометрических фигур, другое — с безупречным изложением важного „предвестника“ теоремы Жордана о том, что всякая простая замкнутая кривая делит плоскость на две области — внутреннюю и внешнюю. В этих двух приложениях излагались аргументы, которые прежде никогда не рассматривались. В то время о них было известно немного» [II.56, p. 736].

Адамар написал эту книгу по настоянию Дарбу, и «Планиметрия» была первым из двух томов. Второй том, посвященный геометрии в трехмерном пространстве («Стереометрия»), был опубликован в 1901 г. Эти два тома образуют главную и наиболее известную часть педагогической работы Адамара. Они выдержали многочисленные издания во Франции и во многих других странах.

В предисловии Адамар подчеркивает особую роль, которую геометрия играет в элементарной математике:

«...Будучи одним из первых математических предметов, с которым встречается учащийся, геометрия представляет собой наиболее простую и доступную форму математического рассуждения. Сила ее методов и их плодотворность непосредственно более ощутимы, чем в случае относительно более абстрактных арифметических или алгебраических теорий, поэтому геометрия может оказывать бесспорное влияние на развитие активного мышления. Я в первую очередь стремился усилить это влияние, пробуждая инициативу учащегося и всячески ей содействуя» [I.67, с. V].

Этой цели служат более 1300 задач по всем разделам курса. Многие из них, взятые из оригинальных научных публикаций, в том числе и самого Адамара, весьма трудны и могут явиться серьезным испытанием для желающих посвятить себя математике. Адамар объясняет:

«...Мне казалось необходимым увеличить число упражнений, насколько это позволяли рамки настоящего труда. Эта необходимость большого числа упражнений была для меня, так сказать, единственным принципом, руководившим мною в части подбора задач. Я считал необходимым поместить задачи различной степени трудности и притом в порядке возрастания этой трудности: в то время как упражнения, помещенные в конце каждой главы, в особенности первые из них, очень просты, упражнения, помещенные в конце каждой книги, уже не решаются так просто и непосредственно; наконец, я отнес в конец тома относительно трудные задачи» [I.67, с. V].

Основной объем первого тома разделен на четыре части: прямая, окружность, подобие и площадь. В «Прибавлении А» («О методах, применяемых в геометрии») в конце первого тома Адамар обсуждает фундаментальные принципы математического метода, «которыми учащиеся должны были бы проникнуться с первого года обучения, но которые очень часто забываются даже учащимися наших высших учебных заведений» [I.67, с. VI]. Далее в своей книге он развивает это замечание следующим образом:

«Под этим названием мы хотели бы собрать некоторые указания, которые, по нашему мнению, полезны как для понимания математики вообще, так в частности для решения задач.

Действительно, учащийся должен твердо знать, что для того, чтобы изучение математики принесло ему пользу, не требовало от него чрезмерных усилий и привело бы его к правильному представлению о геометрии, мало понимать предлагаемые ему рассуждения; он должен в той или иной мере научиться самостоятельно строить на основании изученного новые умозаключения, находить доказательства теорем и решать задачи.

Вопреки укоренившемуся предубеждению этого результата могут достичь все или, по крайней мере, все те, кто будет заставлять себя размышлять и следовать в своих рассуждениях определенному методу. Указания, которые мы хотим сделать, вытекают просто из здравого смысла (le bon sens le plus vulgaire). Среди них нет ни одного, которое не могло бы показаться читателю совершенно тривиальным. Однако опыт показывает, что несоблюдение того или другого из этих очевидных правил является почти единственной причиной тех затруднений, которые возникают при решении элементарных задач; то же самое имеет место чаще, чем это можно было бы думать, при занятиях более или менее высокими областями математических наук» [I.67, с. 261].

Далее Адамар формулирует и затем обсуждает три правила доказательства теоремы. Во-первых, следуя Паскалю, необходимо дать определения используемым объектам. Второе правило состоит в использовании всех условий, а третье — в том, чтобы привести результат во всех его возможных формах и выбрать в качестве окончательной цели доказательства наиболее удобную форму. Здесь опять проявился глубокий интерес Адамара к творческому процессу в математике — теме, которой он увлекался всю свою жизнь.

Подход к проблеме определения площади поверхности в книге Адамара явно оказал некоторое влияние на подход Лебега к теории меры. Свою первую работу по этому предмету [III.229] Лебег начал с цитирования «Прибавления D» («О понятии площади») (см. [III.169, гл. 5]).

Второй том — «Стереометрия» — особенно содержателен. В частях 5—10 Адамар обсуждает плоскость и прямую, многогранники, перенос, симметрию, подобие, тела вращения (цилиндр, конус и сферу), конические сечения и основные понятия топографии. Много материала, не входящего в формальную школьную программу, дано в виде приложений, объем которых равен объему основного текста. Этот дополнительный материал включает в себя теорему Эйлера о соотношении между числом вершин, ребер и граней геометрических фигур, теорию правильных многогранников и их групп и знаменитую теорему Коши: два выпуклых одинаково ориентированных многогранника, между гранями которых установлено взаимно однозначное соответствие, либо конгруэнтны, либо симметричны.

В последующих изданиях своей книги Адамар расширил число приложений, включив в них еще больше нетрадиционного материала. Например, в «Прибавлении M» он рассматривает конформную геометрию в $\mathbb{R}^3$, а именно теорию инверсий и движений.

Это приложение отражает собственные интересы Адамара, поскольку он в разные годы публиковал работы, посвященные конформной геометрии. Наиболее значительная из них — «Новый прогресс в аналлагматической геометрии» [I.259] — первоначально вышла в Буэнос-Айресе. (Термин «аналлагматическая геометрия» (géométrie anallagmatique) в дальнейшем не прижился.)

До сих пор курс Адамара остается одним из лучших учебников для школьников, желающих углубленно изучить геометрию.

Глава 12

Вариационное исчисление и функционалы

§ 12.1. Некоторые понятия вариационного исчисления

Термин «вариационное исчисление» обычно связывают с классами задач на экстремум, хотя в названии это никак не отражено. В настоящее время вариационное исчисление представляет собой совокупность нескольких разделов, хотя и связанных между собой, но простирающихся в разных направлениях. Наиболее старый из них, о котором главным образом пойдет речь в этой главе, — классическое вариационное исчисление, возникшее в результате работ Л. Эйлера, Ж.-Л. Лагранжа, А.-М. Лежандра и развитое впоследствии К. Якоби, К. Вейерштрассом и их многочисленными последователями. История вариационного исчисления выходит за рамки этой книги, и мы отсылаем читателя к монографии Голдстайна [III.152]. В центре вариационного исчисления — задача о нахождении экстремалей для функций, область определения которых — множество кривых или поверхностей.

С проблемами классического вариационного исчисления Адамар впервые столкнулся в конце XIX в. в работах по теории волн, теории упругости, в задачах геометрии, связанных с исследованиями геодезических линий. Второй том собрания сочинений Адамара открывается циклом его работ по вариационному исчислению, опубликованных с перерывом в 1902–1913 гг. Он задумал также трактат на эту тему, который не был завершен — в 1910 г. вышел лишь его первый том объемом 520 страниц [I.159].

Прежде чем мы приступим к описанию работ Адамара по вариационному исчислению, напомним несколько определений. Пусть C^l — множество функций $y(x)$, определенных и непрерывных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ вместе с производными всех порядков до l включительно. Окрестностью порядка l функции y в C^l называется множество таких функций $y+\omega$, что $\omega \in C^l$ и

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\omega(x)| < \varepsilon, \qquad \max_{a\leqslant x\leqslant b}|\omega^{(k)}(x)| < \varepsilon, \qquad k = 1, \ldots, l.$$

Сформулируем простейшую задачу вариационного исчисления. Пусть

$$U[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx. \tag{12.1}$$

Требуется найти функцию $\tilde{y}$ в C^l, для которой этот интеграл принимает наибольшее или наименьшее значение. Здесь имеется в виду относительный максимум или минимум; например, в первом случае это означает, что неравенство $U[\tilde{y}] \geqslant U[y]$ имеет место для всех $y(x)$ из некоторой окрестности $\tilde{y}(x)$ первого порядка, т. е. при $|\omega(x)| < \varepsilon$, $|\omega'(x)| < \varepsilon$. Кроме того, накладывается дополнительное условие: для рассматриваемых $y(x)$ должны выполняться два равенства:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{12.2}$$

где A и B — заданные числа. Интеграл $U[y]$ зависит от кривой, заданной графиком функции y, и мы ищем кривую с концами в точках (a, A) и (b, B), которая доставляет экстремум функционалу $U[y]$ (далее мы для определенности будем рассматривать минимум).

Частные случаи этой задачи рассматривались еще И. Ньютоном, Г. В. Лейб-

Исаак Ньютон (1643–1727)

ницем, Якобом I Бернулли и Иоганном I Бернулли в конце XVII в. В общей постановке ее впервые изучал Л. Эйлер (1741). В 1755 г. в Берлине он получил письмо из Турина от неизвестного ему 19-летнего Лагранжа, в котором излагался следующий подход к сформулированной задаче.

Пусть $\omega = \alpha\eta$, где α — числовой параметр, а η — функция класса C^1, для которой $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Тогда

$$U[y + \alpha\eta] = U(\alpha) = \int_a^b f(x,\, y + \alpha\eta,\, y' + \alpha\eta')\, dx.$$

Из разложения

$$U(\alpha) = U(0) + \alpha U'(0) + \frac{\alpha^2}{2} U''(0) + \ldots$$

следует, что

$$U'(0) = \int_a^b (f_\eta \eta + f_{\eta'} \eta')\, dx \tag{12.3}$$

и

$$U''(0) = \int_a^b [f_{\eta\eta} \eta^2 + 2 f_{\eta\eta'} \eta\eta' + f_{\eta'\eta'} (\eta')^2]\, dx$$

(мы предполагаем существование всех производных, входящих в разложение). Выражения $U'(0)$ и $U''(0)$ называются соответственно первой и второй вари-

Готфрид Вильгельм
Лейбниц (1646–1716)

ациями функционала $U[y]$. Если $U(0)$ — экстремальное значение функции $U(\alpha)$, то $U'(0) = 0$. Интегрируя по частям второе слагаемое в соотношении (12.3) и учитывая, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, получаем

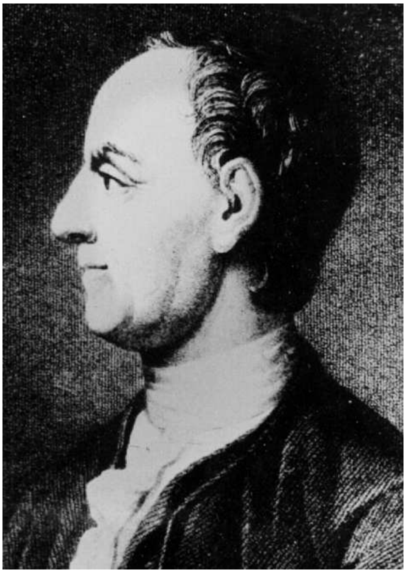
$$U'(0) = \int_a^b (f_y - (f_{y'})')\eta\, dx = 0.$$

Ввиду произвольности функции η множитель при η равен нулю, т. е. справедливо уравнение

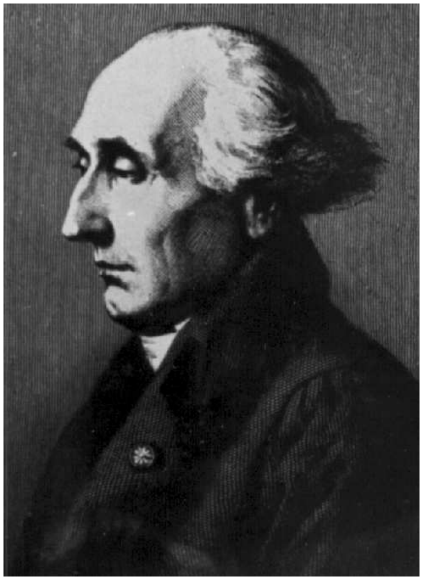
$$f_y - (f_{y'})' = 0, \qquad (12.4)$$

полученное ранее Эйлером и носящее его имя.

Приведенный изящный вывод Лагранжа произвел на Эйлера сильное впечатление. Он ответил юноше восторженным письмом, в котором указал, что ничего не обнародует по данному вопросу, пока тот не опубликует свой результат. Термин «вариационное исчисление» принадлежит Эйлеру, а подынтегральная функция $f(x, y, y')$ в функционале (12.1) называется функцией Лагранжа. Обозначим через $\tilde{y}$ решение уравнения (12.4), удовлетворяющее условию (12.2), и положим $\tilde{\varphi} = \varphi(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$.



Леонард Эйлер (1707–1783)



Жозеф Луи Лагранж (1736–1813)

Аналогично формулируется задача вариационного исчисления для функционала, зависящего от вектор-функций:

$$U[\mathbf{y}] = \int_a^b f(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}')\, dx, \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m), \quad \mathbf{y}' = (y_1', \ldots, y_m'). \tag{12.5}$$

Необходимое условие экстремума здесь также состоит в том, что координаты вектора $\mathbf{y}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$f_{y_i} - (f_{y_i'})' = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

с граничными условиями $y_i(a) = A_i$, $y_i(b) = B_i$.

Но вернемся к скалярному случаю $m = 1$, т. е. к интегралу (12.1). Преобразуя определенным образом вторую вариацию $U''(0)$, Лежандр (1786) пришел к выводу, что неравенство $\tilde{f}_{y'y'} > 0$ является достаточным условием того, что (12.1) при $y = \tilde{y}$ имеет минимум. Как показал Лагранж (1791), это утверждение, вообще говоря, ошибочно (оно справедливо, лишь если интервал (a, b) достаточно мал). В свою очередь ошибался и Лагранж, полагавший, что по аналогии с дифференциальным исчислением условия $U'(0) = 0$, $U''(0) \neq 0$ в совокупности достаточны для экстремума. Вообще едва ли найдется другая область анализа, в истории которой насчитывается столько ошибок, как в вариационном исчислении. Говоря об упомянутой ошибке Лагранжа, известный современный специалист по вариационному исчислению Л. Янг писал: «Подробный анализ ошибочности рассуждений Лагранжа вместе с примером, показывающим, что ответ отрицательный, приведен в книге Адамара (§ 38–43)[1]. Мы приглашаем читателя обратиться прямо к первоисточнику, в котором все это необычайно ясно изложено одним из великих мыслителей минувших дней» [III.426, с. 73].

Действительно, условие Лагранжа существования минимума интеграла (12.1) только необходимо. Аналог этого условия для интеграла (12.5) имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{m} f_{y_i' y_j'}(x,\,\mathbf{y},\,\mathbf{y}')\eta_i\eta_j > 0$$

при всех $x \in [a,\,b]$ и $\eta = (\eta_1,\,\ldots,\,\eta_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Для функционалов от двух и более независимых переменных задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Пусть $\mathcal{D}$ — область в пространстве $\mathbb{R}^m$, ограниченная поверхностью Γ. Требуется среди всех функций $z(x)$, дифференцируемых в $\mathcal{D}$, непрерывных в $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \Gamma$ и удовлетворяющих граничному условию $z|_\Gamma = \varphi$, найти ту, которая доставляет экстремум интегралу

$$U[z] = \int\limits_{\mathcal{D}} F(x,\,z(x),\,\operatorname{grad} z(x))\,dx.$$

Экстремум предполагается локальным: если $\tilde{z}$ — искомая функция, то все функции z, сравниваемые с ней, подчинены в $\overline{\mathcal{D}}$ неравенствам

$$|z - \tilde{z}| < \varepsilon, \quad |\operatorname{grad} z - \operatorname{grad} \tilde{z}| < \varepsilon.$$

Аналогично одномерному случаю положим $z = \tilde{z} + \alpha\eta$, где $\eta = \eta(x)$ и $U[z] = U(\alpha)$. Используя необходимое условие экстремума $U'(0) = 0$ и рассуждая так же, как в случае одной независимой переменной, получаем, что функция $\tilde{z}$ должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial z_{x_j}}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{12.6}$$

В своей первой статье по вариационному исчислению [I.95], вышедшей в 1902 г., Адамар сформулировал многомерный аналог условия Лежандра, т. е. необходимое условие абсолютного экстремума функционала, зависящего от m неизвестных функций n независимых переменных.

Здесь уместно остановиться на одном принципиальном вопросе. Для того чтобы левая часть уравнения Эйлера (12.6) имела классический смысл, требуется существование вторых производных решения. В 1879 г. П. Дюбуа-Реймон обратил внимание на то, что это требование при $m = 1$ излишне: всякая функция $y(x)$, для которой $U'(0) = 0$, обязательно имеет вторую производную в интервале $(a,\,b)$, если $f_{y'y'} \neq 0$. Для кратных интегралов, согласно замечанию Адамара ([I.144]), аналогичный факт места не имеет. Вот приведенный им пример.

Пусть $m = 2$ и

$$U[z] = \iint\limits_{\mathcal{D}} (z_x^2 - z_y^2)\,dx\,dy. \tag{12.7}$$

[1] См. [I.159].

Выпишем первую вариацию этого интеграла:

$$U'(0) = 2 \iint\limits_{\mathcal{D}} (z_x \eta_x - z_y \eta_y)\, dx\, dy.$$

Положим $z = \psi(x + y)$, где ψ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $z_x = z_y$ и

$$U'(0) = \iint\limits_{\mathcal{D}} [(z\eta_x)_y - (z\eta_y)_x]\, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} z(\eta_x n_x - \eta_y n_y)\, ds,$$

где n — вектор, нормальный к Г. Последний интеграл равен нулю, так как $\eta = 0$ на Г. Итак, здесь равенство $U'(0) = 0$ не гарантирует существования производной $\psi''(x + y)$.

Поучительно сравнить функционал (12.7) с интегралом Дирихле

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (z_x^2 + z_y^2)\, dx\, dy,$$

для которого уравнение Эйлера имеет вид $z_{xx} + z_{yy} = 0$. В случае интеграла Дирихле решение вариационной задачи не только имеет вторые производные, но и аналитично. Итак, подынтегральные функции $F(p, q) = p^2 + q^2$ и $F(p, q) = p^2 - q^2$ существенно различны с точки зрения гладкости решений вариационной задачи, а формально их можно различить по знаку функции $K = F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2$. В первом случае вариационная задача относится к классу регулярных, т. е. подчиненных условию $K > 0$. Для таких задач с аналитическим лагранжианом F доказательство аналитичности решений составляет содержание 20-й проблемы Гильберта. Оно было найдено в 1904 г. в парижской диссертации молодого математика из России С. Н. Бернштейна.

Другой контрпример, предложенный Адамаром, исследовавшим вариационную задачу для интеграла Дирихле, мы рассмотрим в § 12.3.

§ 12.2. Об одном методе вариационного исчисления

В заметке 1906 г. «Об одном методе вариационного исчисления» [I.135] Адамар формулирует новый подход к задаче об абсолютном экстремуме функционала (12.1) при условиях (12.2). Подробное обоснование этого подхода составило содержание части 4 его мемуара о пластине [I.145], получившего в 1907 г. премию Вайяна (см. § 14.3).

Адамар начинает с заданной функции $y_0(x)$ и ищет решение $y(x)$ вариационной задачи. Для этого он предлагает соединить функции $y_0(x)$ и $y(x)$ семейством функций $y_t(x)$, зависящих от положительного параметра t. (Мысленно можно представить себе семейство графиков, изменяющихся со временем.) Идея состоит в построении такого семейства y_t, чтобы интеграл $U[y_t]$ убывал при каждом значении t. Тогда можно ожидать, что при $t \to \infty$ функция y_t приближается к функции y, минимизирующей интеграл (12.1) или по крайней мере доставляющей ему локальный минимум.

Адамар замечает, что первая производная от $U[y_t]$ по t задается выражением

$$\frac{d}{dt}U[y_t] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}(x,\, y_t,\, y_t')\frac{\partial y_t'}{\partial t}\,dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y_t,\, y_t')\frac{\partial y_t}{\partial t}\,dx,$$

где $y_t' = \partial y_t/\partial x$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}U[y_t] = \int_a^b Q_t\frac{\partial y_t'}{\partial t}\,dx, \tag{12.8}$$

где

$$Q_t(x) = \frac{\partial f}{\partial y'}(x,\, y_t(x),\, y_t'(x)) - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}(s,\, y_t(s),\, y_t'(s))\,ds - h_t,$$

а h_t — произвольная функция, не зависящая от x. Адамар определяет h_t из условия ортогональности

$$\int_a^b Q_t\,dx = 0$$

и предлагает искать $y_t(x)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial y_t'}{\partial t} = -\rho_t Q_t, \tag{12.9}$$

где ρ_t — произвольная положительная функция от x и t. Из соотношений (12.8) и (12.9) следует, что

$$\frac{d}{dt}U[y_t] = -\int_a^b \rho_t\Big(\frac{\partial y_t'}{\partial t}\Big)^2\,dx \leqslant 0,$$

т. е. $U[y_t]$ — убывающая функция от t.

Адамар выбирает $\rho_t = 1$ и показывает, что уравнение (12.9) можно решить последовательными приближениями так же, как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции переменной t. Такая процедура позволяет получить функцию y_t в некотором интервале $0 < t < t_0$, и это единственное решение уравнения (12.9), которое отвечает начальному условию $y_t|_{t=0} = y_0$.

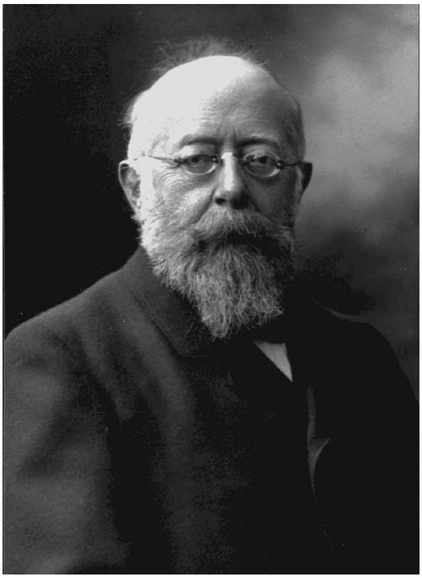
Полученную траекторию можно продолжить на всю полуось $t > 0$, если доказана априорная ограниченность функций y_t и y_t'. Это удается при некоторых предположениях о функции f, простейшим из которых является требование

$$|f(x,\, z,\, z')| = O(|z'|^q), \qquad q > 1.$$

Отыскивая мажоранту для функции $|y_t'|$, Адамар между прочим доказывает некоторое интересное мультипликативное неравенство для дифференцируемых функций, о котором будет подробно рассказано далее, в начале § 13.5. В заключение он показывает, что найденная траектория стремится при $t \to \infty$ к решению исходной вариационной задачи — решению, подсказываемому представлением о камне, который непременно попадает в нижнюю точку ямы, скатываясь по ее склону из любого начального положения.

§ 12.3. Принцип Дирихле

В одном из номеров «Bulletin de la Société Mathématique de France» в 1906 г. появилась четырехстраничная заметка Адамара «О принципе Дирихле» [I.139]. Эта работа содержит остроумную ремарку по поводу вариационного метода решения классической краевой задачи теории гармонических функций (см. § 3.1). Адамар не знал, что такое же наблюдение по тому же поводу было сделано еще в 1871 г. немецким математиком Ф. Примом в статье «Об интегрировании дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$» [III.335]. Работа Прима не была оценена его современниками, и его приоритет был установлен совсем недавно [III.105]. Судьба заметки Адамара, напротив, оказалась счастливой: контрпример, построенный в ней, стал хрестоматийным и под названием контрпримера Адамара вошел во многие учебники и монографии по вариационному исчислению.



Фридрих Прим (1841–1915)

Для того чтобы понять смысл примеров Прима и Адамара, полезно вспомнить, с одной стороны, некоторые драматические события в математике, происходившие в середине XIX в., с другой — некоторые понятия, заложенные в фундамент общей теории краевых задач в середине XX в. Попытки установить разрешимость основных задач математической физики для тел произвольной формы были предприняты классиками математического анализа еще в первой половине XIX в. Однако в то время отсутствовали строгие доказательства и аргументация была основана либо на физических соображениях (метод функции Грина), либо на принимаемом без доказательства вариационном принципе. Этот принцип уже использовали в 1830–1840-х гг. Грин, Гаусс и Кельвин, которые утверждали, что гармоническая функция в плоской области Ω с заданными граничными значениями, например совпадающая с функцией g на границе области $\partial\Omega$, минимизирует интеграл

$$D(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \tag{12.10}$$

для дифференцируемых функций u с одними и теми же граничными значениями. Так как существование минимизирующей функции считалось очевидным, вариационный принцип служил обоснованием разрешимости краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{12.11}$$

Та же аргументация была положена Б. Риманом в основание его геометрической теории функций комплексного переменного. Между прочим, Риман, ознакомившись с этими идеями на лекциях Дирихле, назвал и вариационный принцип, и краевую задачу именем своего учителя. Термины «принцип Дирихле» и особенно «задача Дирихле» употребляются и в наши дни[1].

Авторитет принципа Дирихле был поколеблен в 1869 г. Вейерштрассом, который на примере показал, что точная нижняя грань неотрицательного интеграла (12.10) для функций одной переменной может не достигаться. Критика Вейерштрасса произвела сильное впечатление на математический мир: доверие к вариационному принципу было подорвано почти на 30 лет. Однако полученные с помощью этого принципа фундаментальные результаты требовали обоснования, и математики занялись разработкой новых подходов к проблеме разрешимости краевых задач.

Первым сравнительно строгим методом решения задачи Дирихле был метод арифметических средних К. Неймана (1870), который дал возможность решить эту задачу для выпуклых областей. К тому же времени относится создание «альтернирующего» метода Г. Шварца, позволившего путем последовательного решения задачи Дирихле для каждой из двух областей решить эту задачу для их суммы. В 1887 г. Пуанкаре предложил основанный на новой идее метод «выметания», с помощью которого ему удалось получить решение задачи Дирихле для довольно широкого класса областей. Работы К. Неймана, Г. Робэна и А. Пуанкаре подготовили почву для создания метода граничных интегральных уравнений применительно к решению краевых задач для оператора Лапласа. Появление теории Фредгольма (1900) привело к быстрому развитию этого метода (О. Гёльдер, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, И. Радон, Т. Карлеман), оказавшегося, как выяснилось уже в эпоху ЭВМ, весьма эффективным, а иногда и единственно возможным методом численного решения задач математической физики для тел сложной формы.

Итак, на рубеже XIX–XX веков теория краевых задач имела значительные успехи. Она уже была в состоянии охватить линейные уравнения с переменными аналитическими коэффициентами и даже общие нелинейные эллиптические уравнения в случае двух независимых переменных. Достаточно вспомнить знаменитую работу Бернштейна [III.32] 1904 г., в которой, в частности, была создана изощ-

[1] Подробнее об истории принципа Дирихле см. приложение к книге Боттацини [III.53].

ренная техника априорных оценок, не исчерпавшая свои возможности и в наши дни.

А как же обстояло дело с принципом Дирихле? Эта некогда столь привлекательная идея в течение долгих лет ждала своего часа. Наконец Ч. Арцела в 1896 г. и Д. Гильберт в 1897 г., в докладе на первом Международном математическом конгрессе, независимо дали строгое обоснование вариационного принципа решения задачи Дирихле[1].

Заметка Адамара «О принципе Дирихле» [I.139] была откликом на работы Гильберта, отправным пунктом рассуждений которого явилась возможность продолжить граничную функцию на всю область так, чтобы интеграл (12.10) для продолжения сходился. Очевидно, что это свойство необходимо для применимости вариационного принципа. Можно ли его использовать для любых непрерывных граничных данных Дирихле? Прим и впоследствии Адамар отвечают на этот вопрос отрицательно. Их контрпримеры совершенно различны, и каждый поучителен по-своему.

Прим предлагает рассмотреть функцию

$$u_0(r,\,\theta) = [(\log r)^2 + \theta^2]^{1/4} \sin\Big[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\theta}{\log r}\Big]$$

в круге с центром $(1,\,0)$ и радиусом 1, т. е. $|z-1|<1$, $z = r\exp i\theta$. Эта функция гармоническая и равна $-\operatorname{Im}((-\log z)^{1/2})$. Единственная «плохая» для u_0 точка — начало координат. На окружности $r = 2\cos\theta$, $|\theta| < \pi/2$, которая ограничивает область, имеет место соотношение $u_0 = O(|\log r|^{-1/2})$, и, следовательно, граничные значения этой функции непрерывны. Интеграл Дирихле можно оценить следующим образом:

$$D(u_0) = \iint\limits_{|r\exp i\theta - 1|<1} \Big[\Big(\frac{\partial u_0}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\Big)^2\Big] r\,dr\,d\theta > \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \frac{dr}{r}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{(\log r)^2 + \theta^2}}.$$

При малых r внутренний интеграл ограничен снизу величиной $c|\log r|^{-1}$, где c — некоторая положительная постоянная. Следовательно, $D(u_0) = \infty$, и принцип Дирихле не применим к граничному значению $g = u_0\,|_{\partial\Omega}$.

Адамар рассмотрел на границе единичного круга $\Omega = \{z\colon |z| < 1\}$ непрерывную функцию g, которой соответствует ряд Фурье

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Функция, гармоническая в круге Ω, значения которой на окружности совпадают со значением функции $g(\theta)$, задаётся рядом Фурье

$$u(r,\,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta),$$

[1] Интересный исторический комментарий по этому поводу содержится в рукописи А. Лебега «За пределами вариационного исчисления», найденной после его смерти и опубликованной в 1963 г. В заключение Лебег пишет, что обсуждаемая заметка Адамара дает повод «посвятить ему этот небольшой критический этюд».

который сходится при любом $r < 1$ и допускает почленное дифференцирование. Записывая интеграл (12.10) в полярных координатах

$$D(u) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2} \Big(\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big)^2 \Big] r\, dr\, d\theta$$

и используя формулу Парсеваля, Адамар получил тождество

$$D(u) = \pi \sum_{n \geqslant 1} n(a_n^2 + b_n^2) \tag{12.12}$$

и пришел к заключению, что принцип Дирихле не применим к функции $g(\theta)$, для которой ряд в правой части равенства (12.12) расходится. Примером «недопустимой» функции $g(\theta)$ может служить равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \cos(2^{2n}\theta).$$

Тем самым и пример Прима, и пример Адамара доказывают неразрешимость вариационной задачи в случае, когда соответствующая краевая задача имеет решение.

Конечность правой части в формуле (12.12) — характеристика граничных значений (в терминах их коэффициентов Фурье), к которым применим принцип Дирихле. В статье о проблеме Плато и минимальных поверхностях, написанной в 1931 г., Дж. Дуглас доказал, что если u — решение задачи Дирихле (12.11), где Ω — единичный круг, то

$$D(u) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|g(\theta) - g(\varphi)|^2}{(\sin[(\theta - \varphi)/2])^2}\, d\theta\, d\varphi. \tag{12.13}$$

Тождество (12.13) использовал в своей работе [III.35] Бёрлинг, исследовавший так называемые исключительные подмножества окружности.

Двойные интегралы типа (12.13) содержат локальную характеристику граничных значений функций с конечным интегралом $D(u)$ для любой области с не слишком плохой границей. Это обстоятельство было осознано только в 1950-е гг., когда представление (12.13) было переоткрыто и вместе с тождеством (12.12) легло в основу обширной теории пространств функций с «дробной гладкостью» (Н. Ароншайн, В. М. Бабич, Л. Н. Слободецкий, Э. Гальярдо, Я. Петре, Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженес, а также многие другие)[1]. Современная теория краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными немыслима без этих пространств.

[1] В современных терминах формула (12.13) означает, что $H^{1/2}(\partial\Omega)$ (гильбертово пространство функций, определенных на $\partial\Omega$ и имеющих гладкость порядка $1/2$) есть пространство следов $H^1(\Omega)$ (пространство функций, определенных на Ω и имеющих конечный интеграл Дирихле). Примеры Прима и Адамара показывают, что пространство $C(\partial\Omega)$ не вложено в $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

§ 12.4. Лекции по вариационному исчислению

Основным вкладом Адамара в вариационное исчисление был его трактат [I.159], который вобрал в себя материал лекций, прочитанных им в Коллеж де Франс. С середины XIX в. вариационное исчисление развивалось преимущественно под влиянием идей немецких ученых К. Якоби, К. Вейерштрасса, Р. Клебша, В. Майера и Д. Гильберта. В 1900 г. появилась монография А. Кнезера [III.211], а в 1909 г. — учебник по вариационному исчислению О. Больца [III.46]; обе монографии — на немецком языке. Хотя во французских трактатах по анализу (К. Жордана и др.) содержались отдельные главы, посвященные вариационному исчислению, единственной книгой на французском языке с таким названием был курс Л. Линделёфа и Ф. Муаньо, вышедший в 1861 г. Таким образом, книга Адамара заполнила пробел во французской математической литературе. Каратеодори в своем подробном обзоре [III.67] назвал ее «книгой, ознаменовавшей собой важную дату в истории этой главы математического анализа».

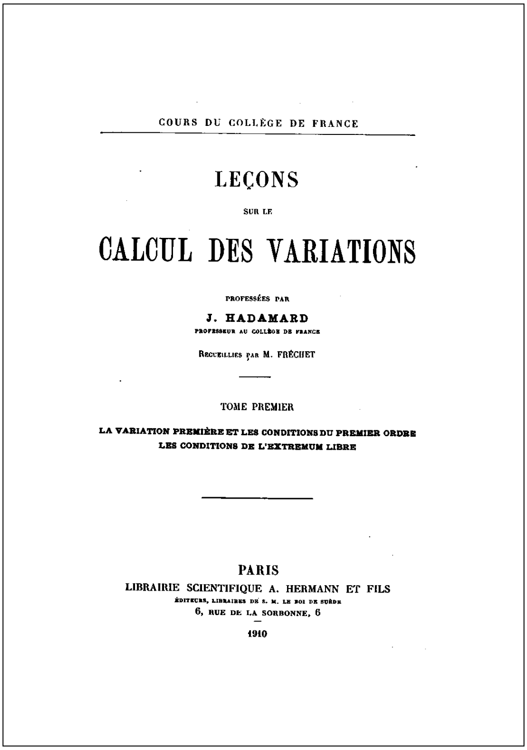
Книга Адамара начинается с простейшей задачи на экстремум функционала (12.1). Далее изучаются изопериметрические задачи, в которых экстремум $U[y]$ отыскивается при дополнительных условиях $V_j[y] = A_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, где A_j — известные числа, а $V_j[y]$ — заданные функционалы. Затем Адамар переходит к задаче Майера, которая ставится следующим образом. Рассматривается неизвестная вектор-функция $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ на отрезке $[0, a]$, удовлетворяющая уравнениям

$$g_j(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') = 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Вектор $\mathbf{y}$ задан в точке 0, а на правом конце a считаются известными компоненты $y_2, \ldots, y_m$. Требуется найти экстремум функционала $y_1(a)$. Первые две части книги Адамара содержат необходимые условия «первого порядка», которым должны удовлетворять любые функции, доставляющие минимум (или максимум) этой и другим вариационным задачам. В конце книги изучается вторая вариация функционала. Исследуются необходимые или достаточные признаки экстремума, в частности теория Вейерштрасса. Рассматриваются вариационные задачи с разрывными решениями, односторонние вариации, функционалы, зависящие от производных любого порядка и др. Изложение теории сопровождается примерами из геометрии и механики.

Казалось бы, Адамар не выходит из традиционного в то время круга задач вариационного исчисления. Но не следует полагаться на это поверхностное впечатление. Хотя автор нигде не выделяет свои теоремы или доказательства, он вносит в изложение почти каждого достаточно трудного вопроса нечто новое, анализирует специальные случаи, заполняет пробелы в рассуждениях предшественников.

«...Чтобы решить тонкую проблему, он, не колеблясь, менял формулировку, — пишет П. Леви. — Задача казалась неразрешимой, так как была плохо поставлена; будучи сформулирована лучше, она становилась разрешимой, и Адамар умело изобретал необходимые методы. В его работах по вариационному



COURS DU COLLÈGE DE FRANCE

LEÇONS

SUR LE

CALCUL DES VARIATIONS

PROFESSÉES PAR

J. HADAMARD

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

RECUEILLIES PAR M. FRÉCHET

TOME PREMIER

LA VARIATION PREMIÈRE ET LES CONDITIONS DU PREMIER ORDRE

LES CONDITIONS DE L'EXTREMUM LIBRE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS

ÉDITEURS, LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1910

исчислению, в отличие от других областей, трудно выделить теорему, которую можно было бы счесть принадлежащей только ему. Скорее можно сказать, что вариационное исчисления было зданием, фундамент которого заложили Эйлер, Лагранж, Якоби и Вейерштрасс. Но ему не хватало прочности. Несмотря на усилия Вейерштрасса, истинные условия экстремума были известны плохо. Даже для такой простой задачи, как минимизация площади поверхности, образованной вращением плоской кривой, соединяющей две заданные точки, вокруг прямой (две точки лежат в той же плоскости, что и прямая, по одну сторону от неё), случаи, когда минимум доставляется регулярной кривой, удовлетворяющей уравнению Эйлера, не были точно определены. Адамар пришел, исследовал с редкой проницательностью существовавшие трудности и оставил законченную работу там, где до него были лишь наброски» [II.37, с. 16].

Кроме того, Адамар включил в свою книгу абсолютно нетрадиционную главу о функциональном анализе, о котором мы поговорим в следующем параграфе.

§ 12.5. Функциональный анализ

В 1887 г. Вито Вольтерра опубликовал серию статей, в которых он заложил основы теории функций линий, которые он рассматривал как отображения тех или иных множеств функций на числовые множества. Вольтерра распространил на функции линий ряд основных понятий алгебры и анализа, в том числе понятие частной производной. Он рассмотрел различные типы уравнений с такими «функциональными» (или «вариационными») производными, показал, что дифференциальные, интегральные и интегродифференциальные уравнения, к которым приводят задачи вариационного исчисления, суть различные типы уравнений в функциональных производных.

Адамар с самого начала заявил себя горячим сторонником вольтерровской теории линий. Он обогатил ее рядом результатов, важных для математической физики, а его «Лекции по вариационному исчислению» явились первой книгой, в которой было уделено место идеям функционального анализа того времени[1].

Выступая на Международном математическом конгрессе в Болонье (1928) с докладом «Развитие функционального исчисления и его роль в науке» [I.278], Адамар нарисовал картину достижений этой дисциплины за первые десятилетия ее существования. Следует иметь в виду, однако, что он говорил о направлении, весьма далеком от функционального анализа в современном понимании. Сегодня функциональный анализ — это комплекс таких дисциплин, как теории гильбертовых и банаховых пространств, нормированных колец, аналитических полугрупп, обобщенных функций... Все они, несмотря на индивидуальные различия, объединены тем, что имеют дело с пространствами бесконечной размерности, надаленными той или иной алгебраической структурой и топологией.

Пусть $\mathcal{A}$ — множество функций. Если любой функции $y \in \mathcal{A}$ соответствует некоторое число $U[y]$, то говорят, что U — функционал, определенный на $\mathcal{A}$. Термин «функционал» был введен Адамаром взамен более раннего термина «функция от линии», который предложил Вольтерра. В своей статье «О функциональных операциях» [I.106] (1903) Адамар заменил этот термин термином *fonctionnelle* (функционал), как он сам пояснил в письме к Фреше, написанном в 1904 или 1905 г.: «Я решил назвать функционалами „функции от функций“, или „функции от линий“: U есть функционал от $\varphi(x)$. Во всяком случае, я предлагаю этот термин» [III.391, с. 251].

Предметом теории, которую начал строить Вольтерра, были нелинейные функционалы. Однако даже более простая теория линейных функционалов была далеко не полностью построена. Проблема заключается в том, что наряду со свойством линейности $U[c_1x + c_2y] = c_1U[x] + c_2U[y]$ определение линейного функционала должно включать в себя условие непрерывности, которое может иметь различный смысл в зависимости от того, как понимается сходимость в пространстве функций, на котором задан функционал. Этот топологический аспект делает определение линейных функционалов на различных пространствах функций весьма нетривиальным.

Первый ответ на такой вопрос был дан Адамаром. В своей работе «О функциональных операциях» [I.106] Адамар показал, что произвольный линейный функционал $U[y]$ на пространстве $C[a, b]$ функций y, непрерывных на отрезке

[1] Работа Г. Фикеры [III.132, с. 172] содержит интересные возражения к следующему замечанию Дьёдонне: «Наконец, мы должны упомянуть первую попытку создания „функционального анализа“, предпринятую молодым Вольтерра в 1887 г., которой, под влиянием Адамара, приписывалось преувеличенно большое историческое значение».

$[a,\, b]$, можно представить в виде

$$U[y] = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b F(t,\, \lambda) y(t)\, dt,$$

где функция F не зависит от y, определяется (не единственным образом) функционалом U и непрерывна на полуполосе $\{(t,\, \lambda)\colon a \leqslant t \leqslant b,\ \lambda > 0\}$. Этот результат Адамара предшествовал известному представлению Рисса [III.345], полученному в 1909 г. для того же функционала:

$$U[y] = \int_a^b y(t)\, d\psi(t),$$

где ψ — функция ограниченной вариации на $[a,\, b]$, однозначно определенная функционалом $U[y]$.

Значительный интерес представляет вопрос описания линейного функционала $U[w]$ на множестве аналитических функций $w(z)$ комплексной переменной z. Принято считать, что он был решен в 1920-х годах итальянским математиком Л. Фантаппье, который создал обширную теорию аналитических функционалов одной и многих комплексных переменных.[1] В действительности первое представление $U[w]$ в виде криволинейного интеграла было получено Адамаром не позднее 1910 г. [I.159, с. 293–294]. При этом важную роль сыграло понятие индикатрисы функционала — так называется функция

$$\varphi(\zeta) = U\Big[\frac{1}{\zeta - z}\Big]. \tag{12.14}$$

Вот рассуждение Адамара. Пусть $w(z)$ — функция, регулярная в области и на ее границе γ. Умножая обе части равенства (12.14) на $w(\zeta)$ и интегрируя по контуру γ, получаем из линейности функционала U, что

$$U\Big[\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\Big] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma w(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\zeta,$$

откуда, используя интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = w(z),$$

находим требуемое представление функционала

$$U[w] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma w(\zeta)\varphi(\zeta)\, d\zeta. \tag{12.15}$$

Здесь за γ можно принять любую «сепаратрису» — замкнутую линию, разделяющую области, в которых лежат особые точки функций w и φ.

[1] Математик и теолог Луиджи Фантаппье был профессором Римского университета и членом Академии деи Линчеи. Его публикации посвящены аналитическим функциям, дифференциальным уравнениям и их приложениям к математической физике. Но главным делом жизни Фантаппье была его теория аналитических функционалов.

Отметим, что позднее Фантаппье использовал для той же цели другую индикатрису,

$$\psi(\zeta) = U\Big[\frac{1}{1 - z\zeta}\Big],$$

которую он называл симметричной.

Представление Адамара (12.15) — частный случай и предшественник общих теорем о структуре пространства, двойственного пространству голоморфных функций на плоском компактном множестве. Несколько наивная форма такой теоремы была в 1928 г. доказана Фантаппье [III.128], который исследовал главным образом нелинейные функционалы. Фантаппье интересовали так называемые аналитические функционалы, преобразующие произвольную аналитическую кривую в некотором пространстве в аналитическую функцию одного комплексного переменного. Под аналитической кривой понимается отображение $\gamma\colon \Omega \to X$, аналитически зависящее от своего аргумента, где Ω — область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а X — рассматриваемое пространство. В качестве побочного продукта Фантаппье получил описание структуры линейных аналитических функционалов, где X — пространство функций, аналитических в окрестности некоторого компактного множества $K \subset \mathbb{C}$. Наивность подхода Фантаппье заключалась в том, что он, как и Адамар перед ним, избегал топологии и предполагал аналитичность в смысле своей общей теории, вместо того чтобы использовать непрерывность. Обзор теории аналитических функционалов Фантаппье был написан Пеллегрино и включен во второе издание книги П. Леви «Некоторые проблемы функционального анализа» [III.240] (см. также [III.249]).

Естественная топология пространства $X(K)$ весьма сложна, и современные идеи относительно этого объекта появились в 1950-х гг., когда была создана общая теория линейных топологических пространств. Первый результат, сформулированный в современных терминах, — описание пространства, двойственного пространству $X(K)$, — был получен Кёте в 1949 г., а Гротендик получил результат для векторнозначных голоморфных функций в 1953 г. Ответ полностью аналогичен результату Адамара: произвольный непрерывный функционал U определяется формулой (12.15), где γ — система контуров, зависящих от w, внутри которых функция w аналитична, а φ — функция, аналитическая на $\mathbb{C}\backslash K$, которая обращается в нуль на бесконечности. Ни Кёте, ни Гротендик не упоминают о том, что первым этот результат получил Адамар.

Линейный функционал можно рассматривать как главную часть небольшого изменения (вариации) нелинейного функционала. Эта идея играла важную роль в исследованиях Адамара вариации функции Грина вследствие вариации области (см. § 14.3). Под влиянием Адамара возникла целая новая область нелинейного анализа. В частности, Фреше и Гато дали определения дифференциала нелинейного функционала, которые стали классическими. Теория интегрирования на пространствах функций была развита Гато и П. Леви, обзор этой теории дан в «Лекциях по функциональному анализу» [III.239], опубликованных в 1922 г. Упомянутая выше книга П. Леви «Некоторые проблемы функционального анализа» [III.240] содержит наряду с другим материалом сводку определений дифференциала, предложенных Адамаром, Гато, Фреше и самим П. Леви.

Представления линейных функционалов и вариационные формулы для функции Грина обсуждаются в главе по функциональному анализу в книге Адамара [I.159], кратко описанной в § 12.4. Включение этого материала отражало общую концепцию Адамара, которую он сформулировал в предисловии к этой книге:

«Вариационное исчисление есть не что иное, как первая глава дисциплины, называемой сегодня исчислением функционалов, развитие которой, безусловно, станет одной из первейших задач анализа будущего. Именно эта идея вдохновляла меня прежде всего как при подготовке курса в Коллеж де Франс, так и при подготовке настоящей работы».

Роль Адамара как «критика и катализатора» в развитии функционального анализа и даже в более широком контексте проанализирована в работах Дж. Д. Грея [III.156] и Р. Зигмунда-Шульце [III.364].

Глава 13

Разнообразная тематика

В этой главе мы расскажем о некоторых работах Адамара по анализу, алгебре, теории вероятностей, топологии и теории множеств. Эти исследования не занимали центрального места в научном творчестве Адамара, и его влияние на дальнейшее развитие соответствующих областей либо мало, либо носит косвенный характер и осуществлялось главным образом через работы других математиков, как, например, в случае функционального анализа. Из этих разрозненных результатов и идей многие неоднократно цитируются, но некоторые забыты, и эти идеи и результаты имеют различную глубину и ценность. Их разнообразие отражает ненасытную любознательность Адамара и широту его интересов, охватывавших почти все разделы математики. Адамару принадлежит даже трехстраничная работа [I.301] по контактным преобразованиям Ли, несмотря на собственное признание Адамара, что он испытывал «непреодолимые сложности при попытке познать эту теорию глубже» [I.372, с. 90]. И хотя в этой главе вы не найдете упоминаний о великих теоремах Адамара, тем не менее она добавляет интересные штрихи к его портрету как математика.

§ 13.1. Неравенство для определителя

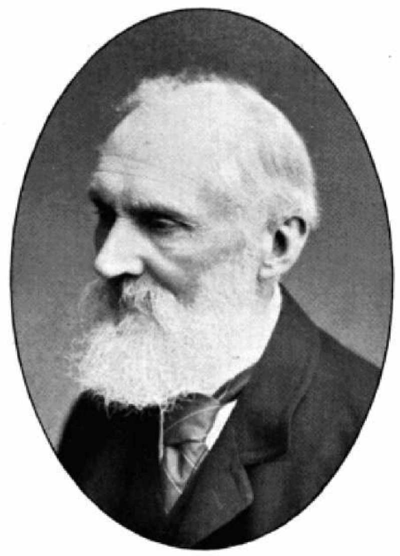
Неравенство. В работах Адамара по теории аналитических функций важную роль играют некоторые определители, составленные из коэффициентов ряда, задающего функцию. Естественно предположить, что, занимаясь диссертацией, он задался вопросом об оценке значения произвольного определителя n-го порядка. Действительно, сразу же после диссертации появляется его статья «О максимуме модуля определителя» [I.16]. В ней было доказано, что для любого определителя n-го порядка $\Delta = \det(a_{ij})$ имеет место неравенство

$$|\Delta| \leqslant \prod_j \left(\sum_i |a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \tag{13.1}$$

которое поистине стало классическим. В 1961 г. Э. Беккенбах и Р. Беллман писали: «Результат Адамара до сих пор привлекает к себе большое внимание. Имеется около ста опубликованных и неопубликованных его доказательств» ([III.22, с. 89]). Из неравенства (13.1) следует, что

$$|\Delta| \leqslant M^n n^{n/2}, \tag{13.2}$$

если $|a_{ij}| \leqslant M$. Эта оценка значительно точнее неравенства $|\Delta| \leqslant M^n n!$, которое получается, если Δ развернуть по элементам какого-либо его столбца.



Лорд Кельвин (1824–1907)

В действительности неравенство (13.1) впервые предложил в качестве гипотезы У. Томсон (лорд Кельвин), а доказал Мюир для действительных значений a_{ij} (1885, см. [III.287], [III.288]). Для таких значений a_{ij} неравенство (13.1) имеет простой геометрический смысл. Если заданы векторы $\mathbf{r}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, выходящие из точки O, то Δ с точностью до знака выражает объем V параллелепипеда. Неравенство (13.1) означает, что при произвольном вращении векторов $\mathbf{r}_i$ объем V имеет наибольшее значение, когда они ортогональны. При $n = 3$ это следует из формулы $V = Sh$, где $S = |\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|\sin\varphi$, $h = |\mathbf{r}_3|\cos\theta$, φ — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а θ — угол между $\mathbf{r}_3$ и плоскостью, в которой лежат векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

В случае произвольного n простое доказательство неравенства (13.1) можно получать с помощью процесса ортогонализации линейно независимых векторов $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$, который состоит в построении векторов $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$ по формулам

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{s}_j = \mathbf{r}_j - \frac{(\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_{j-1})}{|\mathbf{s}_{j-1}|^2}\mathbf{s}_{j-1} - \ldots - \frac{(\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_1)}{|\mathbf{s}_1|^2}\mathbf{s}_1, \quad j = 2, \ldots, n.$$

Так как $(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = 0$ при $i \neq j$, то справедливо неравенство $|\mathbf{s}_i| \leqslant |\mathbf{r}_i|$. Ясно, что

$$\Delta = \det(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) = \det(\mathbf{s}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) = \det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{r}_n) = \det(\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n).$$

Таким образом, $\Delta = |\mathbf{s}_1| \ldots |\mathbf{s}_n| \det U$, где U — некоторая унитарная матрица. Так как $\det U = 1$, справедливо неравенство

$$|\Delta| \leqslant |\mathbf{r}_1| \ldots |\mathbf{r}_n|,$$

эквивалентное неравенству (13.1).

Хорошо известно, что любую положительно определенную матрицу $B = (b_{ij})$ можно представить в виде AA^*, где A — $(n \times n)$-матрица, а A^* — сопряженная ей матрица. Отсюда мы заключаем, что неравенство (13.1) можно записать в виде

$$\det B \leqslant \prod_{i=1}^{n} b_{ii}. \tag{13.3}$$

Это неравенство также часто называют неравенством Адамара [III.288]. Следующее изящное рассуждение, приводящее к неравенству (13.3), дает в то же время еще одно доказательство неравенства (13.1).

Пусть D — диагональная матрица с элементами $d_i = b_{ii}^{-1/2}$ на главной диагонали. Ясно, что

$$\det B = (d_1 \ldots d_n)^{-2} \det(DBD). \tag{13.4}$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы $DBD = (c_{ij})$. Сумма всех значений λ_i равна следу матрицы DBD. Следовательно, из неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического получаем

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ii}\right)^n = 1.$$

Это неравенство вместе с соотношением (13.4) приводит к неравенству (13.3). Из этого доказательства следует, что равенство в (13.3) выполняется тогда и только тогда, когда B — диагональная матрица, т. е. в том и только в том случае, когда A — унитарная матрица.

В 1917 г. Сасс [III.383] доказал следующее обобщение неравенства (13.3) на положительно определенную матрицу B. Пусть P_k означает произведение всех главных миноров k-го порядка матрицы B. Тогда

$$P_1 \geqslant P_2^{1/C_{n-1}^1} \geqslant P_3^{1/C_{n-1}^2} \geqslant \ldots \geqslant P_{n-1}^{1/C_{n-1}^{n-2}} \geqslant P_n.$$

Ясно, что неравенство $P_1 \geqslant P_n$ между первым и последним членами этой цепочки неравенств эквивалентно неравенству (13.3).

Обобщенное неравенство Адамара для определителей есть неравенство, геометрический смысл которого заключается в том, что объем параллелепипеда не превышает произведения объемов любых двух его дополнительных граней. В частности,

$$|\det(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n)| \leqslant |\mathbf{r}_n||\det(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_{n-1})|,$$

откуда немедленно следует неравенство Адамара (см. [III.142]). Ссылки на работы по обобщениям неравенства Адамара, а также на различные доказательства этого неравенства можно найти в книгах [III.22], [III.142].

Приложение к интегральным уравнениям. Наш обзор был бы неполным, если бы мы не упомянули о роли неравенства (13.1) в теории интегральных уравнений, развитой в начале XX в. В 1900 г. Фредгольм занялся исследованием интегральных уравнений вида

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\psi(t)\, dt = f(x), \tag{13.5}$$

которые впоследствии были названы в его честь интегральными уравнениями Фредгольма. Здесь ψ — неизвестная функция, ядро K и функция f заданы, а λ — комплексный параметр. По предположению ядро непрерывно на квадрате $a \leqslant x,\ t \leqslant b$, а функция f кусочно непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Аппроксимируя интеграл конечной суммой, Фредгольм свел уравнение (13.5) к системе из n линейных алгебраических уравнений, вывел приближенное выражение для $\psi(x)$ и затем, перейдя к пределу при $n \to \infty$, получил точное решение в виде

$$\psi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,\ t;\ \lambda) f(t)\, dt,$$

где

$$\Gamma(x,\ t;\ \lambda) = \frac{\mathcal{D}(x,\ t;\ \lambda)}{\mathcal{D}(\lambda)}$$

— так называемая резольвента уравнения (13.5). Числитель и знаменатель резольвенты задаются рядами

$$\mathcal{D}(x,\ t;\ \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(x,\ t)\lambda^n, \qquad \mathcal{D}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$$

с коэффициентами α_n, β_n, представимыми в виде некоторых определителей порядка n. Исходя из неравенства (13.1), Фредгольм доказал, что оба эти ряда — целые функции от λ и что, следовательно, Γ — мероморфная функция от λ.

Фредгольм вывел неравенство (13.1) независимо, не зная о работе Адамара 1893 г. В письме Миттаг-Леффлеру от 8 августа 1898 г. Фредгольм сообщал [III.137]:

«Сходимость можно доказать с помощью теоремы об определителях, упоминание о которой мне нигде не встречалось. Эта теорема сводится к неравенству

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} < \prod_{i=1}^{n} \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2}\ \text{».}$$

Однако в короткой статье «О новом методе решения задачи Дирихле» [III.138], представленной 10 января 1900 г., Фредгольм заявляет: «Теперь я утверждаю, что $\mathcal{D}$ — целая функция от λ. Это почти немедленное следствие из одной теоремы Адамара».

Следующее письмо Адамара Фредгольму не датировано, но, судя по его содержанию, оно, по-видимому, написано около 1900 г.:

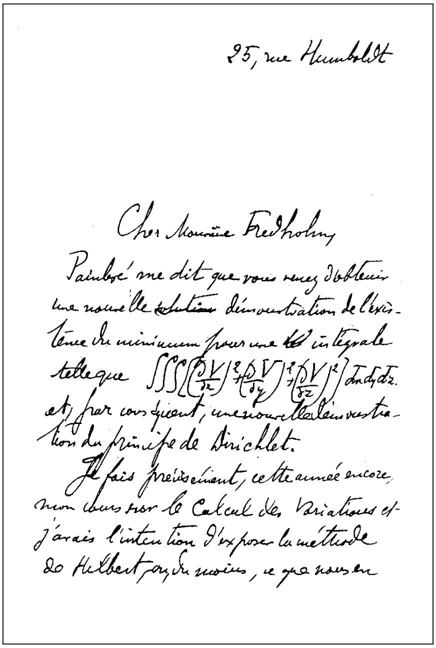
Уважаемый господин Фредгольм!

Пенлеве говорит мне, что Вы недавно получили новое доказательство существования минимума для интеграла типа

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$

и, следовательно, новое доказательство принципа Дирихле.

В этом году я снова читаю свой курс по вариационному исчислению и намеревался изложить в нем метод Гильберта, по крайней мере то, что мы знаем о нем, так как мне



25, rue Humboldt

Cher Monsieur Fredholm

Painlevé me dit que vous venez d'obtenir une nouvelle ~~solution~~ démonstration de l'existence du minimum pour une intégrale telle que $\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$ et, par conséquent, une nouvelle démonstration du principe de Dirichlet.

Je fais précisément, cette année encore, mon cours sur le Calcul des Variations et j'avais l'intention d'exposer la méthode de Hilbert, ou du moins, ce que nous en

Страница письма Адамара Фредгольму

не известно ни одной полной статьи на эту тему. Мне было бы очень интересно узнать о результатах, которые Вы получили в этой важной области. Из того, что мне рассказал Пенлеве, я не понял, появилась ли Ваша работа в печати. Не будете ли Вы так любезны прислать мне, например, гранки, когда получите их, или информировать меня каким-либо другим способом? Я был бы весьма признателен Вам за это.

Я получил Вашу самую последнюю заметку и благодарю Вас за нее. Как Вам известно, я всегда с большим интересом следил за Вашими работами, посвящёнными данной теме.

Искренне Ваш

Ж. Адамар [IV.48].

Описывая в книге [I.372, с. 42] упущенные им возможности, Адамар замечает:

«Продолжая разговор о моих промахах, я отмечу ещё один, о котором я особенно сожалею: речь идёт о знаменитой задаче Дирихле, которую я в течение многих лет пытался решать тем же методом, который избрал Фредгольм, а именно сводя её к системе с бесконечным числом уравнений первой степени с бесконечным числом переменных. Но физическая интерпретация, гид, вообще говоря, очень верный и часто мне помогавший, на этот раз сбила меня с пути».

Но Адамар мог утешаться тем, что его неравенство играло очень важную роль в теории Фредгольма.

Матрицы Адамара. Доказав в статье [I.16] неравенство (13.1), Адамар обратился к вопросу о точности неравенства (13.2). Он обратил внимание на то, что равенство в (13.2) выполняется в том и только том случае, когда абсолютные величины элементов a_{ij} равны, а векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ при $i \neq j$ ортогональны.

Этот класс определителей еще в 1867 г. был рассмотрен Сильвестром [III.381], который, в частности, заметил, что в него входит определитель Вандермонда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \ldots & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & \varepsilon_1^2 & \ldots & \varepsilon_{n-1}^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & \varepsilon_1^{n-1} & \ldots & \varepsilon_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — корни n-й степени из единицы.

При $n = 3$ определителем Вандермонда (с точностью до перестановки строк или столбцов и умножения каждой строки или каждого столбца на одно и то же число) исчерпываются все экстремальные определители. Но при $n \geqslant 4$, как показал Адамар, ситуация становится более сложной. Например, при $n = 4$ экстремальные определители имеют вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & e^{i\theta} & -e^{i\theta} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{vmatrix}$$

при любом $\theta \in [0, 2\pi)$.

Для приложений особенно важны матрицы из ± 1 с ортогональными столбцами и с максимальным абсолютным значением определителя. Такие матрицы в настоящее время называются матрицами Адамара или H-матрицами. В отличие от матриц с комплексными элементами они существуют не для всех n.

В своей работе «Решение одного вопроса об определителях» [I.17] Адамар доказал, что если n — порядок H-матрицы, то $n = 1$, или $n = 2$, или n делится на 4. Рассуждения Адамара были очень кратки. Прежде всего, заметим, что класс H-матриц инвариантен относительно изменения знака столбцов или строк и относительно их перестановок. Следовательно, можно предположить, что первая строка и первый столбец содержат только $+1$. Нетрудно видеть, что при $n = 1$ и $n = 2$ матрицами Адамара являются матрицы

$$(1), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обратимся к случаю $n \geqslant 3$. Пусть матрица имеет следующие три столбца:

$$\begin{array}{llrrr} p & \text{строк вида} & 1 & 1 & 1, \\ q & \text{строк вида} & 1 & 1 & -1, \\ r & \text{строк вида} & 1 & -1 & 1, \\ s & \text{строк вида} & 1 & -1 & -1. \end{array}$$

Тогда

$$p + q + r + s = n$$

и, умножая столбцы попарно, мы получаем

$$\begin{aligned} p+q-r-s&=0,\\ p-q+r-s&=0,\\ p-q-r+s&=0. \end{aligned}$$

Суммируя эти четыре равенства, мы получаем $4p=n$, что и завершает доказательство.

В той же статье [I.17] Адамар заметил, что H-матрицы существуют при $n=2^m$, $m=2, 3, \ldots$, и предложил процедуру построения H-матриц порядков $n=12$ и $n=20$. Хорошо известная гипотеза о существовании матриц Адамара любого порядка, кратного 4, не была ни доказана, ни опровергнута. Этот вопрос обсуждается в статье [III.171].

Адамар не мог подозревать, что H-матрицы найдут применение в теории кодирования (см., например, [III.261]), теории дизайнов [III.33], технике связи [III.328], статистике [III.336] и оптике [III.168]. Столь широкое применение H-матриц привело к появлению многочисленных специальных терминов, носящих имя Адамара, что сильно удивило бы его, будь он сейчас жив. Например, в оптике есть преобразование Адамара. Существуют также компьютеры Адамара, спектрометры Адамара, интерферометры Адамара и т. д.

Иногда имя Адамара связывают с совершенно другим классом матриц (см. [III.22], [III.25]), а именно с матрицами, удовлетворяющими условию доминирования их главной диагонали:

$$|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|. \tag{13.6}$$

В главе I своей книги [I.109] (с. 13–14) Адамар показывает, что определители таких матриц отличны от нуля. Более ранние утверждения такого рода принадлежат Л. Леви [III.237] (1881), Депланку [III.101] (1887) и Минковскому [III.277] (1900).

Приведем доказательство Адамара. Предположим, что $\Delta=0$. Тогда система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0, \qquad i=1, \ldots, n,$$

имеет нетривиальное решение. Пусть x_k — компонента такого решения с наибольшей абсолютной величиной. Тогда

$$|a_{kk}||x_k|=\left|\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\right|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_j|$$

и, таким образом,

$$|a_{kk}|\leqslant\sum_{j\neq k}|a_{kj}|,$$

что противоречит неравенству (13.6).

Используя аналогичные рассуждения, А. Островский [III.298] (1937) получил неравенство

$$|\Delta| \geqslant \prod_{i=1}^{n}\Big(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\Big).$$

Ныне известно весьма много оценок такого типа.

Матрицы с «доминантной» главной диагональю, т. е. матрицы, удовлетворяющие условию (13.6), возникают в различных приложениях, например в статистике, в теории устойчивости систем, в теории сетей (библиографию см. в работах О. Таусски [III.390], Р. А. Хорна и Ч. Р. Джонсона [III.181]).

§ 13.2. Некоторые работы по анализу и алгебре

Сходящиеся и асимптотические ряды. Время от времени Адамар обращается к различным вопросам теории рядов, специальных функций и т. п. — тем объектам классического математического анализа, о которых мы узнаем из начального курса высшей математики. И даже в эту, казалось бы, завершенную к концу XIX в. область ему удалось внести нечто новое.

В 1894 г. появилась статья Адамара [I.19] о сходимости числовых рядов с положительными членами, опубликованная в журнале «Acta Mathematica». Это была первая публикация Адамара в иностранном журнале. Отправным пунктом статьи был результат Абеля, согласно которому для любого расходящегося ряда $\sum u_n$ с положительными членами можно построить такую последовательность $\varphi(n)$, сходящуюся к нулю, что ряд $\sum u_n\varphi(n)$ расходится.

Нильс Хенрик Абель (1802–1829)

Дюбуа-Реймон дополнил этот результат, показав, что, как бы медленно ни сходился ряд $\sum u_n$ с положительными членами, его члены всегда можно умножить на элементы такой последовательности $\varphi(n)$, стремящейся к бесконечности, что ряд $\sum u_n\varphi(n)$ будет сходиться.

Говоря не вполне точно, можно как вывод из обеих теорем сформулировать следующую закономерность. Каков бы ни был сходящийся (расходящийся) ряд с положительными членами, существует другой такой же ряд, сходящийся (расходящийся) медленнее. Адамар обобщает этот факт на последовательности рядов, доказывая, что всегда можно найти сходящийся (расходящийся) ряд, который сходится (расходится) медленнее каждого из сходящихся (расходящихся) рядов, образующих данную последовательность.

А вот ещё один результат Адамара, установленный в работе [I.19]. Пусть дана последовательность $\{\varphi_p(n)\}_{p\geqslant 1}$ функций целочисленного аргумента n, возрастающих и стремящихся к бесконечности все медленнее с ростом p. Тогда можно найти такие положительные числа u_n, что ряд $\sum u_n$ сходится, в то время как все ряды $\sum u_n\varphi_p(n)$ расходятся.

Через несколько лет Адамар вернулся к этой тематике в статье [I.91], в которой дал ответ на следующий вопрос: каким образом нужно выбрать последовательность $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$, чтобы построенный по любому сходящемуся (абсолютно или нет) ряду $\sum u_n$ ряд $\sum u_n\xi_n$ также сходился? Оказалось, что необходимым и достаточным условием является сходимость ряда $\sum(\xi_{n+1}-\xi_n)$.

В работах [I.149], [I.184] Адамар обратился к исследованию так называемых асимптотических рядов. Формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется асимптотическим для функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если для $m=1,\ 2,\ \ldots$ выполняются равенства

$$f(x)-\sum_{n=1}^{m} f_n(x)=o(f_m(x)) \quad \text{при} \quad x\to x_0.$$

Асимптотические ряды не обязательно сходятся. Например, если функция f бесконечно дифференцируемая, но не аналитическая, то ее ряд Тейлора асимптотический, но не сходящийся.

Пуанкаре, давший приведенное выше определение в 1886 г. [III.317], начал свои исследования асимптотических рядов со следующего асимптотического ряда, предложенного Стирлингом (1730):

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2n(2n-1)}x^{1-2n}+\ldots, \tag{13.7}$$

где B_n — так называемые числа Бернулли. Хотя этот ряд расходится, сумма нескольких его первых членов представляет функцию

$$\ln\left(\frac{e^x\Gamma(x+1)}{(2\pi)^{1/2}x^{x+1/2}}\right)$$

весьма точно при больших значениях x.

В [I.184] Адамар рассмотрел задачу преобразования расходящихся асимптотических рядов в сходящиеся, которой ранее занимался Борель. Адамар показал, что если к n-му члену ряда (13.7) прибавить $\Phi_n(x^{-1}, e^{-2\pi x})$, где Φ_n — некоторый многочлен $(2n-1)$-й степени по первой переменной и n-й степени по второй переменной, то новый ряд является асимптотическим для той же функции и сходящимся.

Аналогичную конструкцию Адамар предложил в [I.149] для асимптотического ряда, представляющего функцию Бесселя J_0 действительного или чисто мнимого аргументов.

Мемуар об исключении неизвестных. В 1896 г. в журнале «Acta Mathematica» появилась обширная статья Адамара [I.35]. Она была посвящена теории исключения неизвестных из системы алгебраических уравнений. Рассмотрим простейший случай системы двух уравнений

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0, \tag{13.8}$$

где

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \ldots + a_n(y),$$
$$g(x, y) = b_0(y)x^m + b_1(y)x^{m-1} + \ldots + b_m(y)$$

и коэффициенты a_i и b_j — многочлены по y. Если $a_0 b_0 \neq 0$, то функции f и g имеют по крайней мере один общий корень, когда результант $R(f, g)$ обращается в нуль. Под результантом понимается определитель некоторой квадратной матрицы порядка $n+m$ с ненулевыми элементами $a_i(y)$ и $b_j(y)$. Тогда говорят, что многочлен $R(f, g)$ получается в результате исключения неизвестного x из системы (13.8). Когда корни результанта найдены, остается только подставить их в уравнения (13.8) и вычислить корни двух многочленов по x, полученных с помощью исключения y.

Аналогичные рассуждения могут быть использованы для исключения неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ при решении системы

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = 0, \quad i = 1, \ldots, n+1,$$

рассмотренной Адамаром, но анализ системы становится существенно более сложным. В частности, процесс исключения того или иного переменного зависит от того, как перенумерованы уравнения системы. Но Адамар показал, что изменение порядка нумерации приводит только к изменению знака в результантах, получающихся в процессе исключения. Заключительная часть работы Адамара посвящена приложениям к вычислению выражений $\prod Q(x_i, y_i)$ и $\sum Q(x_i, y_i)$, где Q — отношение многочленов, а (x_i, y_i) — точка пересечения двух данных алгебраических кривых.

Обратимость точечных преобразований. В работе [I.138] Адамар сформулировал и решил проблему глобального обращения точечных отображений. Он рассмотрел систему уравнений

$$X_k = f_k(x_1, \ldots, x_m), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{13.9}$$

где набор функций $\{f_1, \ldots, f_m\}$ определяет отображение пространства $\mathbb{R}^m$ на себя. Каковы условия однозначной разрешимости системы уравнений (13.9)? На первый взгляд ответ кажется тривиальным и известным любому студенту-

математику: якобиан
$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$$
должен иметь постоянный знак. Но такое заключение не учитывает ограничительное условие локальности в теореме об обратной функции: кроме того, оно ошибочно, потому что система (13.9) может быть неразрешима, хотя ее определитель положителен, даже при $m = 1$. Действительно, невозможно решить уравнение $X = \operatorname{arctg} x$ при произвольном X, хотя $\operatorname{arctg} x$ — строго возрастающая функция. На самом деле уравнение $X = f(x)$, правая часть которого удовлетворяет неравенству $f'(x) > 0$ на $-\infty < x < \infty$, разрешимо в том и только том случае, когда
$$\int\limits_{-\infty}^{0} f'(x)\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} f'(x)\,dx = \infty.$$

В многомерном случае положительность якобиана также не гарантирует ни глобальной разрешимости системы (13.9), ни единственности решения, и требуется аналог упомянутого выше одномерного условия глобальной разрешимости. Чтобы получить этот аналог, Адамар рассмотрел длину наименьшей оси эллипсоида деформации
$$\lambda(x) = \min\left(\frac{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(dX_i)^2}{\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(dx_i)^2}\right)^{1/2}$$
(на языке того времени), т. е. квадратный корень из наименьшего собственного значения матрицы, элемент которой, стоящий на пересечении j-й строки и k-го столбца, имеет вид
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}.$$

Адамар нашел следующие достаточные условия однозначной разрешимости системы (13.9):
$$\mu(\rho) > 0, \qquad \int\limits_{0}^{\infty}\mu(\rho)\,d\rho = \infty, \tag{13.10}$$
где $\mu(\rho)$ — минимум функции $\lambda(x)$ на сфере $x_1^2 + \ldots + x_m^2 = \rho^2$.

Адамар получил этот результат как следствие двух приведенных ниже достаточных условий разрешимости системы (13.9), где функции f_j непрерывны и таковы, что отображение $x \to X$ переводит любую непрерывно дифференцируемую кривую в спрямляемую:

(i) отображение $x \to X$ — локальный гомеоморфизм, т. е. взаимно однозначное отображение некоторой окрестности любой точки x на некоторую окрестность соответствующей точки $X = f(x)$, непрерывное вместе со своим обратным отображением;

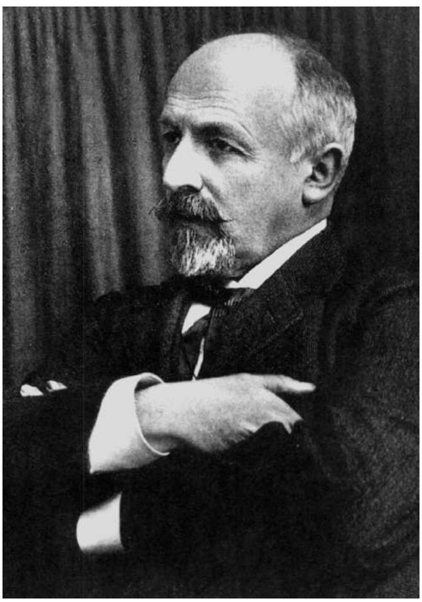
(ii) образ любой непрерывно дифференцируемой кривой, уходящей на бесконечность, имеет бесконечную длину.

Позднее в короткой работе [I.198] Адамар показал, что условия (i) и (ii) не только достаточны, но и необходимы. Этот критерий стали называть теоремой Адамара о глобальной обратной функции. Она была доказана Пале [III.302] в следующей эквивалентной формулировке: отображение класса C^∞ есть диффеоморфизм на $\mathbb{R}^n$ в том и только том случае, когда его матрица Якоби нигде не сингулярна и прообразы компактных множеств компактны.

Недавно внимание было снова привлечено к развитию и приложениям перечисленных выше результатов Адамара (см. [III.199], [III.314], [III.61], [III.329]). В частности, были получены далеко идущие обобщения на негладкие отображения между парами произвольных банаховых пространств. Приложениям теоремы Адамара о глобально обратимой функции к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена работа [III.184], где приведены ссылки на более ранние работы в этой области.

§ 13.3. Адамар и теория множеств

Рождение теории множеств восходит к началу 1870-х годов, когда внимание Георга Кантора привлекли свойства бесконечных множеств в связи с его исследованиями тригонометрических рядов. В самом начале Кантор заметил, что множество всех рациональных чисел счетно, т. е. существует взаимно однозначное соответствие между этим множеством и последовательностью натуральных чисел 1, 2, 3, … Еще более удивительной оказалась счетность множества алгебраических чисел (1874). Тогда же Кантору удалось доказать несчетность множества всех действительных чисел. Взятые вместе эти факты показали, что трансцендентных



Георг Кантор (1845–1918)

чисел несравнимо больше, чем алгебраических чисел. (Заметим, что примерно тогда же Эрмит доказал трансцендентность числа e и что уже в 1844 г. Лиувилль построил некоторый бесконечный класс трансцендентных чисел.) Это лишь один пример того, как понятие взаимно однозначного соответствия стало в руках Кантора инструментом сравнения бесконечных множеств. Кантор говорил, что два множества имеют одинаковую мощность (обладают одним и тем же трансфинитным числом), если между их элементами существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, множества рациональных и алгебраических чисел, так же как и множество целых чисел, имеют одинаковую мощность, тогда как множество действительных чисел имеет бóльшую мощность, называемую мощностью континуума. После тщетных попыток доказать обратное Кантор также показал, что плоскость и трехмерное пространство имеют мощность континуума. С другой стороны, он построил бесконечно много различных трансфинитных чисел, тем самым введя «иерархию бесконечностей». Но даже самый беглый обзор теории множеств Кантора не входит в нашу задачу.

В 1890-е годы, когда Кантор подводил итоги дела своей жизни, его неортодоксальные идеи воспринимались с трудом. Эрмит первым во Франции оценил идеи Кантора, а Пуанкаре применил их к классическому анализу в своих исследованиях автоморфных функций и дифференциальных уравнений в 1880-е годы.

Что касается Адамара, он очень рано стал ярым приверженцем теории множеств: ссылки на нее содержались еще в его диссертации (1892). В § 11.2 мы упоминали о том, что Адамар нашел поразительное приложение теории множеств в своих исследованиях геодезических на поверхностях отрицательной кривизны (1896), в котором теоретико-множественные конструкции Кантора естественно появились в классической геометрической задаче.

В кратком докладе Адамара «О некоторых возможных приложениях теории множеств» [I.68] на Первом международном математическом конгрессе в Цюрихе (1897) подчёркивается полезность изучения множеств функций, свойства которых отличны от свойств чисел или n-мерных векторов. Обращая внимание на важность теории таких множеств для математической физики и вариационного исчисления, Адамар писал:

«Исследования такого рода, несомненно, сыграют фундаментальную роль, особенно в теории дифференциальных уравнений с частными производными математической физики. Приведу лишь один пример: благодаря таким исследованиям можно заложить солидный фундамент под известные рассуждения, позволяющие свести определение интегралов этих уравнений к задачам на минимумы» [I.406, т. 1, с. 311].

В качестве одной из первых задач, возникающих при исследовании таких классов, Адамар предложил вычисление кардинального числа множества имеющих малый заданный диаметр подмножеств непрерывных функций. В докладе Адамара нет ни метрических пространств, ни компактных множеств, но Фреше под влиянием этого доклада ввел оба этих понятия несколькими годами позднее [III.391, с. 259]. Свою строгую формулировку интуитивная идея Адамара обрела гораздо позднее. В 1956 г. А. Н. Колмогоров, опираясь на некоторые

Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.

Par

J. Hadamard à Paris.

Quoique la théorie des ensembles fasse abstraction de la nature des éléments, on a surtout considéré, jusqu'à présent, les ensembles composés de nombres, ou, tout au plus, de points dans l'espace à n dimensions.

Il ne me semble pas inutile de signaler l'intérêt qu'il y aurait à étudier des ensembles composés de fonctions. De tels ensembles peuvent d'ailleurs présenter des propriétés tout autres que les précédents.

C'est ainsi que la question de la convergence des séries conduirait à rechercher un ensemble de fonctions d'une puissance supérieure à la première et bien ordonné, c'est-à-dire tel que l'on puisse non seulement indiquer l'ordre de deux éléments quelconques, mais assigner l'élément qui précède et celui qui suit immédiatement un élément donné.

Mais c'est principalement dans la théorie des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique que des études de cette espèce joueraient, sans nul doute, un rôle fondamental. Pour n'en citer qu'un exemple c'est grâce à ces recherches qu'on arriverait à donner un fondement solide aux raisonnements bien connus qui ramènent la définition des intégrales de ces équations à des questions de minimum.

Il est clair, en effet, que de telles questions sont intimement liées à la nature du domaine dans lequel le minimum est recherché. Par exemple, le minimum d'une quantité $f(x, y, z)$ qui dépend continuement des coordonnées d'un point existe toujours sur une surface fermée (ou dont les bords sont considérés comme faisant partie de la surface); il n'existe pas nécessairement si une ligne ou un point donnés sont exclus.

Il faut toutefois remarquer que le problème présente des difficultés spéciales dans le cas du calcul des variations, la solution dépendant à

202 II. Teil: Wissenschaftliche Vorträge.

la fois de la nature du domaine et de celle de l'expression dont on étudie la variation. C'est ainsi qu'une intégrale étendue à un arc de courbe assujetti à avoir ses extrémités en deux point donnés, avec des tangentes données en ces points, admet en général un minimum si la fonction sous le signe $\int$ contient des dérivées secondes et n'en admet pas si cette fonction ne contient que des dérivées premières.

Il n'en est pas moins évident qu'il y aurait lieu d'étudier l'ensemble E formé par les fonctions continues d'une variable comprise dans l'intervalle $(0, 1)$ et prenant aux extrémités des valeurs données, ainsi que les ensembles analogues.

Un des premiers problèmes qui se poseraient dans cette étude me paraît être le suivant:

Divisons l'ensemble considéré en ensembles partiels E' tels que deux fonctions intérieures à l'un quelconque d'entre eux aient une distance (au sens de Weierstrass) moindre qu'un nombre déterminé δ. Considérant tous ces E' comme autant d'individus, on peut dire que l'ensemble qui a ces E' pour éléments numère l'ensemble E. C'est cet ensemble numérant dont il conviendrait d'étudier les propriétés et, en premier lieu, la puissance.

Доклад Адамара на Первом международном математическом конгрессе в Цюрихе

понятия теории информации, определил ε-энтропию компактного метрического пространства как логарифм наименьшего числа множеств диаметра 2ε, покрывающих пространство [III.215]. Исследование этой и появившихся позднее других количественных характеристик компактных множеств ныне составляет значительную часть теории приближений.

В начале XX в. развернулась дискуссия по основаниям математики и, в частности, по математическим доказательствам существования, вдохновленная открытием парадоксов (антиномий) теории множеств. В ней приняли участие Пуанкаре, Цермело, Гильберт, Рассел, Борель, Бэр, Лебег, Ришар и другие математики. Единого мнения по этим вопросам достичь не удалось. Было бы удивительно, если бы Адамар с его замечательной энергией остался в стороне от этих дебатов.

Логические парадоксы были известны с древних времен. Примером может служить притча о критянине Эпимениде, который сказал, что все критяне — лжецы. Если Эпименид изрек истину, то он лжец. Около 1895 г. Кантор открыл первый парадокс в теории множеств (слишком технический для того, чтобы обсуждать его здесь) и описал его в письме к Гильберту. Вскоре после Кантора тот же парадокс был вторично открыт и описан в 1897 г. в статье Бурали-Форти. В последующие годы появились другие парадоксы, в том числе следующий вопрос, принадлежащий Расселу (1902): является ли множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя, элементом самого себя? Оба ответа — утвердительный и отрицательный — неверны.

Пуанкаре живо описывает свои дискуссии с Адамаром по поводу парадокса Бурали-Форти:

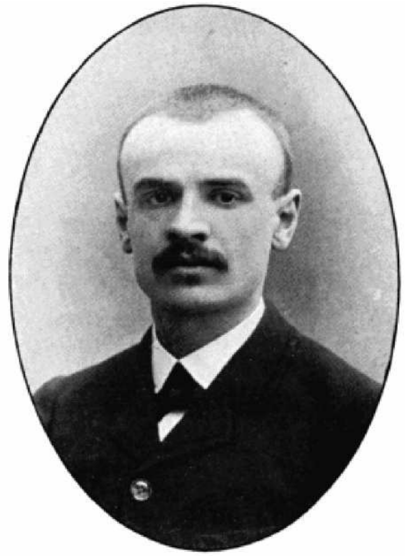
«Как-то раз месье Адамар зашел навестить меня, и разговор зашел об этой антиномии. „Рассуждения Бурали-Форти, — сказал я, — не кажутся Вам безупречными?“ — „Совершенно верно, и, напротив, мне нечего возразить против рассуждений Кантора. Кроме того, Бурали-Форти не имел права говорить о множестве *всех* ординальных чисел“».

Остальная часть дискуссии Пуанкаре и Адамара требует специальных знаний, поэтому мы опустим ее, но приведем лишь заключение — словами Пуанкаре: «Но тщетно. Я не мог убедить его (если бы мне это удалось, это было бы печально, так как он был прав)» [III.321, с. 459].

В 1904 г. Цермело опубликовал работу [III.427], в которой он доказал, что всякое множество может быть вполне упорядочено. Доказательство Цермело основывалось на так называемой аксиоме выбора (аксиоме Цермело), согласно которой из произвольной системы множеств, выбирая по одному элементу из каждого множества системы, можно построить новое множество M. Хотя аксиома выбора используется в доказательствах различных теорем, она остается открытой для критики, так как не всегда возможно указать явно правило, в соответствии с которым строится множество M.

Эрнест Цермело (1871–1953)

Борель отреагировал на аксиому выбора в своей статье [III.51], в которой он выразил свои возражения по поводу законности применения аксиомы Цермело к системе подмножеств континуума. Борель сомневался и в возможности вполне упорядочения, так как по его мнению Цермело показал, что такая возможность эквивалентна аксиоме выбора. Борель направил письма Адамару, Бэру и Лебегу с просьбой высказать их мнение по поводу его критики работы Цермело. Ответы Адамара, Бэра и Лебега вместе с еще одним письмом от Бореля составили содержание публикации «Пять писем о теории множеств» [I.123] (1905).



Рене Бэр (1874–1935)

В частности, Лебег писал Борелю:

«Проблема сводится к следующему отнюдь не новому вопросу: можно ли доказать существование некоторого математического объекта, не определяя его? Ясно, что ответ на такой вопрос зависит от принятого соглашения, но я убежден, что прочную конструкцию можно возводить, допуская, что существование доказывается только для объекта, который определен».

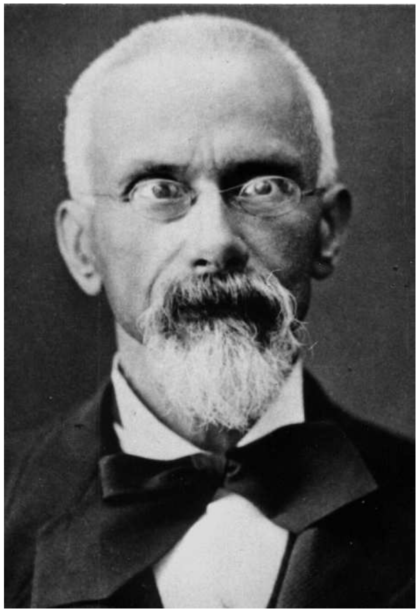
Адамар высказал свое мнение, настаивая на том, что утверждение о существовании объектов не требует их описания: «Существование... — такой же факт, как и любой другой». Адамар был единственным стойким защитником Цермело. Он настаивал на том, что аксиому выбора следует принять, на том же основании, на каком он защищал работы Кантора: и в том, и в другом случае решающее значение имела полезность предлагаемых новаций для прогресса математики. В письме к Борелю Адамар писал: «Таким образом, в настоящее время существуют две концепции математики, два умонастроения. Во всем, что было сказано до сих пор, я не усматриваю никакого основания для того, чтобы изменить свою позицию, но я и не намереваюсь никому навязывать ее» [I.123].

Споры об аксиоме Цермело были частью более широкой дискуссии об основаниях математики. Исторический анализ этой полемики можно найти у Медведева [III.437], Мура [III.283] и Граттана-Гиннеса [III.432].

§ 13.4. Адамар и топология

Топология — раздел математики, занимающийся изучением геометрических свойств, инвариантных относительно непрерывных преобразований. Примером таких свойств может служить теорема Жордана (1893), естественная, но трудно доказуемая, которая утверждает, что любая несамопересекающаяся замкнутая плоская кривая делит плоскость на две компоненты. До конца XIX в. предмет топологии находился в зачаточном состоянии: отдельные топологические факты были обнаружены Эйлером, Риманом, Мёбиусом, Жорданом, Кронекером, Бетти и другими[1]. В 1880-х гг. Клейн и Пуанкаре использовали топологические

Камилл Жордан (1838–1922)



Энрико Бетти (1823–1892)

понятия в работах по автоморфным функциям. Движимый интересом к этим приложениям, а также своими собственными исследованиями динамических систем, Пуанкаре осознал важность топологии как особой дисциплины и в 1895–1904 гг. посвятил ей серию статей, в которых заложил основы современной топологии.

Адамар был одним из немногих математиков, которых топология привлекла сразу после Пуанкаре. В одной из своих лекций в Колумбийском университете [I.194] Адамар объяснил, что число решений системы (13.9), где функции f_i отображают некоторую поверхность на себя, зависит от топологических свойств

[1] Очерк предыстории и истории топологии см. в книгах Дж. Ч. Понта [III.326] и Ж. Дьёдонне [III.105].

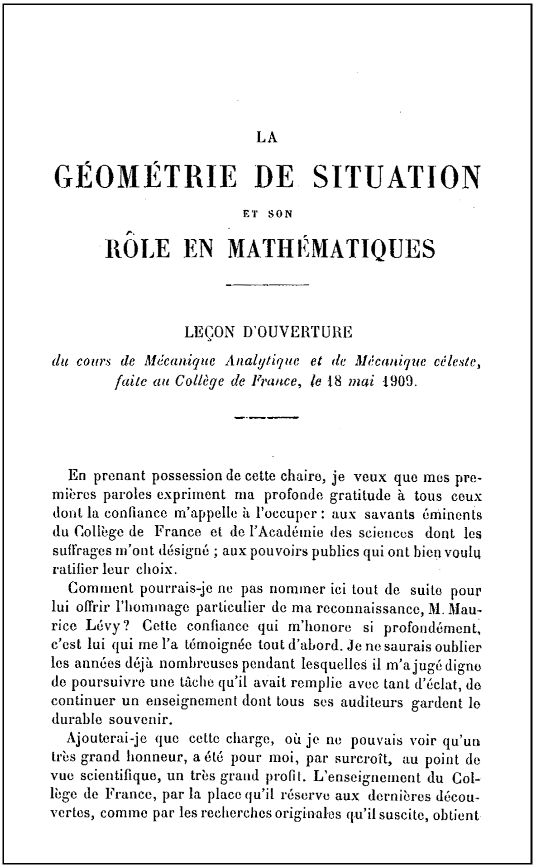
Анри Пуанкаре

этой поверхности. Интерес Адамара к топологии проявился даже еще раньше в связи с его исследованиями геодезических (см. § 11.2).

Адамар переписывался и встречался с Брауэром начиная с 1909 г. После своих фундаментальных работ по математической логике и основаниям математики Брауэр в 1909—1913 гг. получил важные топологические результаты. Среди них знаменитая теорема Брауэра о неподвижной точке: любое непрерывное отображение n-мерного шара на себя имеет по крайней мере одну неподвижную точку[1], а также его теорема об инвариантности размерности относительно взаимно однозначных отображений. Заметим, что Кантор пытался установить эту инвариантность для произвольных взаимно однозначных отображений, но обнаружил, что ее не существует.

Однако роль Адамара в развитии топологии оказалась весьма скромной. Тем не менее, нельзя не упомянуть о некотором его вкладе в эту область. Помимо популярных статей Адамар написал только одну статью, содержавшую его собственные топологические результаты. Статья называлась «Заметка о некоторых приложениях индекса Кронекера» и была опубликована в [I.163] (1910). Индекс системы n функций, заданных на $(n-1)$-мерной замкнутой поверхности, был введен Кронекером (1869) в виде некоторого интеграла и представлял

[1]Бесконечномерные версии теоремы о неподвижной точке, принадлежащие Шаудеру и Лере—Шаудеру, стали эффективным инструментом в современной теории нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений, где с их помощью доказываются теоремы существования для решений, рассматриваемых как неподвижные точки в пространствах функций.



LA

GÉOMÉTRIE DE SITUATION

ET SON

RÔLE EN MATHÉMATIQUES

LEÇON D'OUVERTURE

du cours de Mécanique Analytique et de Mécanique céleste, faite au Collège de France, le 18 mai 1909.

En prenant possession de cette chaire, je veux que mes premières paroles expriment ma profonde gratitude à tous ceux dont la confiance m'appelle à l'occuper : aux savants éminents du Collège de France et de l'Académie des sciences dont les suffrages m'ont désigné ; aux pouvoirs publics qui ont bien voulu ratifier leur choix.

Comment pourrais-je ne pas nommer ici tout de suite pour lui offrir l'hommage particulier de ma reconnaissance, M. Maurice Lévy ? Cette confiance qui m'honore si profondément, c'est lui qui me l'a témoignée tout d'abord. Je ne saurais oublier les années déjà nombreuses pendant lesquelles il m'a jugé digne de poursuivre une tâche qu'il avait remplie avec tant d'éclat, de continuer un enseignement dont tous ses auditeurs gardent le durable souvenir.

Ajouterai-je que cette charge, où je ne pouvais voir qu'un très grand honneur, a été pour moi, par surcroît, au point de vue scientifique, un très grand profit. L'enseignement du Collège de France, par la place qu'il réserve aux dernières découvertes, comme par les recherches originales qu'il suscite, obtient

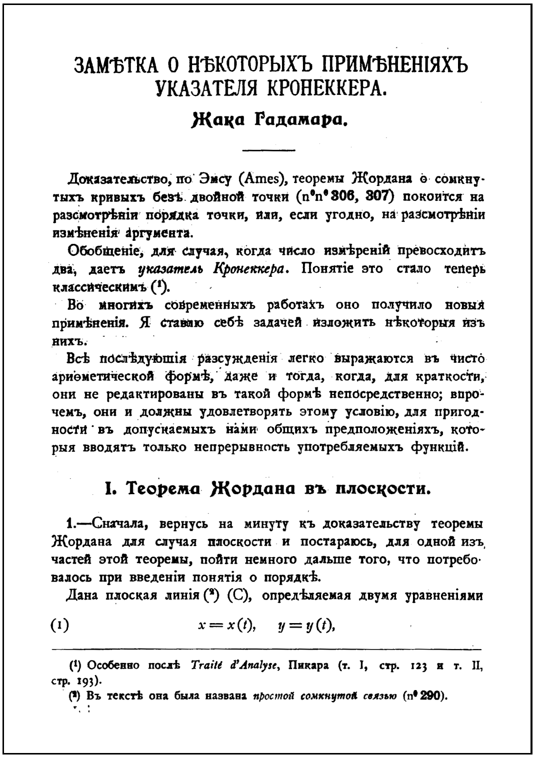
В 1909 г. Адамар прочитал в Коллеж де Франс вступительную лекцию «Геометрия положения и ее роль в математике» по истории топологии

собой многомерное обобщение вращения векторного поля на плоскости[1]. Используя индекс Кронекера, Адамар нашел новые более простые доказательства некоторых известных топологических фактов, в частности теоремы Жордана о замкнутой кривой.

В [III.200, с. 139] Д. М. Джонсон пишет:

«„Заметка“ Адамара замечательно похожа на классическую работу Брауэра „Об отображении многообразий“ (1911), содержащую определение степени отображения, которая появилась вскоре после „Заметки“. Этого сходства следовало ожидать. Эти двое математиков, Адамар и Брауэр, встречались в Париже в канун нового, 1910 года и обсуждали идеи, лежавшие в основе обеих работ. Тем не менее, вряд ли есть какое-нибудь сомнение в том, что работа Брауэра по значимости превосходит „Заметку“ Адамара. В то время как „Заметка“ Адамара стоит в конце длинной линии математического развития, нанося свое-

[1] Представьте себе отличную от нуля векторнозначную функцию, заданную на замкнутой ориентированной плоской кривой. Приращение угла между вектором и фиксированным направлением при обходе кривой, деленное на 2π, называется вращением векторного поля.



ЗАМѢТКА О НѢКОТОРЫХЪ ПРИМѢНЕНІЯХЪ УКАЗАТЕЛЯ КРОНЕККЕРА.

Жака Гадамара.

Доказательство, по Эмсу (Ames), теоремы Жордана о сомкнутыхъ кривыхъ безъ двойной точки (n°n° **306, 307**) покоится на разсмотрѣніи порядка точки, или, если угодно, на разсмотрѣніи измѣненія аргумента.

Обобщеніе, для случая, когда число измѣреній превосходитъ два, даетъ *указатель Кронеккера*. Понятіе это стало теперь классическимъ (¹).

Во многихъ современныхъ работахъ оно получило новыя примѣненія. Я ставлю себѣ задачей изложить нѣкоторыя изъ нихъ.

Всѣ послѣдующія разсужденія легко выражаются въ чисто ариѳметической формѣ, даже и тогда, когда, для краткости, они не редактированы въ такой формѣ непосредственно; впрочемъ, они и должны удовлетворять этому условію, для пригодности въ допускаемыхъ нами общихъ предположеніяхъ, которыя вводятъ только непрерывность употребляемыхъ функцій.

I. Теорема Жордана въ плоскости.

1.—Сначала, вернусь на минуту къ доказательству теоремы Жордана для случая плоскости и постараюсь, для одной изъ частей этой теоремы, пойти немного дальше того, что потребовалось при введеніи понятія о порядкѣ.

Дана плоская линія (²) (C), опредѣляемая двумя уравненіями

(1) $$x = x(t), \quad y = y(t),$$

(¹) Особенно послѣ *Traité d'Analyse*, Пикара (т. I, стр. 123 и т. II, стр. 193).

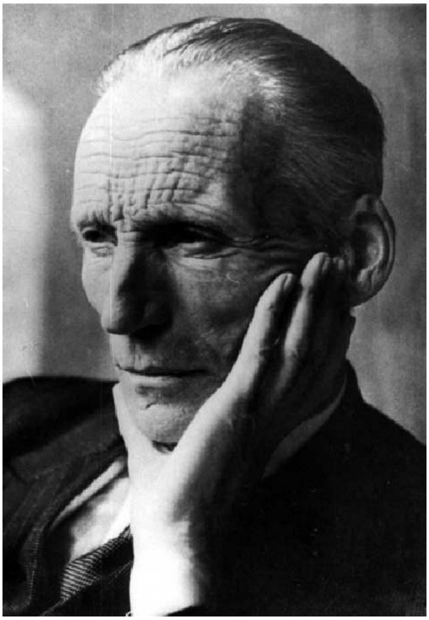
(²) Въ текстѣ она была названа *простой сомкнутой связью* (n° **290**).

В начале XX в. русский перевод «Введения в теорию функций одной переменной» Ж. Таннери был популярным университетским учебником. В его втором томе приведена статья Адамара об индексе Кронекера.

го рода последние штрихи на изложение важной математической идеи, великая работа Брауэра устремлена вперед — к новым путям топологического мышления. Работа Брауэра носит гораздо более революционный характер, чем работа Адамара».

Интересное замечание по поводу влияния Адамара на топологические работы Брауэра высказал Г. Фрейденталь [III.139], который проанализировал часть неопубликованной переписки Брауэра. Фрейденталь пишет:

«В 1909 г. он [Брауэр] опубликовал исследование о непрерывных отображениях поверхностей и о векторных полях на поверхностях. Он доказал существование неподвижной точки любого отображения 2-сферы, принадлежащего (как бы мы сказали, пользуясь современной терминологией) гомотопическому классу тождественного отображения, и существование особой точки векторных полей на 2-сфере (не заметив, что последнее свойство, хотя и при гораздо более грубых предположениях, было доказано А. Пуанкаре). Тогда Брауэр еще не видел взаимосвязи между этими двумя теоремами. Одно замечание в письме к Ж. Адамару показывает, что эта идея пришла ему в голову в процессе их переписки. Возможно, именно Адамар указал Брауэру на приоритет Пуанкаре в доказательстве теоремы о векторных полях на сфере» [III.139, с. 495].



Л. Э. Я. Брауэр (1881–1966)

Лёйтзен Эгберт Ян Брауэр был профессором Амстердамского университета с 1909 по 1951 г., членом Парижской академии наук и Лондонского Королевского общества. Большинство своих топологических результатов Брауэр получил в 1909—1913 гг., дав строгое топологически инвариантное определение размерности, создав комбинаторную топологию полиэдров, доказав теоремы о гомотопической классификации отображений, о существовании неподвижной точки и т. д. Внес фундаментальный вклад в логические основания математики и создал интуиционистскую школу.

Фрейденталь также замечает: «По сравнению с революционными методами Брауэра методы Адамара были вполне традиционными, но помощь Адамара в рождении идей Брауэра заведомо более походила на помощь повивальной бабки, чем на помощь зрителя» [III.139, с. 501].

§ 13.5. Неравенства Гальярдо—Ниренберга

Известное изречение о том, что все новое — это хорошо забытое старое, применимо и к одному из результатов Адамара. В четвертой части своей статьи об упругих пластинах [I.145] (1908) Адамар доказал неравенство

$$\max_{0\leqslant x\leqslant a}|u(x)|^{2+q}\leqslant 2^{2+q}\int_0^a|u'(t)|^2\,dt\int_0^a|u(t)|^q\,dt \tag{13.11}$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции u на отрезке $[0,\, a]$, которая обращается в нуль по крайней мере в одной точке этого отрезка[1], и для любого $q > 0$. Именно неравенство (13.11) мы имели в виду, когда в § 12.2 описывали новый метод решения вариационных задач, предложенный Адамаром. Неравенство (13.11) было получено как частный случай следующей леммы.

Пусть f — неотрицательная возрастающая функция на положительной полуоси, и пусть

$$A = \int_0^a f(|u(t)|)\, dt, \qquad B = \int_0^a |u'(t)|^2\, dt.$$

Если функция u непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,\, a]$ и обращается в нуль по крайней мере в одной точке этого отрезка, то

$$|u(x)| \leqslant 2C \quad \text{при всех} \quad x \in [0,\, a],$$

где C — неотрицательное решение уравнения

$$C^2 f(C) = AB.$$

Предложенное Адамаром доказательство этой леммы занимает всего лишь несколько строк. Пусть значение $x \in [0,\, a]$ таково, что $|u(x)| > C$, и пусть

$$M(C) = \{t \in [0,\, a] : |u(x)| > C\}.$$

Из определения интеграла A следует, что

$$f(C) \operatorname{mes} M(C) \leqslant A.$$

Так как функция $|u|$ обращается в нуль в некоторой точке отрезка $[0,\, a]$, она принимает значение C. Применяя формулу Ньютона—Лейбница к положительной части $(|u| - C)_+$ функции $|u| - C$, получаем

$$|u(x)| - C \leqslant \int_0^a |(|u(t)| - C)'_+|\, dt = \int_{M(C)} |u'(t)|\, dt.$$

Из неравенства Коши следует, что последний интеграл не превосходит

$$(B \operatorname{mes} M(C))^{1/2},$$

и, таким образом, мы приходим к оценке

$$|u(x)| \leqslant C + \left(\frac{AB}{f(C)}\right)^{1/2}. \tag{13.12}$$

Чтобы завершить доказательство, следует использовать определение величины C.

Неравенство (13.11) и являющееся его обобщением неравенство (13.12) остались незамеченными. В 1941 г. Сёкефальви-Надь вывел неравенство (13.11) с наилучшей константой $(1 + q/2)^2$ вместе с другими неравенствами аналогичного характера [III.387], не зная о работе Адамара.

[1] Последнее условие в формулировке Адамара опущено, но используется в доказательстве.

В своем самом общем виде многомерные версии неравенства (13.11), или, как их часто называют, неравенства Гальярдо—Ниренберга, были доказаны независимо Гальярдо и Ниренбергом [III.141], [III.294] в 1959 г. Они описывают допустимые значения показателей m, l, p, q, r, θ в неравенстве

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant m} |D^\alpha u(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant c\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant l} |D^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{\theta/p} \left(\int_\Omega |u(x)|^r\,dx\right)^{(1-\theta)/r},$$

где Ω — некоторая область в $\mathbb{R}^n$, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ и α — мультииндекс $(\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Такие оценки, дающие информацию о производных промежуточных порядков, когда свойства функции и ее производных до некоторого порядка известны, часто используются в теории краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Гораздо более ранняя работа Адамара «О некоторых свойствах траекторий в динамике» [I.48], за которую он получил премию Бордена, содержит следующую лемму, принадлежащую к тому же кругу идей.

Лемма. *Если функция $V(t)$ стремится к пределу при $t \to \infty$ и если все ее производные до $(n+1)$-го порядка включительно существуют и остаются ограниченными, то первые n из них стремятся к нулю.*

Вот доказательство этой леммы, данное Адамаром [I.48].

Ограничимся для простоты первой производной. Требуется показать, что при достаточно больших t абсолютная величина этой производной меньше произвольного заданного числа ε.

Пусть l — произвольно выбранное число. В множестве значений t не может существовать бесконечного числа интервалов длины больше l, на которых величина $|dV/dt|$ больше $\varepsilon/2$, ибо на таком интервале функция V изменялась бы больше чем на $l\varepsilon/2$, что не может происходить бесконечно часто, так как V стремится к пределу. Со временем такие интервалы перестают встречаться, и модуль производной dV/dt будет явно меньше чем ε, если мы выберем в качестве l такое число, которое при умножении его на верхний предел величины $|d^2V/dt^2|$ даст значение меньше $\varepsilon/2$.

То же свойство дифференцируемых функций было открыто и использовано независимо Кнезером в 1897 г. в статье о движении в окрестности точки неустойчивого равновесия [III.210]. Лемма Адамара—Кнезера была также доказана Литтлвудом, который использовал ее для вывода следующей тауберовой теоремы о степенных рядах. Если

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n \to s \quad \text{при} \quad x \to 1-$$

и если $a_n = O(n^{-1})$, то

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n = s.$$

Это было доказано Литтлвудом в 1911 г.; более слабая теорема такого рода, в которой $a_n = o(n^{-1})$, была впервые доказана Таубером в 1897 г. Приведенная выше лемма дважды встречается в книге Литтлвуда «Математическая смесь» с примечанием: «Но, увы, эта теорема не носит имя Дж. Э. Литтлвуда, хотя мое повторное открытие ее стало важным моментом в моей карьере» [III.246, с. 36]. Доказательство Литтлвуда было схематичным, но по существу таким же, как доказательство Адамара. Еще одно примечание Литтлвуда: «...Без этой теоремы мне никогда не удалось бы вывести главную теорему. (Теорема о производной была в действительности известна, но „погребена“ в работе Адамара по волнам.)»[1] [III.246, с. 83].

Два года спустя Харди и Литтлвуд в обширной статье о степенных рядах и рядах Дирихле [III.166] использовали следующий результат: если функции $|f|$ и $|f''|$ имеют положительные возрастающие мажоранты φ и ψ, то $|f'| = O(\sqrt{\varphi\psi})$.

Дальнейшая история леммы Адамара—Кнезера связана с именем Э. Ландау [III.224], который доказал, что из неравенств $|f(x)| \leqslant M$, $|f''(x)| \leqslant N$, выполняющихся на отрезке I длины $|I| \geqslant 2\sqrt{M/N}$, следует неравенство

$$\sup|f'| \leqslant 2\sqrt{MN}, \tag{13.13}$$

где 2 — наилучшая константа.

В 1914 г. Адамар ответил на эту работу Ландау в своей статье [I.190], в которой, имея в виду возможные приложения к динамике, он рассмотрел случай, когда $|I| < 2\sqrt{M/N}$. Адамар также доказал, что для функций, заданных на произвольном отрезке I, выполняется либо неравенство

$$\sup_I |f'| < c_1 \left(\int_I f(x)^2\,dx \right)^{(l-1)/(2l+1)} \sup_I |f^{(l)}|^{1/(2l+1)},$$

либо неравенство

$$\sup_I |f'| < c_2 \left(\frac{1}{|I|} \int_I f(x)^2\,dx \right)^{1/2},$$

где c_1, c_2 — явные абсолютные константы.

В 1938 г. Колмогоров ([III.213], [III.214]) получил следующую оценку с наилучшей возможной константой:

$$\sup|f^{(m)}| \leqslant \frac{t_{l-m}}{t_l^{1-m/l}} \sup|f|^{1-m/l} \sup|f^{(l)}|^{m/l},$$

где f — функция на $\mathbb{R}$, $m < l$ и

$$t_l = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p(l+1)}}{(2p+1)^{l+1}}.$$

Неравенства типа (13.13) и их обобщения обсуждаются в книгах Харди, Литтлвуда и Пойа [III.167], а также Беккенбаха и Беллмана [III.22] под одним

[1] Это ошибка. На самом деле теорема содержится в работе Адамара по динамическим траекториям.

и тем же заголовком «Неравенства». Если не интересоваться наилучшими константами, то эти неравенства можно получить как частные случаи упомянутых выше теорем Гальярдо и Ниренберга.

§ 13.6. Статьи о марковских цепях

Работы Адамара [I.265], [I.292], так же как и статья [I.313], написанная им в соавторстве с Фреше, посвящены теории вероятностей. В работах [I.265], [I.292] Адамар исследовал задачу о тасовании карт, которую можно описать следующим образом.

Во время карточной игры (без блефования) изменения в колоде карт носят случайный характер. Пусть $p_{ij}(m)$ — условная вероятность такого исхода: ровно за m шагов система переходит из состояния i в состояние j. Требуется доказать существование предела последовательности $\{p_{ij}(m)\}_{m=1}^{\infty}$ и вычислить этот предел.

Эта задача была решена Пуанкаре в [III.320, с. 301–313] с помощью остроумного, но сложного метода. Пуанкаре показал, что предел, о котором идет речь, равен $1/N!$, где N — число карт в колоде. Результат Пуанкаре верен, только если $p_{ij}(m) > 0$ при любых i, j и достаточно большом m.

В статье [I.265] (1927) Адамар предложил более простой метод решения задачи о тасовании карт и рассмотрел противоположный случай, который он назвал сингулярным, а именно случай, когда при $i \neq j$ существуют такие состояния, что $p_{ij}(m) = 0$ начиная с некоторого m.

Ни Адамар, ни Пуанкаре до него не знали о фундаментальной работе А. А. Маркова (1907). Судя по ссылке в статье [I.292], внимание Адамара к работе Маркова привлек Пойа. Марков рассматривал последовательность из r случайных переменных, представляющих исход r испытаний (в случае тасования карт $r = N!$). Он предполагал, что исход любого испытания зависит только от исхода непосредственно предшествующего испытания. Такие последовательности случайных испытаний называются марковскими цепями. Так как тасование карт — один из примеров марковских цепей, результат Пуанкаре следует из общих теорем Маркова, который, кроме того, рассматривал не только регулярный случай.

Однако метод Адамара оказался новым и полезным. В своей книге [III.136] Фреше изложил этот метод и описал его дальнейшее развитие Колмогоровым. Фреше писал:

«Адамар — первый, кто применил для задачи о вероятностях в цепи прямой метод, позволяющий ему использовать исключительно язык теории вероятностей и избегать каких-либо заимствований из алгебраических теорий. Метод Адамара, который он применил к задаче о тасовании карт, может быть непосредственно обобщен на случай задачи Маркова с условием

$$\sum_{i} p_{ik} = 1. \tag{13.14}$$

Андрей Андреевич Марков (1856–1922) работал в Санкт-Петербургском университете. Его основные результаты — в теории чисел, теории вероятностей и математическом анализе. Цепи Маркова, марковские процессы, неравенство Маркова для многочленов получили свое название в его честь.

Метод Адамара позволил ему получить результаты, которые до того не удавалось получить алгебраическим методом и которые показывают различие между достоверными (с вероятностью, равной 1) свойствами вариаций рассматриваемой системы и строго вероятностными свойствами.

Колмогоров, вдохновленный методом Адамара, сумел модифицировать этот метод так, чтобы распространить его на случай, когда условие (13.14) не выполняется и поэтому требуются важные и неочевидные обобщения рассуждений Адамара».

В работах [I.265] и [I.292] Адамар рассмотрел итерации случайного отображения интервала (a, b) на себя, дополнив только что появившуюся работу Хостинского. Адамар заметил аналогию между исследованием предельного распределения в рассмотренной им задаче и эргодическими проблемами статистической механики.

Эти работы Адамара (1927–1928) появились незадолго до того, как в теории марковских процессов были достигнуты значительные успехи, связанные с именами Колмогорова, Фреше, П. Леви, Феллера и других. Поль Леви писал:

«Адамар предчувствовал появление этих замечательных работ. Во всяком случае, нет никаких сомнений в том, что он сознавал важность эргодического принципа в теории вероятностей и статистической механике; воспоминания о наших беседах того времени позволяют мне утверждать это» [II.37, с. 18].

Глава 14

Теория упругости и гидродинамика

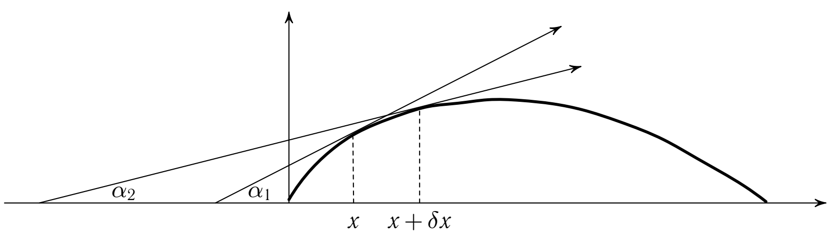
§ 14.1. Аспекты истории математической физики

«Еще в Нормальной школе, общаясь с товарищами-физиками, — отмечает Л. Шварц, — Адамар был увлечен прямыми связями математики с физикой. Он поддерживал прекрасные отношения с Дюэмом, Ланжевеном и другими физиками и постоянно подчеркивал, сколь сильно эти контакты его вдохновляли» [II.5, с. 17].

Но заниматься математической физикой или, что в то время считалось более или менее тождественным, теорией уравнений в частных производных, Адамар начал в самые последние годы XIX в. Позднее он перенес в эту область центр тяжести своих исследований и продолжал разрабатывать ее до конца жизни. «Теория дифференциальных уравнений в частных производных находится в центре современной математики», — писал Адамар в своей статье о математических трудах Пуанкаре» [I.208, с. 388].

К тому времени, когда Адамар заинтересовался теорией уравнений в частных производных, она уже имела определенные успехи и интересную 150-летнюю историю. Об этом мы и собираемся коротко рассказать.

Дифференциальные уравнения в частных производных появились в 1740-е годы в работах Эйлера и Даламбера (см. [III.97], [III.122]). Например, Даламбер в 1747 г. вывел с помощью следующих рассуждений и проинтегрировал дифференциальное уравнение для колеблющейся струны.



Пусть струна, т. е. гибкая упругая нить, совершает малые поперечные колебания в плоскости страницы. Пусть $(x,\, u(x,\, t))$ — декартовы координаты произвольной точки струны в момент времени t, и пусть T — натяжение струны, которое предполагается постоянным. Сила, действующая на отрезке $[x,\, x+\delta x]$ струны в направлении, перпендикулярном оси абсцисс, равна

$$T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1 \simeq T(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = T\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta x,\, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,\, t)\Big),$$

Жан Лерон Даламбер
(1717–1783)

где углы α_1 и α_2 показаны на рисунке. По второму закону Ньютона (сила равна произведению массы на ускорение)

$$\rho\delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \simeq T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta x,\, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,\, t)\right),$$

где ρ — линейная плотность струны. Разделив обе части этого равенства на δx и совершив предельный переход при $\delta x \to 0$, мы придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \omega = \left(\frac{T}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{14.1}$$

Другое классическое уравнение математической физики

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{14.2}$$

появилось в 1755 г. в работе Эйлера о течении однородной несжимаемой жидкости, а частные решения эквивалентной системы

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

(называемой ныне системой Коши—Римана) были найдены еще Даламбером в 1747 г. Уравнение (14.2) и его трехмерное обобщение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{14.3}$$

позднее стали называть уравнением Лапласа.

Пьер Симон Лаплас (1749–1827)

Чтобы обосновать такое название, заметим, что Лаплас, развивая теорию гравитации, получил многие свойства решений уравнений (14.2) и (14.3). Решения уравнений Лапласа называются гармоническими функциями. Важность этого класса функций в случае двух независимых переменных обусловлена их связью с понятием аналитичности: в самом деле, действительная и мнимая части аналитической функции — гармонические функции.

Оба уравнения (14.2) и (14.3) часто записывают в виде $\Delta u = 0$, где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, определяемый формулой

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Уже упоминавшиеся в § 3.1 волновое уравнение и уравнение теплопроводности с помощью оператора Δ записываются в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta u = 0, \tag{14.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \omega^2 \Delta u = 0. \tag{14.5}$$

С одной стороны, оказывается, одно и то же уравнение может описывать различные физические процессы. Например, уравнению струны удовлетворяют сила тока и напряжение в электрических проводах, оно описывает продольные и крутильные колебания стержней, а также волновые процессы в жидкостях или газах. С другой стороны, существует много уравнений, возникающих при математическом моделировании физических явлений. Например, задача о прогибе тонких пластин приводит к бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 u = 0,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0.$$

Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается нелинейной системой уравнений Навье—Стокса, напряженно-деформированное состояние упругих тел — так называемой системой Ламе, а распространение электромагнитных волн — системой уравнений Максвелла.

Каждое из упомянутых дифференциальных уравнений изучалось в рамках той или иной физической дисциплины. Впрочем, некоторые общие принципы были установлены с самого начала, например, решения уравнений в частных производных зависят от произвольных функций меньшего числа переменных. Поэтому, чтобы выделить единственное решение, следовало добавить к уравнению начальные или граничные условия. Такие условия диктовались физическим смыслом. Например, уравнение колебаний бесконечной струны естественно рассматривать вместе с условиями

$$u(x,\, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\, 0) = g(x), \tag{14.6}$$

т. е. считать известными при $t = 0$ положение струны и скорость каждой ее точки. Подобные задачи нахождения решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих начальным условиям, носят имя Коши.

Если струна полубесконечная и для определенности координата x изменяется на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, то наряду с начальными условиями (14.6) при $x > 0$ разумно задать какую-нибудь информацию о движении ее конца. Так, условие $u(0,\, t) = 0$ означает, что конец струны закреплен, а равенство $(\partial u/\partial x)(0,\, t) = 0$ — что он свободен. Точно так же дело обстоит и с конечной струной (проектирующейся на отрезок оси абсцисс). Задачи такого рода раньше назывались смешанными. В настоящее время стал привычным также термин «начально-краевая задача».

В XIX в. появились первые постановки краевых задач для уравнения Лапласа в двумерной или трехмерной области Ω, ограниченной кривой или поверхностью $\partial\Omega$.

Математик-самоучка Грин, занимаясь изучением одной задачи электростатики, рассмотрел еще в 1828 г. так называемую первую краевую задачу, которую впоследствии стали называть задачей Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{14.7}$$

где функция φ задана. Так называемая вторая краевая задача для уравнения Лапласа возникает, когда на границе задана производная неизвестной функции по нормали:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичная нормаль к $\partial\Omega$ и

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i.$$

Эта задача была по существу сформулирована Кирхгофом в 1845 г., когда он изучал задачи электродинамики. Равенство $\partial u/\partial \nu = \varphi$ на $\partial\Omega$ получило название «краевое условие Неймана» в честь Карла Неймана, который подробно исследовал краевые задачи для уравнения Лапласа в своей книге [III.293] (1877).

В XVIII в. и начале XIX в. математиков интересовало главным образом нахождение явных решений задач математической физики. Общее решение уравнения (14.1) для колеблющейся струны было найдено Даламбером в 1747 г. в виде

$$u(x, t) = \varphi(x + \omega t) + \psi(x - \omega t),$$

где φ и ψ — произвольные функции одного переменного. Произвол в выборе функций φ и ψ можно исключить, если заданы начальные условия (14.6). Тогда решение задается формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + \omega t) - f(x - \omega t)] + \frac{1}{2} \int\limits_{x-\omega t}^{x+\omega t} g(\tau)\, d\tau.$$

Приблизительно в то же время (не позднее 1754 г.) Даниил Бернулли решил уравнение (14.1) при помощи тригонометрических рядов. В переписке между Эйлером и Даламбером завязался знаменитый спор о струне, к которому подключились Бернулли, Лагранж и другие математики[1]. Даламбер считал, что начальная форма струны может быть только аналитической кривой, а Эйлер — что любой непрерывной линией, которую можно начертить «свободным влечением руки». В 1753 г. Д. Бернулли провозгласил, что тригонометрический ряд представляет общее решение. Спор о струне сыграл важную роль в последующем прояснении понятия функциональной зависимости в XIX в. и предвосхитил четко поставленную уже в XX столетии проблему определения функционального пространства, в котором нужно искать решение.

Представления решений задачи Коши для уравнений распространения волн (14.4) и теплопроводности (14.5) были найдены С. Пуассоном. Он же получил явные решения задачи Дирихле (14.7) для круга и шара. Формулы Пуассона послужили прототипом для решения ряда других задач математической физики.

Грин ввел специальную функцию пары точек $g(P, Q)$ (названную впоследствии его именем), которая позволила ему записать в виде суммы двух интегралов решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = f \quad \text{в } \Omega, \qquad u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{14.8}$$

[1] См. разд. 1.3 в книге Боттацини [III.53] и ч. 1 в книге Лютцена [III.249].

Симеон-Дени Пуассон (1781–1840)

Функция Грина для оператора Лапласа в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,\ 3$, определяется равенствами

$$g(P,\ Q) = \frac{1}{2\pi} \log|P - Q| + h(P,\ Q) \quad \text{при } n = 2,$$
$$g(P,\ Q) = -\frac{1}{4\pi|P - Q|} + h(P,\ Q) \qquad \text{при } n = 3,$$

где h — функция, гармоническая по координатам каждой из точек P и Q, равная нулю при $P \in \partial\Omega$ или $Q \in \partial\Omega$. При помощи формулы Грина

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dQ = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu_Q} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_Q} \right) ds_Q, \tag{14.9}$$

где ν_Q — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке Q, а ds_Q — элемент длины контура или площади поверхности $\partial\Omega$ в точке Q, можно показать, что решение задачи (14.8) представимо в виде

$$u(P) = \int_{\Omega} g(P,\ Q) f(Q)\, dQ + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g(P,\ Q)}{\partial \nu_Q} \varphi(Q)\, ds_Q.$$

Для круга, шара и некоторых других специальных областей функцию Грина можно выписать явно[1].

В XIX в. был широко развит так называемый метод Фурье, позволявший выражать решения в виде рядов по собственным функциям дифференциальных операторов. Применения этого метода вызвали расцвет теории так называемых специальных функций. Последние заняли центральное положение в математическом анализе, и в их преобразованиях математики достигли виртуозного мастерства.

[1] Информацию о жизни Грина и о функции Грина см. в книге Каннелла [III.66] и популярных очерках Дж. Дж. Грея [III.158] и Граттана-Гиннеса [III.434].

Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830)

Несмотря на эти успехи, довольно рано выяснилась ограниченность попыток решать задачи математической физики явно. Например, тщетны были усилия представить в замкнутой форме решения краевых задач в более или менее произвольных областях даже для уравнения Лапласа. К концу XIX в. были разработаны методы доказательства разрешимости краевых задач для уравнения Лапласа (см. § 12.3).

Решение краевых задач для уравнений с переменными коэффициентами, естественно возникающих при описании физических процессов в неоднородных средах, также вызывало большие трудности. Здесь иногда удавалось добиться успеха при помощи замен переменных, позволявших сводить исходное уравнение к разрешимому в квадратурах. Это привело к идее классификации уравнений в частных производных второго порядка, которая была реализована П. Дюбуа-Реймоном в работе [III.111]. Так, были выделены три классических типа уравнений: эллиптический, параболический и гиперболический, — простейшими представителями которых являются уравнения Лапласа, теплопроводности и волновое.

Уравнение

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x,\, y,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{14.10}$$

где a, b, c — функции переменных x, y, относится к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу в зависимости от выполнения условий

$$b^2 - ac < 0, \quad b^2 - ac > 0, \quad b^2 - ac = 0.$$

Поль Дюбуа-Реймон
(1831–1899)

При помощи невырожденной замены независимых переменных $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ уравнение (14.10) каждого из указанных типов можно привести к одной из трех канонических форм:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad \text{(эллиптическое уравнение),}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad \text{(гиперболическое уравнение),}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + f\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad \text{(параболическое уравнение).}$$

Обобщение этих трех типов уравнений на случай m независимых переменных производится следующим образом. Уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F(x, u, \operatorname{grad} u) = 0,$$

где grad означает градиент, имеет эллиптический тип в точке x, если все собственные значения квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \xi_i \xi_j$$

отличны от нуля и имеют один и тот же знак. Если знак одного из собственных значений противоположен знаку остальных, то такое уравнение гиперболического типа. Если все собственные значения, за исключением одного, равного нулю, имеют один знак, то уравнение параболического типа.

Общие свойства дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными во многом зависят от понятий характеристической поверхности при $m \geqslant 3$ и характеристической кривой при $m = 2$, которые также называются характеристиками. Характеристика — это $(m-1)$-мерная поверхность S, определяемая уравнением $\mathcal{F}(x) = \mathrm{const}$, причем $\operatorname{grad} \mathcal{F} \neq 0$ на S, а функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_j} = 0.$$

Отличительная особенность характеристик состоит в том, что на них невозможно произвольно задать данные Коши для решения. У эллиптического оператора нет ни одной (действительной) характеристики, в то время как у гиперболического оператора второго порядка от двух переменных имеется два семейства действительных характеристик, а у параболического оператора — одно семейство. Понятие характеристики существенно использовалось Б. Риманом [III.343], получившим в 1860 г. представление решения задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Сам термин «характеристика» возник впервые в работах Г. Монжа (1807), который разработал геометрическую теорию уравнения

$$F\left(x,\, y,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x},\, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Ранее Лагранж показал, что это уравнение можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; до Лагранжа это было известно только для уравнений, линейных по производным. Прогресс в теории характеристик был достигнут благодаря работам Дюбуа-Реймона, Бэклунда, Ли, Гурса и других. Теоретико-групповой подход Софуса Ли позволил ему унифицировать различные известные методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных[1].

В заключение этого беглого обзора упомянем еще об одном обнаруженном в XIX в. фундаментальном свойстве весьма общих линейных и нелинейных уравнений в частных производных любого порядка, коэффициенты которых являются аналитическими функциями. Мы имеем в виду знаменитую теорему Коши—Ковалевской о существовании аналитического решения задачи Коши с данными на нехарактеристической поверхности. В дальнейшем мы еще встретимся с этой теоремой и расскажем, как Адамар исправил некоторые заблуждения, связанные с этим универсальным результатом.

[1] Относительно истории дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных в XVIII и XIX веках см. [III.98].

Виктор Бэклунд (1845–1922)

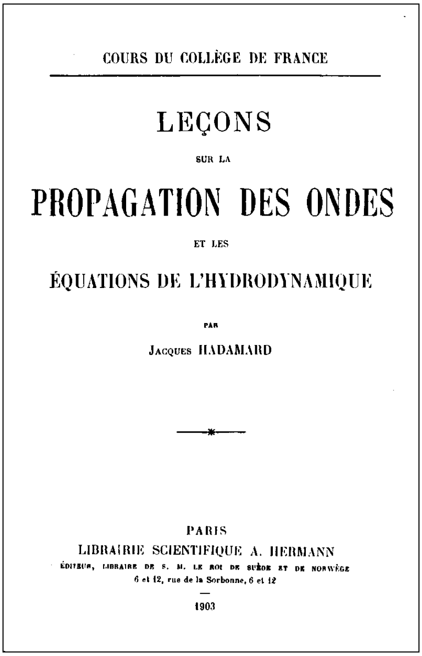
Софус Ли (1842–1899)

§ 14.2. Лекции о распространении волн

Книга «Лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики» [I.109] была издана в Париже в 1903 г. и представляла собой расширенное изложение курса, прочитанного Адамаром в 1898–99 и 1899–1900 гг. в Коллеж де Франс (краткая сводка результатов появилась в его работе «О распространении волн» [I.81], 1901 г.). «В основном я предполагал исследовать, как влияют граничные условия на движение жидкости», — пишет Адамар в предисловии.

Глава 1 этой весьма объемной (375 страниц) книги посвящена доказательству разрешимости основной краевой задачи гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, т. е. задачи Неймана для гармонических функций, когда на границе области задана производная решения по нормали. Искомая гармоническая функция представляет собой потенциал скоростей безвихревого стационарного течения[1], а краевое условие означает задание нормальной компоненты скорости потока. По-видимому, этот материал был включен в книгу в связи со злободневностью темы: только что появились важные работы Пуанкаре, Ляпунова и Стеклова, посвященные обоснованию методов теории потенциала. Изложение Адамара во многом следует статье Стеклова «Общие методы решения фундаментальных проблем математической физики» [III.375]. Хотя появление задачи Неймана для

[1] Безвихревым называется такое течение жидкости, что если обозначить через V вектор скорости, то вектор вихря $\operatorname{curl} V$ равен нулю. Если течение безвихревое, то существует такая скалярная функция (называемая потенциалом скоростей) Φ, что $V = \operatorname{grad}\Phi$. Для несжимаемой жидкости, кроме того, $\operatorname{div} V = 0$, откуда следует гармоничность потенциала скоростей.



COURS DU COLLÈGE DE FRANCE

LEÇONS

SUR LA

PROPAGATION DES ONDES

ET LES

ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

PAR

Jacques HADAMARD

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE
6 et 12, rue de la Sorbonne, 6 et 12

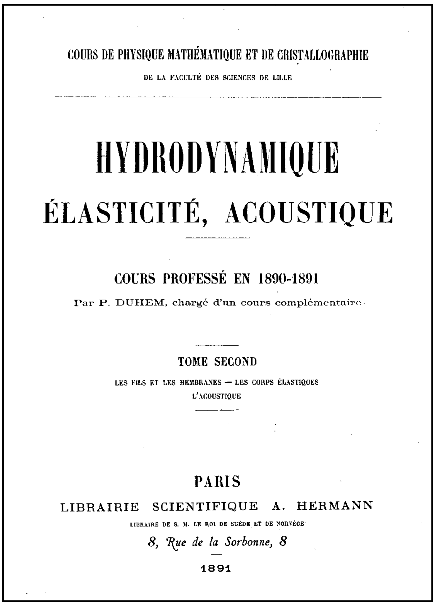
1903

уравнения Лапласа на страницах книги об уравнениях гидродинамики представляется естественным, все же первая глава стоит в стороне от основной тематики книги, связанной с неустановившимися процессами.

В гл. 2 Адамар рассматривает с «кинематической точки зрения» некоторые общие вопросы распространения волн в деформируемой среде. История этой проблемы в XIX в. чрезвычайно запутанна, поскольку многие результаты неоднократно переоткрывались. Динамика разрывов физических характеристик газа, распространяющегося прямолинейно в цилиндре с подвижными основаниями, подробно изучалась Б. Риманом в статье [III.343] (1860). Работа Римана, как и посвященные явлениям той же природы статьи Н. Ренкина [III.337] и Э. Кристоффеля [III.80], некоторое время не привлекала внимания. Эти исследования не были известны и Гюгонио, который в 1885 г. построил общую теорию одномерных движений деформируемых сред и в частности передоказал значительную часть результатов Римана. Две части статьи Гюгонио вышли из печати в 1887 и 1889 г. [III.183], уже после его смерти.

Внимание Адамара к статьям Гюгонио было привлечено лекциями по гидродинамике, теории упругости и акустике, прочитанными П. Дюэмом в Лилле и опубликованными в 1891 г. [III.114]. Важную роль сыграли также беседы с Дюэмом в Бордо.

Говоря о волнах, Адамар, как и Гюгонио до него, имел в виду волны, распространяющиеся в среде возмущения с резким передним фронтом. Основное внимание в гл. 2 обсуждаемой книги Адамара обращено на понятие совместности двух движений, появившееся еще у Римана и играющее важную роль в работе


COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET DE CRISTALLOGRAPHIE
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

HYDRODYNAMIQUE
ÉLASTICITÉ, ACOUSTIQUE

COURS PROFESSÉ EN 1890-1891
Par P. DUHEM, chargé d'un cours complémentaire

TOME SECOND
LES FILS ET LES MEMBRANES — LES CORPS ÉLASTIQUES
L'ACOUSTIQUE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
8, Rue de la Sorbonne, 8
1891

Лекции Дюэма в Лилле

Гюгонио. Речь идет о движении возмущенной среды за фронтом и невозмущенной — перед фронтом.

«Я должен был принять во внимание факты чисто кинематического характера, — указывает Адамар, — отделив их от тех, которые зависят от динамических свойств движения. Это разделение, как и следовало ожидать, прояснило многие вопросы. В частности, благодаря ему появилось геометрическое представление процесса. Оно в свою очередь позволило сделать более понятной аналогию, существующую между волнами в понимании Гюгонио и теми волнами, которые рассматриваются в теории колебаний» [I.109, с. viii].

Для того чтобы дать представление о результатах, комментируемых в этом отрывке, остановимся на некоторых начальных сведениях из гидродинамики. Движение деформируемой среды (например, жидкости или газа) можно считать известным, если определено положение каждой ее частицы в интересующие нас моменты времени t. Пусть координаты (x_1, x_2, x_3) частицы заданы как функции так называемых лагранжевых переменных (a_1, a_2, a_3) и времени t, где (a_1, a_2, a_3) — координаты той же частицы в начальный момент.

Предположим, что волна распространяется в среде так, что ее фронт $F(t)$ — гладкая поверхность, определяемая уравнением $f(a_1, a_2, a_3, t) = 0$. Здесь f — такая гладкая функция лагранжевых координат, что

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial a_i}\right)^2 > 0 \quad \text{на} \quad F(t).$$

Тогда поверхность $F(t)$ делит среду на две части $\Omega_+(t)$ и $\Omega_-(t)$ (возмущенную и невозмущенную), определяемые соответственно неравенствами $f(a_1, a_2, a_3, t) > 0$ и $f(a_1, a_2, a_3, t) < 0$. Обозначим сужения функции $\varphi(a_1, a_2, a_3, t)$ на $\Omega_\pm(t)$ через $\varphi_\pm(a_1, a_2, a_3, t)$.

Те же обозначения сохраняются и для предельных значений φ_+ и φ_- на $F(t)$. Обозначим через $[\varphi]$ разность $\varphi_+ - \varphi_-$ этих предельных значений, т. е. скачок функции φ при переходе через волновой фронт.

В газовой динамике роль функции φ играют компоненты скорости $\mathbf{v}$, давление p, плотность ρ, температура T, а также их производные. Величины $\mathbf{v}$, p, ρ, T удовлетворяют некоторым интегральным соотношениям, вытекающим из основных физических законов движения газа. Если в окрестности некоторой точки упомянутые физические характеристики непрерывно дифференцируемы, то интегральные соотношения могут быть переписаны в форме дифференциальных уравнений. В случае разрывов $\mathbf{v}$, p, ρ, T из интегральных соотношений вытекают некоторые связи между скачками в точках поверхности $F(t)$. Эти связи называются условиями динамической совместности. В соответствии со сказанным ранее об общем понятии совместности двух движений здесь имеются в виду движения, характеризуемые величинами $\mathbf{v}_+$, p_+, ρ_+, T_+ и $\mathbf{v}_-$, p_-, ρ_-, T_-.

Поверхности $F(t)$, на которых по крайней мере одна из основных гидродинамических характеристик терпит разрыв, называются поверхностями сильного разрыва. При условии непрерывности всех упомянутых характеристик и наличии скачкообразного разрыва хотя бы одной из их частных производных первого порядка поверхность называют поверхностью слабого разрыва. Если фронт волны — поверхность слабого разрыва, то на нем появляются другие условия совместности — геометрические и кинематические. Они не зависят от уравнений движения среды и выводятся из чисто геометрических или кинематических рассмотрений. Тем самым эти условия совместности применимы к волнам в самых различных средах и следуют только из факта существования волны.

Понять, как возникают кинематические и динамические условия, нетрудно. Допустим, что функция $\varphi(a_1, a_2, a_3, t)$, о которой уже шла речь, непрерывна, но ее первые производные $\partial\varphi/\partial a_i$, $i = 1, 2, 3$, имеют скачки на поверхности $F(t)$. Будем считать функцию φ_+ продолженной на $\Omega_-(t)$ с сохранением ее непрерывности и непрерывности упомянутых производных. Аналогично продолжим φ_- на область $\Omega_+(t)$. Тогда в точках поверхности $F(t)$ выполняются три равенства:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}\right] = \frac{\partial\varphi_+}{\partial a_i} - \frac{\partial\varphi_-}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как на $F(t)$

$$(\varphi_+ - \varphi_-)(a_1, a_2, a_3, t) = 0,$$

отсюда следует, что градиенты функций f и $(\varphi_+ - \varphi_-)$ (по лагранжевым переменным) параллельны, т. е.

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial a_i}\right] = \lambda\frac{\partial f}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{на } F(t),$$

где λ — некоторая функция. Эти равенства и есть вышеупомянутые геометрические («тождественные» в терминологии Адамара) условия совместности на поверхности слабого разрыва.

Адамар первым проводит четкую классификацию условий совместности в зависимости от их геометрической, кинематической или динамической природы. Если у Гюгонио встречаются лишь условия совместности первого порядка, т. е. условия на скачки первых производных, то Адамар в гл. 2 книги намечает контуры общей теории геометрических и кинематических условий произвольного порядка, и в частности указывает выражения для скачков вторых и третьих производных, содержащих частные производные функции $f(a_1, a_2, a_3, t)$.

Развитая в гл. 2 теория служит основой для более конкретных исследований, проводимых далее в гл. 4 и 5 применительно к движению газа и в гл. 6 — к волнам в упругих телах. При этом условия совместности позволяют, не решая дифференциальных уравнений движения среды, получить значения некоторых ее параметров на поверхности фронта, например вычислить скорость распространения волны.

Короткая третья глава носит вспомогательный характер, в ней собраны общие сведения об уравнениях газовой динамики и соответствующих краевых условиях. Глава 4 «Прямолинейное движение газа» в основном посвящена изложению теории Римана—Гюгонио, относящейся к одномерному случаю, когда уравнения газодинамики могут быть проинтегрированы.

Трехмерные движения газа рассмотрены в гл. 5, причем сначала изучаются направление и скорость распространения разрывов второго порядка (волны ускорения). Адамар показывает, что такие волны не мешают сохранению циркуляции скорости, т. е. интеграла

$$\int_C v_1\,dx_1 + v_2\,dx_2 + v_3\,dx_3$$

по замкнутому контуру C, во время движения. Тем самым волны ускорения не влияют на вихреобразование в газе. Для ударных волн (волн скорости) — разрывов первого порядка — ситуация, согласно Адамару, совсем иная: в одном из приложений к книге он доказывает, что ударные волны могут инициировать вихри там, где их не было до прохождения фронта.

В гл. 6 Адамар изучает распространение волн в упругих телах при конечных деформациях. Дифференциальные уравнения динамики таких сред, записанные в перемещениях, образуют нелинейную гиперболическую систему второго порядка. Внутри среды распространяется волна, на фронте которой перемещения и их первые производные непрерывны, а вторые производные изменяются скачкообразно. Подставляя полученные в гл. 2 кинематические условия совместности второго порядка в упомянутую гиперболическую систему, Адамар приходит к задаче на собственные числа

$$A(\nu)\lambda = c^2\lambda.$$

Квадрат скорости распространения c играет роль собственного числа, а нормаль к волновому фронту λ — роль собственного вектора. Матрица $A(\nu)$ называется акустическим тензором тела в направлении распространения ν и определяется в каждой точке тела и для каждого фиксированного вектора ν упругими характеристиками материала и напряженным состоянием. Компоненты тензора $A(\nu)$

имеют вид

$$a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\,\nu_\alpha\nu_\beta,$$

где x — произвольная точка тела Ω, ν_1, ν_2, ν_3 — компоненты вектора ν, а $a_{ij}^{\alpha\beta}$ — непрерывные функции в замыкании $\overline{\Omega}$. В соответствии с классической теорией упругости предполагается выполненным условие $a_{ij}^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}^{ij}(x)$, которое обеспечивает симметрию матрицы $A(\nu)$. Неотрицательность этой матрицы равносильна существованию волны.

Теорема, приведенная в гл. 6 книги Адамара, утверждает возможность распространения волны в теле Ω для любого направления ν, если выполнено так называемое условие инфинитезимальной устойчивости

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha,\beta,i,j=1}^{3} a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\,\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\beta}\,dx \geqslant 0,$$

где u_1, u_2, u_3 — произвольные вещественные гладкие функции в области Ω, которые обращаются в нуль вблизи границы.

Двумя годами позже, в 1905 г., Дюэм [III.115] отметил недостаточность рассуждений, приведенных Адамаром для доказательства этого факта. По-видимому, первый строгий вывод был найден только в 1946 г. К. Каттанео [III.72]. Почти через 20 лет Г. Фикера нашел простое доказательство, используя технику, применяемую в общей теории эллиптических систем уравнений в частных производных [III.131]. Он же показал на примере, что неотрицательность матрицы $A(\nu)$, будучи достаточной для инфинитезимальной устойчивости в случае однородного тела, т. е. $a_{ij}^{\alpha\beta} = \mathrm{const}$, не является таковой в общем случае [III.130].

Было бы преждевременно закончить разговор о гл. 6 «Лекций о распространении волн», не упомянув об активной работе, проведенной в той же области и в том же круге идей уже во второй половине XX века. Вот что пишет в этой связи американский механик К. Трусделл в статье, посвященной Адамару в связи с «шестидесятилетием его великого трактата „Лекции о распространении волн“»:

«После классических работ Кристоффеля, Гюгонио, Адамара и Дюэма о волнах в упругих материалах могло показаться, что сделать остается совсем немного. Но это неверно. Как и для большинства разделов механики, в последнее десятилетие была осознана необходимость вернуться к теме еще раз, не только с целью освободить систему понятий от затянувшейся линеаризации и поместить ее более прочно в основание современной механики, но также для того, чтобы вывести из нее специфические предсказания, удовлетворяющие современной потребности в контакте теории и правильно понятого эксперимента» [III.401, с. 263].

Трусделл перечислил результаты, полученные Адамаром в общей механике сплошных сред:

1) общая лемма (наполовину предугаданная Максвеллом), в силу которой совместность в целом отличается от совместности отдельных кинематически определенных волн;

2) осознание уровней совместности: геометрического, кинематического, динамического, энергетического, материального (хотя в книге отчетливо рассмотрены только два первых уровня);

3) классификация кинематически сингулярных поверхностей и построение общей теории, включая обзор условий более высокого порядка;

4) вычисления точных скоростей волн при конечной упругой деформации и доказательство, что они все действительные и ненулевые, если и только если уравнения равновесия для конкретной деформации строго эллиптические;

5) доказательство того, что слабо сингулярные поверхности в газовой динамике не нарушают свойство сохранения циркуляции и, в частности, такие волны не нарушают теорему Лагранжа—Коши о потенциале скорости;

6) доказательство того, что косая искривленная ударная волна в газе порождает завихренность;

7) первое строгое определение и анализ устойчивости в конечной упругой деформации и доказательство того, что в состоянии устойчивого равновесия должно выполняться неравенство, определяющее сильную эллиптичность, если «$\geqslant$» заменить на «$>$».

Далее Трусделл продолжает:

«Все эти результаты содержатся в его книге „Распространение волн“. Результат № 4 подробно разъяснен в моей статье в „Archive“. Результат № 7, по-видимому, не был замечен до 1952 г.; на него начали обращать внимание в современной американской литературе по механике сплошных сред, и во второй статье, подготовленной для „Handbuch“ и находящейся в печати, дано новое доказательство, восполняющее пробел, отмеченный Дюэмом в рассуждениях Адамара. Когда я в 1957 г. по пути в Берлин, где мне предстояло прочитать лекцию, в которой частично излагалась работа Адамара по теории упругости, спросил его о результате № 7, он сказал, что забыл эту работу» ([II.4, с. 90]).

Заметим, кроме того, что условие строгой положительности тензора $A(\nu)$, часто называемое условием Лежандра—Адамара, также оказалось полезным в математике — в современной теории квазилинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными. Будучи менее ограничительным, чем обычное условие эллиптичности, оно более естественно в некотором круге задач (см., например, [III.148], [III.285]).

Заключительная глава 7 книги «Лекции о распространении волн» посвящена общей теории характеристик для гиперболического уравнения второго порядка

$$\sum_{i,k} a_{ik}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} + a = 0,$$

где a_{ik} и a — функции от x, $z(x)$ и $\operatorname{grad} z(x)$. Позднее Адамар избрал главу 7 в качестве исходного пункта своего знаменитого исследования задачи Коши, которое мы рассмотрим в § 15.4. В предисловии к своей книге «Лекции о задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений» [I.233] (1923) Адамар пишет: «...настоящую монографию можно рассматривать как продолжение моих „Лекций о распространении волн и уравнениях гидродинамики“, заменяющую бóльшую часть последней главы, которая, впрочем, была лишь попыткой показать трудности задачи, решение которой я теперь в состоянии дать».

В первом из четырех примечаний в конце книги о распространении волн Адамар сделал важное замечание о единственности решения задачи Коши в классе дифференцируемых функций. Это замечание было инспирировано теоремой Хольмгрена (1901) [III.178] для линейных уравнений и систем с голоморфными коэффициентами. Адамар заметил, что доказательство единственности решения для общего нелинейного уравнения

$$F\Big(x,\, z,\, \Big\{\frac{\partial z}{\partial x_i}\Big\}_{i=1}^{n},\, \Big\{\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}\Big\}_{i,k=1}^{n}\Big) = 0$$

может быть сведено к доказательству единственности решения для линейных уравнений с достаточно гладкими коэффициентами. Впоследствии много усилий было направлено на нахождение условий единственности решений задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с неголоморфными коэффициентами. Историю этих исследований см., например, в разделе I очерка Л. Ниренберга [III.295].

§ 14.3. Статья о равновесии пластин

В 1907 г. Адамар представил в Академию наук на соискание премии Вайяна работу о равновесии тонких упругих пластин, зажатых по краю [I.145]. Математическая постановка задачи заключается в следующем. Пусть Ω — область, вырезанная в пластине ее серединной плоскостью, и $\partial\Omega$ — гладкий контур, ограничивающий Ω. Требуется найти нормальное смещение $w(x, y)$ точки $(x, y) \in \Omega$ под действием нагрузки $q(x, y)$. Функция w удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 w(x, y) = q(x, y) \quad \text{в } \Omega, \tag{14.11}$$

впервые полученному Софи Жермен в 1811 г. (мы опускаем постоянный множитель перед $q(x, y)$, зависящий от толщины пластины и ее материала). Если боковая поверхность пластины жестко закреплена, то на $\partial\Omega$ выполняются краевые условия:

$$w(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial w(x, y)}{\partial \nu} = 0, \tag{14.12}$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Академия наук Франции выдвинула на конкурс проблему: усовершенствовать существенным образом анализ краевой задачи (14.11), (14.12) и специально изучить случай прямоугольного контура. Следует иметь в виду, что краевые задачи, описывающие равновесие пластин, допускают явное решение в редчайших случаях. Таким исключением является круглая пластина, которая была рассмотрена Э. Матье [III.270] и М. Леви [III.238], получившими представления решений в виде рядов.

В 1896 году Э. Альманси [III.9] и Дж. Лауричелла [III.228] одновременно получили решение в виде определенного интеграла, но лишь для круглой пластины с зажатым краем. Они заметили, что решение уравнения $\Delta^2 w = 0$ в круге

Джузеппе Лауричелла (1867–1913)

$x^2 + y^2 < R^2$ допускает представление

$$w(x, y) = U(x, y)(x^2 + y^2 - R^2) + V(x, y),$$

где U и V — гармонические функции, и тем самым свели задачу о круглой зажатой пластине к двум задачам Дирихле для уравнения Лапласа. Две другие классические задачи о равновесии круглой пластины соответствуют свободному и свободно опертому краю. Обе они были решены Адамаром в первой работе по теории пластин, опубликованной в 1901 г. [I.85]. Он показал, что при помощи квадратур обе задачи также сводятся к задаче Дирихле для гармонических функций, несмотря на то, что здесь условия на контуре выглядят значительно сложнее по сравнению с пластиной, зажатой по краю. Результат был новым, и его вывод технически интересен, но все же работа 1901 г. была всего лишь дебютом в новой для Адамара области. Свою настоящую силу он продемонстрировал через шесть лет, обратясь к задаче (14.11), (14.12) для пластин произвольной формы.

В состав жюри конкурса на соискание премии Вайяна входили Жордан, Аппель, Юмбер, Морис Леви, Дарбу и Буссинеск. Соискатели представили двенадцать статей. Рецензентами стали Пуанкаре, Пикар и Пенлеве. Решением жюри три четверти премии были присуждены Адамару, а остальная сумма была поровну поделена между Лауричеллой, Корном и Боджо. В отзыве Пенлеве о работе Адамара говорилось, что, хотя статья содержит достаточно много важных результатов, она представляет еще бóльшую ценность благодаря следствиям, которые можно надеяться из нее вывести [III.300]. Сказанное тем более интересно, что сейчас, по прошествии многих лет, у нас имеется возможность понять полученные Адамаром результаты и оценить, оправдались ли ожидания жюри.

Артур Корн (1870–1945)

Основным объектом обстоятельного исследования Адамара в обсуждаемой статье (она занимает 128 страниц) является функция Грина краевой задачи (14.11), (14.12), иначе говоря, решение той же задачи, соответствующее нормальной нагрузке, сосредоточенной в произвольной точке области Ω. На современном языке функция Грина $G(P, Q)$, где P и Q — точки области Ω, есть решение, для которого $q(x, y) = \delta_Q(x, y)$, где (x, y) — декартовы координаты точки P, а δ_Q — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке Q. Адамар, конечно, пользовался другим определением (ведь до создания теории обобщенных функций оставалось еще около 30 лет), но оно было ничуть не хуже только что приведенного (см. определение функции Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа, приведенное в § 14.1). Однозначная разрешимость задачи (14.11), (14.12) может быть установлена различными методами; некоторые из них были известны уже в начале XX в. (например, метод граничных интегральных уравнений Фредгольма, которым Адамар и пользовался).

При помощи функции Грина мы можем представить прогиб пластины под действием произвольной нагрузки q в виде

$$w(P) = \int\limits_{\Omega} G(P, Q) q(Q)\, dQ,$$

редуцируя тем самым решение краевой задачи к вычислению интеграла по области. Однако найти явное выражение этой функции можно лишь для специальных областей. Например, в случае круга радиуса 1 справедливо представление

$$G(P, Q) = \frac{1}{8\pi} |P - Q|^2 \log\left|\frac{P - Q}{1 - \overline{Q}P}\right| - \frac{1}{16\pi}(|P - Q|^2 - |1 - \overline{Q}P|^2),$$

где P и Q понимаются как комплексные числа, а черта означает комплексное сопряжение. В случае области сколь-нибудь общей формы выписать функцию Грина нельзя, и даже сейчас нахождение хороших численных приближений $G(P, Q)$ при помощи компьютера — очень сложная, хотя и разрешимая задача.

В статье Адамара исследуется зависимость функции Грина от границы области. Правильнее было бы сказать «зависимость трех функций Грина», так как наряду с функцией $G(P, Q)$ Адамар рассматривает функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x, y) = q(x, y) \quad \text{в } \Omega.$$

Статья начинается с вывода «вариационных формул», которые впоследствии были названы именем автора. Эти формулы выражают главную часть изменения функции Грина, возникающего при малой деформации области. Доказательство несложно, и с точностью до несущественных технических подробностей может быть воспроизведено здесь. Ограничимся случаем функции Грина $g(P, Q)$ задачи Дирихле для оператора Лапласа (см. § 14.1), который был рассмотрен Адамаром еще в заметке 1903 г. [I.110].

Адамар предполагает, что в области Ω имеется другая область, Ω^*, ограниченная гладким контуром $\partial\Omega^*$. Последний зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ и аппроксимирует $\partial\Omega$ так, что направления нормалей в близких точках обоих контуров оказываются близкими. Обозначим через $g(P, Q)$ и $g^*(P, Q)$ функции Грина для Ω и Ω^*, где P и Q — фиксированные точки области Ω^*. Поскольку оператор $-\Delta$, примененный к функции Грина, дает дельта-функцию, то в силу формулы Грина (14.9) справедливо тождество

$$g(P, Q) - g^*(P, Q) = \int_{\Omega^*} (g^*(P, R)\Delta_R\, g(Q, R) - g(P, R)\Delta_R\, g^*(Q, R))\, dR.$$

Интегрируя выражение в правой части по частям и принимая во внимание нулевое граничное условие для функции g^* на $\partial\Omega^*$, получаем (см. формулу (14.9))

$$g(P, Q) - g^*(P, Q) = \int_{\partial\Omega^*} g(P, R)\frac{\partial g^*}{\partial \nu_R^*} g(Q, R)\, ds_R^*,$$

где ds_R^* — элемент длины дуги контура $\partial\Omega^*$ в точке R, а ν_R^* — внутренняя нормаль к $\partial\Omega^*$ в той же точке. Интеграл приближенно равен

$$\int_{\partial\Omega} g(P, R^*)\frac{\partial g}{\partial \nu_R} g(Q, R)\, ds_R,$$

где обозначения ds_R и ν_R имеют тот же самый смысл, как и прежде, а R^* — ближайшая к R точка границы $\partial\Omega^*$. Кроме того, $g(P, R) = 0$ при $R \in \partial\Omega$, так что

$$g(P, R^*) \simeq \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(P, R)\, \delta\nu_R,$$

где $\delta\nu_R$ — расстояние от R до $\partial\Omega^*$, которое можно считать линейно зависящим от ε. Таким образом, получаем

$$g(P, Q) - g^*(P, Q) \simeq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(P, R)\frac{\partial g}{\partial \nu_R}(Q, R)\, \delta\nu_R\, ds_R.$$

Переходя к главной части разности $g - g^*$, мы, наконец, находим вариационную формулу Адамара

$$\delta g(P,\,Q) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial g}{\partial \nu_R}(P,\,R)\frac{\partial g}{\partial \nu_R}(Q,\,R)\,\delta\nu_R\,ds_R.$$

Напомним, что g — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. В той же статье Адамар получил аналогичную вариационную формулу для функции Грина $\gamma(P,\,Q)$ задачи Неймана для оператора Лапласа, а также функцию Грина $G(P,\,Q)$ для задачи о пластине. В последнем случае с помощью немного более сложного доказательства Адамар приходит к формуле

$$\delta G(P,\,Q) = \int\limits_{\partial\Omega} \Delta_R G(P,\,R)\Delta_R G(Q,\,R)\,\delta\nu_R\,ds_R. \tag{14.13}$$

Из каждой из вариационных формул для g, γ и G Адамар легко получает нелинейные уравнения в функциональных производных — все уравнения имеют вид

$$\delta\psi(P,\,Q) = \int\limits_{\partial\Omega} \psi(P,\,R)\psi(Q,\,R)\,\delta\nu_R\,ds_R, \tag{14.14}$$

где ψ — одна из функций

$$\psi_1(P,\,Q) = \frac{\partial^2 g(P,\,Q)}{\partial\nu_P\,\partial\nu_Q}, \quad \psi_2(P,\,Q) = \frac{\partial^2 \gamma(P,\,Q)}{\partial s_P\,\partial s_Q}, \quad \psi_3(P,\,Q) = \Delta_P\Delta_Q G(P,\,Q).$$

Интегрирование уравнений (14.14) позволяет в принципе построить функцию ψ методом последовательных приближений для кривой $\partial\Omega$ при условии, что функция задана для некоторого начального контура. Однако возникает вопрос, зависит ли решение от способа, которым деформируется поверхность. Именно в этом и заключалась проблема полной интегрируемости уравнений (14.14), которую Адамар задал молодому Полю Леви (см. § 5.4).

В главах 2 и 3 своей книги [III.239] П. Леви назвал уравнение (14.14) «уравнением Адамара с функциональными производными» и подробно его исследовал. Он показал, что появление этого уравнения в анализе трех различных функций Грина отнюдь не случайно. Действительно, уравнение (14.14) — в некотором смысле единственное полностью интегрируемое уравнение вида

$$\delta\psi(P,\,Q) = \int\limits_{\partial\Omega} f[\psi(P,\,R),\,\psi(Q,\,R),\,\psi(P,\,Q),\,P,\,Q,\,R]\,\delta\nu_R\,ds_R.$$

Точнее, если это общее уравнение полностью интегрируемо, то заменой неизвестной функции оно может быть сведено к уравнению Адамара (14.14).

Результат П. Леви объясняет появление уравнения (14.14) в вариационных формулах для функций Грина в совершенно различных краевых задачах. Блок [III.42] показал, что функция

$$\psi(P,\,Q) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\xi}G(x,\,t,\,\xi,\,\tau),$$

где $P=(x,\,t)$, $Q=(\xi,\,\tau)$, а G — функция Грина задачи Дирихле для параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu$$

с переменными коэффициентами, удовлетворяет уравнению (14.14). В работе [I.204] Адамар получил аналогичный результат для возмущенного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0.$$

В трех статьях [III.201]–[III.203], опубликованных в 1921 г., Жюлиа нашел несколько вариационных формул для конформного отображения плоской области Ω на единичный круг: $\sigma\to f(\sigma)$, $f(0)=0$. Формулы Жюлиа тесно связаны с уравнением Адамара (14.14). Например, Жюлиа показал, что функция

$$\psi(\sigma,\,\tau)=\frac{-1}{\pi i}\frac{f'(\sigma)f'(\tau)}{(f(\sigma)+f(\tau))^2}$$

удовлетворяет аналогу уравнения (14.14)

$$\delta\psi(\sigma,\,\tau)=\int\limits_{\partial\Omega}\psi(\sigma,\,z)\psi(z,\,\tau)\,\delta z\,dz,$$

где бесконечно малые величины δz, dz могут быть выражены через ds и $\delta\nu$.

Расскажем также о некоторых следствиях из формулы (14.13), полученных Адамаром в [I.145]. На основании очевидного следствия

$$\delta G(P,\,P)=\int\limits_{\partial\Omega}(\Delta G(P,\,R))^2\,\delta\nu_R\,ds_R$$

из формулы (14.13) Адамар заключает, что функция Грина $G(P,\,P)$ возрастает, когда область расширяется. Сравнивая функцию $G(P,\,P)$ для области с той же функцией для круга, вписанного в эту область, Адамар приходит к неравенству $G(P,\,P)>0$ для любой гладкой области, априори не очевидному для функции Грина оператора четвертого порядка.

Переходим к обзору двух гипотез относительно функции Грина зажатой пластины. Еще в 1901 г. Томмазо Боджо высказал гипотезу о том, что функция Грина $G(P,\,Q)$ всегда положительна внутри области [III.44][1]. Эта гипотеза верна для единичного круга, в чем можно убедиться исходя из приведенной выше формулы для функции Грина на единичном круге и очевидного неравенства $\ln t\geqslant 1-t^{-1}$ при $0<t<1$, из которого следует, что

$$\log\left|\frac{P-Q}{1-\overline{Q}P}\right|\geqslant 1-\left|\frac{1-\overline{Q}P}{P-Q}\right|^2.$$

В работе [I.145] Адамар добавил еще одну «физически очевидную» гипотезу о том, что функция $G(P,\,Q)$ возрастает с увеличением области. Через год

[1] С тех пор многие авторы обсуждали эту гипотезу, называя ее гипотезой Адамара (сам Адамар ее так не называл, ссылаясь на Боджо).

в докладе «О некоторых интересных случаях бигармонической задачи» на Международном математическом конгрессе в Риме [I.151] Адамар останавливается и на гипотезе Боджо. «Боджо, который первым обратил внимание на физический смысл величины Γ_B^A, выдвинул на этом основании гипотезу, что эта величина всегда положительна. Несмотря на отсутствие строгого доказательства, справедливость этого предположения не вызывает сомнений для выпуклых областей» [I.406, с. 1299].

Адамар рассматривает также невыпуклую область, ограниченную улиткой Паскаля, которая получается из единичного круга под действием конформного отображения $\zeta = (z + \alpha)^2$, и приводит набросок доказательства положительности функции Грина $G(P, Q)$ при $\alpha \geqslant 1$. В этом докладе на конгрессе Адамар ссылается на необходимость некоторых дополнительных гипотез относительно области, так как функция Грина $G(P, Q)$ изменяет свой знак в случае кольца с большим отношением внешнего и внутреннего радиусов. В 1995 г. Энглиш и Петре показали, что функция $G(P, Q)$ не положительна для произвольного кольца [III.123].

Читателю, возможно, будет небезынтересно узнать, что гипотеза Боджо была опровергнута также и для выпуклых областей. Это произошло уже в 1948 г., когда американец Р. Даффин продемонстрировал знакопеременность функции Грина в случае закрепленной пластины, близкой к очень длинному прямоугольнику [III.112]. Его контрпример основан на том известном факте, что, вообще говоря, бигармоническая функция в полосе $x > 0$, $|y| < 1$, удовлетворяющая при $y = \mp 1$ и больших x однородным краевым условиям Дирихле, асимптотически при $x \to \infty$ ведет себя на вещественной оси как

$$C \exp(-\sigma x) \cos(\tau x - \varphi),$$

где σ, τ, φ и C — действительные константы, и, следовательно имеет бесконечно много перемен знака. Во введении к работе Даффин в свою очередь высказывает две гипотезы. Ему представляется вероятным, что знакопеременность функции Грина возникает для прямоугольника с отношением сторон больше приблизительно четырех и что, «с другой стороны, для квадратной пластины ответ на вопрос Адамара положителен. В пользу этого предположения говорит тот факт, что ответ положителен для круговой пластины».

В 1951 г. Гарабедян [III.143] показал, что функция Грина знакопеременна даже в случае эллипса $x^2 + \left(\frac{5}{3}y\right)^2 < 1$. Пусть Ω — такой эллипс, и пусть $G(P, Q) < 0$ для некоторых точек P, Q. Впишем в Ω область Ω^* так, чтобы выполнялись включения $P \in \Omega^*$ и $Q \in \partial\Omega^*$. Тогда $0 = G^*(P, Q) > G(P, Q)$, что противоречит гипотезе Адамара о монотонности функции Грина G. Через два года Лойнер [III.247] и Сегё [III.384] привели несколько примеров областей, ограниченных аналитическими кривыми, для которых функция Грина меняет знак.

В 1994 г. Шапиро и Тегмарк [III.362] заметили, что неположительность функции Грина $G(P, Q)$ для эллипса $\Omega = \{(x, y)\colon x^2 + 25y^2 < 1\}$ может быть проверена непосредственно путем рассмотрения многочлена

$$\Pi(x, y) = (x^2 + 25y^2 - 1)(1 - x)^2(4 - 3x),$$

который удовлетворяет нулевым условиям Дирихле для Δ^2 на $\partial\Omega$. Можно показать, что $\Delta^2\Pi > 0$ на Ω, а затем, предполагая, что $G \geqslant 0$ на Ω, прийти к неравенству $\Pi \geqslant 0$ на Ω, которое, как нетрудно видеть, неверно.

Хеденмальм [III.172], используя идею Адамара о рассмотрении непрерывного движения границы и вычислении вариации функции Грина G при таком движении, исследовал условия положительности бигармонической функции Грина. Результат оказался следующим: если область Ω звездообразная с действительно-аналитической границей, то $G(P,\, Q) \geqslant 0$ на $\Omega \times \Omega$ тогда и только тогда, когда $\Delta_P G(P,\, Q) \geqslant 0$ на $\partial\Omega \times \Omega$. Результат Хеденмальма означает, что зажатая пластина всюду изгибается в направлении точечной нагрузки, где бы ни была приложена нагрузка; необходимо только удостовериться в том, что это так, когда нагрузка приложена вблизи границы.

Хейман и Коренблюм [III.170] доказали, что функция Грина задачи Дирихле для полигармонического оператора на единичном n-мерном шаре положительна (см. также [III.172], где приведено более простое доказательство). То же свойство функции Грина сохраняется при малых возмущениях полигармонического оператора [III.159].

В работе [I.145] Адамар также отметил такое следствие из неравенства $G(P,\, P) > 0$:

$$G(P,\, Q)^2 \leqslant G(P,\, P)G(Q,\, Q). \tag{14.15}$$

Действительно, заметим, что любое решение уравнения (14.11)–(14.12) удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{\Omega} w(R)q(R)\,dR = \int\limits_{\Omega} |\,\Delta w(R)\,|^2\,dR \geqslant 0.$$

Полагая здесь $q(R) = \alpha\delta_P(R) + \beta\delta_Q(R)$, так что $w(R) = \alpha G(R,\, P) + \beta G(R,\, Q)$, где α, β — произвольные действительные числа, получаем неравенство

$$\alpha^2 G(P,\, P) + 2\alpha\beta G(P,\, Q) + \beta^2 G(Q,\, Q) \geqslant 0,$$

которое и дает требуемый результат.

В связи с неравенством Адамара (14.15) мы хотели бы отметить теорему Малышева [III.262], которая утверждает, что для любой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей выполняется неравенство

$$G(P,\, Q) \geqslant -\varepsilon(\Omega)G(P,\, P)^{1/2}G(Q,\, Q)^{1/2},$$

где $\varepsilon(\Omega)$ — некоторая постоянная, $\varepsilon(\Omega) < 1$. Эта оценка справедлива не только для Δ^2, но и для любого оператора вида LL^*, где L — эллиптический дифференциальный оператор порядка $l > n/2$ с постоянными действительными коэффициентами, а L^* — оператор, сопряженный с L.

Покончив с выводом вариационных формул для функций Грина и непосредственными следствиями этих формул, Адамар переходит к исследованию вариационных свойств функции Грина задачи о жестко закрепленной пластине. «Обобщая теорию максимумов и минимумов на случай неизвестных функций, — пишет он во введении к гл. 3 статьи, — вариационное исчисление до сих пор ограничивалось изучением экстремумов, тем, что Кнезер в своей недавней работе назвал

„наиболее общей задачей вариационного исчисления в случае одной независимой переменной“, — решением обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако изучение физического мира требует рассмотрения таких характеристик, которые зависят от произвольной линии или произвольной поверхности и экстремумы которых необходимо исследовать; поэтому нет никакой причины рассматривать специальный класс задач, изученных до сих пор, как единственно важный».

Наиболее известным и обнаруженным еще в глубокой древности математическим фактом из ряда многих других, подразумеваемых Адамаром в этом отрывке, является изопериметрическое свойство круга: из всех плоских фигур с фиксированным периметром круг имеет наибольшую площадь. Аналогично шар является решением задачи о максимуме объема среди всех тел с заданной площадью поверхности. Такого рода красивые закономерности не являются привилегией геометрических характеристик фигур и тел. В 1856 г. А. Сен-Венан в работе о кручении упругих призм [III.353] предположил, что из всех упругих цилиндров с одной и той же площадью поперечного сечения круговой имеет наибольшую жесткость кручения. Эта теорема была подкреплена физическими аргументами и убедительным численным материалом, но математическое доказательство отсутствовало: оно было дано Пойа в 1948 г.

Еще один пример, по-видимому, оказавший наибольшее влияние на Адамара, — следующая гипотеза, сформулированная лордом Рэлеем в его книге «Теория звука» [III.338]: из всех зажатых пластин с одинаковой площадью круг имеет наименьшую основную частоту. Речь идет о первом собственном числе краевой задачи

$$\Delta^2 u = \lambda u \quad \text{на } \Omega, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{14.16}$$

До недавнего времени гипотеза Рэлея оставалась открытой проблемой. Она была доказана Сегё [III.384] в 1950 г. при дополнительном предположении о положительности первой собственной функции краевой задачи (14.16) и включена в книгу «Изопериметрические неравенства в математической физике» Пойа и Сегё [III.325]. Положительность первой собственной функции следует из положительности функции Грина. Это частный случай теоремы Йенча об интегральных операторах с положительными ядрами [III.197]. Но первая собственная функция может быть положительной и в том случае, когда функция Грина изменяет знак.

В 1982 г. Коффман показал [III.84], что первая собственная функция задачи (14.16) для прямоугольника может бесконечно много раз изменять знак вблизи каждой из вершин, и тем самым опроверг гипотезу Даффина (см. также статью Козлова, Кондратьева и Мазьи [III.218], содержащую более общие результаты этого типа и замечание о существовании выпуклых областей с гладкими границами, для которых первая собственная функция изменяет знак). Изменение знака первой собственной функции задачи (14.16) в случае кольца $\varepsilon^2 < x^2 + y^2 < 1$ при достаточно малом ε доказано Коффманом и Даффином [III.85]. И только в 1995 г. гипотеза Рэлея была доказана Надирашвили [III.289].

Количество аналогичных задач (как решенных, так и нерешенных) весьма велико. Традиционных средств вариационного исчисления недостаточно для их решения; на это обстоятельство и указал Адамар, приступая к обсуждению своей изопериметрической гипотезы: круг с центром P реализует максимум функционала $G(P, P)$ на множестве всех областей Ω заданного периметра, содержащих P. (Под G здесь понимается функция Грина закрепленной пластины.) Использованный метод основан на применении формулы (14.14), которая в принципе может дать лишь признаки относительного экстремума. Именно этой цели и достигает Адамар, вычисляя $G(P, P)$ для контура, являющегося «почти окружностью». Он устанавливает отрицательность вариации рассматриваемого функционала.

В § 12.2 и 13.7 мы уже рассматривали метод Адамара в вариационном исчислении и мультипликативное неравенство для дифференцируемых функций, включенное в четвертую часть его статьи.

На этом мы заканчиваем описание работы Адамара, хотя она и не исчерпывается упомянутыми результатами. Мы надеемся, что нам удалось убедить читателя в глубине и содержательности статьи. Впрочем, и здесь, как вообще свойственно идеям Адамара, их значение и сила в полной мере были подтверждены будущим. Основные приложения вариационной формулы Адамара относятся к теории функций комплексной переменной и к плоским задачам со свободными границами, возникающим в гидродинамике и в физике плазмы. Ее важное значение для решения экстремальных задач в комплексной области и для различных вопросов, связанных с конформными отображениями, проявилось в работах Г. Жюлиа, М. Шиффера, М. А. Лаврентьева, П. Гарабедяна, С. Бергмана и др.

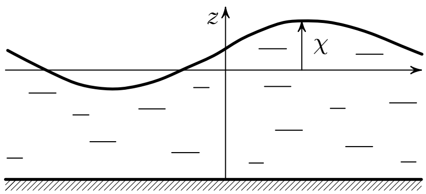
Недавно были получены обобщения этой формулы на фундаментальные решения общих эллиптических краевых задач в произвольных n-мерных областях с гладкими границами [III.140]. Отметим наконец, что правую часть формулы Адамара можно рассматривать как главный член асимптотического разложения функции Грина по степеням малого параметра ε, характеризующего вариацию границы. При такой трактовке исследование Адамара становится первым в ряду многочисленных работ, посвященных асимптотике решений эллиптических краевых задач в регулярно или сингулярно возмущенных областях. Это направление, важное как с прикладной, так и с чисто математической точки зрения, интенсивно развивается в последние годы [III.273].

§ 14.4. Уравнение Адамара для поверхностных волн

Адамар неоднократно обращался к задачам гидродинамики. В § 14.2 мы уже видели, как в «Лекциях о распространении волн» он систематически изложил теорию краевой задачи Неймана, описывающей, в частности, установившееся безвихревое движение идеальной жидкости, находящейся в замкнутом сосуде или обтекающей препятствие. Далее речь пойдет о вкладе Адамара в теорию поверхностных волн.

Еще в 1907 г. в статье о равновесии пластин, указывая, что нелинейное интегродифференциальное уравнение для вариации функции Грина «ни в коем случае не изолировано в математической физике», Адамар упоминает о некотором аналогичном линейном уравнении, возникающем в теории волн малой амплитуды на водной поверхности. А в записке о своих научных работах, составленной в 1909 г., он отмечает, что «те же смешанные интегральные уравнения управляют одной из интереснейших и пока наименее изученных проблем гидродинамики — о распространении волн на поверхности жидкости» [I.158, с. 31]. Такие уравнения стали предметом трех коротких статей Адамара с одинаковым названием «О волнах жидкости» [I.160], [I.161], [I.195].

Проблема относится к классической гидродинамике идеальной (невязкой) несжимаемой жидкости, и речь идет только о безвихревых течениях. Последнее требование, как известно, приводит к существованию потенциала скоростей $\Phi(x, y, z, t)$. Иначе говоря, вектор скорости частицы жидкости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ совпадает с градиентом функции Φ по пространственным переменным. Из уравнения неразрывности $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа. На дне водоема нормальная компонента скорости равна нулю (условие непротекания), что в терминах потенциала означает обращение в нуль нормальной производной $\partial\Phi/\partial n$ при любом $t > 0$. Трудность проблемы вызвана наличием априори неизвестной взволнованной поверхности и нелинейностью заданных на ней краевых условий. В исходной «точной» постановке требуется найти не только потенциал скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, но и заполненную жидкостью зависящую от времени область, в которой он задан. Такая задача чрезвычайно сложна и мало изучена до сих пор. Чтобы выйти из положения, вводят дополнительные физические предположения. Наиболее распространенным из них является условие малости высоты волн и скоростей жидкости, позволяющее линеаризовать задачу. Приняв эту гипотезу, мы можем искать потенциал в фиксированной области Ω, снизу ограниченной дном, а сверху — плоскостью $z = 0$ (см. рисунок).



Отклонение $\chi(x, y, t)$ поверхности жидкости от плоскости $z = 0$ связано с производными потенциала следующими двумя условиями:

$$\chi = -\frac{1}{g}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{z=0},$$
$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

где g — ускорение свободного падения. Первое (динамическое) условие следует из равенства нулю давления на свободной поверхности, а второе (кинематическое) условие означает, что частица жидкости, находящаяся на поверхности, не уходит внутрь жидкости во время движения. Следует помнить еще, что Φ — гармоническая функция, удовлетворяющая однородному условию Неймана на дне, и что в начальный момент заданы и потенциал Φ, и функция χ.

Эту краевую задачу называют задачей Коши—Пуассона. Вообще изучение волн на воде имеет богатую историю, но, стремясь поскорее перейти собственно к уравнению Адамара, мы ограничимся тем, что к двум упомянутым французским математикам присоединим имена Лагранжа, Стокса, Кельвина, Рэлея, Лэмба, Буссинеска. Трудами этих ученых был заложен фундамент теории поверхностных волн.

Адамар преследует цель найти для функции χ уравнение, не содержащее потенциала скоростей. Он вводит вспомогательную гармоническую функцию $\psi = \partial\Phi/\partial t$, которая, очевидно, удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{на дне,} \qquad \psi = -g\chi \quad \text{при } z = 0.$$

Функция χ не задана, но для рассуждений Адамара это несущественно. Задачу определения гармонической функции по этим условиям он называет смешанной и говорит, что ее можно считать решенной, если известна соответствующая функция Грина $G(M, P)$.

Итак, при помощи $G(M, P)$ через χ выражается функция ψ, а вместе с ней — и ее производная $\partial\psi/\partial z$ на плоскости $z = 0$. Дифференцируя по времени динамическое краевое условие, заключаем, что $\partial\psi/\partial z$ при $z = 0$ совпадает с $\partial^2\chi/\partial t^2$ и, следовательно, требуемое соотношение получено. Вот окончательный вид уравнения Адамара:

$$\frac{4\pi}{g}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint \chi\frac{d\xi\, d\eta}{r} + \iint \chi\frac{\partial^2 H}{\partial z\,\partial\zeta}\, d\xi\, d\eta. \tag{14.17}$$

Здесь r — расстояние между точками (x, y, z) и (ξ, η, ζ), а интегрирование распространено на всю плоскость $\zeta = 0$. Функция H связана с функцией Грина равенством

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} + H(x, y, z; \xi, \eta, \zeta),$$

где r' — расстояние от (x, y, z) до точки $(\xi, \eta, -\zeta)$.

Но Адамар не ограничивается выводом интегродифференциального или, как теперь говорят, псевдодифференциального уравнения для χ. В заметке 1916 г. [I.195], он выводит из уравнения (14.17) (правда, не совсем строго) так называемое уравнение мелкой воды в акустическом приближении. Речь идет об уравнении

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = gh\Delta\chi, \tag{14.18}$$

где h — постоянная глубина жидкости в положении равновесия. Это уравнение для χ было впервые получено Лагранжем из чисто физических соображений.

Если жидкость заполняет полупространство $z < 0$, то из уравнения (14.17) в результате несложных преобразований Адамар получает уравнение в частных производных четвертого порядка

$$\frac{\partial^4\chi}{\partial t^4} + g^2\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{14.19}$$

которое, как заметил Адамар, не эквивалентно уравнению (14.17). Уравнение (14.19) было впервые получено Коши для жидкости бесконечной глубины, неограниченно простирающейся по горизонтальным направлениям.

В случае жидкости в сосуде Адамар также вывел уравнение, аналогичное уравнению (14.17), и показал, что его можно преобразовать в следующее обобщение уравнения Коши (14.19):

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} + g^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right) = \int\limits_{\omega} \chi(\xi, \eta) K(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{14.20}$$

где ω — поверхность жидкости, а ядро K определяется через функцию Грина соответствующей смешанной задачи.

При построении упомянутой функции Грина Адамар столкнулся с трудностью, удовлетворительное преодоление которой относится уже к достижениям математической физики нашего времени. Речь идет об особенностях решений смешанной задачи, возникающих вблизи линии C контакта стенок сосуда и поверхности жидкости. Адамар заметил, что в случае жидкости в полусферическом сосуде производная $\partial^2\chi/\partial t^2$ имеет логарифмическую особенность на окружности C, даже если функции χ и $\partial\chi/\partial t$ конечны. Обращая внимание на это парадоксальное явление — бесконечность ускорения при малости смещений и скорости, — Адамар ставит задачу изучения особенности решения уравнения (14.19) на линии C. Ему удается вывести уравнение (14.20), но только при априорном предположении о регулярности функции $\partial^2\chi/\partial t^2$ на контуре C.

Ученик Адамара Ж. Булиган в своей докторской диссертации показал, в частности, что правая часть уравнения (14.20) тождественно равна нулю в том случае, когда поверхность сосуда является цилиндрической с вертикальными образующими. Тем самым интегродифференциальное уравнение (14.20) превращается в дифференциальное уравнение Коши (14.19) в области ω. Исследования Булигана были подытожены в его книге «О различных проблемах гидродинамики» [III.56], вышедшей в Париже в 1930 г. и начинающейся словами: «Предметом настоящей работы является развитие трудов Жака Адамара по теоретической гидродинамике (идеальной жидкости)». Там же Булиган пишет: «Адамар возродил в своих трудах теорию поверхностных волн, указал на возможность связать ее со смешанной задачей, позволяющей изложить эту теорию заново и более систематично по сравнению с результатами Лагранжа и Коши. Так в науке маленький закоулок часто порождает новую область исследований, столь же плодотворную в сравнении с закоулком, как группа объединенных земельных участков по сравнению с одним из них».

В заключение несколько общих слов об уравнении (14.7). Некоторые его важные свойства, например однозначная разрешимость задачи Коши, не связаны с конкретным видом оператора в правой части. Существенна лишь его структура:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + A\chi = 0,$$

где A — не зависящий от t положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Уравнения такого вида исследуются довольно просто в рамках абстрактной теории операторов. Если форма дна сосуда изменяется с течением времени или в жидкость погружены движущиеся тела, то вывод уравнения (14.17) сохраняется, но оператор A становится функцией времени t. Однако и в таком, более сложном случае соответствующая теорема существования и единственности была доказана Гариповым в 1967 г. [III.144].

До недавнего времени уравнение Адамара, по-видимому, не применялось к эффективному решению гидродинамических задач. Оно представляется очень трудным: достаточно упомянуть, что явное описание его правой части требует знания функции Грина. Тем не менее, учитывая важность этого уравнения для практической гидромеханики, перспективы его использования не следует оценивать пессимистически. В той же заметке 1916 г. Адамар отмечает возможность синтеза уравнения (14.17) и своей вариационной формулы для функции Грина. Это позволило бы выписать приближенные уравнения типа (14.17) и в некоторых случаях не слишком простого рельефа дна. Вообще введение тех или иных малых параметров может сильно упростить уравнение (14.17). Интересно, что в последние годы появились работы, посвященные приложениям этого уравнения к задаче о возбуждении волн цунами кратковременными подвижками дна. Наконец, можно рассчитывать на растущие возможности компьютеров и вычислительных методов в надежде на численное решение уравнения Адамара.

§ 14.5. Движение капли в вязкой жидкости

В 1911 г. появились выполненные независимо работы В. Рыбчинского [III.350] и Адамара [I.168], в которых была решена задача об установившемся осесимметрическом движении вязкой капли в другой вязкой жидкости под действием силы тяжести. «Эта проблема, — пишет Адамар, — возникла в исследованиях, которые были нацелены на определение размеров атомов и привели к серии важных экспериментальных работ...» [I.406, с. 1311]. Упомянутые исследования опирались на опубликованное еще в 1851 г. Стоксом аналитическое решение задачи о падении твердой сферы в вязкой жидкости. Однако, как отмечали физики, ничто не доказывало законности такого приема, основанного на представление об атоме как о твердом шаре. В связи с этим Адамар и предпринял попытку найти аналог решения Стокса в предположении, что падающая сфера сама является жидкой.

Вообще говоря, стационарное движение жидкости описывается системой уравнений Навье—Стокса, три из которых являются нелинейными. При условии малости числа Рейнольдса нелинейными членами можно пренебречь, что и было сделано Стоксом. Взяв за основу линеаризацию Стокса, Адамар нашел явное решение задачи о капле, учитывающее как внешнее, так и внутреннее движение. Мы не будем приводить его рассуждения, отсылая читателя к трактатам по гидродинамике [III.221]. Окончательная формула для скорости падения капли радиуса R с коэффициентом вязкости η' и плотностью ρ' имеет вид

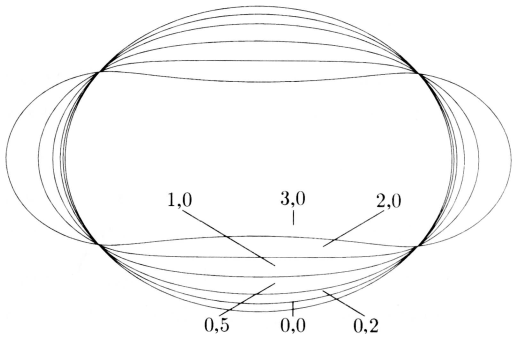
$$u = \frac{2R^2 g(\rho' - \rho)(\eta + \eta')}{3\eta(2\eta + 3\eta')},$$

Джордж Габриэль Стокс
(1819–1903)

где η и ρ — коэффициент вязкости и плотность окружающей жидкости, а g — ускорение свободного падения. При $\eta' \to \infty$ эта формула переходит в полученную Стоксом для твердого шарика, а в предельном случае $\eta' = 0$ она дает скорость подъема газового пузырька. Изменением формы капли в линейной модели Рыбчинского—Адамара пренебрегают, что реально соответствует очень большому поверхностному натяжению на границе капли. Адамар понимал, что его решение имеет узкую область практического применения. В заключение своей заметки он пишет, что формула для скорости «дает в сравнении с полученными к настоящему времени (и еще не опубликованными) экспериментальными результатами значительные расхождения. Таким образом, пока представляется, что в изученных случаях классические гипотезы, из которых мы исходили, должны быть модифицированы».

Более близкое к реальности решение задачи о движении капли, учитывающее нелинейность системы Навье—Стокса и изменение очертаний капли, вызывает большие трудности. Здесь речь идет о краевой задаче в области с заранее неизвестными (или, как принято говорить, со свободными) границами. Уравнение поверхности капли должно быть найдено вместе с вектором скорости вне и внутри нее. На границе капли кроме условий «непротекания» и неразрывности касательных напряжений и касательных составляющих скоростей возникает требование совпадения скачка нормальных напряжений с капиллярным давлением. Последнее краевое условие содержит дополнительную информацию для определения формы капли. Однако извлечь эту информацию в начале XX в. было немыслимо. Задача была решена лишь спустя много лет с помощью быстродействующего компьютера.

На рисунке показана найденная численно в 1979 г. форма капли при различных значениях числа Вебера We, характеризующего поверхностное натяжение на ее границе, и при значении числа Рейнольдса Re, равном 30. Данные можно



найти в работе [III.346]. Интересно, что в качестве нулевого приближения в итерационном процессе было взято решение Рыбчинского—Адамара. Результаты, полученные на компьютере, дают довольно хорошее совпадение с результатами физических экспериментов для чистых жидкостей[1].

[1] Обширный обзор современной литературы по деформации капли приведен в работе Г. А. Стоуна [III.380].

Глава 15

Дифференциальные уравнения в частных производных

§ 15.1. Корректность в смысле Адамара

Краевая задача математической физики называется корректной (по Адамару), если она удовлетворяет следующим трем требованиям:

1) решение существует;

2) решение единственно;

3) решение непрерывно зависит от данных.

Каждое из этих условий диктуется механическим или физическим происхождением задачи. Первое означает непротиворечивость математической модели, второе отражает детерминированность реальной ситуации, а третье соответствует интуитивному убеждению наблюдателя в том, что малые ошибки в исходных данных и в добавочных членах, выражающих источник, вносят малые искажения в окончательный ответ.

Сформулированные требования, конечно, представляют собой лишь самые общие принципы математической постановки физически осмысленных задач и при конкретизации допускают гибкую трактовку. Так, разрешимость может иметь место при выполнении некоторых ограничений на правые части. Определенный произвол возможен иногда и при выборе решений, например в задачах о собственных значениях. Понятие устойчивости решения при вариации данных, с одной стороны, требует уточнения, а с другой — допускает исключения: в конце концов существуют ведь и разрывные, резко изменяющиеся процессы. Но все это уже во втором приближении, а в главном условия 1, 2, 3 отражают закономерности общего положения, имеющие глубокий математический смысл.

Понятие корректности краевой задачи появилось в ранних работах Адамара, посвященных уравнениям в частных производных. В начале работы [I.89] Адамар пишет о том, что разнообразным задачам математической физики соответствуют два общих типа краевых условий для уравнения в частных производных: условие Дирихле и его аналоги, такие как условие Неймана, с одной стороны, и условие Коши — с другой. Каждая из этих задач может оказаться «хорошо поставленной» (parfaitement bien posé), иначе говоря, возможной и определенной (possible et déterminé). Последние два свойства, т. е. разрешимость и единственность решения, Адамар связывает с физическим происхождением задачи[1].

[1]Следует отметить, что для нелинейных задач, возникающих из приложений, описывающих стационарное поведение, вполне естественно иметь несколько решений или не иметь ни одного. Однако во времена Адамара явления такого рода были почти не изучены.

В качестве иллюстрации своей концепции он приводит уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

в полупространстве $x \geqslant 0$, для которого задача Дирихле с данными на плоскости $x = 0$ разрешима, допускает единственное решение в классе ограниченных функций и имеет ясный физический смысл. Далее Адамар присоединяет к уравнению Лапласа «лишенные физического содержания» данные Коши на плоскости $x = 0$:

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u_0', \tag{15.1}$$

— и показывает, что эта задача разрешима не всегда.

Второй пример — волновое уравнение (14.4), для которого задача Коши с начальными данными при $t = 0$ (естественно возникающая в теории колебаний) разрешима и допускает единственное решение. Однако «следует остерегаться, — пишет Адамар, — формулировать это заключение в виде: „задача Коши для уравнения (14.4) возможна и определена“ [I.89]. Дело в том, что если мы присоединим к уравнению условие (15.1) при $x = 0$ вместо условия (14.6) на множестве

$$\{(x,\, y,\, z,\, t)\colon x > 0,\ (y,\, z) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\},$$

то получим некорректно поставленную задачу. Действительно, пусть u_0 и u_0' не зависят от t. Можно показать, что тогда решение (если оно единственно) также не зависит от t. В результате уравнение (14.4) превращается в уравнение Лапласа, для которого, как уже отмечалось, задача Коши неразрешима.

Впоследствии Адамар часто возвращался к концепции корректности.

«Он повторял эту мысль постоянно, — вспоминают Мандельбройт и Шварц в 1965 г., — так что даже сейчас задача называется „корректной по Адамару“, если ее решения непрерывно зависят от данных. Идея оказалась даже более плодотворной, чем он представлял сам, поскольку аналитики были вынуждены исследовать, как он говорил, „различные типы окрестностей и непрерывности“, что неизбежно вело к функциональным пространствам, общей топологии и функциональному анализу. Она, несомненно, является одним из источников функционального анализа и все еще представляет собой одну из лучших областей его приложения. Современные методы решения уравнений в частных производных используют „априорные оценки“; это означает, что в действительности существование и единственность решения доказываются после того, как установлена его непрерывность относительно данных; функциональный анализ (в существенном теоремы Банаха и Ф. Рисса) приводит затем к результату» [II.43, с. 114].

Понятие корректности краевой задачи, столь привычное сейчас, представлялось далеко не таким естественным в начале XX столетия. В частности, многим авторам казалось, что вопрос о решении задачи Коши исчерпывается теоремой Коши—Ковалевской. В этой теореме (мы ограничиваемся случаем одного уравнения, хотя аналогичный результат справедлив и для систем) рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f\Big(t, y_1, \ldots, y_n, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial y_n^k}\Big),$$

где f — аналитическая функция своих аргументов, изменяющихся в некоторой окрестности начала координат. Другими словами, функция f может быть разложена в степенной ряд по переменным t, y_1, …, $\partial^k u/\partial y_n^k$. Задача Коши заключается в том, чтобы найти решения только что выписанного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_0(y_1, \ldots, y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(0, y_1, \ldots, y_n) = \varphi_{k-1}(y_1, \ldots, y_n).$$

Аналитические функции $\varphi_j(y_1, \ldots, y_n)$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$, заданы вблизи точки $(y_1, \ldots, y_n, t) = 0$ на плоскости $t = 0$.

Теорема Коши—Ковалевской утверждает, что задача Коши имеет единственное решение, аналитическое вблизи начала координат. Историю этой теоремы см. в книге Р. Кука [III.87].

Софья Васильевна Ковалевская
(1850–1891)

Адамар пришел к определению корректности, осознав ограниченный характер сформулированного результата. Вот что он пишет об этом в «Лекциях о задаче Коши для линейных уравнений в частных производных», прочитанных в Йельском университете в 1920 г. и опубликованных на английском языке спустя два года [I.223, с. 29]:

«Читатель, вероятно, удивится тому, что мы постоянно используем сослагательное наклонение и, по-видимому, считаем сомнительным одно из самых классических и наиболее известных доказательств анализа. Дело заключается в том, что не все так просто, как может показаться на основании предыдущих рассуждений. В действительности обстоятельства, с которыми мы сталкиваемся, кажутся на первый взгляд совершенно парадоксальными с чисто математической точки зрения, и предусмотреть их можно только из физических соображений. Никакой другой вопрос не проиллюстрировал бы так поразительно мысли, высказанные Пуанкаре на I Международном математическом конгрессе в Цюрихе в 1897 г. (см. также «Ценность науки», с. 137—155): „Именно физические приложения указывают нам важные задачи, которые мы должны поставить перед собой, и опять-таки физика позволяет нам предугадать решения“.

Рассуждения Коши, Софьи Ковалевской и Дарбу, аналог которых дан выше, совершенно строгие. Однако заключение, полученное ими, нельзя считать наиболее общим. Причина состоит в предположении, сделанном ранее, что начальные данные, так же как и коэффициенты уравнений, выражаются при помощи *аналитических* функций, и теорема часто неприменима, когда не выполнена эта гипотеза».

Здесь Адамар по существу имеет в виду то обстоятельство, что корректны не все, а именно те краевые задачи, которые соответствуют математическим моделям физических явлений, и возражает против существовавшей в то время тенденции считать теорему Коши—Ковалевской справедливой как для аналитических, так и для гладких функций. Восходящая к К. Вейерштрассу заманчивая идея аппроксимации непрерывных функций полиномами, казалось, исчерпывала проблему разрешимости, тем более что уже был известен результат Э. Хольмгрена [III.178] (1901), согласно которому для линейного дифференциального уравнения в условиях теоремы Коши—Ковалевской имеет место единственность решения в классе достаточно гладких функций.

Приведем аргументы Адамара, опровергающие подобные представления и акцентирующие внимание на различии свойств задач с аналитическими и неаналитическими (даже бесконечно дифференцируемыми) данными. Этот отрывок из «Лекций о задаче Коши» [I.223] содержит, в частности, доложенный Адамаром в Цюрихе в 1917 г. Швейцарскому математическому обществу знаменитый пример, который демонстрирует некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.

«Мы будем часто подчеркивать (в противоположность некоторым математикам) важность этого различия. В рассуждениях иногда исходят из того факта, что любые функции можно рассматривать как аналитические, поскольку в противоположном случае их можно с любой желаемой точностью аппроксимировать аналитическими функциями. Но с нашей точки зрения эта аргументация несостоятельна. Важно не то, насколько такая аппроксимация изменяет начальные данные, а то, насколько она изменяет решения. Легко видеть, что в том случае, который нас интересует, эти два вопроса никоим образом не эквивалентны. Возьмем классическое двумерное уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

со следующими данными Коши:

$$u(0,\, y) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\, y) = u_1(y) = A_n \sin(ny),$$

где n — очень большое число, а A_n — функция от n, которая мала, когда n становится большим (например, $A_n = 1/n^p$).

Эти данные сколь угодно близко подходят к нулю. Однако такая задача Коши имеет решение

$$u = \frac{A_n}{n} \sin(ny) \operatorname{sh}(nx),$$

которое, если $A_n = 1/n$, или $1/n^p$, или $e^{-\sqrt{n}}$, очень велико для любого значения x, отличного от нуля (вследствие степени роста e^{nx} и, следовательно, $\operatorname{sh}(nx)$).

В этом случае из-за присутствия множителя $\sin(ny)$ поверхность становится волнистой, и видно, что эта волнистость, незаметная в непосредственной близости от оси y, делается громадной на фиксированном расстоянии от этой оси, как бы мало оно ни было, при условии, что n достаточно велико» [I.223, с. 39].

Пример Адамара объясняет, что (говоря на современном языке) решение задачи Коши для уравнения Лапласа не обязано непрерывно зависеть от данных Коши, даже когда они рассматриваются в топологии C^∞ (например, в случае $A_n = e^{-\sqrt{n}}$), а само решение — в очень слабой топологии. А вот задача Коши для уравнения струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x > 0,$$
$$u(0,\, y) = \varphi(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,\, y) = 0, \tag{15.2}$$

где φ — ограниченная непрерывная функция на вещественной оси, поставлена корректно в классе ограниченных непрерывных в замкнутой полуплоскости $x \geqslant 0$ решений. Это — непосредственное следствие формулы для единственного решения

$$u(x,\, y) = \frac{1}{2}[\varphi(x + y) + \varphi(y - x)].$$

Здесь проявляется, по выражению Адамара, «поистине один из наиболее любопытных фактов теории», который «заключается в том, что уравнения, по виду очень близкие, ведут себя совершенно противоположным образом» [I.223, с. 23].

Работу 1926 г. [I.250] Адамар посвятил вопросу о неразрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа на полуплоскости $\{(x,\, y)\colon x > 0\}$ с неаналитическими данными

$$u(0,\, y) = f(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,\, y) = g(y).$$

Он рассматривает две постановки задачи, когда решение требуется найти с обеих сторон оси абсцисс или лишь с одной стороны этой оси. Адамар выводит невозможность решения задачи в первой постановке при помощи результатов работы Пенлеве «О линиях особенностей аналитических функций» [III.299] и показывает, что вторая постановка может оказаться допустимой и в случае неаналитических начальных данных.

Первоначально Адамар определял корректность задачи лишь условиями разрешимости и единственности, энергично настаивая на непрерывной зависимости решения от начальных данных только при обсуждении задачи Коши. Вот что он написал в книге «Теория уравнений в частных производных» [I.405, с. 20], вышедшей в Пекине через год после его смерти: «Это третье условие, которое мы ввели в „Лекциях о задаче Коши", но не рассматривали как часть определения корректных задач, было присоединено, и совершенно справедливо, Гильбертом и Курантом („Методы математической физики", т. II). Мы принимаем здесь их точку зрения».

Вопрос о необходимости включения условия непрерывности решения относительно данных представляется довольно деликатным. Дело в том, что согласно известной теореме Банаха о замкнутом графике [III.57] однозначная разрешимость линейной задачи влечет ограниченность обратного оператора, а тем самым — и непрерывную зависимость решения от правых частей. Таким образом, прежнее определение корректности кажется на первый взгляд достаточным для широкого класса задач. Впрочем, на это можно возразить, что в число данных задачи входят наряду с правыми частями коэффициенты дифференциальных операторов и область задания функций. Задача может иметь единственное решение при любой правой части, но не исключено, что оно будет сильно меняться, например при ничтожной вариации контура. Такая ситуация возникла уже у Адамара при рассмотрении задачи Дирихле для гиперболического уравнения. Прежде чем перейти к этому вопросу, отметим, что, поскольку упомянутое возражение вполне справедливо, окончательный вариант определения корректной задачи, включающий все три пункта, предпочтительней. Он также наиболее желателен, когда задача нелинейна.

Стремясь осознать закономерности корректной постановки краевых задач, Адамар в 1921 г. обратился к задаче Дирихле для уравнения колебаний струны [I.209]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{в } \Omega, \qquad u = \varphi \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{15.3}$$

(Уравнения (15.2) и (15.3) равносильны: одно из них переходит в другое после поворота координатных осей на угол $\pi/4$.)

То, что с этой задачей дело обстоит не так благополучно, как с задачей Дирихле для уравнения Лапласа, показывает пример прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Легко проверить, исходя из общего решения уравнения (15.3)

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \tag{15.4}$$

что задание решения на любых двух смежных сторонах однозначно определяет его внутри прямоугольника и, следовательно, нельзя произвольно ставить условия Дирихле на всей границе.

В этой связи любопытны слова А. Зоммерфельда в обзорной статье 1904 г. «О краевых задачах для уравнений в частных производных», написанной для многотомной математической энциклопедии «Encyclopädie der mathematischen wissenschaften» [III.372]. Упоминая предложенное Дюбуа-Реймоном разбиение краевых условий на однонаправленные (задание решения и его нормальной производной на одной дуге) и двояконаправленные (на каждой из двух дуг предписаны значения решения, причем возможен случай замкнутой кривой), Зоммерфельд оптимистически высказывается о возможности и «для гиперболических уравнений ставить краевые задачи, вполне аналогичные задачам для эллиптических уравнений». «Доказательства этого предположения пока нет», — отмечает он далее [III.372, с. 512-513].

В работе [I.209] Адамар рассматривает поучительный пример эллипса $\partial\Omega = \{(x, y)\colon x = a\cos t,\ y = b\cos(t-h)\}$. Проследим за его рассуждениями. Пусть

$$\varphi = \sum(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt)$$

— разложение данных Дирихле в ряд Фурье. Представим функции f и g из (15.4) в виде рядов

$$f(x) = \sum \lambda_n \cos nt, \qquad g(y) = \sum \mu_n \cos n(t-h)$$

с неизвестными коэффициентами λ_n и μ_n. Для определения коэффициентов из краевого условия получаются соотношения

$$\lambda_n + \mu_n \cos nh = \alpha_n, \qquad \mu_n \sin nh = \beta_n.$$

Отсюда прежде всего следует, что в случае соизмеримости чисел h и π задача (15.3) имеет бесчисленное множество линейно независимых решений. Если же h и π несоизмеримы, то теорема единственности имеет место, но возникают трудности с разрешимостью, так как ряды для f и g при найденных значениях λ_n и μ_n могут расходиться. Действительно, пусть число h/π может быть разложено в цепную дробь:

$$\frac{h}{\pi} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

с ограниченными элементами a_j. Известно, что при этом условии дробные части величин nh/π, а следовательно, и $\sin nh$, убывают не быстрее n^{-2}. Поэтому достаточно считать функцию φ трижды непрерывно дифференцируемой для того, чтобы ряды, задающие функции f и g, сходились (при этом условии $\beta_n = O(n^{-4})$). Вообще класс допустимых граничных значений сужается при ускорении аппроксимации числа h/π рациональными. Тем самым рассматриваемая задача при некоторых h оказывается некорректной по Адамару.

Наряду с этим примером в той же статье Адамар исследовал задачу (15.3) для области, образованной двумя дугами с общими концами A и B, на каждой из которых обе координаты x, y монотонны.

Дальнейший прогресс был достигнут в работе А. Губера 1932 г. [III.182], для которого выводы Адамара явились отправным пунктом. Губер предполагает, что область выпукла относительно координатных направлений, т. е. что контур пересекается со всеми прямыми, параллельными осям абсцисс или ординат, не более чем в двух точках. Тогда и x и y имеют на контуре лишь по одному максимуму и одному минимуму. Следуя Губеру, назовем точки, в которых достигаются эти экстремальные значения, вершинами. Ясно, что возможны лишь две, три или четыре вершины, причем последний случай является общим. Без труда проверяется, что задача Дирихле, вообще говоря, неразрешима в двух первых случаях, а в третьем, как показывает пример эллипса, ситуация не столь простая. Губер, а затем и вернувшийся к этой задаче в 1936 г. Адамар получили частичные результаты, относящиеся к четырем вершинам. Важную роль в этих исследованиях играют некоторые топологические отображения контура в себя, связанные с движением по характеристикам уравнения струны.

Статья Адамара 1921 г. была первой в большой серии работ разных авторов, посвященных некорректным краевым задачам для гиперболических уравнений. В 1939 г. Д. Буржен и Р. Даффин [III.59] исследовали задачу Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. Они доказали, что в случае иррациональности отношения b/a справедлива теорема единственности в классе непрерывно дифференцируемых функций. Другой результат статьи [III.59] — достаточные условия разрешимости задачи в терминах скорости аппроксимации числа b/a рациональными.

Особо отметим глубокую работу Ф. Джона 1941 г. [III.198], который применял упомянутые выше специальные отображения границы. Опираясь на результаты общей теории топологических отображений замкнутых кривых в себя, созданной Пуанкаре в связи с исследованием дифференциальных уравнений первого порядка на торе, Джон установил для произвольного контура $\partial\Omega$, выпуклого относительно координатных осей, следующую альтернативу. Либо $\partial\Omega$ делится на две части так, что функция φ на одной части однозначно определяется данными Дирихле на другой части, либо существует отображение вида $\xi = \alpha(x)$, $\eta = \beta(y)$, где α и β — возрастающие непрерывные функции, сохраняющие тип уравнения (15.2) и переводящие $\partial\Omega$ в прямоугольник с наклоном сторон ± 1 и иррациональным отношением длин сторон. Очевидно, что в первом случае говорить о разрешимости задачи (15.3) не приходится, а во втором можно применить результаты Буржена и Даффина[1].

Эта краевая задача интересовала Адамара в течение многих лет. Вернувшись к той же проблеме в Америке во время Второй мировой войны, он показал, что по сравнению с уравнением струны для общего уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = 0$$

возникают новые, неожиданные эффекты [I.361].

[1] Исследуя обобщенные решения задачи Дирихле с ненулевыми краевыми данными для уравнения $\partial^2 u/\partial y^2 - \partial^2 u/\partial x^2 = f(x, y)$, Ю. М. Березанский описал класс областей, для которых разрешимость устойчива относительно малых вариаций контура [III.29, гл. 4, § 2].

Разнообразные вариации темы корректности звучат снова и снова в творчестве Адамара на протяжении его долгой жизни. Еще в 1906 г. он обратил внимание на то, что даже классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа с непрерывными граничными данными, однозначно разрешимая в пространстве непрерывных функций в $\overline{\Omega}$, становится некорректной, если ее решение искать в классе функций с градиентом из $L^2(\Omega)$. Об этом наблюдении Адамара, которое имеет принципиальный характер, мы говорили в § 12.3.

Ряд работ Адамара был посвящен исследованию разрешимости и свойств решений так называемых смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка (см. также его книгу [I.223]). Этот термин, введенный Адамаром и ставший общепринятым, означает, что уравнение рассматривается в области типа цилиндра (возможно, криволинейного); основание цилиндра пространственно ориентировано, а боковая поверхность ориентирована времяобразно; на основании задаются данные Коши, а на боковой поверхности — одно из «эллиптических» краевых условий (например, условие Дирихле или Неймана).

Каким образом следует формулировать корректные краевые задачи для уравнений, не принадлежащих к трем классическим типам? Этот вопрос настоятельно интересует Адамара. Он отмечает, например, отсутствие корректных краевых задач для ультрагиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t},$$

по-видимому, впервые рассмотренного в геттингенской диссертации Г. Гамеля [III.164] в связи с некоторыми геометрическими вопросами[1].

В своем обзоре [I.338] Адамар упоминает о результатах Ф. Трикоми, который, по предложению В. Вольтерра, первым исследовал однозначно разрешимые краевые задачи для уравнений «смешанного типа», т. е. уравнений с переменными коэффициентами, эллиптических в одной части области, гиперболических в другой и параболических на линии, разделяющей обе зоны. Типичным примером является уравнение

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в плоскости} \quad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

В работе [I.309] Адамар обратился к уравнениям с постоянными коэффициентами, имеющим как действительные, так и комплексные характеристики.

[1] В 1964 г. А. С. Благовещенский [III.41] показал, что задача нахождения функции u, удовлетворяющей ультрагиперболическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=p+1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

с данными Дирихле на характеристической поверхности

$$\sum_{j=1}^{p} x_j^2 = \sum_{j=p+1}^{n} x_j^2,$$

корректна в определенном классе функций, и получил явное решение.

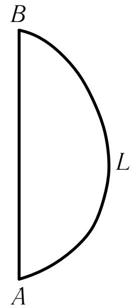
Простейшим примером таких уравнений «составного типа», как называл их Адамар, может служить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0, \tag{15.5}$$

где u — функция от x, y. Адамар доказал, что некоторые краевые задачи корректно поставлены для этого уравнения, а также для уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Delta u = 0.$$

Краевая задача, корректно поставленная для уравнения (15.5) с областью, представленной на рисунке, состоит в следующем. Пусть функции u и $\partial^2 u/\partial x^2$ заданы на отрезке AB и, кроме того, функция u задана на дуге L. Так как оператор Δu задан на AB данными о производной $\partial^2 u/\partial x^2$ и о функции u (а значит, и $\partial^2 u/\partial y^2$), из уравнения (15.5) следует, что $\Delta u = f(x, y)$ в области ABL при некоторой заданной функции f. Следовательно, остается решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u = f(x, y)$ при заданных значениях u на замкнутом контуре[1].



Вообще говоря, проблема описания «хороших» краевых условий для дифференциальных уравнений, «не принадлежащих ни к одному из трех классических типов», всё ещё далека от решения. Принципиальным шагом в направлении, указанном Адамаром, явилась известная теорема Л. Хёрмандера [III.180], утверждающая существование хотя бы одной корректной краевой задачи для любого дифференциального оператора с частными производными и постоянными коэффициентами в ограниченной области. Для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, не принадлежащих ни к одному из трех классических типов, ситуация оказалась существенно сложнее. Достаточно вспомнить построенное Гансом Леви [III.243] уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_2} - 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3)$$

с бесконечно дифференцируемой правой частью, не имеющее в окрестности начала координат ни одного решения в классе обобщенных (и тем более гладких) функций. Усилиями многих математиков к настоящему времени построена разветвленная теория корректных краевых задач для уравнений и систем эллиптического, параболического и гиперболического типов.

Понятие корректности неоднократно демонстрировало свою универсальность и гибкость. Так, при изучении произвольных эллиптических краевых задач не говорят об однозначной разрешимости: ее явные признаки можно получить лишь в сравнительно немногих случаях. Корректность отождествляется с так называ-

[1] Вскоре после этого появились две работы О. Шёстранда [III.365], [III.366], в которых были доказаны разрешимость более сложной задачи для уравнения (15.5) и единственность решения. В частном случае задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения (15.5) для круга с заданными условиями на границе и на диаметре, параллельном оси y.

емой нётеровостью задачи. Это означает, что соответствующий оператор имеет замкнутую область значений, однородная задача имеет конечное число нетривиальных решений, а неоднородная разрешима при выполнении конечного числа условий ортогональности для правых частей.

Адамар уже не принимал участия в создании упомянутой общей теории, потребовавшей привлечения и новых теоретико-операторных средств, и новой, «локальной» аналитической техники. Он сыграл роль предтечи, когда на заре XX в. первым осознал и в дальнейшем активно развивал и пропагандировал важнейшую концепцию современной теории краевых задач — идею корректности. Сказанное Адамаром о важности для практики только корректно поставленных краевых задач с течением времени стали понимать не столь абсолютно. Приложения (задачи гравиметрии, спектроскопии, радиоастрономии, зондирования атмосферы, проектирования оптимальных систем и конструкций, а также ряд других) привели к постановке математических задач, решения которых неустойчивы относительно малых изменений начальных данных. Среди таких задач, между прочим, оказалась некорректная по Адамару задача Коши для уравнения Лапласа: к ней приводит задача о продолжении потенциала силы тяжести, измеряемой на поверхности Земли, в направлении гравитирующих масс. Методы приближенного решения таких задач были созданы в последние десятилетия (А. Н. Тихонов и его ученики, Ф. Джон, Ж.-Л. Лионс, М. М. Лаврентьев и др.).

§ 15.2. От задачи Коши к проблеме квазианалитичности

Исследуя взаимосвязь между дифференцируемостью и аналитичностью функций комплексного переменного, Борель показал, что единственность продолжения функции, заданной в окрестности некоторой точки, не является исключительным свойством аналитических функций (1894). В 1912 г. Адамар затронул проблему единственности продолжения в краткой (около страницы) заметке [I.178], которая начинается словами: «Независимо от обобщений этого понятия в направлениях, указанных Борелем, существуют другие обобщения, к которым приводят аналогии, подсказываемые теорией дифференциальных уравнений с частными производными». Отправляясь от своих размышлений о роли аналитичности начальных данных при постановке задачи Коши и одного замечания Хольмгрена, Адамар сформулировал так называемую проблему квазианалитичности, которая вызвала к жизни обширную область теории функций.

Проследим за ходом мысли Адамара, ведущим его к постановке упомянутой проблемы. Пусть $u(x, y)$ — функция, непрерывная на квадрате $Q=\{(x, y) : |x|<1, |y|<1\}$, нечетная по x и гармоническая при $x \neq 0$. Можно показать, что u — функция, гармоническая в Q, и, следовательно, производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y)$ — действительная аналитическая функция в интервале $(-1, 1)$. Это соображение, приведенное в работе Адамара [I.89], доказывает, в частности, неразрешимость задачи Коши для уравнения Лапласа с данными

$$u(0, y)=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y)=u_1(y), \tag{15.6}$$

где функция u_1 не аналитическая. (Здесь данные Коши заданы на линии, лежащей внутри области.) Важно, что аналитичность функции u_1 эквивалентна последовательности неравенств

$$\left|\frac{d^n u_1}{dy^n}\right| < \frac{n!M}{\rho^n}, \quad n = 0, 1 \ldots, \tag{15.7}$$

где значения M и ρ могут зависеть от $y \in (-1, 1)$, но не от n.

Что произойдет, если уравнение Лапласа мы заменим на уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0? \tag{15.8}$$

Ответ на этот вопрос дал Хольмгрен в примечании на с. 324 своей работы [III.178]. Пусть $u(x, y)$ — функция, непрерывная на Q, нечетная по x, удовлетворяющая при $x \neq 0$ уравнению (15.8). Так же как в случае уравнения Лапласа, получаем, что u — решение уравнения теплопроводности (15.8) в Q. Кроме того, можно показать, что эта функция аналитична по x. Представим функцию u степенным рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{2n+1}(y)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \tag{15.9}$$

где

$$u_{2n+1} = \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}}\bigg|_{x=0}.$$

Используя уравнение (15.8), находим

$$\frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

и, следовательно, $u_{2n+1} = d^n u_1/dy^n$. Поэтому с учетом сходимости ряда (15.9) получаем

$$\left|\frac{\partial^n u_1}{\partial y^n}\right| < \frac{(2n+1)!M}{\rho^{2n+1}}, \quad n = 0, 1 \ldots, \quad y \in (-1, 1), \tag{15.10}$$

где значения M и ρ не зависят от n. Ясно, что последовательность неравенств (15.10) — менее ограничительное условие на функцию u_1, чем последовательность неравенств (15.7); условию (15.10) удовлетворяют и неаналитические функции, простым примером которых служит функция $\exp(-1/|y|)$ на интервале $(-1, 1)$.

Между условиями (15.7) и (15.10) имеется принципиальное различие. Аналитическая функция, т. е. функция, удовлетворяющая неравенствам (15.7), полностью определяется своими значениями и значениями всех своих производных в некоторой заданной точке. Класс функций, удовлетворяющих последовательности неравенств (15.10), этим свойством не обладает. Действительно, функцию, тождественно равную нулю на отрезке $[-1, 0]$, можно продолжить на полуинтервале $(0, 1]$ как нулем, так и функцией $\exp(-1/y)$.

В работе [I.178] Адамар ставит задачу «исследования условий роста последовательных производных функции действительной переменной, которые определяли бы продолжение этой функции...». Приведем точную формулировку этой задачи. Пусть $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность положительных чисел. Классом $C\{M_n\}$ называется множество бесконечно дифференцируемых на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функций $f(x)$, для которых существует такая константа K, что при всех $x \in [a,\, b]$ выполняются неравенства

$$|\,f^{(n)}(x)\,| \leqslant K^n M_n$$

при любом n. Ясно, что $C\{n!\}$ — класс аналитических функций. Класс $C\{M_n\}$ называется квазианалитическим, если любая его функция, равная нулю вместе со всеми производными в некоторой точке $x_0 \in [a,\, b]$, тождественно равна нулю на $[a,\, b]$. Теперь проблема Адамара формулируется следующим образом: для каких последовательностей $\{M_n\}$ классы $C\{M_n\}$ являются квазианалитическими?

В 1921 г. А. Данжуа [III.100] доказал квазианалитичность класса $C\{M_n\}$ для случая, когда последовательность $\{M_n\}$ удовлетворяет некоторым ограничениям регулярности и

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty.$$

В частности, условия Данжуа выполняются для последовательностей

$$M_n = n!(\log n)^n, \quad M_n = n!(\log n)^n(\log\log n)^n, \quad \ldots$$

Т. Карлеман в работе [III.68] устранил ограничения регулярности на последовательность $\{M_n\}$ в теореме Данжуа и в 1926 г. нашел необходимое и достаточное условие квазианалитичности:

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{m_n} = \infty, \tag{15.11}$$

где $m_n = \inf_{k\geqslant n} \sqrt[k]{M_k}$ [III.69].

Например, класс $C\{n!(\log n)^{n(1+\varepsilon)}\}$, $\varepsilon > 0$, не квазианалитический, так как из формулы Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1))$$

следует, что $m_n \approx n(\log n)^{1+\varepsilon}/e$, поэтому ряд $\sum m_n^{-1}$ сходится.

Другое условие, эквивалентное условию (15.11), но отличное от него по форме, предложил в 1929 г. Островский [III.297]:

$$\int^{\infty} \log T(r)\frac{dr}{r^2} = \infty,$$

где $T(r) = \sup\limits_{n\geqslant 1} r^n/M_n$.

После обзора последних достижений в проблеме квазианалитичности Адамар и Мандельбройт [I.253, с. 28] пишут: «Совершенно неверно, что аналитические функции — самые общие среди изучаемых, и считать их таковыми было бы ошибкой. Но аналитические функции — самые простые и важные в том смысле, что они служат *конкретными* и *точными* примерами, поступающими из приложений». Это замечание сопровождается сноской: «Недавние работы Жюлиа позволяют на таких примерах, как проблема итерации, бросить взгляд на то, какой может стать теория квазианалитических функций в будущем». Ретроспективно в этих словах можно усмотреть пророческое предсказание появления теории фракталов тридцатью годами позднее в работах племянника Шолема Мандельбройта Бенуа Мандельброта.

Хотя сама задача Адамара и была полностью решена к 1926 г., развитие идей, вызванных ею к жизни, на этом не остановилось. Были поставлены и исследованы различные модификации проблемы квазианалитичности (С. Н. Бернштейн, Ш. Мандельбройт, А. Бёрлинг и др.), найдены важные приложения к теории рядов Фурье, проблеме моментов, теоремам единственности аналитических функций и другим вопросам математического анализа. С этой темой читатель может познакомиться по книге Мандельбройта [III.263].

§ 15.3. Фундаментальные (элементарные) решения

Работа Адамара [I.114] о фундаментальных решениях и интегрировании линейных дифференциальных уравнений в частных производных появилась в журнале «Annales de l'École Normale Supérieure» в 1904 г. В этой статье была предложена процедура построения частных решений для уравнений общего вида

$$\sum_{i,j=1}^{m} A_{ij}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{m} B_i(y)\frac{\partial u}{\partial y_i} + C(y)u = 0 \tag{15.12}$$

с аналитическими коэффициентами, $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Сейчас, следуя Лорану Шварцу, фундаментальными решениями называют функции (или обобщенные функции), удовлетворяющие уравнению с δ-функцией в правой части. Знание таких решений важно, так как они представляют собой ядра интегральных операторов, обратных к дифференциальным. Поэтому при их помощи можно выразить решение дифференциального уравнения, в правой части которого находится произвольная функция. Во времена Адамара математики пользовались другим (эквивалентным в эллиптическом случае) определением, выделяя фундаментальное решение заданием его асимптотики вблизи особой точки или поверхности. Об одном из исследованных Адамаром фундаментальных решений — функции Грина задачи о прогибе пластины — мы уже рассказывали.

Оператору Лапласа в $\mathbb{R}^m$ соответствует фундаментальное решение

$$v(y) = \begin{cases} (2-m)^{-1} s_m |y|^{2-m} & \text{для } m > 2, \\ (2\pi)^{-1} \log|y| & \text{для } m = 2, \end{cases}$$

где s_m — $(m-1)$-мерная площадь границы единичного m-мерного шара. Для уравнений с переменными коэффициентами найти фундаментальное решение явно удается лишь в редких случаях. В 1891 г. Пикар предложил метод построения фундаментального, т. е. имеющего логарифмическую особенность, решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} + C(y)u = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2.$$

Алгоритм Пикара приводит к представлению решения в виде сходящегося ряда. В дальнейшем Зоммерфельд, Гильберт и сам Адамар решили ту же задачу для общего уравнения с аналитическими коэффициентами при $m = 2$. В многомерном случае частные результаты были получены Фредгольмом и Хольмгреном. Одним из результатов упомянутой выше статьи Адамара 1904 г. была теорема существования в окрестности точки фундаментального решения эллиптического уравнения (15.12) с аналитическими коэффициентами, зависящими от m переменных. (Впоследствии требование аналитичности было снято Э. Леви и Гильбертом.)

Опишем кратко результат Адамара. Он начинает с введения особой длины дуги, которую он определяет как следующий интеграл по дуге:

$$l = \int \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} B_{ij}\, dy_i\, dy_j},$$

где $[B_{ij}]$ — матрица, обратная матрице $[A_{ij}]$. В случае эллиптических уравнений с действительными коэффициентами этот интеграл положителен, и, находя его минимальное значение на множестве всех дуг, соединяющих две точки, мы получим «расстояние» между этими точками. Дуги, вдоль которых этот интеграл принимает минимальное значение, называются геодезическими. Через $\Gamma(y)$ Адамар обозначил квадрат нового расстояния от начала координат до точки $y \in \mathbb{R}^m$. Фундаментальное решение он построил в виде

$$U = \Gamma^{\frac{2-m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Gamma^k, \tag{15.13}$$

если число m нечетно, и

$$U = \Gamma^{\frac{2-m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \Gamma^k + \log \Gamma \sum_{k=0}^{\infty} v_k \Gamma^k, \tag{15.14}$$

если число m четно.

Вычисляя коэффициенты разложений в (15.13) и (15.14), Адамар считал переменные $y_1, \ldots, y_m$ комплексными. Функции u_k и v_k определяются как решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль геодезических, исходящих из начала координат, а условие регулярности функций u_k и v_k в начале координат позволяет найти фундаментальное решение с точностью до постоянного множителя.

Используя комплексную область, Адамар сумел рассмотреть с единой точки зрения эллиптические и гиперболические уравнения (15.12). В гиперболическом случае интеграл l может быть недействительным или нулем и «расстояние» от точки y до начала координат следует определять не как минимальное, а как стационарное значение интеграла l. Таким образом, решения (15.13) и (15.14) гиперболических уравнений могут иметь особенности не только в начале координат, но и на действительной поверхности $\{y \in \mathbb{R}^m : \Gamma(y) = 0\}$, которая называется характеристическим коноидом. Этот коноид в случае постоянных коэффициентов A_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, совпадает с характеристическим конусом.

Строго говоря, в гиперболическом случае построенные Адамаром решения (15.13) и (15.14) не являются фундаментальными в терминологии, используемой в современной математике. В соответствии со сказанным выше под фундаментальным решением задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $(t,\,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$)

$$u_{tt} - \omega^2 \Delta u = 0$$

принято понимать обобщенную функцию v, удовлетворяющую задаче

$$v_{tt} - \omega^2 \Delta v = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \quad v|_{t<t_0} = 0.$$

Например, в случае нечетного n справедлива следующая формула:

$$v(x,\,t) = (2\pi^{(n-1)/2}\omega)^{-1}\delta^{(n-3)/2}(\omega^2(t-t_0)^2 - |x - x_0|^2),$$

где $t > t_0$ и $\delta^{(k)}$ — производная k-го порядка δ-функции Дирака одной переменной. Естественно, Адамар не мог воспользоваться этим понятием, и его «фундаментальное решение» волнового уравнения имеет при нечетном n следующий вид:

$$w(x,\,t) = (\omega^2(t-t_0)^2 - |x - x_0|^2)^{(1-n)/2}.$$

В дальнейшем, чтобы избежать терминологической путаницы, мы будем, следуя более поздним работам Адамара, и в частности его книге [I.223], называть построенные им решения элементарными.

Между прочим, метод Адамара оказался пригодным и для построения «настоящих» фундаментальных решений уравнения (15.12) (см. [III.90, с. 734–737]). Позднее он был модифицирован благодаря предварительному использованию разложения δ-функции на плоские волны (Л. Асгейрссон, Ф. Джон).

Р. Курант пишет: «Достижение Адамара состояло, во-первых, в том, что было построено фундаментальное решение; это построение можно осуществить прямо, не пользуясь теми упрощениями, которые были получены благодаря предварительному разложению n-мерной δ-функции на плоские волны с последующим интегрированием по единичной сфере» [III.90, с. 734]. Небезынтересно привести слова Адамара из его книги [I.372, с. 53]:

«Я должен закончить перечисление этих промахов случаем, который я совершенно не могу объяснить: каким образом, найдя метод для построения условий разрешимости задачи из теории уравнений в частных производных, который очень сложным и запутанным способом приводит к искомому результату, я не увидел в моих собственных вычислениях деталь, которая освещала всю задачу, и оставил это открытие более счастливым и вдумчивым последователям? Это мне трудно постичь».

Возможно, Адамар судит себя слишком строго. В. М. Бабич в письме к авторам этой книги высказывает следующее мнение: «Считаю со всей определенностью, что в случае линейного гиперболического уравнения второго порядка метод разложения δ-функции Дирака на плоские волны хуже метода Адамара: решение получается в сложном, ничем не оправданно сложном виде».

Отметим в заключение, что использованная Адамаром конструкция элементарного решения была первым математическим применением так называемого пространственно-временного лучевого метода асимптотического описания волновых явлений, получившего широкое развитие в последние десятилетия (см. [III.17]).

§ 15.4. Задача Коши для гиперболических уравнений

Высшим достижением Адамара в теории уравнений в частных производных было полное решение задачи Коши для общих линейных гиперболических уравнений второго порядка. В 1905 г. в продолжении статьи о фундаментальных решениях, о которой мы рассказывали ранее, он получает результат для трех пространственных переменных [I.119]. Случай произвольной размерности был изучен им в 1908 г. [I.148]. Итог этим исследованиям был подведен в лекциях, прочитанных Адамаром в Йельском университете в 1920 г. и изданных отдельной книгой в 1923 г. [I.223] на английском языке. Французское издание появилось в 1932 г. в Париже [I.305]. «Эта книга — настоящий шедевр, и своим содержанием, ясностью и обилием идей она вдохновляла всех исследователей в области уравнений в частных производных следующего поколения», — пишут Мандельбройт и Шварц в обзоре жизни и научных трудов Адамара [II.43, с. 115].

Непосредственными предшественниками Адамара были Кирхгоф, Бельтрами и Вольтерра. В их работах, выполненных в конце XIX в., была развита матема-

Эудженио Бельтрами (1835–1900)

тическая теория световых (или акустических) волн, описываемых задачей Коши для волнового уравнения. В работе [I.239, с. 66] Адамар писал: «Пораженный, как все геометры, красотой результатов Вольтерра, я вознамерился перенести их на линейные дифференциальные уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, иначе говоря, на распространение волн в неоднородных средах».

Чтобы сделать изложение результатов Адамара более ясным, напомним некоторые классические факты, касающиеся этой проблемы. Рассмотрим волновое уравнение (14.4), где ω — постоянная скорость света или звука, а Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным $(x_1, \ldots, x_n) = x$. Пусть решение u удовлетворяет данным Коши (14.6).

При $n = 3$ решение задачи (14.4), (14.6) задается формулой Пуассона

$$u(x,\, t) = tM_{x,\omega t}(g) + \frac{\partial}{\partial t}(tM_{x,\omega t}(f)), \tag{15.15}$$

где $M_{x,r}(f)$ — среднее значение функции f на сфере с центром в точке x и радиусом r. При $n = 2$ решение задачи (14.4), (14.6) можно получить из уравнений (15.15) следующим образом. Предположим, что функции f и g в уравнениях (14.6) не зависят от третьей пространственной переменной. После простых преобразований правой части в формуле Пуассона приходим к следующему представлению решения:

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2\pi\omega}[\mu_{x,\omega t}(g) + \frac{\partial}{\partial t}\mu_{x,\omega t}(f)], \tag{15.16}$$

где

$$\mu_{x,r}(f) = \iint\limits_{|x-z|<r} \frac{f(z)\, dz}{(r^2 - |x-z|^2)^{1/2}}.$$

В своей книге [I.223, с. 59] Адамар писал:

«Итак, перед нами первый пример того, что мы называем „методом спуска“. Может показаться излишним придумывание специальных слов для обстоятельства в общем-то незначительного, использовавшегося уже на первых стадиях теории. Но так как мы будем часто обращаться к нему, то нам будет удобно располагать специальным термином для его обозначения. Метод состоит в том, что отмечается следующий факт: если можно сделать многое, то можно сделать и меньшее; если можно проинтегрировать уравнение с m независимыми переменными, то можно сделать это и для уравнений, в которые входят лишь $m - 1$ независимых переменных».

Мы увидим далее, как метод спуска, примененный Адамаром в весьма нетривиальной ситуации, позволил ему добиться принципиального упрощения доказательства.

Мы продолжаем рассматривать уравнение (14.4) с n пространственными переменными. Требуется найти представление решения более общей задачи Коши

$$u|_S = f, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = g, \tag{15.17}$$

где f и g — достаточно гладкие функции, заданные на поверхности S, и ν — нормаль к поверхности S. Поверхность S должна быть пространственного типа, т. е. во всех ее точках косинус угла между нормалью ν и направлением времени должен удовлетворять неравенству

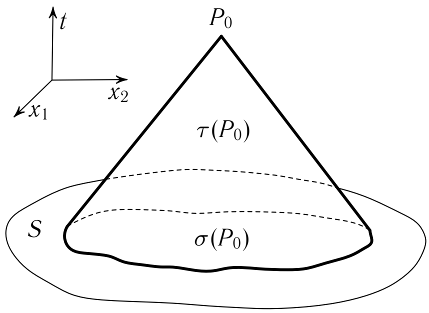
$$|\cos(\nu,\, t)| > \omega(1 + \omega^2)^{-1/2}.$$

Если это условие нарушается, то задача Коши, вообще говоря, неразрешима.

Пусть $P_0 = (x_0,\, t_0)$ — точка, в которой мы собираемся найти решение, и пусть характеристический конус

$$|\cos(\nu,\, t)| = \omega(1+\omega^2)^{-1/2}$$

с вершиной P_0 вырезает на поверхности S ограниченный участок $\sigma(P_0)$. Область в $\mathbb{R}^{n+1}$, заключенную между характеристическим конусом и $\sigma(P_0)$, обозначим $\tau(P_0)$ (см. рисунок).



Чтобы выразить $u(P_0)$ в квадратурах, воспользуемся следующей формулой Грина, которую легко проверить интегрированием по частям:

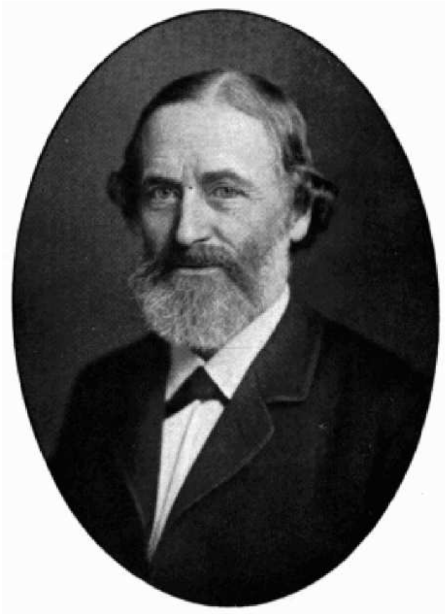
$$\int\limits_{\tau(P_0)} uLv\, d\tau = \int\limits_{\sigma(P_0)} (uNv - vNu)\, d\sigma = \int\limits_{\tau(P_0)} vLu\, d\tau,$$

где $L = \partial^2/\partial t^2 - \omega^2\Delta$ и N — дифференциальный оператор, определенный на S равенством

$$N = \cos(\nu,\, t)\frac{\partial}{\partial t} - \omega^2\sum_{i=1}^{m}\cos(\nu,\, x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Функции u и v в формуле Грина произвольны, и если под u понимать решение задачи (14.4), (14.6), а в качестве v взять фундаментальное решение задачи Коши, которое мы рассмотрели в предыдущем параграфе, то в левой части мы получим искомое значение решения, а в правой части — некоторое выражение, не содержащее неизвестных функций. Разумеется, необходимо проверить, что найденная формула для $u(P_0)$ действительно дает решение задачи.

Описанный способ решения, кажущийся сейчас идейно и технически простым, во времена Адамара, и тем более до него, был неосуществим из-за отсутствия теории и самого понятия обобщенной функции. Тем не менее задача Коши для волнового уравнения и для некоторых его обобщений была решена в трудах Римана, Кирхгофа и Вольтерра, а также в последующих исследованиях О. Тедоне, Ш. Кулона и Р. д'Адемара. Все названные авторы использовали модификации формулы Грина. Появление расходящихся интегралов преодолевалось заменой



Густав Роберт Кирхгоф
(1824–1887)

решения $u(x,\, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, интегралом

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^{n-2} u(x,\, \tau)\, d\tau,$$

после чего решение определялось дифференцированием. Этот прием, вполне оправданный в случаях, к которым он был применен, не распространяется на общие линейные гиперболические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Еще одна характерная черта методики предшественников Адамара видна уже на примере вспомогательного решения

$$v(x,\, t;\, x_0,\, t_0) = \log \frac{\omega(t-t_0) + \sqrt{\omega^2(t_0-t)^2 - |x_0-x|^2}}{|x_0-x|},$$

использованного Вольтерра при выводе его знаменитого представления для цилиндрических волн. Дело в том, что функция v обращается в бесконечность не только на границе характеристического конуса, но и на его оси. Решения Вольтерра физически соответствуют непрерывно действующим источникам колебаний[1]. В общем случае такие решения весьма непросто строить. Как исходный пункт теории сколько-нибудь общих гиперболических уравнений решения Вольтерра, по-видимому, непригодны.

[1] Элементарное решение Адамара при четном числе пространственных переменных соответствует источнику колебаний импульсного мгновенного характера.

Адамар ставит перед собой цель найти представление решения задачи Коши для произвольного линейного гиперболического уравнения второго порядка

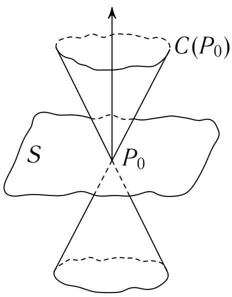
$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0 \tag{15.18}$$

с переменными коэффициентами. «Исходным пунктом этих исследований, — пишет он в предисловии к йельским лекциям, — послужили работы Римана, Кирхгофа и, особенно, фундаментальные труды Вольтерра о сферических и цилиндрических волнах. Я стремился продолжить работу итальянского геометра, видоизменив и расширив ее так, чтобы можно было применить ее ко всем нормальным гиперболическим уравнениям, а не к единственному из них» [I.223, с. 7].

Напомним одно из основных понятий теории гиперболических уравнений вида (15.18). Рассмотрим коническую поверхность

$$C(P_0) = \left\{ P = (x_1, \ldots, x_{n+1})\colon \sum_{i,j=1}^{n+1} h_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) = 0 \right\}$$

с вершиной $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0)$, где $[h_{ij}]_{i,j=1}^{n+1}$ — матрица, обратная к матрице $[a_{ij}]_{i,j=1}^{n+1}$. В силу гиперболического характера уравнения эта поверхность имеет две полы и делит $(n+1)$-мерное пространство на три непересекающиеся зоны: две «внутренние» и одну «внешнюю». Говорят, что произвольная поверхность S ориентирована пространственным образом (или является поверхностью пространственного типа), в том и только в том случае, когда нормаль к S в любой точке $P_0 \in S$ направлена строго в сторону одной из внутренних зон, ограниченных поверхностью $C(P_0)$ (см. рисунок). Нетрудно проверить, что это определение вполне согласуется с определением поверхности пространственного типа, данным ранее для волнового уравнения.



Как и в случае волнового уравнения, условия Коши для уравнения (15.18) задаются на поверхности S, ориентированной пространственным образом. Именно так поставленную задачу Коши (15.18), (15.17) и решает Адамар. Остановимся на его результатах, следуя книге [I.223]. О первом этапе — построении элементарного решения сопряженного уравнения

$$L^*(v) := \sum_{i,j=1}^{n+1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij}v) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv = 0 \tag{15.19}$$

мы рассказали в § 15.3. В результате Адамар получает функцию v точек P и P_0 вида

$$v = \begin{cases} V\Gamma^{-(n-1)/2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ V\Gamma^{-(n-1)/2} + W\log\Gamma, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где V и W — голоморфные функции $2n + 2$ координат, а Γ — квадрат геодезического расстояния между точками P и P_0.

Если бы Адамар мог подставить в формулу Грина для операторов L и L^* фундаментальное решение задачи Коши (в нашем понимании этого термина), то вопрос был бы исчерпан так же, как в случае волнового уравнения. Однако он должен был оперировать лишь с элементарным решением $v(P, P_0)$, прямая подстановка которого в формулу Грина приводит к расходящимся интегралам. Для того чтобы преодолеть указанную трудность, Адамар вводит некоторое новое понятие, связанное с расходящимися несобственными интегралами от функций одной или нескольких переменных. Речь идет о так называемой конечной части расходящегося интеграла.

Пусть, например, рассматривается интеграл

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{h} \frac{f(x)}{x^{r+1}}\, dx,$$

где r — положительное нецелое число. Если функция f имеет в точке 0 достаточное число производных, то существуют такие коэффициенты c_k $(0 \leqslant k < r$, k — целое число), что разность

$$I(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{[r]} c_k \varepsilon^{k-r}$$

имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0+$. Этот предел Адамар назвал конечной частью интеграла $I(0)$ и обозначил

$$\left|\overline{\int\limits_{0}^{h} \frac{f(x)}{x^{r+1}}\, dx.}\right. \tag{15.20}$$

Он распространяет на этот новый объект классические правила замены переменной, интегрирования по частям и дифференцирования по верхнему пределу. Далее Адамар переходит к кратным интегралам и, сводя их обычным способом к однократным, определяет и изучает выражение

$$\left|\overline{\int\limits_{\Omega} \frac{f(x)}{G(x)^{r+1}}\, dx,}\right.$$

где Ω — n-мерная область, часть границы которой образована гладкой поверхностью $G(x) = 0$.

Через много лет, анализируя связи между интуитивными и логическими путями математического открытия, Адамар написал:

«...Меня спросили, как я мог догадаться использовать для интегрирования уравнений в частных производных прием „конечной части расходящегося интеграла“; разумеется, если этот прием рассматривать сам по себе, то он может показаться типичным примером „мышления около“. Но в действительности мой рассудок долгое время противился такой идее, до тех пор, пока я не был вынужден этого сделать; я пришел к ней шаг за шагом, и читатель-математик легко проверит это, если возьмет на себя труд посмотреть мои исследования по этому вопросу, особенно мои „Исследования о фундаментальных решениях и по интегрированию линейных уравнений в частных производных“, 2-й мемуар, в частности, начиная со с. 121 (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, tome XXII, 1905). Я не мог избежать этого метода, как заключенный в новелле Эдгара По „Маятник и колодец“ не мог избежать колодца в центре своей камеры» [I.372, с. 86].

Малоизвестно, что термин «конечная часть расходящегося интеграла» был введен д'Адемаром в диссертации, представленной в Сорбонну в декабре 1903 г. и защищенной в апреле 1904 г. Ссылаясь на заметку Адамара [I.110] от 7 декабря 1903 г., д'Адемар пишет: «Независимо друг от друга мы поняли роль этих конечных частей» [III.4, с. 371]. В диссертации д'Адемара это понятие было применено к построению решения уравнения цилиндрических волн, а Адамар использовал конечную часть при решении задачи Коши для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами и любым числом независимых переменных.

Вычисление конечной части расходящегося интеграла — это, говоря современным языком, один из способов регуляризации обобщенной функции. В настоящее время регуляризация расходящихся интегралов, состоящая в замене их на конечную часть «по Адамару», по-видимому, имеет лишь историческое значение: регуляризация с помощью аналитического продолжения интегралов по параметру удобнее и лучше разработана.

Однако в теории одномерных гиперсингулярных интегральных уравнений, возникающих, в частности, при решении задач теории упругости и теории тонкого крыла, часто используется понятие конечной части расходящегося интеграла в смысле Адамара (ссылки см. в [III.79]).

Поразительно, что регуляризация расходящегося интеграла

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx,$$

где r — любое положительное нецелое число, была выполнена ещё Коши (см. работу [III.75], опубликованную в 1826 г.). Коши называл такую величину «экстраординарным интегралом», понимая под ним то же, что и мы, а именно

$$\int_0^h \frac{f(x)-F(x)}{x^{r+1}}\,dx,$$

где $F(x)$ — отрезок ряда Тейлора

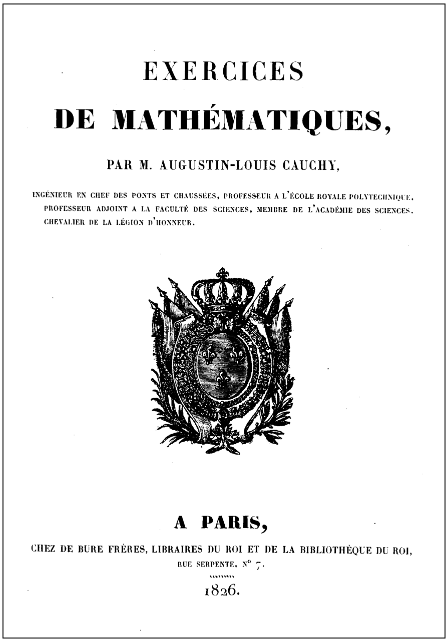
$$F(x)=\sum_{k=0}^{[r]} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}.$$

Как показывают элементарные вычисления, разность между конечной частью (15.20) и экстраординарным интегралом Коши равна

$$\sum_{k=0}^{[r]} f^{(k)}(0)\frac{h^{k-r}}{k!(k-r)}.$$

Коши доказал, что обычные правила дифференцирования и интегрирования по параметру остаются в силе для экстраординарных интегралов[1].

[1] Относительно истории понятия конечной части расходящегося интеграла см. статью Ф. Ж. Бюро [III.63].



EXERCICES

DE MATHÉMATIQUES,

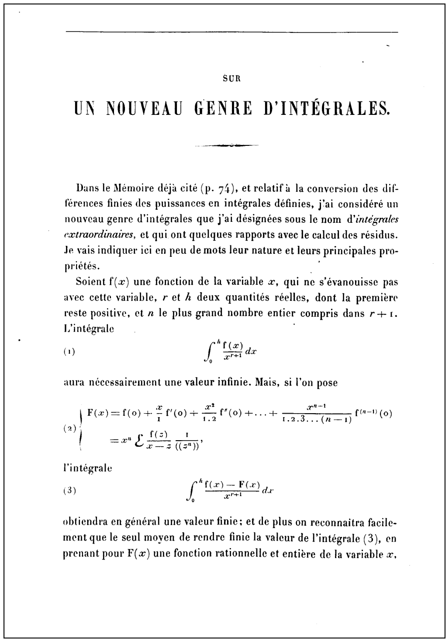
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N° 7.

1826.



SUR

UN NOUVEAU GENRE D'INTÉGRALES.

Dans le Mémoire déjà cité (p. 74), et relatif à la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies, j'ai considéré un nouveau genre d'intégrales que j'ai désignées sous le nom d'*intégrales extraordinaires*, et qui ont quelques rapports avec le calcul des résidus. Je vais indiquer ici en peu de mots leur nature et leurs principales propriétés.

Soient $f(x)$ une fonction de la variable x, qui ne s'évanouisse pas avec cette variable, r et h deux quantités réelles, dont la première reste positive, et n le plus grand nombre entier compris dans $r+1$. L'intégrale

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x^{r+1}}\,dx \tag{1}$$

aura nécessairement une valeur infinie. Mais, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} F(x) &= f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0) \\ &= x^n \mathcal{E} \frac{f(z)}{x-z}\frac{1}{((z^n))}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

l'intégrale

$$\int_0^h \frac{f(x)-F(x)}{x^{r+1}}\,dx \tag{3}$$

obtiendra en général une valeur finie; et de plus on reconnaitra facilement que le seul moyen de rendre finie la valeur de l'intégrale (3), en prenant pour $F(x)$ une fonction rationnelle et entière de la variable x,

Статья Коши 1826 г. о несобственных интегралах. В своей статье 1844 г. [III.74] Коши писал, что работа по несобственным интегралам в своей начальной форме была представлена Академии наук 2 января 1815 г.

Но вернемся к решению задачи Коши (15.18), (15.17), которое сначала получено Адамаром для четных значений n. Последнее ограничение, которое и мы в течение некоторого времени будем считать выполненным, было вызвано различием в асимптотических представлениях элементарных решений уравнения (15.19) при четных и нечетных n.

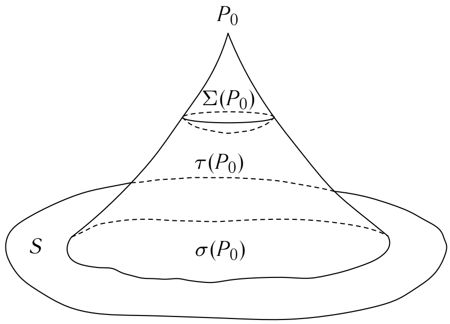
Адамар записал формулу Грина для операторов L и L^* в терминах конечных частей интегралов. Эта новая формула Грина, в которой u — искомое решение задачи Коши, а v — элементарное решение уравнения (15.18), имеет вид

$$\left|\!\overline{\,\int_{\Sigma(P_0)} (uN(v) - vN(u) + Muv)\,d\Sigma\,}\right. = \left|\!\overline{\,\int_{\sigma(P_0)} (uN(v) - vN(u) + Muv)\,d\sigma\,}\right.. \tag{15.21}$$

Здесь N — дифференциальный оператор, задаваемый формулой

$$N(v) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}\cos(\nu,\, x_i)\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

M — гладкая функция, множество $\sigma(P_0)$ определено так же, как в случае волнового оператора, но роль характеристического конуса переходит к характеристическому коноиду $\{P\colon \Gamma(P, P_0) = 0\}$ с вершиной в точке P_0. Этот коноид представляет собой характеристическую поверхность уравнения (15.18), имеющую коническую особенность в точке P_0, или, иначе говоря, касающуюся конуса $C(P_0)$ в точке P_0. Через $\Sigma(P_0)$ обозначена расположенная внутри того же коноида часть поверхности $(n+1)$-мерного шара малого радиуса δ с центром в точке P_0 (см. рисунок).



Подчеркнем, что без знака конечной части равенство (15.21) не имеет никакого смысла, поскольку при приближении точки P_0 к краям поверхностей $\Sigma(P_0)$ и $\sigma(P_0)$, расположенным на коноиде $\Gamma = 0$, функция v стремится к бесконечности как $\Gamma^{(1-n)/2}$. Важно также, что правая часть равенства выражается через данные Коши и, следовательно, известна. Что касается левой части, то, устремляя радиус δ к нулю, Адамар показал, что она стремится к $u(P_0)$ с точностью до постоянного множителя. Итак, при четном n формула для $u(P_0)$ получена. Затем Адамар проверяет, что правая часть равенства (15.21) действительно дает решение задачи Коши.

Случай нечетного n потребовал специального подхода, в первую очередь потому, что невозможно ввести конечную часть появляющихся интегралов. Напомним, что в определении конечной части показатель r был дробным. Здесь же показатель $(n-1)/2$, с которым Γ входит в знаменатель подынтегрального выражения, есть целое число. Поэтому Адамар приходит к цели, виртуозно используя «спуск» от четного n к нечетному. Об этом приеме уже шла речь на с. 435. Позднее, в 1924 г., Адамар привел и прямое построение решения при нечетном n, но для этого ему пришлось использовать вместо конечной части интегралов так называемую логарифмическую часть. Полученные Адамаром представления решений задачи Коши при нечетных и четных n привели его к интересным выводам относительно так называемого принципа Гюйгенса, обсуждению которого будет посвящен следующий параграф.

Трудности, возникшие у Адамара в случае нечетного n, были связаны с тем, что он использовал элементарное решение вида

$$V\Gamma^{(1-n)/2} + W\log\Gamma,$$

неудобное для работы. В наши дни, пользуясь методикой Адамара, можно построить решение вида

$$V_1\delta^{(n-3)/2}(\Gamma) + W_1\theta(\Gamma),$$

где θ — функция Хевисайда, а $\delta^{(l)}$ — производная δ-функции одного переменного порядка l (см. [III.90]). Подставляя последнее решение в формулу Грина, можно найти решение задачи Коши приблизительно таким же образом, каким ее решил Адамар для четных n. Разумеется, Адамар не мог в начале XX в. использовать производных δ-функции.

Другие идеи, порожденные обсуждаемыми представлениями решений и кратко намеченные Адамаром, связаны с теорией потенциала для гиперболических уравнений. Для волнового уравнения с двумя пространственными переменными интегральные операторы типа потенциалов простого и двойного слоя впервые были определены Вольтерра [III.410]. Адамар вводит потенциалы в многомерном случае и подчеркивает их аналогию с обычными гармоническими потенциалами. Сравнительно недавно (см. [III.18]) теория гиперболических потенциалов была развита и применена к построению решений смешанной задачи для волнового уравнения.

Книгу «Задача Коши» Адамар заканчивает исследованием гиперболических уравнений с достаточно гладкими неаналитическими коэффициентами. Исходным пунктом его исследования послужили работы Гильберта и погибшего в Первой мировой войне молодого итальянского математика Эудженио Элиа Леви. Оба они, занимаясь эллиптическими уравнениями, исходили из явного первого приближения к фундаментальному решению. Это приближение (параметрикс — в терминологии Гильберта), будучи подставлено в уравнение, дает в правой части особенность не слишком высокого порядка. В частности, Леви при помощи этого параметрикса смог построить фундаментальное решение. Однако в гиперболическом случае метод Леви и Гильберта встречает большие трудности в связи с появлением особенности на поверхности характеристического коноида. Тем не менее Адамару удается при помощи приближенного элементарного решения гиперболического уравнения с достаточно гладкими коэффициентами свести задачу Коши к некоторому интегральному уравнению типа Вольтерра. Последнее, как известно, может быть решено методом последовательных приближений.

Исследование разрешимости задачи Коши, проведенное в начале XX в. Адамаром, послужило отправным пунктом для дальнейшего прогресса теории гиперболических уравнений. Вдохновленные непосредственно книгой Адамара, в начале 30-х годов написали свои работы, посвященные другим подходам к решению задачи Коши для гиперболического уравнения (15.18), М. Матиссон [III.271], Ю. Шаудер [III.356] и С. Л. Соболев [III.368], [III.370]. Шаудер использовал энергетическое неравенство, чтобы продолжить локальное решение Коши—Ковалевской и тем самым построить глобальное решение задачи Коши. В 1935 г. Соболев опубликовал свою работу «Задача Коши в пространстве функционалов» [III.369], в которой впервые ввел обобщенные функции как непрерывные функционалы на пространстве s раз дифференцируемых функций, которые обращаются в нуль вне некоторого характеристического коноида. Аппарат обобщенных функций, разработкой которого Лоран Шварц занимался начиная с 1947 г., революционизировал теорию дифференциальных уравнений.

Заметим, что к своим теоремам вложения С. Л. Соболев пришел в связи с задачей Коши [III.370]. Вот что пишет Соболев в этой заметке: «В некоторых частных случаях, как, например, в теории квазилинейных гиперболических уравнений, рассмотренных Шаудером, пользование этими уточненными оценками позволяет точно установить нужное число непрерывных производных у начальных условий для того же уравнения». Между прочим, в разговоре с авторами этой книги С. Л. Соболев вспоминал, что поводом к написанию заметки [III.370] послужил его спор с математиком и специалистом по аэродинамике Ф. И. Франклем о наименьшем числе производных данных Коши, обеспечивающем совпадение обобщенного решения с классическим. Соболевские теоремы вложения явились фундаментом обширной области функционального анализа.

Построив теорию задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка, Адамар, естественно, интересовался возможностью обобщения своей методики на более общие уравнения и системы уравнений. Об этом он писал в книге [I.223]. Многие годы спустя выяснилось, что, отправляясь от конструкции Адамара, можно написать асимптотическое разложение фундаментального решения ультрагиперболических уравнений, в случае высокочастотного точечного источника колебаний в неоднородной среде, фундаментального решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка и т. д. (обзор таких исследований см. в [III.16]). Однако попытки прямого распространения метода Адамара на общий случай не увенчались успехом. Построение фундаментального решения задачи Коши для общих гиперболических систем удалось осуществить только с помощью формул Радона и Фурье, представляющих δ-функцию в виде наложения плоских волн. Аналогичным образом фундаментальные решения для эллиптических уравнений были построены Ф. Джоном, для гиперболических уравнений — Л. Асгейрссоном, Ф. Джоном, Р. Курантом и П. Лаксом, В. М. Бабичем (с использованием формулы Радона) и П. Лаксом (с использованием формулы Фурье). Теория задачи Коши продолжает интенсивно развиваться. Далеко не полную библиографию по этому кругу проблем можно найти в книге [III.129], где она занимает более сотни страниц.

В заключение добавим, что И. Г. Петровский ввел понятие гиперболической системы. Обобщая упомянутый выше подход Шаудера, Петровский разработал глубокие методы исследования задачи Коши для таких систем [III.307], [III.308]. Интересно, что его работы, выполненные в 1930-е гг., не были непосредственным следствием из работ Адамара по гиперболическим уравнениям второго порядка. Петровский заметил как-то раз, что если бы он поддался обаянию Адамара и последовал проложенным тем путем, то не сумел бы прийти к своим собственным результатам. В 1950-х годах конструкция И. Г. Петровского была упрощена и модернизирована в работах Ж. Лере и Л. Гординга. Параметрикс задачи Коши для гиперболических и более общих уравнений был построен благодаря созданию нового аппарата — так называемых интегральных операторов Фурье (В. П. Маслов, Л. Хёрмандер и др.).

§ 15.5. Принцип Гюйгенса

Около 1900 г. внимание Адамара было привлечено к «одному замечательному обстоятельству, возникающему при интегрировании некоторых уравнений в частных производных второго порядка» [I.87, с. 19]. Речь идет о свойстве решений гиперболических уравнений, характеризующем процесс распространения световых или акустических волн — о так называемом принципе Гюйгенса. В опубликованном в 1690 г. в Гааге «Трактате о свете» знаменитый голландский

Христиан Гюйгенс (1629–1695)

ученый Христиан Гюйгенс, рассматривая свет как возмущение эфира — гипотетической среды, которая, как принято было считать, заполняла все пространство, предложил некоторый геометрический закон распространения этого возмущения, названный впоследствии его именем. В исходной форме принцип Гюйгенса заключался в следующем. Возмущение, вызванное источником света, сосредоточенным в начальный момент времени $t = 0$ в точке O, распространяется как сферическая волна с постоянной скоростью. Каждая точка, в которую пришел свет, в свою очередь становится его источником и также испускает сферическую волну. Суммарный световой эффект при $t = t_0$ представляет собой огибающую вторичных сферических волн, возникающих при $t = t'$ при любом t', $0 \leqslant t' < t_0$. Таким образом, первоначально принцип Гюйгенса заключал в себе некоторый способ построения фронта волны.

В лекциях о задаче Коши, прочитанных в Йельском университете, Адамар проводит логический анализ сформулированного утверждения, представляя его в виде следующего силлогизма [I.223, с. 53–54]:

«(A) (Бóльшая посылка). Действие явлений, существующих в момент времени $t = 0$, на состояние материи в последующий момент $t = t_0$ совершается через посредство каждого промежуточного момента времени $t = t'$, т. е. (предполагая, что $0 < t < t_0$) для нахождения состояния в момент $t = t_0$ мы можем, исходя из состояния при $t = 0$, найти состояние при $t = t'$, а из этого последнего — искомое состояние в конечный момент $t = t_0$.

(B) (Меньшая посылка). Если в момент $t = 0$, или, более точно, в течение короткого промежутка $\varepsilon \geqslant t \geqslant 0$, возникает световое возмущение, локализованное в непосредственной близости от точки O, то его воздействие будет сосредоточено при $t = t'$ в непосредственной окрестности поверхности сферы с центром в O и радиусом $\omega t'$, т. е. в очень тонком сферическом слое с центром в O, заключающем в себе предыдущую сферу.

(C) (Заключение). Для того чтобы вычислить воздействие нашего первоначального светового возмущения, возникшего в точке O в момент $t = 0$, можно заменить его соответствующей системой возмущений, возникших при $t = t'$ и распределенных на поверхности сферы с центром в точке O и радиусом $\omega t'$».

«Случилось так, — пишет далее Адамар, — что разные авторы называли принципом Гюйгенса какое-то одно из этих трех положений. Как будет видно, наше суждение по поводу каждого из них должно быть совершенно различным».

Положение (A) — это философский принцип детерминизма, «универсальный закон, отражающий существование для всех типов эволюционных уравнений группы преобразований, которые представляют переход от момента времени t к моменту времени t_0 как композицию перехода от t к t' и перехода от t' к t_0» [там же]. Положение (C) — физический закон, имеющий широкую область применения, его математическое описание эквивалентно общему свойству гиперболических уравнений.

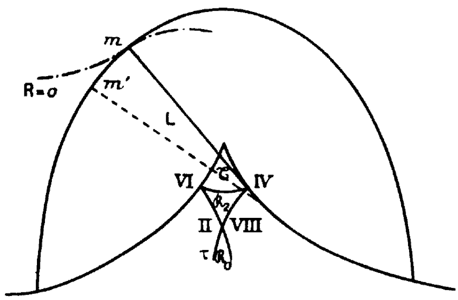
Иной характер имеет утверждение (B). Оно, говоря словами Адамара, «представляет собой совершенно особое свойство некоторых уравнений частного вида». Адамар называет утверждения (A) и (B) «большей и меньшей посылками Гюйгенса» соответственно, чтобы отличить их от утверждения (C).

В 1920—30-е гг. Адамар посвятил несколько работ большей посылке Гюйгенса для общих линейных гиперболических уравнений. Адамара интересовали интегральные уравнения, выражающие групповое свойство решений[1]. В более ранних работах [I.236], [I.240], [I.254] и [I.281] исследования Адамара облегчались гипотезой об отсутствии особых точек на семействе волновых фронтов, соответствующем рассматриваемому интервалу времени. Напомним, что волновой фронт, распространяющийся от кривой, есть геометрическое место точек, равноудаленных от этой кривой. Если время распространения мало и начальная кривая гладкая, то волновой фронт также гладкий, но начиная с некоторого

[1]В этом отношении отметим утверждение М. Рида и Б. Саймона: «Связь между дифференциальными уравнениями в частных производных и теорией полугрупп восходит к Ж. Адамару, который заметил, что решение задачи Коши обладает полугрупповым свойством по t, в работах „О смешанной задаче для дифференциальных уравнений в частных производных“ [Bull. Soc. Math. France, **31** (1903), с. 208-224] и „Принцип Гюйгенса и аналитическое продолжение“ [Bull. Soc. Math. France, **52** (1924), с. 241–278]. Но теория полугрупп не применялась систематически к дифференциальным уравнениям в частных производных до тех пор, пока Хилле и Иосида в конце 1940-х гг. не разработали аналитические средства» [III.339].

момента на нем могут возникать особые точки. Они располагаются на кривых, называемых каустиками, которые являются огибающими лучей, нормальных к начальной кривой. В двух последующих работах на эту тему [I.287], [I.310] Адамар ограничивается случаем трех независимых переменных, но допускает пересечение волновых фронтов и каустик, что делает более тонкой проблему обоснования большей посылки

Fig. 5.



Волновые фронты и каустики (рисунок заимствован из статьи Адамара [I.310])

Геометрическая теория равноудаленных кривых, огибающих, каустик и тому подобных объектов восходит к XVII в. и имеет богатую историю (см. [III.62, с. 301]). Недавно она обрела новую жизнь в теории катастроф [III.396], [III.13] и нашла новые приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных в рамках «микролокального анализа» (см., например, [III.117]). Интересно, что Адамар отметил трудность теории особых точек на волновых фронтах еще в 1930 г.

Позднее под принципом Гюйгенса стали понимать меньшую посылку Адамара, точнее говоря, утверждение о том, что волна, вызванная возмущением, локализованным во времени и пространстве, имеет задний фронт, т. е. возмущение исчезает полностью. Такое понимание принципа Гюйгенса и будет принято в дальнейшем.

Проиллюстрируем математическое содержание принципа Гюйгенса на примере задачи Коши для волнового уравнения. Пусть начальные данные f и g в (14.6) обращаются в нуль при $x^2 + y^2 + z^2 > R^2$, где R — некоторое положительное число. Из формулы Пуассона (15.15) немедленно следует, что возмущение u в точке P, удаленной на расстояние $|P| > R$ от начала координат, равно нулю до момента времени $t = (|P| - R)/\omega$ и снова обращается в нуль при $t > (|P| + R)/\omega$. Точка P колеблется только в течение промежутка времени $2R/\omega$, и волна имеет как передний, так и задний фронт. Тем самым принцип Гюйгенса оказывается справедливым.

Интересно сравнить этот результат со случаем цилиндрических волн. Обратимся к формуле (15.16). Допустим, как и в трехмерном случае, что функции f и g обращаются в нуль при $|P| > R$, т. е. что начальное возмущение сосредоточено в цилиндре $|P| \leqslant R$. Тогда по формуле (15.16), как в случае трех пространственных переменных, $u(P, t) = 0$ при $t \leqslant (|P| - R)/\omega$. Однако после этого момента возмущение никогда не исчезает: волна имеет четко очерченный передний фронт, но не имеет заднего. Свойство двумерных волновых движений иметь бесконечный хвост называется диффузией волн. Наличие диффузии, очевидно, равносильно отсутствию принципа Гюйгенса.

Из явной формулы для решения задачи Коши для волнового уравнения с n пространственными переменными, полученной О. Тедоном (1898), следует, что при $n = 3, 5, 7, \ldots$ диффузии нет, т. е. для указанных размерностей справедлив принцип Гюйгенса; в то же время при $n = 1, 2, 4, \ldots$ диффузия имеет место. Вот что образно пишет об этом эффекте Л. Шварц:

«Тогда как в трехмерном пространстве сферическая волна, исходящая из одной точки, распространяется по сферам возрастающего радиуса, в случае четного числа измерений такая волна заполняет весь шар, а не только сферу. Так, если бы мы слушали концерт в четномерном пространстве, после прохождения волны сохранялся бы остаточный звук. Я полагаю, что при той точности, какую мы требуем от музыки, разница была бы довольно существенной» [II.5, с. 18].

Адамаром впервые был рассмотрен принцип Гюйгенса для общего линейного гиперболического уравнения (15.18) второго порядка с переменными коэффициентами [I.223]. Из представлений для решения задачи Коши он вывел, что при всех четных n этот принцип не выполняется. Позднее в заметке [I.324] Адамар специально остановился на случае $n = 1$, показав наличие диффузии. Для остальных размерностей задача оказалась сложнее. Адамар установил, что необходимым и достаточным условием отсутствия диффузии при нечетных $n \geqslant 3$ является тождественное обращение в нуль некоторой функции $2n + 2$ переменных, входящей в разложение элементарного решения формально сопряженного уравнения (15.19) (другими словами, разложение (15.13) не должно содержать логарифмического члена). Относительно такого ответа на вопрос об условиях справедливости принципа Гюйгенса Адамар высказывает пожелание, «чтобы он стал „намного более полным“. Было сформулировано необходимое и достаточное условие, при котором выполняется принцип Гюйгенса, но мы не знаем, как найти уравнения, которые ему удовлетворяют, и даже существуют ли такие уравнения, кроме (e_{2m_1-1}) (и, конечно, кроме тех, которые выводятся из (e_{2m_1-1}) с помощью очевидных преобразований»[1] [I.223, с. 236].

Очевидные преобразования, о которых здесь идет речь, — это замена независимых переменных, а также умножение решения и всего уравнения на заданные функции. Уравнения, сводящиеся друг к другу при помощи таких преобразований, называют эквивалентными.

Поставленная Адамаром задача описания всего класса уравнений вида (15.18), для которых принцип Гюйгенса имеет место, полностью не решена до сих пор. Усилиями ряда математиков был удовлетворительно исследован вопрос о существовании уравнений без диффузии, неэквивалентных волновому. В конце 1930-х годов ученик Адамара Мирон Матиссон анонсировал отрицательный ответ на этот вопрос в случае трех пространственных переменных.

[1] Здесь (e_{2m_1-1}) — волновое уравнение с нечетным числом независимых переменных.

Доказательство было опубликовано в 1939 г. [III.272], но относилось только к случаю постоянных коэффициентов главной части оператора. Продолжения работы не появилось, и, как выяснилось впоследствии, само утверждение для переменных коэффициентов a_{ij} было неверным. Независимо и при помощи другого метода Асгейрссон получил в случае $n=3$ отрицательный ответ на вопрос Адамара, также предположив дополнительно, что коэффициенты a_{ij} — постоянные[1]. В работе [I.359], посвященной памяти Матиссона, Адамар дал еще одно доказательство той же теоремы.

Первый пример уравнения без диффузии, неэквивалентного волновому, был построен К. Штельмахером для $n=5$ [III.377]. Он показал, что уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sum_{i=1}^{5}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-c(t,\,x)u=0$$

удовлетворяющие принципу Гюйгенса, исчерпываются (с точностью до эквивалентности) тремя случаями:

$$c=0,\qquad c=-2t^{-2},\qquad c=2x_1^{-2}.$$

Позднее Штельмахер распространил свой пример на любые нечетные значения $n>5$ [III.378]. Для единственной оставшейся размерности $n=3$ класс уравнений (15.18) без диффузии, неэквивалентных волновому, был построен П. Гюнтером [III.160]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-f(x-t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{15.22}$$

где f — произвольная положительная функция. Доказательство справедливости принципа Гюйгенса для уравнения (15.22), данное Гюнтером, состояло в проверке выполнения упомянутого выше необходимого и достаточного условий Адамара.

Н. Х. Ибрагимов вскоре обнаружил [III.186] (см. также [III.189], [III.187] и [III.188]), что принцип Гюйгенса тесно связан с существованием нетривиальной группы конформных отображений в $(n+1)$-мерном римановом пространстве V_{n+1} с метрикой

$$dl^2=\sum_{i,j}b_{ij}(x)\,dx_i\,dx_j,$$

где $[b_{ij}]=[a_{ij}]^{-1}$, которую часто использовал Адамар. Примерами пространств с нетривиальной конформной группой являются плоскость, пространство постоянной кривизны, вообще любое пространство, конформное плоскости, а также пространство V_4, соответствующее уравнению (15.22). В предположении существования нетривиальной конформной группы Ибрагимов полностью решил проблему Адамара для уравнения (15.18) в случае $n=3$. Именно, справедливо следующее утверждение. Пусть $n=3$, и пусть у риманова пространства V_4 имеется нетривиальная конформная группа. Тогда уравнение (15.18) в V_4 удо-

[1] Работа Асгейрссона [III.14] была опубликована только в 1956 г., но он получил результат независимо и приблизительно в то же время, что и Матиссон. (А. Дуглис [III.109] упоминает о неопубликованной рукописи Асгейрссона 1936 г.; см. по тому же поводу [III.90].)

влетворяет принципу Гюйгенса в том и только том случае, когда оно инвариантно относительно полной группы конформных преобразований; причем такое конформно-инвариантное уравнение единственно с точностью до преобразований эквивалентности.

Эти результаты — лишь немногие в списке известных контрпримеров и положительных утверждений относительно принципа Гюйгенса. Читателю, который заинтересуется историей и современным состоянием этой проблемы, мы рекомендуем обратиться к книгам Гюнтера [III.161] и Ибрагимова [III.188] и статьям [III.162], [III.28].

Отметим в заключение, что с принципом Гюйгенса тесно связана теория лакун фундаментальных решений гиперболических уравнений. Лакуной, грубо говоря, называется (связная) область, в которой фундаментальное решение тождественно равно нулю. Основополагающим в теории лакун является полученный И. Г. Петровским критерий наличия лакуны для однородного строго гиперболического уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Этот результат впоследствии вызвал к жизни ряд фундаментальных исследований (см. [III.15] и обзор в комментариях к избранным работам И. Г. Петровского [III.310]).

Глава 16

Последние работы Адамара

§ 16.1. Книга о психологии изобретения

Мы уже говорили, что в 1945 г. в США была издана написанная там годом ранее книга Адамара «Исследование психологии процесса изобретения в области математики». Она довольно быстро получила известность, и по сей день ее продолжают цитировать в книгах различного содержания, написанных математиками и психологами. Как математик догадывается о новых закономерностях, как находит доказательства теорем? Подобные вопросы интересовали Адамара на протяжении всей его творческой жизни, но только в возрасте 80 лет он решил подвести итог своим размышлениям. В предисловии к своей книге Адамар пишет:

«Этот труд, как и всё, что можно было бы написать об изобретении в математике, вдохновлялся прежде всего знаменитым докладом Анри Пуанкаре в Психологическом обществе в Париже. Впервые я обратился к этой теме во время одного из заседаний в „Центре синтеза“ в Париже в 1937 г. Но более основательно я рассмотрел эту тему в курсе лекций, прочитанном в 1943 г. в „Свободной школе высших исследований“ в Нью-Йорке» [I.372, с. 3].

Перед отъездом в Европу из США Адамар передал текст лекций на английском языке в издательство Принстонского университета. Перевод на французский язык, выполненный Жаклин Адамар, появился только в 1959 г. В рецензии на книгу Г. Харди писал:

«Это — первая, если не считать известной лекции Пуанкаре, попытка математика самого высокого ранга показать характер его собственного мышления и мышления других математиков... Мы должны быть благодарны Адамару за эту небольшую, но очень важную брошюру, написанную со всей основательностью одним из величайших математиков последнего пятидесятилетия, повествующим с очаровательной непосредственностью о своих достижениях, триумфах и промахах. И именно этот личный элемент представляется мне самым привлекательным» [II.16, с. 60].

Книга Адамара написана очень доступно. В ней почти нет специальных философских и математических терминов. Производит сильное впечатление широта интересов автора. Он комментирует взгляды философов, психологов, художников, поэтов, таких как Абеляр и блаженный Августин, А. Бергсон и Г. Спенсер, З. Фрейд и А. Шопенгауэр, О. Роден и П. Валери. О высочайшей интеллигентности автора свидетельствует и его манера вести полемику, когда уважение к оппоненту является условием sine qua non.

Много внимания уделяет Адамар феномену бессознательного и его роли в научных открытиях. Подчеркивая, что бессознательное все еще находится в начальной стадии изучения (это верно и в наши дни), он считает, что оно играет главную роль в творческом процессе, что озарения (непредсказуемые взлеты вдохновения) являются результатом скрытой от индивидуума длительной работы мозга. Рассказ Пуанкаре об одном открытии, сделанном им в теории автоморфных функций [I.372, с. 31], является хорошей иллюстрацией тому, что, по словам Харди из цитированной выше его статьи, может на собственном опыте подтвердить и любой другой исследователь, напряженно работавший над той или иной темой. Известный французский поэт Поль Валери, который был оригинальным мыслителем и занимался естественными науками, говорил нечто подобное об озарении в поэтическом творчестве.

Конечно, высказывались и другие точки зрения. Так, Гаусс, глубоко религиозный человек, объяснял озарение, которое явилось ему в момент одного открытия в теории чисел, вдохновением, ниспосланным свыше, французский биолог Ш. Николь считал озарение случайным фактором, подобным мутациям в генетике. Не отрицая роли случайности, Адамар возражает, ссылаясь на то, что объяснить акт открытия «чистым случаем — это значит ничего не объяснять, а утверждать, что существуют явления без причины» [I.372, с. 19].

Адамар подчеркивает разнообразие как специфическую особенность подсознания. Прежде всего, подсознательные процессы скрыты глубоко внутри, они начинаются с абсолютно несознательного и завершаются процессом, близким к сознательному. Во-вторых, их разнообразие проявляется в множестве вариантов, возникающих в процессе решения проблемы. «Творить — это отличать, выбирать», — пишет Пуанкаре [III.321, с. 312]. Этот афоризм напоминает слова, приписываемые Микеланджело: «Чтобы изваять статую из куска мрамора, я всего лишь отсекаю все лишнее». Адамар цитирует слова Валери: «Для того, чтобы изобретать, надо быть в двух лицах. Один образует сочетания, другой выбирает то, что соответствует его желанию и что он считает важным из того, что произвёл первый» [I.372, с. 27].

Важным критерием выбора служит эстетический фактор — красота. В математике она может проявляться по-разному: кратчайший логический путь, ведущий к цели, различного рода ассоциации и аналогии, обобщения, желание восстановить пробел в архитектонике той или иной дисциплины. В качестве одного из примеров последнего Адамар называет идею, которая привела Вольтерра к открытию функционального анализа: «Почему этот крупный итальянский геометр стал оперировать с функциями так, как в исчислении бесконечно малых оперируют с числами, т. е. рассматривая функцию как непрерывно меняющийся элемент? Только потому, что он отдавал себе отчёт в том, что этот метод должен был гармонично дополнить структуру математического здания, точно так же, как архитектор видит, что здание будет лучше уравновешено, если прибавить к нему одно крыло» [I.372, с. 101].

Адамар в разных местах книги настойчиво акцентирует роль эстетического фактора. Он утверждает, что приводимые им примеры отметают сомнение, выраженное Г. Уоллесом[1] по поводу значения чувства прекрасного в качестве двигателя научного открытия. Адамар пишет: «Наоборот, создается впечатление, что у нас в математике это чувство является чуть ли не единственным полезным» [I.372, с. 101]. При всем том понятие красоты в математике субъективно. Так, Л. Эйлер и К. Ф. Гаусс, питавшие приверженность к крайне длинным вычислениям, несомненно, находили в них красоту, в то время как Пуанкаре говорил, что он не любит больших вычислений. Опираясь на свой опыт и опыт других математиков, Адамар отмечает, что когда прямые пути поиска не приводят к решению задачи, часто имеет смысл пойти обходным путем, обратиться к той или иной смежной области. Следуя психологу П. Сурио, он называет это «думать около».

Очень интересный вопрос ставится в разделе «Попытки управлять бессознательным». Можно ли лучше понять бессознательное, можно ли на него воздействовать? Известно, что в состоянии гипноза человек способен на действия, которые для него невозможны в нормальном состоянии: пройти по натянутому канату, проявить артистические способности и т. п. Адамар пишет: «...Стоило бы поставить опыт на крупных математиках, предложив им в состоянии гипноза проблему, решение которой неизвестно (например, одну из тех, о которых мы говорим в гл. VIII). Если бы они нашли при этом решение, то доказали бы одновременно данную теорему и такое действие гипноза» [I.372, с. 45].

В целом, по Адамару, творческий процесс слагается из четырех этапов:

1) выбор проблемы и сознательная предварительная работа;
2) «инкубация» — период бессознательного мышления;
3) озарение — момент открытия;
4) анализ полученного результата, его проверка и оформление.

Катализатором творческого поиска является та или иная интуиция — геометрическая, физическая и т. д. Значение интуиции часто подчеркивал и Гильберт, который вместе с тем в своих работах по математической логике и реализации аксиоматического метода в конкретных дисциплинах говорил о возможности дедуктивных построений без обращения к интуиции. Точку зрения Адамара на роль интуиции разделяет и Д. Пойа [III.323, с. 319]:

> «Я полагаю, что каждый человек, в том числе и математик-профессионал, предпочтёт интуитивное понимание предмета формально-логическим построениям. Жак Адамар — выдающийся математик нашего времени — выразил эту мысль в таких словах: „Цель математической строгости состоит в том, чтобы санкционировать и узаконить завоевания интуиции, — и никакой другой цели у неё никогда не было“».

Еще один вопрос, обсуждаемый в книге, — необходимы ли слова для мышления. Адамар расходится по этому вопросу во мнениях с М. Мюллером[2], утвер-

[1] Грэм Уоллес (1858–1932) — английский политолог и психолог, автор книг «Жизнь Френсиса Плейса» (1898), «Человеческая природа в политике» (1908), «Великое общество» (1914) и др. Адамар цитирует его книгу «Искусство мышления» (1926).

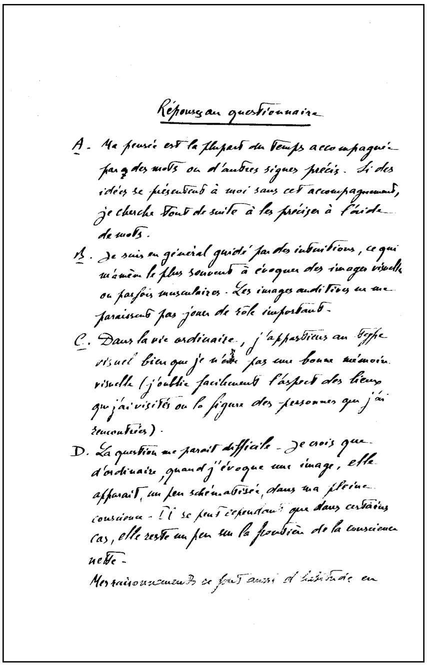
[2] Макс Мюллер (1823–1900) — ориенталист, психолог и филолог. Адамар упоминает его книгу «Наука о мышлении» (1887).

ждавшим, что всякое мышление, будь то научное или ненаучное, так или иначе связано со словами. В качестве примеров неязыкового мышления Адамар называет игру в шахматы, общение глухонемых. Поскольку его прежде всего интересовало математическое творчество, он во время работы над книгой обратился к А. Эйнштейну, Н. Винеру и другим крупнейшим ученым, проживавшим тогда в США, с просьбой ответить, какую роль играет слово в их творчестве. Ответы большинства опрошенных, приведенные в книге, подтвердили мнение Адамара.

Знаменитый физик Луи де Бройль был одним из участников опроса. Его ответы содержатся в следующей записке, датированной 26 августа 1945 г., когда книга Адамара уже была опубликована (во втором издании книги о записке Луи де Бройля не упоминается).

«А. Мое мышление по большей части сопровождается словами или другими точными знаками. [Такова была точка зрения Адамара (до некоторой степени с учетом возражений Пойа). У самого Адамара и у большинства опрошенных им математиков возникали при их исследовательской работе смутные зрительные образы. — *Авт.*] Если идеи приходят ко мне без этого сопровождения, я сразу же пытаюсь придать им точную форму с помощью слов.

Б. В целом я руководствуюсь интуицией, которая чаще всего приводит меня к рождению зрительных образов или иногда к физическим ощущениям. Что же касается слуховых образов, то они, как мне кажется, не играют важной роли.



Réponses au questionnaire

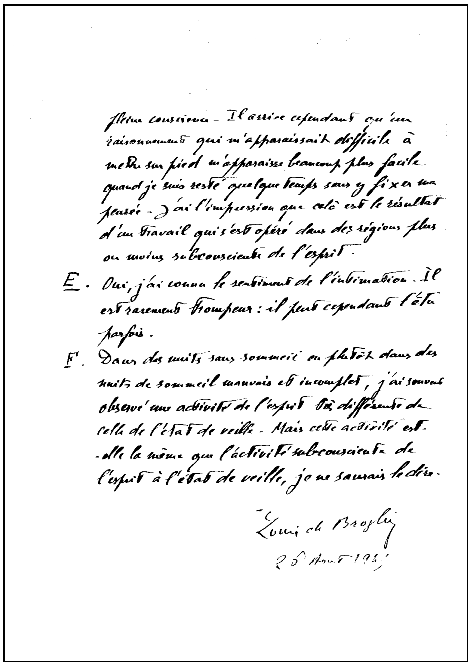
A. Ma pensée est la plupart du temps accompagnée par des mots ou d'autres signes précis. Si des idées se présentent à moi sans cet accompagnement, je cherche tout de suite à les préciser à l'aide de mots.

B. Je suis en général guidé par des intuitions, ce qui m'amène le plus souvent à évoquer des images visuelles ou parfois musculaires. Les images auditives ne me paraissent pas jouer de rôle important.

C. Dans la vie ordinaire, j'appartiens au type visuel bien que je n'aie pas une bonne mémoire visuelle (j'oublie facilement l'aspect des lieux que j'ai visités ou la figure des personnes que j'ai rencontrées).

D. La question me paraît difficile. Je crois que d'ordinaire, quand j'évoque une image, elle apparaît, un peu schématisée, dans ma pleine conscience. Il se peut cependant que dans certains cas, elle reste un peu sur la frontière de la conscience nette.

Mes raisonnements se font aussi d'habitude en



pleine conscience. Il arrive cependant qu'un raisonnement qui m'apparaissait difficile à mettre sur pied m'apparaisse beaucoup plus facile quand je suis resté quelque temps sans y fixer ma pensée. J'ai l'impression que cela est le résultat d'un travail qui s'est opéré dans des régions plus ou moins subconscientes de l'esprit.

E. Oui, j'ai connu le sentiment de l'intimation. Il est rarement trompeur : il peut cependant l'être parfois.

F. Dans des nuits sans sommeil ou plutôt dans des nuits de sommeil mauvais et incomplet, j'ai souvent observé une activité de l'esprit très différente de celle de l'état de veille. Mais cette activité est-elle la même que l'activité subconsciente de l'esprit à l'état de veille, je ne saurais le dire.

Louis de Broglie

25 Août 1945

Ответы Луи де Бройля на анкету Адамара

В. В обычной жизни я принадлежу к визуальному типу, хотя и не обладаю хорошей зрительной памятью (я легко забываю, как выглядят места, где мне довелось побывать, или лица людей, с которыми я встречался).

Г. Этот вопрос кажется мне трудным. Думаю, что обычно, когда у меня возникает зрительный образ, он появляется в моем сознании несколько схематично. Возможно, однако, что в некоторых случаях он остается на границе ясного сознания.

Обычно я рассуждаю, максимально сосредоточившись. Но иногда, когда ход рассуждений вызывает затруднения, мне гораздо легче некоторое время не фиксировать на нем внимание. Полагаю, что это результат работы, производимой в более или менее подсознательных частях моего разума.

Д. Иногда я испытываю нечто вроде указания свыше. Такое указание редко бывает ошибочным, но иногда все же бывает.

Е. Бессонными ночами или, скорее, ночами, когда я плохо и недостаточно сплю, я часто ощущаю активность разума, весьма отличную от его активности в бодрствующем состоянии. Но не могу сказать, является ли эта активность такой же, как подсознательная активность разума в бодрствующем состоянии» [IV.20].

Возможность разделения математиков на интуитивистов и логиков занимает основное место в гл. VII «Различные типы математических умов». Адамар приводит слова Ф. Клейна из лекции 1893 г., прочитанной в США: «Кажется, что сильная пространственная интуиция присуща тевтонской науке, в то время как чисто логический критический дух более развит в латинской и еврейской расах» [I.372, с. 84].[1] Адамар ясно выражает отрицательное отношение к высказываниям такого рода, проводя параллель с расистскими взглядами нацистов. Он пишет: «...Клейн недвусмысленно рассматривает интуицию с её таинственным характером как нечто высшее по отношению к прозаическому пути логики..., и он, очевидно, счастлив провозгласить такое превосходство своих соотечественников» [I.372, с. 84]. Приводя ряд примеров, опровергающих высказывания Клейна, Адамар, подчеркивая неуместность всяких критериев, исходящих из национальных признаков, даже критикует своего друга и соотечественника Дюэма:

«Такую тенденциозную интерпретацию фактов находишь всякий раз, когда в игру вступают националистические и расистские страсти. В начале Первой мировой войны один из наших самых крупных ученых и историков науки физик Дюэм был, точно так же, как и Клейн, сбит с толку, но в противоположном смысле. В достаточно подробной статье он изображает немецких ученых, особенно математиков, как людей, лишенных интуиции, или даже как сознательно её отметающих... Если бы тот или другой [Клейн или Дюэм] был прав, то из всего

[1] Недавний пример аналогичных взглядов можно обнаружить в воспоминаниях В. И. Арнольда об А. Н. Колмогорове [III.363]: «Технической работы по обобщению построенной теории Андрей Николаевич старался избегать (он говорил, между прочим, что на этой стадии особенно преуспевают евреи, — скорее с восхищением, поскольку свое инстинктивное отвращение к этому виду деятельности Андрей Николаевич воспринимал как недостаток)».

сказанного читатель сделал бы вывод, что либо французы, либо немцы никогда не делали важных открытий» [I.372, с. 84].

Отмечая, что Пуанкаре был чужд националистических высказываний, Адамар добавляет, что если до сих пор во всем был согласен с Пуанкаре, то теперь вынужден разойтись с ним в оценке характера творчества некоторых конкретных ученых, в частности их общего учителя Эрмита: «Но считать Эрмита логиком! Ничто не может мне казаться менее правдоподобным. Казалось, что методы всегда рождались в его уме каким-то таинственным образом» [I.372, с. 86].

В разделе «Выбор темы» гл. IX Адамар, приводя слова Э. Ренана[1]: «...научный вкус существует так же, как существует вкус художественный или литературный» [I.372, с. 99], говорит, что в выборе предмета исследований не обязательно руководствоваться возможностью немедленных приложений, они большей частью приходят позднее. Имея в виду свою теорему об умножении особенностей аналитических функций, Адамар вспоминает, что когда он сообщил ее своему другу Дюэму, тот задал ему вопрос о применениях.

«Когда я ответил, что до сих пор не думал над этим, Дюэм, который был не только выдающимся физиком, но и замечательным художником, сравнил меня с живописцем, который начал рисовать пейзаж, не выходя из мастерской, и который идёт на природу, чтобы открыть в природе пейзаж, соответствующий его картине. Это сравнение показалось мне верным, но все же я был прав, в том, что о приложениях не надо заботиться: они пришли позднее» [I.372, с. 100].

Далее в своей книге Адамар иллюстрирует ту же точку зрения на примере своего неравенства для определителей. Доказывая это неравенство, Адамар не помышлял о его полезности; у него только было чувство, что оно интересно. Через несколько лет Фредгольм опубликовал теорию, в которой результат Адамара оказался полезным. Далее Адамар упоминает открытие Э. Картаном спиноров, связанных с геометрическими преобразованиями в теории групп, для их обнаружения «в ту эпоху не было никакого основания, кроме их эстетических свойств» [I.372, с. 100]. Ещё один пример — введенные Вольтерра функционалы, которые «...казались математическим понятием, существенно и полностью абстрактным» [I.372, с. 101]. Некоторое время спустя и спиноры, и функционалы нашли важные приложения в теоретической физике.

Итак, по Адамару, отнюдь не полезность результата, понимаемая в том или ином смысле, но красота проблемы и ощущение ее внутренней ценности должны руководить исследователем в выборе темы. Одно из приложений к его книге — «Анкета о методах работы математиков» — было опубликовано в «L'Enseignement Mathématique» (1902, Vol. 4; 1904, Vol. 6); Адамар часто его цитировал. Это перечень вопросов о том, какие привычки существуют у математиков в работе. Современный вариант этих вопросов был опубликован в 1988 г. [III.286] (см. [I.372], с. 106–109).

[1] Эрнест Ренан (1823–1892) — французский философ и историк, автор многочисленных книг, в том числе книги «Жизнь Иисуса» (1863) и пятитомной «Истории народа Израиля» (1887–1894).

§ 16.2. Работы 1950-х годов

Последние работы Адамара посвящены неевклидовой геометрии, истории математики и некоторым классическим проблемам теории параболических и эллиптических уравнений. Также отметим его книгу 1951 г. по неевклидовой геометрии в теории автоморфных функций [I.383], впервые вышедшую на русском языке и лишь недавно переведенную на английский [I.407], в которой Адамар изложил результаты Пуанкаре в этой области. В 1954 г. Адамар опубликовал работу [I.394] по параболическим уравнениям, не имеющим классических решений, которая была написана под воздействием работы А. Винтнера [III.424] (1950). Винтнер показал, что существует функция f, непрерывная на плоскости и такая, что ни в одной области $\mathcal{D}$ уравнение $\Delta u = fu$ не может иметь ненулевое решение. Под решением Винтнер понимает непрерывную функцию, для которой существуют производные u_{xx} и u_{yy} и которая удовлетворяет уравнению в каждой точке области $\mathcal{D}$.

Адамар установил такой же результат для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \tag{16.1}$$

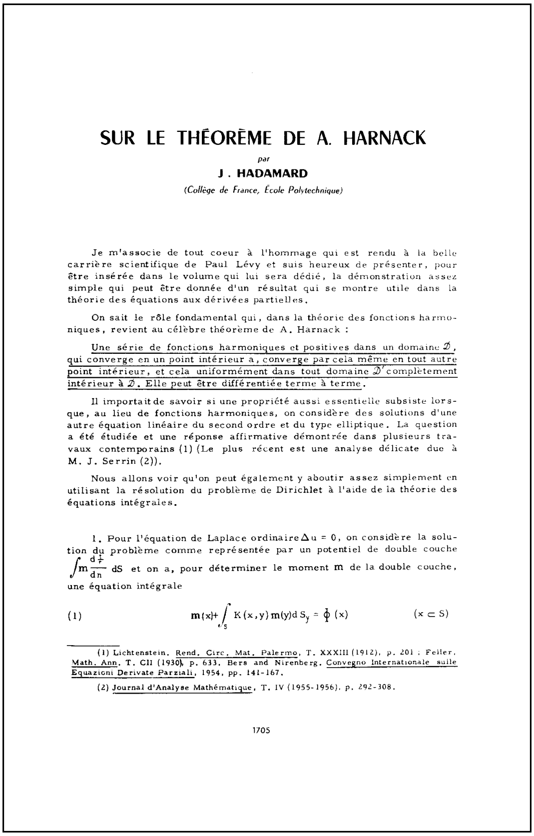
говоря о непрерывных решениях уравнения (16.1), имеющих производные u_{xx} и u_y. В конструкции Винтнера основательно использовалась работа Г. Петрини [III.306] 1909 г. о существовании первой и второй производных логарифмического потенциала. Адамар модифицировал ход рассуждений Петрини, чтобы найти необходимое условие существования производной v_{xx} двойного интеграла

$$v(x, y) = \iint\limits_{\mathcal{D}_y} f(\xi, \eta) \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{4(\eta - y)}\right) d\xi\, d\eta,$$

где $\mathcal{D}_y$ — часть данной области $\mathcal{D}$, которая лежит под прямой $\eta = y$.

В том же году вышла работа Адамара [I.395], в которой он дал следующий аналог второй теоремы Гарнака о гармонических функциях, а затем применил ее к решениям уравнения теплопроводности. Пусть $\{u_n\}$ — монотонная последовательность решений уравнения $u_{xx} - u_y = 0$ в области $\mathcal{D}$, и пусть в некоторой точке $P \in \mathcal{D}$ последовательность $\{u_n(P)\}$ сходится. Тогда последовательность $\{u_n\}$ равномерно сходится на любой собственной подобласти. Бóльшая часть работы Адамара [I.396] посвящена нетривиальному выводу результата, который утверждает, что функция Грина $G(P, Q)$ и одна из ее производных оценивается снизу расстоянием от точки P до границы области $\mathcal{D}$. Вторая теорема Гарнака для уравнения теплопроводности была получена независимо и одновременно Пини [III.312].

Последняя математическая работа Адамара [I.400] была опубликована в 1957 г. Она вошла в состав тома, посвященного Полю Леви по случаю его семидесятилетия. В этой работе Адамар дает простое доказательство второй теоремы Гарнака для общего эллиптического уравнения второго порядка с гладкими коэффициентами на основе теории граничных интегральных уравнений.



SUR LE THÉORÈME DE A. HARNACK

par

J . HADAMARD

(Collège de France, École Polytechnique)

Je m'associe de tout coeur à l'hommage qui est rendu à la belle carrière scientifique de Paul Lévy et suis heureux de présenter, pour être insérée dans le volume qui lui sera dédié, la démonstration assez simple qui peut être donnée d'un résultat qui se montre utile dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

On sait le rôle fondamental qui, dans la théorie des fonctions harmoniques, revient au célèbre théorème de A. Harnack :

Une série de fonctions harmoniques et positives dans un domaine $\mathscr{D}$, qui converge en un point intérieur a, converge par cela même en tout autre point intérieur, et cela uniformément dans tout domaine $\mathscr{D}'$ complètement intérieur à $\mathscr{D}$. Elle peut être différentiée terme à terme.

Il importait de savoir si une propriété aussi essentielle subsiste lorsque, au lieu de fonctions harmoniques, on considère des solutions d'une autre équation linéaire du second ordre et du type elliptique. La question a été étudiée et une réponse affirmative démontrée dans plusieurs travaux contemporains (1) (Le plus récent est une analyse délicate due à M. J. Serrin (2)).

Nous allons voir qu'on peut également y aboutir assez simplement en utilisant la résolution du problème de Dirichlet à l'aide de la théorie des équations intégrales.

1. Pour l'équation de Laplace ordinaire $\Delta u = 0$, on considère la solution du problème comme représentée par un potentiel de double couche $\int m \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS$ et on a, pour déterminer le moment m de la double couche, une équation intégrale

$$m(x) + \int_S K(x, y)\, m(y)\, dS_y = \Phi(x) \qquad (x \subset S) \tag{1}$$

(1) Lichtenstein. Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXXIII (1912), p. 201 ; Feller. Math. Ann. T. CII (1930), p. 633. Bers and Nirenberg. Convegno Internationale sulle Equazioni Derivate Parziali, 1954, pp. 141-167.

(2) Journal d'Analyse Mathématique, T. IV (1955-1956), p. 292-308.

1705

Первая страница последней математической статьи «О теореме Гарнака» Адамара

Интерес Адамара к теоремам Гарнака для классических уравнений математической физики можно объяснить тем, что, казалось бы, не ведающий усталости девяностодвухлетний Адамар работал над новой книгой, к рассмотрению которой мы приступаем.

§ 16.3. Книга по дифференциальным уравнениям в частных производных

Книга Адамара «Теория дифференциальных уравнений в частных производных» [I.405] была опубликована в Пекине в 1964 г. Издание было роскошным, но увидеть книгу напечатанной Адамар не успел. Вспоминая о подготовке этой книги, Лоран Шварц пишет:

«До конца жизни он чувствовал себя „ответственным“ за уравнения в частных производных, и это чувство вызывало в нем тревогу и беспокойство. После войны он редактировал книгу, которая должна была появиться в Китае на французском языке и которая резюмировала его понимание этих уравнений. Адамар ездил в Китай перед 1930 г.[1], и китайские университеты попросили его издать лекции на французском. Он начал готовить публикацию лишь после окончания войны, и редактирование оказалось очень непростым, так как он считал своим долгом сказать все-все, что он мог сказать сам и даже прочитать во всех новых работах! Очевидно, это уже не имело смысла, принимая во внимание огромное число статей по теории дифференциальных уравнений в частных производных, появившихся к тому времени, и я убежден, что эта ситуация его беспокоила.

Он начал готовить публикацию после войны и к возрасту 92 или 93 лет закончил только восемь глав из 22. Тем не менее он хотел опубликовать все! Это поразительное обстоятельство отражает степень смелости и дух задуманного им исключительного предприятия! Потратив более десяти лет на восемь глав, не отказаться от публикации следующих! В этот момент родственникам и мне удалось убедить его прекратить работу. Несомненно, задача была невыполнимой, но я считаю, что этот аспект его поведения показывает, в какой степени он до самого конца чувствовал себя связанным с математикой» [II.5, с. 19].

Последняя книга Адамара напоминает курс лекций по классической теории дифференциальных уравнений в частных производных, охватывающей множество вопросов: теорию задачи Коши для обыкновенных дифференциальных и общих уравнений в частных производных, задачу Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка, «элементарные» решения эллиптических и гиперболических уравнений, задачу Коши для линейных гиперболических уравнений второго порядка, смешанную задачу для тех же уравнений, «сингулярные» уравнения, т. е. уравнения с оператором

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad k = \mathrm{const},$$

уравнения, меняющие тип в области, и параболические уравнения второго порядка.

Значительная часть содержания отражает собственные исследования Адамара, посвященные элементарным решениям задачи Коши и смешанной задачи для гиперболических уравнений и др. В книгу вошли также такие редко включаемые в общие курсы вопросы, как винеровская теория регулярности граничной точки для задачи Дирихле, обобщенные потенциалы Марселя Рисса и их приложения к гиперболическим уравнениям, осесимметрическая теория гармонических потенциалов, уравнения второго порядка смешанного типа. Текст насыщен интересными замечаниями, мотивировками, материалом обзорного характера, ссылками на первоисточники.

Изложение — абсолютно оригинальное, несущее на себе печать личности Адамара. Литературный стиль резко отличает эту книгу от современных ей руководств по тому же предмету: в ней больше «философии», а плотность формул существенно меньше. Отличительной чертой книги является обилие ссылок на литературу конца XIX — начала XX века. Предпочтение почти везде отдано конструктивным аналитическим методам исследования уравнений. Нигде чита-

[1] Поездка Адамара в Китай состоялась в 1936 г., а не до 1930 г., как пишет Шварц.

тель не встретится ни с пространством L^2, ни с пространством Соболева, хотя по существу соответствующие концепции иногда используются.

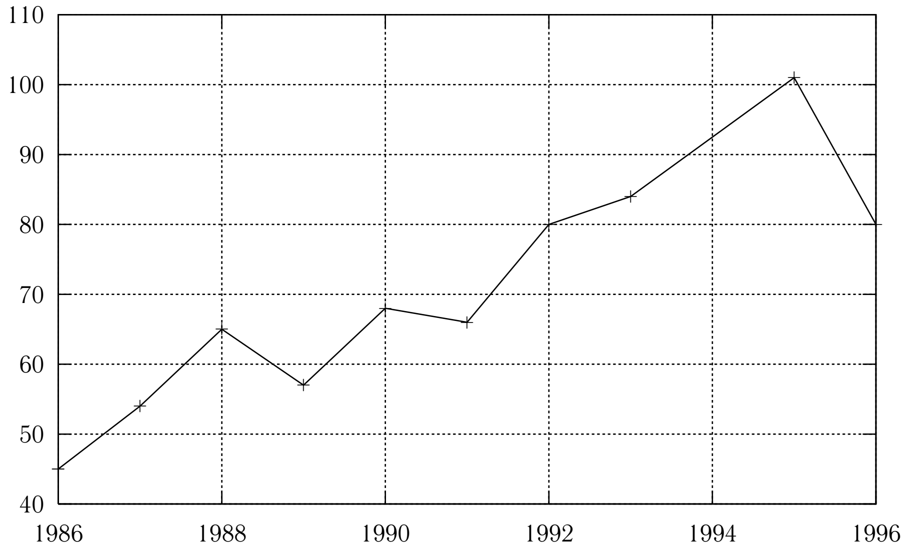
Представляла ли интерес монография Адамара в 1960-е годы, и если да, то сохранился ли он сейчас? Это — непростые вопросы, и ответы на них неоднозначны. К моменту появления книги Адамара теория уравнений в частных производных представляла собой весьма разветвленную область, обогащенную тесными контактами с набравшим полную силу функциональным анализом. Крепли ее связи с алгеброй и топологией. Уже была развита теория общих линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, и в ближайшие годы должен был появиться мощный аппарат псевдодифференциальных операторов. Поэтому даже в начале 1960-х годов вряд ли можно было рассматривать адамаровскую «Теорию дифференциальных уравнений в частных производных» как пособие для изучения математической физики того времени. Нельзя не признать, что известный отпечаток архаичности уже тогда лежал на этой работе.

Вместе с тем автором книги был один из великих математиков XX в., в течение 60 лет исследовавший уравнения в частных производных. Это уникальное обстоятельство и определило ее непреходящую ценность. По отбору рассматриваемых вопросов и глубине проникновения в них читатель чувствует руку большого мастера. Несмотря на разнообразие тематики, Адамару удалось добиться поразительной цельности изложения, что объясняется, несомненно, цементирующей ролью идеи корректности, красной нитью проходящей через весь текст. Знакомясь с книгой Адамара, испытываешь яркое ощущение живой связи математики наших дней с исследованиями классиков — ощущение, редко возникающее при чтении современных монографий.

Эпилог

Мы заканчиваем нашу книгу словами Лорана Шварца: «Его работы читали многие. Конечно, молодые математики читали их меньше, отчасти из-за того, что сильно изменился язык и новые книги выражают те же идеи на современном языке. Легче идти прямо и разбираться в этих новых публикациях. И тем не менее каждому математику очень полезно обращаться к первоисточникам!» [II.5].

Со дня кончины Адамара прошло более сорока лет. Следующий график, построенный по данным «Индекса научного цитирования» (S. C. I.)[1], показывает, что работы Адамара используются и поныне, на них ссылаются и его влияние с годами не уменьшается.



[1] Имя Адамар (Hadamard) в «Индексе научного цитирования» (S. C. I.) указано как J. Hadamard, J. Hadamand, F. Hadamard, G. Hadamard, H. Hadamard, I. Hadamard, J. M. J. Hadamard, J. S. Hadamard, J. W. Hadamard, L. Hadamard, M. Hadamard, M. J. Hadamard, P. Hadamard, T. Hadamard, J. Hadammard, I. S. Adamar, Z. Adamar. Индентифицировать Адамара можно по ссылкам на его работы.

Основные даты жизни Адамара

Основной источник следующих дат — библиографический словарь [III.78].

1865 Родился 8 декабря в Версале. Мать — Клер Мари Жанна Адамар, отец — Амедей Адамар.
1876 Поступил в лицей Людовика Великого.
1882 Бакалавр литературы и естественных наук.
1884—1888 Студент Высшей Нормальной школы.
1886 Сдал экзамен на степень лиценциата.
1887 Сдал экзамен на степень кандидата наук, провел еще один учебный год в Высшей Нормальной школе.
1888 Продолжил образование в качестве стипендиата города Парижа и Коллеж де Франс.
1888—1889 гг. Преподаватель Канского лицея, свободный от обязанностей.
1889 Назначен помощником преподавателя в лицее Св. Людовика.
1890—1893 Преподаватель математики в лицее Бюффона.
1892 Защитил диссертацию «Очерк исследования функций, заданных их разложением в ряд Тейлора». Награжден Большой премией Академии наук. Вступил в брак с Луизой Анной Тренель 28 июня.
1893—1896 Ответственный за курс на факультете естественных наук Университета Бордо.
1894 В Бордо 5 октября родился первый сын Пьер.
1896—1897 Профессор астрономии и теоретической механики факультета естественных наук Университета Бордо.
1896 Награжден премией Бордена Академии наук.
1897 В Сеноне (Жиронда) 26 июля родился второй сын Этьен.
1897—1900 Преподаватель, ведущий семинары по дифференциальному и интегральному исчислению на факультете естественных наук Парижского университета.
1897 Назначен помощником профессора аналитической и небесной механики в Коллеж де Франс.
1898 Награжден премией Понселе Академии наук.
Опубликовал книгу «Элементарная геометрия: Планиметрия».
1899 В Париже 27 февраля родился третий сын Матье.
1900—1909 Ассистент профессора на факультете естественных наук Парижского университета.
1901 В Париже 6 февраля родилась первая дочь Сесиль.
Опубликовал книги «Ряд Тейлора и его аналитическое продолжение» и «Элементарная геометрия: Стереометрия».
1902 В Париже 29 ноября родилась вторая дочь Жаклин.
1903 Опубликовал книгу «Лекции о распространении волн и уравнениях гидродинамики».
Награжден премией Пти д'Ормуа Академии наук.
1906 Избран президентом Французского математического общества.

1907 Награжден премией Вайяна Академии наук.
1908 Награжден премией Эстрад Делькро Академии наук.
1909 Назначен профессором механики в Коллеж де Франс.
1910 Опубликовал книгу «Лекции по вариационному исчислению».
1912 Назначен профессором анализа Политехнической школы.
Избран в Академию наук, где стал преемником Пуанкаре.
1913 Организовал свой семинар в Коллеж де Франс.
1916 Сыновья Пьер и Этьен убиты под Верденом.
1920 Назначен профессором Центральной школы.
1922 Опубликовал книгу «Лекции о задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных».
1926 Опубликовал первый том «Курса анализа в Политехнической школе».
1930 Опубликовал второй том «Курса анализа в Политехнической школе».
1937 Подал в отставку в Коллеж де Франс, Политехнической школе и Центральной школе.
1941 Эмигрировал в США.
1944 На фронте в Триполитании 1 июля погиб сын Матье.
1945 Возвращение в Париж.
Опубликовал книгу «Исследование психологии процесса изобретения в области математики».
1955 Награжден премией Фельтринелли Академии деи Линчеи в Риме.
1957 Представлен к Большому кресту Почетного легиона.
Награжден золотой медалью CNRS (Национального центра научных исследований Франции).
1960 Жена Луиза скончалась 6 июля.
1962 Награжден золотой медалью Академии наук.
1963 Скончался в Париже 17 октября.
1965 В Китае опубликована книга «Теория дифференциальных уравнений в частных производных».
1966 Столетие Адамара торжественно отмечено 13 января в Политехнической школе в Париже.
1968 В Париже изданы четыре тома «Собрания сочинений» Адамара.

Коллекция Адамара

Существуют математические термины, которые обычно неразрывно связаны с именами своих творцов: теорема Пифагора, евклидова геометрия, абелево преобразование, борелевское множество, постоянная Эйлера, оператор Лапласа, гильбертово пространство и т. д.

Имя Адамара связано со многими понятиями и результатами. В большинстве своем они носят имя своего творца вполне справедливо, и соответствующие термины общеприняты. Но в некоторых случаях приоритет Адамара сомнителен или приписывается ему ошибочно, несмотря на то, что его имя принято связывать с результатом или понятием.

Приводим коллекцию математических объектов, которые принято связывать с именем Адамара. Рядом с каждым из них мы приводим ссылку на тот параграф нашей книги, где упоминается соответствующий объект и/или на работу, выбранную в основном случайно, где его можно найти.

Формула Коши—Адамара для радиуса сходимости степенного ряда — § 1.9, 9.1.

Признак Адамара для особых точек — § 9.1, [III.296].

Лакуны Адамара — § 9.1, [III.36].

Теорема Адамара о лакунах — § 9.1, [III.36], [III.398].

Определители Адамара в теории мероморфных функций — § 9.1, [III.313].

Интегралы и производные Адамара дробного порядка — § 9.1, [III.355].

Теорема Адамара о трех кругах — § 2.3, 9.3, [III.398].

Теорема Адамара об умножении особенностей — § 2.4, 9.1, [III.318].

Алгебра Адамара — [III.27].

Отношение Адамара — [III.26].

Теория Адамара полярных особенностей — [III.155].

Композиция Адамара степенных рядов — § 9.1.

Порядок Адамара — § 9.1, [III.36].

Теорема Адамара о факторизации — § 9.2, [III.177], [III.398].

Теорема Адамара—Картана о римановых многообразиях неположительной кривизны (называемая также теоремой Адамара) — § 11.2, [III.40], [III.30].

Гипотеза Адамара о поверхностях отрицательной гауссовой кривизны — § 11.2, [III.349].

Преобразование графика Адамара (метод доказательства существования инвариантных многообразий в теории динамических систем) — [III.244].

Представление Адамара линейного функционала на пространстве $C[a, b]$ — § 12.5.

Производная Адамара от функционала — [III.83].

Мультипликативное неравенство Адамара — § 13.5.

Лемма Адамара—Кнезера — § 13.5.

Неравенство Ландау—Адамара — § 13.5, [III.213].

Неравенство Адамара для выпуклых функций (называемое также неравенством Эрмита—Адамара) — [III.303], [III.280].

Неравенство Адамара для определителей — § 2.3, 13.1, [III.22].

Теорема Адамара об аппроксимации определителей — [III.288].

Теорема Адамара об обращении определителей в нуль — [III.288].

Матрицы Адамара — § 13.1, [III.5], [III.413].

Матрицы Адамара кватернионного типа — [III.20].

Матрицы Адамара типа Уильямсона — [III.20].

Преобразование Адамара — [III.388].

Преобразование Уолша—Адамара — [III.388].

Коды Адамара — § 13.1, [III.261].

Дизайны Адамара — § 13.1, [III.33].

Оптическое преобразование Адамара — § 13.1, [III.168].

Спектрометр Адамара — § 13.1, [III.168].

Доминантные матрицы Адамара — § 13.1, [III.25].

Произведение Адамара матриц (называемое также произведением Шура или прямым произведением) — [III.181].

Задача Адамара униформизации множеств — § 5.5, [III.253].

Условие Лежандра—Адамара сильной эллиптичности систем дифференциальных уравнений в частных производных — § 14.2, [III.148].

Условие Френеля—Адамара распространения волн, теорема Френеля—Адамара — § 14.2, [III.401], [III.131].

Парадокс Адамара в теории распространения волн — [III.37, с. 42].

Лемма Адамара о сингулярных поверхностях — [III.402].

Вариационная формула Адамара для функций Грина — § 14.3, [III.414], [III.140].

Уравнение Адамара с функциональными производными — § 14.3, [III.239].

Гипотеза Адамара в теории пластин — § 14.3, [III.355], [III.112], [III.85].

Интегро-дифференциальное уравнение Адамара — § 14.4, [III.56].

Корректность постановки задачи по Адамару — § 15.1.

Дифференциал Адамара — [III.135].

Пример Адамара некорректно поставленной задачи Коши для уравнения Лапласа — § 15.1, [III.305].

Контрпример Адамара к принципу Дирихле — § 12.3.

Конструкция Адамара фундаментального решения уравнения второго порядка — § 15.2.

Конструкция Адамара решения задачи Коши для гиперболических уравнений второго порядка — § 15.3.

Анзац Адамара — [III.16].

Конечная часть расходящегося интеграла в смысле Адамара — § 3.1, 15.3.

Главное значение несобственного интеграла в смысле Адамара — [III.403].

Критерий Адамара выполнимости принципа Гюйгенса — § 15.5, [III.161], [III.162].

Проблема Адамара в теории рассеяния волн — § 15.5, [III.272], [III.189].

Оценка Адамара для решения параболического дифференциального уравнения — [III.425].

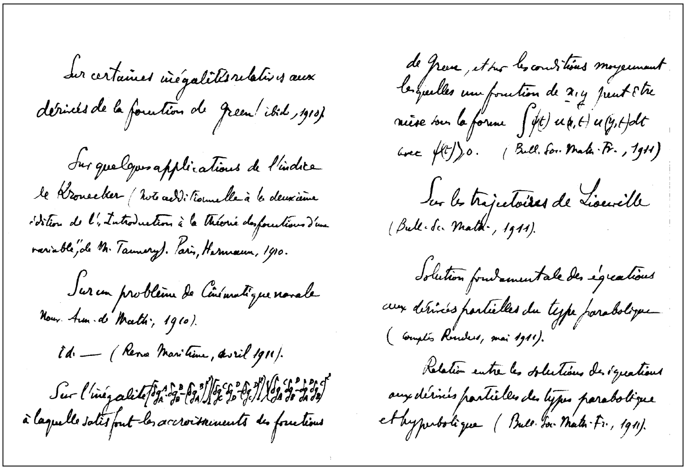
Формула Адамара для приращения функции — [III.327].

Неравенство Адамара для композиции двух ядер М. Рисса — [III.23, с. 7].

Библиография

I. Работы Жака Адамара

Здесь мы приводим список работ Адамара. По сравнению с публикациями [I.333], [I.406], [II.37] и [II.4] этот список более подробный. Ссылки упорядочены по годам опубликования. Каждая из 180 статей, вошедших в сборник «Œuvres de Jacques Hadamard» [I.406], снабжена указанием на том и страницы в этом сборнике.


Sur certaines inégalités relatives aux dérivées de la fonction de Green (ibid., 1910).

Sur quelques applications de l'indice de Kronecker (Note additionnelle à la deuxième édition de l'Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable, de M. Tannery). Paris, Hermann, 1910.

Sur un problème de Cinématique navale (Nouv. Ann. de Math., 1910).

Id. — (Revue Maritime, avril 1911).

Sur l'inégalité [illegible] à laquelle satisfont les accroissements des fonctions de Green, et sur les conditions moyennant lesquelles une fonction de x, y peut être mise sous la forme $\int f(t)\, u(x,t)\, u(y,t)\, dt$ avec $f(t) > 0$. (Bull. Soc. Math. Fr., 1911)

Sur les trajectoires de Liouville (Bull. Soc. Math., 1911).

Solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique (Comptes Rendus, mai 1911).

Relation entre les solutions des équations aux dérivées partielles des types parabolique et hyperbolique (Bull. Soc. Math. Fr., 1911).

Часть списка работ Адамара, написанного им для «Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard» [I.158]

1882

[I.1] *Concours général de philosophie de 1881. Solution par M. Hadamard, élève au Lycée Louis-le-Grand*, J. Math. Elémentaires Sér. 2, **6**, 199—207.

1883

[I.2] *Concours général de 1883. Mathématiques élémentaires. Solution par M. Hadamard, élève au Lycée Louis-le-Grand (copie couronnée)*, J. Math. Elémentaires Sér. 2, No 1, 203—206.

1884

[I.3] *Sur le limaçon de Pascal*, J. Math. Spéc. Sér. 2, **3**, 80—83.

[I.4] *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, J. Math. Spéc. Sér. 2, **3**, 226—232.

[I.5] *Questions proposées: No 150*, J. Math. Spéc. Sér. 2, **3**, 240.

1885

[I.6] *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*, J. Math. Spéc. Sér. 2, **4**, 41—42.

[I.7] *Questions proposées: No 138*, J. Math. Spéc. Sér. 2, **4**, 72.

[I.8] *Questions proposées: No 166*, J. Math. Elémentaires, Sér. 2, no. 3, 22—23.

[I.9] *Question 1528 proposée par J. Hadamard*, Nouvelles Annales de Mathématiques, Sér. 3, **4**, 151—152.

1888

[I.10] *Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable*, C. R. Acad. Sci. Paris **106**, 259—262 (Œuvres **1**, 3—6).

[I.11] *Recherche des surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion*, Bull. Sci. Math. Ser. 2, **12**, 118—121 (Œuvres **2**, 697—700).

1889

[I.12] *Sur la recherche des discontinuités polaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **108**, 722—724.

1892

[I.13] *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences de Paris, J. Math. Sér. 4, **8**, 101—186 (Œuvres **1**, 7—92).

[I.14] *Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$*, C. R. Acad. Sci. Paris **114**, 1053—1055.

1893

[I.15] *Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann.* Mémoire couronné en 1892 par l'Académie: Grand Prix des Sciences mathématiques, J. Math. Sér. 4, **9**, 171—215 (Œuvres **1**, 103—147).

[I.16] *Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant*, C. R. Acad. Sci. Paris **116**, 1500—1501 (Œuvres **1**, 237—238).

[I.17] *Résolution d'une question relative aux déterminants*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **17**, 240—246 (Œuvres **1**, 239—245).

[I.18] *Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs*, C. R. Acad. Sci. Paris **117**, 844—845.

1894

[I.19] *Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes* (avec note complémentaire), Acta Math. **18**, 319—336, 421 (Œuvres **1**, 249—271).

[I.20] *Remarque sur les centres de courbure des roulettes*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 19 avril, 37—38.

[I.21] *Sur les mouvements de roulement*, C. R. Acad. Sci. Paris **118**, 911—912.

[I.22] *Démonstration du théorème de Jacobi sur le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 19 juillet, 46.

[I.23] *Sur l'élimination*, C. R. Acad. Sci. Paris **119**, 995—997 (Œuvres **4**, 2091—2092).

[I.24] *Réponse à question 128*, Intermédiaire des Mathématiciens **1**, 127.

[I.25] *Sur les mouvements de roulement*, Mém. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux Sér. 4, **5**, 397—417; см. также: P. Appel, *Les roulements en dynamique*, Coll. Sci. Carré et Naud, Paris, 1899, 47—68 (Œuvres **4**, 1725—1745).

1895

[I.26] *Sur le tautochronisme*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 7 février, 16—17.

[I.27] *Sur l'expression du produit* $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)$ *par une fonction entière*, Bull. Sci. Math. France Sér. 2, **19**, 69—71 (Œuvres **1**, 153—154).

[I.28] *Sur une congruence remarquable et sur un problème fonctionnel qui s'y rattache*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 14 février, 19—23 (Œuvres **2**, 701—706).

[I.29] *Sur la précession dans le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **19**, 228—230 (Œuvres **4**, 1715—1717).

[I.30] *Sur la stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe*, Assoc. Franc, pour l'Avancement des Sciences **24**, 175—180 (Œuvres **4**, 1719—1724).

[I.31] *Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1894—1895, 17—18; см. также: P. Appel, *Les roulements en dynamique*, Coll. Sci. Carré et Naud, Paris, 1899, 69—70 (Œuvres **3**, 1051—1052).

[I.32] *Sur le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1894—1895, 61—62.

[I.33] *Sur la stabilité des rotations d'un corps solide*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1894—1895, 70—71.

[I.34] *Sur les éléments infinitésimaux du second ordre dans les transformations ponctuelles*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 19 décembre, 11—12 (Œuvres **1**, 267—271).

1896

[I.35] *Mémoire sur l'élimination*, Acta Math. **20**, 201—238 (Œuvres **1**, 273—310).

[I.36] *Sur la géométrie non euclidienne*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1895—1896, 24—25.

[I.37] *Une propriété des mouvements sur une surface*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 30 avril, 47—48.

[I.38] *Une propriété des mouvements sur une surface*, C. R. Acad. Sci. Paris **122**, 983—985 (Œuvres **4**, 1747—1748).

[I.39] *Sur l'instabilité de l'équilibre*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 21 mai, 48—50.

[I.40] *Sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **122**, 1257—1258 (Œuvres **1**, 149—150).

[I.41] *Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 4 juin, 55—58.

[I.42] *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **122**, 1470—1473 (Œuvres **1**, 183—186).

[I.43] *Sur la fonction $\zeta(s)$*, C. R. Acad. Sci. Paris **123**, 93 (Œuvres **1**, 187).

[I.44] *Sur les fonctions entières*, Bull. Soc. Math. France **24**, 186—187 (Œuvres **1**, 151—152).

[I.45] *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **24**, 199—200 (Œuvres **1**, 189—210).

[I.46] *Sur une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **20**, 263—266 (Œuvres **3**, 1015—1017).

[I.47] *Sur la décomposition de deux figures géométriques équivalentes en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 24 décembre, 18—21.

1897

[I.48] *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique*. Mémoire couronné en 1896 par l'Académie : Prix Bordin, J. Math. Sér. 5, **3**, 331—387 (Œuvres **4**, 1749—1805).

[I.49] *Sur les notions d'aire et de volume*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 21 janvier, 25—27 (Œuvres **4**, 2179—2180).

[I.50] *Sur les séries de Dirichlet*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 18 février, 41—45 (Œuvres **1**, 211—214).

[I.51] *Théorème sur les séries entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **124**, 492.

[I.52] *Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées*, C. R. Acad. Sci. Paris **124**, 1503—1505.

[I.53] *Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1896—1897, 60—62.

[I.54] *Sur les principes fondamentaux de la mécanique*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 18 mars, 67—70 (Œuvres **4**, 1807—1809).

[I.55] *Sur la démonstration d'un théorème d'algèbre*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1 avril, 84—86 (Œuvres **4**, 2093—2095).

[I.56] *Sur les conditions de décomposition d'une forme ternaire*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 13 mai, 100—102.

[I.57] *Sur les séries entières*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 3 juin, 110—111.

[I.58] *Sur les lignes géodésiques*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 17 juin, 115.

[I.59] *Sur les lignes géodésiques*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 1 juillet, 131.

[I.60] *Sur une surface à courbures opposées*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 22 juillet, 163—164.

1898

[I.61] *Sur la généralisation du théorème de Guldin*, Bull. Soc. Math. France **26**, 264—265.

[I.62] *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, J. Math. Sér. 5, **4**, 27—73 (Œuvres **2**, 729—775).

[I.63] *Sur la forme de l'espace*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 3 février, 83—85.

[I.64] *Sur la courbure dans les espaces à plus de deux dimensions*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 3 février, 85—86.

[I.65] *Les invariants intégraux et l'optique*, C. R. Acad. Sci. Paris **126**, 811—812.

[I.66] *Sur la forme des géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre*, Bull. Soc. Math. France **26**, 195—216 (Œuvres **2**, 707—728).

[I.67] *Leçons de géométrie élémentaire. Géométrie plane*, Armand Colin, Paris. Рус. пер.: Адамар Ж., *Элементарная геометрия. Ч. I. Планиметрия*, Учпедгиз, М., 1936; 1938; 1948; 1956.

[I.68] *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich, 1897; Leipzig, 201—202 (Œuvres **1**, 311—312).

[I.69] *Sur le billard non euclidien*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 5 mai, 147—149.

1899

[I.70] *Théorème sur les séries entières*, Acta Math. **22**, 55—64 (Œuvres **1**, 93—101).

[I.71] *Sur les conditions de décomposition des formes*, Bull. Soc. Math. France **27**, 34—47 (Œuvres **1**, 313—326).

1900

[I.72] *Sur les points doubles des contours fermés*, Proc. Verb. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux, 12 janvier, 4—7 (Œuvres **2**, 783—786).

[I.73] *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales*, Bull. Soc. Math. France **28**, 64—66 (Œuvres **3**, 1019—1021).

[I.74] *Sur l'intégrale résiduelle*, Bull. Soc. Math. France **28**, 69—90 (Œuvres **3**, 1065—1086).

[I.75] *Sur les singularités d'une certaine série*, Intermédiaire des Mathématiciens **7**, 32.

[I.76] Отз. на дисс.: H. Fehr, *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **11**, 556.

[I.77] Отз. на дисс.: E. Cahen, *Eléments de la théorie des nombres*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **11**, 807.

[I.78] *La bosse des mathématiques*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **11**, 913—914 (автор статьи не указан, но она включена в список публикаций Адамара в [I.406]).

1901

[I.79] *Note sur l'induction et la généralisation en mathématiques*, Congrès International de Philosophie, Paris, 1900, Proc. Verb., Sommaires, Imprimerie Nationale, Paris, 45 (Œuvres **4**, 2123—2126).

[I.80] *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Gauthier-Villars, Paris.

[I.81] *Sur la propagation des ondes*, Bull. Soc. Math. France **29**, 50—60 (Œuvres **3**, 1087—1097).

[I.82] *Sur les réseaux de coniques*, Bull. Sci. Math. **25**, 27—30 (Œuvres **2**, 787—790).

[I.83] *Sur les éléments linéaires à plus de deux dimensions*, Bull. Sci. Math. **25**, 37—60 (Œuvres **2**, 791—794).

[I.84] *Leçons de géométrie élémentaire. Géométrie dans l'espace*, Armand Colin, Paris. Рус. пер.: Адамар Ж., *Элементарная геометрия. Ч. II. Стереометрия*, Учпедгиз, М., 1938; 1951; 1958.

[I.85] *Sur l'équilibre des plaques élastiques circulaires libres ou appuyées et sur celui de la sphère isotrope*, Ann. Ec. Norm. Sup. Sér. 3, **18**, 313—342 (Œuvres **4**, 1811—1840).

[I.86] *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France **29**, 224—228 (Œuvres **3**, 1023—1039).

[I.87] *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard*, Gauthier-Villars, Paris.

1902

[I.88] *Sur équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles*, Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens tenu à Paris, 1900, Gauthier-Villars, 373—375 (Œuvres **3**, 1061—1063).

[I.89] *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Bull. Univ. Princeton **13**, 49—52 (Œuvres **3**, 1099—1105).

[I.90] *La théorie des plaques élastiques planes*, Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 401—422 (Œuvres **4**, 1841—1862).

[I.91] *Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries*, Acta Math. **26**, 177—183 (Œuvres **1**, 327—333).

[I.92] *Sur certaines surfaces minima*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **26**, 357—361 (Œuvres **2**, 777—780).

[I.93] *Sur les dérivées des fonctions de lignes*, Bull. Soc. Math. France **30**, 40—43 (Œuvres **1**, 401—404).

[I.94] *Sur une classe d'équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France **30**, 208—220 (Œuvres **3**, 1027—1039).

[I.95] *Sur une question de calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France **30**, 253—256 (Œuvres **2**, 467—470).

[I.96] *Sur une condition qu'on peut imposer à une surface*, Bull. Soc. Math. France **30**, 111.

[I.97] Рец. на кн.: A. Larmor, *Aether and matter* (Cambridge Univ. Press, 1900), Bull. Sci. Math. Ser. 2, **26**, 319—328.

[I.98] Рец. на кн.: A. Hatzfeld, *Pascal* (Alcan, Paris, 1901), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **13**, 111.

[I.99] Рец. на кн.: E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique* (Gauthier-Villars, Paris, 1902), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **13**, 694.

[I.100] Рец. на кн.: E. Czuber, *Probabilités et moyennes géométriques* (Hermann, Paris, 1902), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **13**, 787.

[I.101] Рец. на кн.: L. Kronecker, *Vorlesungen über Mathematik* (Teubner, Leipzig, 1902), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **13**, 836.

[I.102] Рец. на кн.: E. Bouvier, *La méthode mathématique en économie politique* (Paris, 1902), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **13**, 890—891.

[I.103] *Sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **135**, 1309—1311 (Œuvres **1**, 155—157).

1903

[I.104] *Sur les glissements dans les fluides*, C. R. Acad. Sci. Paris **136**, 299—301 (Œuvres **3**, 1107—1108).

[I.105] *Sur les glissements dans les fluides : Note complémentaire*, C. R. Acad. Sci. Paris **136**, 545 (Œuvres **3**, 1109).

[I.106] *Sur les opérations fonctionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **136**, 351—354 (Œuvres **1**, 405—408).

[I.107] *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, Bull. Soc. Math. France **31**, 208—224 (Œuvres **3**, 1115—1131).

[I.108] *Sur les surfaces à courbure positive*, Bull. Soc. Math. France **31**, 300—301 (Œuvres **2**, 781—782).

[I.109] *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris.

[I.110] *Sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris **137**, 1028—1030 (Œuvres **3**, 1111—1113).

[I.111] *Les sciences dans l'enseignement secondaire*, Conférence faite à l'Ecole des Hautes Etudes Sociales, Alcan, Paris.

1904

[I.112] *Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique*, Bull. Soc. Math. France **32**, 242—268 (Œuvres **3**, 1133—1159).

[I.113] *Sur un point de la théorie des percussions*, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **4**, 533—535.

[I.114] *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles*, Ann. Ec. Norm. Sup. Sér. 3, **21**, 535—556 (Œuvres **3**, 1173—1194).

[I.115] *Sur les séries de la forme* $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **4**, 529—533 (Œuvres **1**, 215—219).

[I.116] *Le Troisième Congrès International des Mathématiciens*, Rev. Gen. Sci. **15**, 961—962 (автор статьи не указан, но Адамар подтвердил свое авторство в [I.123, с. 270]).

1905

[I.117] *Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles*, Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1904, Teubner, 265—271 (Œuvres **3**, 1165—1171).

[I.118] *Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*, Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, 1904, Teubner, 414—416 (Œuvres **3**, 1161—1163).

[I.119] *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* (deuxième mémoire), Ann. Ec. Norm. Sup. Sér. 3, **22**, 101—141 (Œuvres **3**, 1195—1235).

[I.120] *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles*, C. R. Acad. Sci. Paris **140**, 425—427 (Œuvres **3**, 1237—1238).

[I.121] *Sur quelques questions de calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France **33**, 73—80 (Œuvres **2**, 485—513).

[I.122] *Sur la théorie des coniques*, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **3**, 145—152 (Œuvres **2**, 795—803).

[I.123] *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (Correspondance avec Borel, Baire et Lebesgue), Bull. Soc. Math. France 33, 261—273. Англ. пер. в кн.: G. H. Moore, *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development, and influence*, Springer Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1982 (Œuvres **1**, 335—348).

[I.124] *Remarque au sujet d'une note de M. Gyözö-Zemplen*, C. R. Acad. Sci. Paris **141**, 713.

[I.125] *A propos d'enseignement*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **16**, 192—194.

[I.126] *La théorie des ensembles*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **16**, 241—242.

[I.127] *Réflexions sur la méthode heuristique*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **16**, 499—504 (Œuvres **4**, 2127—2144).

[I.128] *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **16**, 541—543.

[I.129] Рец. на кн.: E. Czuber, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung: Statistik und Lebensversicherung* (Teubner, Leipzig, 1905), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **16**, 784—785.

1906

[I.130] *Sur un théorème de M. Osgood relatif au calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France **34**, 61.

[I.131] *Sur la mise en équation des problèmes de mécanique*, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **6**, 97—100 (Œuvres **4**, 2193—2196).

[I.132] *Sur les transformations planes*, C. R. Acad. Sci. Paris **142**, 74—77.

[I.133] *Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles*, Bull. Soc. Math. France **34**, 48—52 (Œuvres **3**, 1239—1243).

[I.134] Рец. на кн.: J. Gibbs, *Elementary principles in statistical mechanics*, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 194—210; см. также: Bull. Sci. Math. Sér. 2, **30**, 161—179.

[I.135] *Sur une méthode de calcul des variations*, C. R. Acad. Sci. Paris **143**, 1127—1129 (Œuvres **2**, 479—481).

[I.136] *La logistique et l'induction complète. La notion de correspondance*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **17**, 161—162 (автор статьи не указан, но она включена в список работ Адамара в [I.406]) (Œuvres **4**, 2157—2160).

[I.137] *Les principes de la théorie des ensembles*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **17**, 5.

[I.138] *Sur les transformations ponctuelles*, Bull. Soc. Math. France **34**, 71—84 (Œuvres **1**, 349—363).

[I.139] *Sur le principe de Dirichlet*, Bull. Soc. Math. France **34**, 135—138 (Œuvres **3**, 1245—1248).

[I.140] *La logistique et la notion de nombre entier*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **17**, 906—909 (Œuvres **4**, 2145—2155).

1907

[I.141] *Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles*, Conférences faites à la Société Mathématique de France et à la Société Française de Physique, J. Phys. Théor. et Appl. **6**, 202—241.

[I.142] *Sur quelques questions de calcul des variations*, Ann. Ec. Norm. Sup. Sér. 3, **24**, 203—231 (Œuvres **2**, 485—513).

[I.143] *Sur l'interprétation théorique des raies spectrales*, Bull. Soc. Franç. Phys.

[I.144] *Sur la variation des intégrales doubles*, C. R. Acad. Sci. Paris **144**, 1092—1093 (Œuvres **2**, 483—484).

1908

[I.145] *Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. Mémoire couronné en 1907 par l'Académie : Prix Vaillant, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences **33**, No 4 (Œuvres **2**, 515—629).

[I.146] *Sur les séries de Dirichlet*, Rend. Circolo Mat. Palermo **25**, 326—330 (Œuvres **1**, 221—225).

[I.147] *Rectification à la note "Sur les séries de Dirichlet"*, Rend. Circolo Mat. Palermo **25**, 395—396 (Œuvres **1**, 227—228).

[I.148] *Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy*, Acta Math. **31**, 333—380 (Œuvres **3**, 1249—1296).

[I.149] *Sur l'expression asymptotique de la fonction de Bessel*, Bull. Soc. Math. France **36**, 77—85 (Œuvres **1**, 365—373).

[I.150] *Les paradoxes de la théorie des ensembles*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **19**, 681.

1909

[I.151] *Sur certains cas intéressants du problème biharmonique*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908; Accad. dei Lincei, Roma, 12—14 (Œuvres **3**, 1297—1303).
[I.152] *Sur certaines particularités du calcul des variations*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 1908; Accad. dei Lincei, Roma, 61—63 (Œuvres **2**, 643—645).
[I.153] *Sur les lignes géodésiques, à propos de la récente note de M. Drach*, C. R. Acad. Sci. Paris **148**, 272—274 (Œuvres **2**, 873—874).
[I.154] *Sur une propriété fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Bull. Soc. Math. France **37**, 59—60 (Œuvres **1**, 229—230).
[I.155] *Détermination d'un champ électrique*, Ann. Chim. et Phys. Sér. 8, **16**, 403—432.
[I.156] *Notions élémentaires sur la géométrie de situation*, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **9**, 193—235 (Œuvres **2**, 829—871).
[I.157] *La géométrie de situation et son rôle en mathématiques* : Leçon d'ouverture professée au Collège de France, Rev. du Mois **8**, 38—60 (Œuvres **2**, 805—827).
[I.158] *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard* (хранится в архиве Политехнической школы).

1910

[I.159] *Leçons sur le calcul des variations*, Hermann, Paris.
[I.160] *Sur les ondes liquides*, C. R. Acad. Sci. Paris **150**, 609—611 (Œuvres **3**, 1301—1303).
[I.161] *Sur les ondes liquides*, C. R. Acad. Sci. Paris **150**, 772—774 (Œuvres **3**, 1317—1320).
[I.162] *Quelques propriétés des fonctions de Green*, C. R. Acad. Sci. Paris **150**, 1664—1666 (Œuvres **3**, 1055—1057).
[I.163] *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, дополнение ко второму изданию кн.: J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Hermann, Paris (Œuvres **2**, 875—915). Рус. пер.: *Заметка Ж. Гадамара «О некоторых применениях указателя Кронекера»*, в кн.: Таннери Ж., *Введение в теорию функций с одной переменною*, Изд-во типолитогр. т-ва И. Н. Кушнарева и K^0, М., 1912, т. 2, 468—511.
[I.164] *Sur un problème de cinématique navale*, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **10**, 337—361; см. также: Revue Maritime, Avril, 1911 (Œuvres **4**, 1863—1887).

1911

[I.165] *Sur les trajectoires de Liouville*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **35**, 106—113 (Œuvres **4**, 1889—1895).

[I.166] *Sur l'inégalité*

$$[\delta g_A^A \delta g_B^B - (\delta g_B^A)^2][\delta g_C^C \delta g_D^D - (\delta g_D^C)^2] > (\delta g_C^A \delta g_D^B - \delta g_D^A \delta g_C^B)^2,$$

à laquelle satisfont les variations de la fonction de Green quand on passe d'un contour à un contour voisin, Bull. Soc. Math. France **39**, 482.

[I.167] *Sur la solution fondamentale des équations linéaires aux dérivées partielles de type parabolique*, C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1148—1149 (Œuvres **3**, 1309—1310).

[I.168] *Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux*, C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1735—1738 (Œuvres **3**, 1311—1314).

[I.169] *Relation entre les solutions des équations aux dérivées partielles des types parabolique et hyperbolique*, Bull. Soc. Math. France **39**, 14—15 (Œuvres **3**, 1059—1060).

[I.170] *Sur les propriétés des fonctions de Green dans le plan*, Bull. Soc. Math. France **39**, 114—115.

[I.171] *Propriétés générales des corps et domaines algébriques* (avec M. Kürschak), Encycl. Sci. Math., Edition française **1** : 2, 233—385.

[I.172] *Maurice Lévy*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **22**, 141—143.

[I.173] Рец. на кн.: E. Barbette, *Les sommes de $p^{\text{èmes}}$ puissances distinctes égales à une $p^{\text{ème}}$ puissance* (Liège, 1911) и *Le dernier théorème de Fermat* (Liège, 1911), Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **22**, 541.

1912

[I.174] *Le calcul fonctionnel*, Enseign. Math. **14**, 1—18 (Œuvres **4**, 2253—2266).

[I.175] *Sur une question relative aux liquides visqueux. Note rectificative*, C. R. Acad. Sci. Paris **154**, 109 (Œuvres **3**, 1315).

[I.176] *Sur les variations unilatérales et les principes du calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France **40**, 20.

[I.177] *Sur les extrémales du problème isopérimétrique dans le cas des intégrales doubles*, Bull. Soc. Math. France **40**, 20—23.

[I.178] *Sur la généralisation de la notion de fonction analytique*, Bull. Soc. Math. France **40**, 28—29 (Œuvres **1**, 175—176).

[I.179] *Sur la loi d'inertie des formes quadratiques*, Bull. Soc. Math. France **40**, 29—30.

[I.180] *Propositions transcendantes de la théorie des nombres* (avec M. Maillet), Encycl. Sci. Math., Edition française **1** : 3, 215—387.

[I.181] *Itération des noyaux infinis dans le cas des intégrales doubles*, доп. к кн.: M. Fréchet, H. B. Heywood, *L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique*, Hermann, Paris (Œuvres **1**, 409—413).

[I.182] *Propriétés de la résolvante de l'équation de Fredholm*, доп. к кн.: M. Fréchet, H. B. Heywood, *L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique*, Hermann, Paris (Œuvres **1**, 415—426).

1913

[I.183] *Observations à propos de la communication de M. Borel “Remarque sur la théorie des résonateurs”*, Soc. Franc. Phys. Proc.Verb. et Résumé des Comm. faites pendant l’année 1912. Séance du 21 juin 1912, 79.

[I.184] *Sur la série de Stirling*, Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, Cambridge University Press, 303—305 (Œuvres **1**, 375—377).

[I.185] *Henri Poincaré et le problème des trois corps*, Rev. Métaphys. et Morale **21** : 5, 617—658; Rev. du Mois **16**, 385—418 (Œuvres **4**, 2007—2041).

[I.186] *La construction de Weierstrass et l’existence de l’extremum dans le problème isopérimétrique*, Ann. Mat. Sér. 3, **21**, 251—287 (Œuvres **2**, 647—682).

[I.187] *Observations à propos d’une note de M. Bouligand*, C. R. Acad. Sci. Paris **156**, 1364.

1914

[I.188] *Points pinces, arêtes de rebroussement et représentation paramétrique des surfaces*, Enseign. Math. **16**, 356—359 (Œuvres **2**, 917—920).

[I.189] *L’infini mathématique et la réalité*, Rev. du Mois.

[I.190] *Sur le module maximum d’une fonction et de ses dérivées*, Bull. Soc. Math. France **42**, 68—72 (Œuvres **1**, 379—382).

[I.191] *Observations au sujet d’une note de M. Paul Lévy*, C. R. Acad. Sci. Paris **158**, 1010—1011 (Œuvres **1**, 427—428).

[I.192] *Henri Poincaré : L’œuvre scientifique, L’œuvre philosophique* (avec V. Volterra, P. Langevin, P. Boutroux), Alcan, Paris.

1915

[I.193] *Sur un mémoire de M. Sundman*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **39**, 249—264 (Œuvres **4**, 1897—1912).

[I.194] *Four lectures on mathematics delivered at Columbia University in 1911*, Columbia University Press, New York.

1916

[I.195] *Sur les ondes liquides*, Rend. Accad. dei Lincei Sér. 5, **25**, 716—719 (Œuvres **3**, 1317—1320).

[I.196] *Sur l’élimination entre équations différentielles*, Nouv. Ann. Math. Sér. 4, **17**, 81—84 (Œuvres **4**, 2197—2200).

1919

[I.197] *Remarques sur l’intégrale résiduelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **168**, 533—534 (Œuvres **3**, 1321—1322).

[I.198] *Sur les correspondances ponctuelles*, Bull. Soc. Math. France **47**, 28—29 (Œuvres **1**, 383—384).

[I.199] *Sur les singularités des séries entières*, Bull. Soc. Math. France **47**, 40.

[I.200] *Sur un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables*, Bull. Soc. Math. France **47**, 44—46 (Œuvres **1**, 159—161).

[I.201] *Démonstration directe d'un théorème de Poincaré sur les périodes des intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique qui satisfait à une équation différentielle linéaire*, Bull. Soc. Math. France **47**, 46 (Œuvres **1**, 385).

[I.202] *Recherche du balourd dynamique des obus*, Travaux du Laboratoire d'Essais des Arts et Métiers.

1920

[I.203] *La solution élémentaire des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques non analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **170**, 149—154 (Œuvres **3**, 1323—1328).

[I.204] *Sur certaines solutions d'une équation aux dérivées fonctionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **170**, 355—359 (Œuvres **1**, 429—433).

[I.205] *Rapport sur les travaux examinés et retenus par la Commission de balistique pendant la durée de la guerre*, C. R. Acad. Sci. Paris **170**, 436—445.

1921

[I.206] *Sur la solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques*, C. R. du Congrès International des Mathématiciens, Strasbourg, 1920; Edouard Privat, Toulouse, 179—184 (Œuvres **3**, 1329—1334).

[I.207] *Sur le problème mixte pour les équations linéaires aux dérivées partielles*, C. R. du Congrès International des Mathématiciens, Strasbourg, 1920; Edouard Privat, Toulouse, 499—503 (Œuvres **3**, 1335—1339).

[I.208] *L'œuvre mathématique de Poincaré*, Acta Math. **38**, 203—287 (Œuvres **4**, 1921—2005).

[I.209] *On some topics connected with linear partial differential equations*, Proc. Benares Math. Soc. **3**, 39—48.

[I.210] *A propos d'enseignement secondaire*, Rev. Internat. de l'Enseign. **75**, 289—294 (Œuvres **4**, 2201—2206).

[I.211] *Sur la comparaison des problèmes aux limites pour les deux principaux types d'équations aux dérivées partielles*, Bull. Soc. Math. France **49**, 28.

1922

[I.212] *L'enseignement secondaire et l'esprit scientifique*, Revue de France, Avril.

[I.213] *Einstein en France*, Rev. Internat. de l'Enseign. **76**, 129—137.

[I.214] *Les principes du calcul des probabilités*, Rev. de Métaphys. et de Morale **29**, 289—293 (Œuvres **4**, 2161—2165).

[I.215] *A propos des notions de dimension et d'homogénéité*, J. de Physique et Radium Sér. 6, **3**:5, 149—153.

[I.216] *Sur un théorème de géométrie élémentaire*, Bulletin Officiel de la Direction des Recherches Scientifiques et Industrielles et des Inventions **38**.

[I.217] *Sur la fonction harmonique la plus voisine d'une fonction donnée*, Association Française pour l'Avancement des Sciences **46**, 108—109.

[I.218] *Sur une formule de calcul des probabilités*, Association Française pour l'Avancement des Sciences **46**, 109—110.

[I.219] *Les responsabilités des guerres: Comment déterminer l'agresseur?* Cahiers des Droits de l'Homme, avril, 184.

[I.220] *The early scientific work of H. Poincaré*, The Rice Institute Pamphlet **9**:3, 111—183.

[I.221] Предисл. к кн.: P. Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris.

[I.222] Предисл. к кн.: G. Juvet, *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel*, Albert Blanchard, Paris.

1923

[I.223] *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential équations*, New Haven, Yale Univ. Press; reprinted by Dover Publications, New York, 1954.

[I.224] *La notion de différentielle dans l'enseignement*, Scripta Univ. Jérusalem **1**:4; reprinted in Enseign. Sci. 35 (1931), 136—137.

[I.225] *Poincaré i la teoria de les ecuaciones differentiales*, Conférences prononcées à l'Institut d'Etudes Catalanes de Barcelone.

[I.226] *La réforme de l'enseignement secondaire*, Bull. Sci. des Etudiants de Paris **9**, 2—13.

[I.227] *Sur les points doubles des lieux géométriques et sur la construction par régions*, Nouv. Ann. Math. Sér. 5, **1**, 364—379 (Œuvres **2**, 921—933).

[I.228] *La pensée française dans l'évolution des sciences exactes*, France et Monde **92**, 321—343.

[I.229] *Sur une formule déduite de la théorie des cubiques*, Bull. Soc. Math. France **51**, 295—296 (Œuvres **2**, 935).

[I.230] *Observations à propos d'une communication de Mordoukhay-Boltovskoy*, C. R. Acad. Sci. Paris **176**, 727—728.

[I.231] *Remarque sur une communication de P. Noaillon*, C. R. Acad. Sci. Paris **176**, 1059.

[I.232] *Sur les tourbillons et les surfaces de glissement dans les fluides*, C. R. Acad. Sci. Paris **177**, 505—506 (Œuvres **3**, 1341—1342).

[I.233] *Déclare qu'une expérience a donné raison aux hypothèses exposées dans sa note*, C. R. Acad. Sci. Paris **177**, 568.

[I.234] *Observations à propos d'une note de A. Bloch "Sur les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin"*, C. R. Acad. Sci. Paris **177**, 734.

[I.235] *La vrai culture générale*, Pour et contre, novembre.

1924

[I.236] *Principe de Huygens et prolongement analytique*, Bull. Soc. Math. France **52**, 241—278 (Œuvres **3**, 1375—1413).

[I.237] *Quelques conséquences analytiques du principe de Huygens* (13ème Réunion de la Société Italienne pour l'Avancement des Sciences à Naples), Atti della Soc. Ital. per il Progresso della Sci. **16**, 164—168.

[I.238] *Sobre la representaciôn gráfica del espacio de cuatro dimensiones*, Rev. Matem. Hisp.-Amer. **6**, 265—269.

[I.239] *Comment je n'ai pas découvert la relativité*, Atti Congr. Intern. Philos. Naples, 441—453; см. также: *How I did not discover relativity*, Math. Intelligencer **10**:2 (1988), 65—67.

[I.240] *Le principe de Huygens* (Conférence pour le cinquantenaire de la Société Mathématique de France), Bull. Soc. Math. France **52**, 610—640 (Œuvres **3**, 1343—1373).

1925

[I.241] *On quasi-analytic functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **11**, 447—448 (Œuvres **1**, 177—178).

[I.242] *Sur le calcul approché des intégrales définies*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **11**, 448—450 (Œuvres **1**, 387—389).

[I.243] *Itération et fonctions quasi analytiques*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl.

[I.244] *Sobre un tipo de ecuaciones intégrales singulares*, Rev. Acad. Madrid **22**, 187—191.

1926

[I.245] *Développement de la notion de fonction* (на португ. яз.), Conférences à l'Ecole polytechnique de Rio de Janeiro, le 23 sept. 1924, rédigées par J. Nicoletis, Revista da Academia Brasileira de Sciencias **1**, 82—111.

[I.246] *Sur une série entière en relation avec le dernier théorème de Fermat*, Bull. Soc. Math. France **54**, 21—22 (Œuvres **1**, 231—232).

[I.247] *Sur les équations intégrables par la méthode de Laplace*, Bull. Soc. Math. France **54**, 33—35.

[I.248] *Sur la géométrie anallagmatique*, Bull. Soc. Math. France **54**, 35—39.

[I.249] *Sur la géométrie anallagmatique (Addition à l'article précédent)*, 40—45 (Œuvres **2**, 975—981).

[I.250] *Quelques cas d'impossibilité du problème de Cauchy*, In memoriam N. I. Lobachevskii, Главнаука, Казань, т. 2, 163—176 (Œuvres **3**, 1457—1470).

[I.251] *Sur la théorie des séries entières*, Nouv. Ann. Math. Sér. 6, **1**, 161—164 (Œuvres **4**, 2227—2230).

[I.252] *A propos du nouveau programme de mathématiques spéciales*, Nouv. Ann. Math. Sér. 6, **1**, 257—276, 391—393 (Œuvres **4**, 2207—2226).

[I.253] *La série de Taylor et son prolongement analytique* (avec S. Mandelbrojt), Ed. 2, revisée et complétée, Gauthier-Villars, Paris.

[I.254] *Le principe de Huyghens dans le cas de quatre variables indépendantes*, Acta Math. **49**, 203—344 (Œuvres **3**, 1415—1456).

[I.255] Предисл. к кн.: F. Gonseth, *Les fondements des Mathématiques*, Blanchard, Paris; см. также: Bull. Sci. Math. Sér. 2, **51**, 66—73.

[I.256] *Remarque au sujet d'une communication de Leonida Tonelli "Sur la méthode d'adjonction dans le calcul des variation"*, C. R. Acad. Sci. Paris **182**, 679.

[I.257] *Observations sur les communications de I. Karamata "Sur certaines limites rattachées aux intégrales de Stieltjes" et de P. Lévy "Remarques sur* *les précédés de sommation des séries divergentes"*, C. R. Acad. Sci. Paris **182**, 838.

1927

[I.258] *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, Hermann, Paris, vol. 1.
[I.259] *Récents progrès de la géométrie anallagmatique*, Rev. Mat. Hisp.-Amer. **2**, 257—273; см. также: Nouv. Ann. Math. Sér. 6, **2**, 289—320 (Œuvres **2**, 937—974).
[I.260] *Sur les éléments riemanniens et le déplacement parallèle*, Bull. Soc. Math. France **55**, 30—31.
[I.261] *Sur la théorie des fonctions entières*, Bull. Soc. Math. France **55**, 135—137 (Œuvres **1**, 163—165).
[I.262] *Sulle funzioni intere di génère finito. Nota dei Soci Stranieri J. Hadamard e E. Landau*, Rend. Accad. Lincei **6**, 3—9 (Œuvres **1**, 167—173).
[I.263] *L'œuvre de Duhem dans son aspect mathématique*, Mém. Soc. Sci. Phys. et Natur. Bordeaux **1**, 637—665.
[I.264] *Observation sur la note de P. Lévy "Sur un théorème de M. Hadamard relatif à la multiplication des singularités"*, C. R. Acad. Sci. Paris **184**, 581.
[I.265] *Sur le battage des cartes*, C. R. Acad. Sci. Paris **185**, 5—9 (Œuvres **4**, 2065—2069).
[I.266] *Observation sur la note précédente de M. Ragnar Frisch*, C. R. Acad. Sci. Paris **185**, 1245—1246.
[I.267] *Les méthodes d'enseignement des sciences expérimentales*, Rev. Internat. de l'Enseign. **81**, 355—356.

1928

[I.268] *Observation sur une note de M. B. Hostinsky*, C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 62.
[I.269] *Sur les opérations itérées en calcul des probabilités*, C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 189—192 (Œuvres **4**, 2079—2082).
[I.270] *Sur le principe ergodique*, C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 275—276.
[I.271] *Observation sur une note de A. Haar*, C. R. Acad. Sci. Paris **187**, 25—26.
[I.272] *Deux exercices de mécanique*, Enseign. Sci. **1**, 173—177.
[I.273] *A propos de géométrie anallagmatique*, Enseign. Sci. **1**, 296—298.
[I.274] *Une propriété de la fonction $\zeta(s)$ et des séries de Dirichlet*, Association Française pour l'Avancement des Sciences **52**, 29—30 (Œuvres **1**, 233—235).
[I.275] *Quelques remarques sur l'enseignement de la mécanique*, Association Française pour l'Avancement des Sciences **52**, 77—79 (Œuvres **4**, 2231—2233).
[I.276] *La peine de mort et le Code pénal*, Cahiers des Droits de l'Homme **30**, 715.
[I.277] *Une application d'une formule intégrale relative aux séries de Dirichlet*, Bull. Soc. Math. France **56**, 43—44.

1929

[I.278] *Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928, Nicola Zanichelli, Bologna, vol. 1, 143—161 (Œuvres **1**, 435—453).

[I.279] *Les responsabilités de la guerre*, Cahiers des Droits de l'Homme **31**, 729—732.

[I.280] *Princip d'Huyghens* (на чешском яз.), Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky **58**, 346—366.

[I.281] *Le principe de Huyghens pour les équations à trois variables indépendantes*, J. Math. Pures et Appl. Sér. 9, **8**, 197—228 (Œuvres **3**, 1471—1502).

[I.282] *On ordinary restricted extrema in connection with point transformations*, Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 823—828 (Œuvres **1**, 391—397).

[I.283] *Analyse du livre de E. Landau "Vorlesungen über Zahlentheorie"* (avec S. Mandelbrojt), Bull. Sci. Math. **53**, 164—182.

[I.284] *Observation sur une note d'Etienne Halphen*, C. R. Acad. Sci. Paris **188**, 846.

[I.285] *Observation sur une note de M. de Franchis*, C. R. Acad. Sci. Paris **188**, 1026.

1930

[I.286] *Sur les arêtes de rebroussement des certaines enveloppes*, 1er Congrés des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa, 1929, Sprawozdanie, Warszawa, 318—322 (Œuvres **2**, 987—991).

[I.287] *Remarques géométriques sur les enveloppes et la propagation des ondes*, Acta Math. **54**, 247—261 (Œuvres **3**, 1503—1519).

[I.288] *La physique et la culture générale*, Œuvre, 30 janvier.

[I.289] *La question de la physique*, Œuvre, 16 février.

[I.290] *Un nouveau pas à faire dans la voie de la Paix: les manuels scolaires*, La Paix par le Droit **1**, 1—4.

[I.291] *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*, Hermann, Paris, vol. 2.

1931

[I.292] *Sur le battage des cartes et ses relations avec la mécanique statistique*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 1928; Nicola Zanichelli, Bologna **5**, 133—139 (Œuvres **4**, 2071—2077).

[I.293] *Parlons encore culture générale*, Œuvre, 13 janvier.

[I.294] *Formation ou déformation intellectuelle*, Œuvre, 19 janvier.

[I.295] *Une culture qu'il ne faudrait pas détruire*, Œuvre, 24 janvier.

[I.296] *La question de la physique*, Œuvre, 16 février.

[I.297] *La formation des agrégés de mathématiques*, Enseign. Sci. **4**:35, 135—136.

[I.298] *Multiplication et division*, Enseign. Sci. **4**:39, 267—269.

[I.299] *A propos des lettres de M. L. Blum. Réflexions générales sur un cas particulier*, Enseign. Sci. **4**:40, 309—311.

[I.300] *Remarques sur la note de E. O. Lovett "Sur un problème de M. Gambier dans la déformation des surfaces"*, C. R. Acad. Sci. Paris **193**, 567—568.

1932

[I.301] *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Enseign. Sci. **5**:46, 161—163 (Œuvres **3**, 1521—1523).

[I.302] *Sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich, 1932, Teubner, Zürich—Leipzig, vol. 2, 78—80 (Œuvres **3**, 1567—1569).

[I.303] *Réponse à une enquête sur l'histoire des sciences dans l'enseignement*, Enseign. Sci. **5**:47, 309—211.

[I.304] *Coordination d'enseignements*, Enseign. Sci. **5**:51, 2—3.

[I.305] *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris. (Перевод лекций, прочитанных в Йельском университете [I.223]). Рус. пер.: Адамар Ж., *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, Наука, М., 1978.

[I.306] *Réponse à une enquête sur la revision des traités*, Paix Mondiale **2**.

[I.307] *Equations aux dérivées partielles et variables réelles* (на укр. яз.), Записки Харьковск. матем. об-ва и Укр. инст. матем. наук сер. 4, **5**, 11—20.

[I.308] *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique*, J. Math. Pures et Appl. **11**, 207.

1933

[I.309] *Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre*, Tôhoku Math. J. **37**, 133—150 (Œuvres **3**, 1571—1588).

[I.310] *La propagation des ondes et les caustiques*, Comment. Math. Helvetici **5**, 137—173 (Œuvres **3**, 1525—1565).

[I.311] *The later scientific work of Henri Poincaré*, The Rice Institute Pamphlet 20:1, 1—85.

[I.312] *Painlevé, le savant*, Vu.

[I.313] *Sur les probabilités discontinues des événements "en chaîne"* (avec M. Fréchet), Zeitschr. Angew. Math. Mech. **13**, 92—97 (Œuvres **4**, 2083—2088).

[I.314] *Observation sur une note de A. Przeborski*, C. R. Acad. Sci. Paris **197**, 302.

[I.315] *Observations sur une note récente de M. Sixto Rios*, C. R. Acad. Sci. Paris **197**, 1374.

[I.316] *Observation sur une note de N. Adamoff*, C. R. Acad. Sci. Paris **198**, 218.

[I.317] Предисл. к кн.: V. Bernstein, *Leçons sur les progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, Gauthier-Villars.

1934

[I.318] *Remarques sur deux résultats dus à M. Demoulin et à M. Perron*, Bull. Soc. Math. France **62**, 25.

[I.319] *Sur une question relative aux congruences de sphères*, Bull. Soc. Math. France. **62**, 25—26.

[I.320] *L'œuvre scientifique de Paul Painlevé*, Rev. Métaphys. et Morale **41**, 289—325.

[I.321] *Un terme à effacer de l'enseignement mathématique : "effectuer"*, Enseign. Sci. **7**:66, 167—168.

[I.322] *Réponses à l'enquête sur les bases de l'Enseignement des Mathématiques*, Enseign. Sci. **7**:66, 175—177, **7**:68, 247.

[I.323] *La non-résolubilité de l'équation du cinquième degré*, Enseign. Sci. **7**:68, 225—235, **7**:69, 257—260 (Œuvres **4**, 2097—2107, 2109—2119).

[I.324] *Un cas simple de diffusion des ondes*, Мат. сб. **41**, 402—404 (Œuvres **3**, 1589—1592).

[I.325] Предисл. к кн.: H. Hasse, *Über gewisse Ideale in einer einfachen Algebra*, Actualités Sci. Indust. **109**, Hermann, Paris.

[I.326] *Observations au sujet de la note de M. Mursi*, C. R. Acad. Sci. Paris **199**, 179—180.

[I.327] Предисл. к кн.: L. Lusternik, L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Hermann, Paris.

1935

[I.328] *Polynômes linéaires adjoints*, Enseign. Sci. **8**:74, 97—100.

[I.329] *Les développables circonscrites à la sphère*, Enseign. Sci. **8**:75, 129—130 (Œuvres **2**, 993—994).

[I.330] *Réponse à l'enquête sur l'enseignement de la mécanique*, Enseign. Sci. **8**:77, 193.

[I.331] *La théorie des équations du premier degré*, Enseign. Sci. **8**:79, 257—262.

[I.332] *Extrait d'une lettre à M. T. Kubota*, Tôhoku Math. J. **40**, 198.

[I.333] *Selecta: Jubilé Scientifique de M. Jacques Hadamard*, Gauthier-Villars, Paris.

[I.334] *La notion de différentielle dans l'enseignement*, Math. Gaz. **19**, 341—342.

1936

[I.335] *Sur les caustiques des enveloppes à deux paramètres*, Soc. Math. de France, C. R. des Séances, 29—30.

[I.336] *Equations aux dérivées partielles et fonctions de variables réeles*, Тр. первого Всесоюзного съезда математиков, ОНТИ, М.—Л., 1936, 106—118. Рус. пер.: *Уравнения в частных производных и теория функций действительного переменного*, там же, 119—131.

[I.337] *Principe de Huyghens et théorie d'Hugoniot*, Тр. первого Всесоюзного съезда математиков, ОНТИ, М.—Л., 1936, 276—279. Рус. пер.: *Принцип Гюйгенса и теория Гюгонио*, там же, 280—283.

[I.338] *Equations aux dérivées partielles. Les conditions définies en général. Le cas hyperbolique*, Conférence Internationale sur les Equations aux Dérivées Partielles, Genève, 17—20 juin 1935, Enseign. Math. **35**, 5—42 (Œuvres **3**, 1593—1630).

[I.339] *La caustique des enveloppes à deux paramètres*, J. Math. Pures et Appl. **15**, 333—337 (Œuvres **2**, 995—999).

1937

[I.340] *Un problème topologique sur les équations différentielles*, Prace Mat. Fiz. **44**, 1—7 (Œuvres **3**, 1041—1047).
[I.341] *Calcul des variations et différentiation des intégrales*, Тр. Тбил. мат. ин-та **1**, 55—63 (Œuvres **2**, 685—693).
[I.342] *Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques*, J. Chin. Math. Soc. **2**, 6—20 (Œuvres **3**, 1631—1645).
[I.343] *Observations sur la note de M. Krasner et B. Ranulac*, C. R. Acad. Sci. Paris **204**, 399.
[I.344] *Observations sur les notes précédentes de J.-L. Destouches et A. Appert*, C. R. Acad. Sci. Paris **204**, 458.
[I.345] *Observations sur la note de M. Mandelbrojt*, C. R. Acad. Sci. Paris **204**, 1458—1459 (Œuvres **1**, 179).
[I.346] *La science mathématique*, Encyclopédie française **1**, 1.52.1—1.58.7.
[I.347] *Les équations différentielles*, Encyclopédie française **1**, 1.76.1—1.76.7.
[I.348] *L'existence et le domaine de validité des solutions*, Encyclopédie française **1**, 1.76.8—1.76.14.
[I.349] *Etude directe des solutions* (avec J. Chazy), Encyclopédie française **1**, 1.78.5—1.80.8.
[I.350] *Divers types de conditions définies et d'équations aux dérivées partielles*, Encyclopédie française **1**, 1.82.1—1.82.13.

1938

[I.351] *Remarque sur l'intégration approchée des équations différentielles: Extrait d'une lettre*, Ann. Soc. Polon. Math. **16**, 126 (Œuvres **3**, 1049—1050).
[I.352] *Sur certaines questions de calcul intégral*, Ann. Soc. Ci. Argentina **125**, 1—18 (Œuvres **4**, 2235—2252).
[I.353] *L'homogénéité en mécanique*, Bull. Sci. Math. Sér. 2, **62**, 6—10 (Œuvres **4**, 1913—1917).
[I.354] *Un problème de géométrie*, Enseign. Sci. **11**:108, 225—229.
[I.355] *A propos de la non-résolubilité par radicaux de l'équation du 5ème degré*, Enseign. Sci. **11**:108, 229.
[I.356] *La science mathématique*, Enseign. Sci. **11**:110, 290—296.

1940

[I.357] *Les mathématiques dans l'Encyclopédie française*, Mathematica (Cluj) **16**, 1—5.
[I.358] *Les diverses formes et les diverses étapes de l'esprit scientifique*, Thalès **4**, 23—27.

1942

[I.359] *The problem of diffusion of waves*, Ann. Math. **43**, 510—522 (Œuvres **3**, 1647—1659).

[I.360] *Le problème de Dirichlet dans le cas hyperbolique*, Œuvres **3**, 1661—1662.

[I.361] *On the Dirichlet problem for the hyperbolic case*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **28**, 258—263 (Œuvres **3**, 1663—1668).

1943

[I.362] *Emile Picard*, J. London Math. Soc. **18**, 114—128 (Œuvres **4**, 2043—2057).

[I.363] *La science et le monde moderne*, Renaissance (Revue trimestrielle publiée par l'Ecole Libre des Hautes Etudes, New York) **1**:4, 523—558.

1944

[I.364] *Emile Picard, 1856—1941*, Obit. Not. Roy. Soc. London **4**, 129—140.

[I.365] *Two works on iteration and related questions*, Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 67—75.

[I.366] *A known problem of geometry and its cases of indetermination*, Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 520—528 (Œuvres **2**, 1001—1009).

[I.367] *An open letter addressed by Professor Jacques Hadamard to the chairman of the American Jewish Joint Distribution Committee and of the United Jewish Appeal*, Pamphlet published by the Union for the Protection of the Human Person and Committee for the Defense of the Rights of Jews of Central and Eastern Europe, Inc., New York, 1—15.

1945

[I.368] *Problèmes à apparence difficile*, Мат. сб. **17**, 3—8.

[I.369] *Remarques sur le cas parabolique des équations aux dérivées partielles*, Publ. Inst. Math. Univ. Nac. Littoral **5**, 3—11 (Œuvres **3**, 1669—1677).

[I.370] *Notice nécrologique sur George David Birkhoff*, C. R. Acad. Sci. Paris **220**, 719—721.

[I.371] *On the three-cusped hypocycloid*, Math. Gaz. **29**, 66—67 (Œuvres **2**, 1011—1012).

[I.372] *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. Рус. пер.: Адамар Ж., *Исследование психологии процесса изобретения в области математики*, МЦНМО, М., 2001.

[I.373] *Subconscient, intuition et logique dans la recherche scientifique*, Conférence faite au Palais de la Découverte le 8 décembre 1945, Ed. Université de Paris, Paris.

1947

[I.374] *Observation sur la note de F. Bureau*, C. R. Acad Sci. Paris **225**, 854.

[I.375] *Newton and the infinitesimal calculus*, Roy. Soc. Newton Tercentenary Celebrations, July 15—19, 1946, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 35—42.

1948

[I.376] *Sur le cas anormal du problème de Cauchy pour l'équation des ondes*, Studies and essays presented to R. Courant on his 60th birthday, January 8, Intersci. Publ., New York, 161—165 (Œuvres **3**, 1679—1683).

[I.377] *Le rôle de l'inconscient dans la recherche scientifique*, Atomes, tous les aspects scientifiques d'un nouvel age **26**, 166—169.

[I.378] *Le cinquantenaire de la Ligue. Souvenirs*, Cahiers des Droits de l'Homme **49—52**, 376—377.

1949

[I.379] *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., revised edition of [I.372].

1950

[I.380] *Célébration du deuxième centenaire de la naissance de P. S. Laplace*, Arch. Internat. Hist. Sci. **29**, 287—290 (Œuvres **4**, 2059—2062).

1951

[I.381] *Quelques résultats accessoires de la théorie des équations aux dérivée partielles*, Dodatek Roczn. Polsk. Towarz. Mat. **22**, 17—21.

[I.382] *Les fonctions de classe supérieure dans l'équation de Volterra*, J. Analyse Math. **1**, 1—10 (Œuvres **1**, 455—464).

[I.383] *Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций*, ГТТИ, М.—Л.

[I.384] *Partial differential equations and functions of real variable* (на португ. яз.), Gaz. Mat. (Lisboa) **12**:50, 3—6.

1952

[I.385] *Remarque sur la note de Florent Bureau*, C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 792.

[I.386] *Are we lacking words?* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, August 30—September 6, 1950. AMS, Providence, R.I., 726—727.

[I.387] *Lettre ouverte au professeur Einstein*, Action **389**, semaine du 14 au 20 mars.

1953

[I.388] *Histoire des sciences et psychologie de l'invention*, Actes du 7ème Congrès International d'Histoire des Sciences, Jérusalem, Collection des travaux de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences **8**, 350—357.

[I.389] *L'origine, l'esprit et le rôle de la science moderne*, Cahiers Rationalistes **132**, 1—16.

1954

[I.390] *La géométrie non-euclidienne et les définitions axiomatiques*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **5**, suppl., 95—104. Венгерск. пер.: Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közlemenyi **3** (1953), 199—208 (Œuvres **4**, 2167—2176).

[I.391] *Histoire de la science et la psychologie de l'invention*, Mathematica **1**, 1—3. Венгерск. пер.: Mat. Lapok. **9** (1958), 64—66.

[I.392] *Sur des questions d'histoire des sciences: La naissance du calcul infinitésimal*, An. Acad. Brasil. Sci. **26**, 19—23 (Œuvres **4**, 2267—2271).

[I.393] *Le centenaire d'Henri Poincaré*, Rev. Hist. Sci. Appl. **7**, 101—108.

[I.394] *Equations du type parabolique dépourvues de solutions*, J. Rational Mech. Anal. **3**, 3—12 (Œuvres **3**, 1685—1694).

[I.395] *Extension à l'équation de la chaleur d'un théorème de A. Harnack*, Rend. Circ. Mat. Palermo **3**, 337—346 (Œuvres **3**, 1695—1704).

1955

[I.396] *Echanges culturels France—Israël*, Amitiés France—Israël **1**, 9—10.

[I.397] *A propos des humanités classiques*, La Pensée **64**, 78—79.

1956

[I.398] *Henri Poincaré et les mathématiques*, в кн.: *Œuvres d'Henri Poincaré*, tome 11, *Livre du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré (1854—1954)*, Gauthier-Villars, Paris, 50—57. Рус. пер.: *Анри Пуанкаре и математика*, в кн.: Пуанкаре А., *Избранные труды*, Наука, М., 1974, т. 3, 674—681.

[I.399] *L'Affaire Dreyfus*, La Pensée **68**, 77—88.

1957

[I.400] *Sur le théorème de A. Harnack*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **6**, 177—181; см. также: Bull. Inst. Politech. Iasi **3**, 1—6 (Œuvres **3**, 1705—1709).

[I.401] *Un point obscur de plus dans l'affaire Dreyfus*, La Pensée **71**, 3—4.

1958

[I.402] *Soixante ans d'activité au service de la justice*, Cahiers des Droits de l'Homme **4**, 47—49.

1959

[I.403] *De la Renaissance à l'époque actuelle: deux conceptions opposées*, The Golden Jubilee Commemoration volume, 1958—1959, Calcutta Mat. Soc. **1**, 11—14.

[I.404] *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Albert Blanchard, Paris; см. [I.372].

1964

[I.405] *La théorie des équations aux dérivées partielles*, Ed. Sci. Pékin.

1968

[I.406] *Œuvres de Jacques Hadamard*, vol. 1—4, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

1999

[I.407] *Non-Euclidean geometry in the theory of automorphic functions*, Editors: J. J. Gray and A. Shenitzer, translated by A. Shenitzer, with historical introduction by J. J. Gray, AMS, Providence, R.I.; см. [I.383].

II. Литература об Адамаре

[II.1] Amerio L., *Jacques Hadamard*, Rend. Ist. Lombarde Sci. e Lettere, Parte gen. e Atti uffic. **98** (1965), 88—89.

[II.2] Bouligand J., *Introduction à la pensée créatrice de Jacques Hadamard*, Rev. d'Histoire des Sciences **19** (1966), 247—265.

[II.3] Bouligand J., *Centenaire de la naissance de Jacques Hadamard*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **123**:5—6 (1966), 133—138.

[II.4] Cartwright M., *Jacques Hadamard*, Biogr. Memoirs of Fellows of the Roy. Soc. **11** (1965), 75—98.

[II.5] *Centenaire de Jacques Hadamard, Mathématicien (1865—1963)*, Plaquette éditée par la Société Amicale des Anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique (1966), 1—35; extrait de La Jaune et la Rouge **204**, mai 1966.

[II.6] Chapelon J. *Hommage au professeur Jacques Hadamard*, La Pensée **67** (1956), 106—108.

[II.7] Chatelet A., *Hommage à Jacques Hadamard*, Le Courrier Rationaliste **6** (1957), 118—119; повторно опубликовано в том же журнале, **6** (1964), 167—169.

[II.8] Denjoy A., *Notices sur les membres décèdes: Hadamard*, Association Amicale des Anciens Elèves de l'Ecole Normale Supérieure (1965), 33—35.

[II.9] Desforge J., Iliovici G., Robert P., *L'œuvre de M. Jacques Hadamard et l'enseignement secondaire*, Enseig. Scien. **9** (1936), 97—117.

[II.10] *En hommage à la mémoire de J. Hadamard. Délégations et messages au domicile mortuaire*, L'Humanité, 19 octobre 1963.

[II.11] Fréchet M., рец. на кн.: J. Hadamard, *Cours d'analyse professé à l'Ecole Polytechnique*, Rev. Gén. Sci. Pures et Appl. **36** (1925), 547.

[II.12] Fréchet M., *Jacques Hadamard*, Pensée, № 112 (1963), 102—104.

[II.13] Fréchet M., *Notice nécrologique sur Jacques Hadamard*, Acad. Sci. Paris, Notices et Discours, no. 34 (1963), 1—16; сокращенный вариант: C. R. Acad. Sci. Paris **257**:26 (1963), 4081—4086.

[II.14] Гельфонд А. О., Шнирельман Л. Г., *О работах академика Жака Адамара по теории функций комплексного переменного и теории чисел*, Успехи мат. наук **2** (1936), 92—117.

[II.15] George A., *Jacques Hadamard*, Nouvelles Littéraires, octobre 1963.

[II.16] Hardy G. H., рец. на кн.: J. Hadamard, *The psychology of invention in the mathematical field*, Math. Gaz. **30** (1946), 111—115; см. также: Math. Intelligencer **5**:2 (1983), 60—63.

[II.17] Heilbrown H., Howarth L., *Jacques Hadamard*, Nature **200**, (1963), 937—938.

[II.18] *Hommage à Jacques Hadamard*, Nouvelles Littéraires, 2 février 1956.

[II.19] *Hommage italien au mathématicien Jacques Hadamard*, Le Monde, 21 novembre 1965.

[II.20] Itard J., *Jacques Hadamard (1865—1963)*, Bull. de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public **233** (1963), 107—111.

[II.21] *Jacques Hadamard a reçu hier une grand médaille d'or frappée à son nom*, L'Humanité, 22 décembre 1962.

[II.22] *Jacques Hadamard. Une vie de science et de conscience*, L'Humanité, 18 octobre 1963.

[II.23] *Jacques Hadamard*, France Nouvelle, 22 octobre 1963.

[II.25] *Jacques Hadamard, mathématicien*, Figaro Littéraire, 26 octobre 1963.

[II.26] *Jacques Hadamard n'est plus*, Le Courrier Rationaliste **11** (1963), 237.

[II.27] *Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard*, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[II.28] Kahane J.-P., *Un grand savant, un grand témoin de notre temps : Jacques Hadamard*, L'Humanité, 21 décembre 1962.

[II.29] Kahane J.-P., *Jacques Hadamard*, Math. Intelligencer **13**:1 (1991), 23—29.

[II.30] *La médaille d'or de l'Académie remise vendredi au professeur Hadamard*, L'Humanité, 18 décembre 1962.

[II.31] *La médaille d'or de l'Académie des Sciences au professeur Hadamard*, Le Monde, 19 décembre 1962.

[II.32] *La semaine de la science française en URSS. Les savants de l'URSS saluent leurs confrères français. Jacques Hadamard*, Le Journal de Moscou, mai 1934.

[II.33] *Le professeur Jacques Hadamard a aujourd'hui 90 ans*, L'Humanité, 8 décembre 1955.

[II.34] *Le professeur Jacques Hadamard a 90 ans*, Droit et Liberté, 20 décembre 1955.

[II.35] *L'illustre mathématicien Jacques Hadamard*, L'Humanité, 22 octobre 1963.

[II.36] Lévy P., *Jacques Hadamard*, La Jaune et la Rouge, janvier 1964, 3—9.

[II.37] Lévy P., Malgrange B., Malliavin P., Mandelbrojt S., *La vie et l'œuvre de Jacques Hadamard (1865—1963)*, Monographie de l'Enseign. Math. **16** (1967).

[II.38] Maeder A. M., *Jacques Hadamard* (на португ. яз.), Boletim Soc. Paranaense Mat. **7** (1963), 5—7.

[II.39] Malgrange B., *Jacques Hadamard : un grand savant, un homme de progrès*, L'Humanité Dimanche, 20 octobre 1963.

[II.40] Mandelbrojt S., *The mathematical work of Jacques Hadamard*, Amer. Math. Month. **60** (1953), 599—603.

[II.41] Mandelbrojt S., *Jacques Hadamard au Collège de France*, La Jaune et la Rouge, mai 1966, 23—25.

[II.42] Mandelbrojt S., *Hadamard Jacques*, Dictionary of Scientific Biography, New York, vol. 6, 1972, 3—5.

[II.43] Mandelbrojt S., Schwartz L., *Jacques Hadamard*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 107—129.

[II.44] Маргулис А. Я., Юшкевич А. П., *Жак Адамар*, Матем. в школе **2** (1964), 77—80.

[II.45] *Mort hier à l'âge de 98 ans, le mathématicien Jacques Hadamard fut célèbre des son entrée à Polytechnique : jamais un élève ne fut admis avec un plus grand nombre de points*, Liberté, Clermont-Ferrand, 18 octobre 1963.

[II.46] *Mort du mathématicien Jacques Hadamard de l'Académie des Sciences*, Le Figaro, 18 octobre 1963.

[II.47] *Mort du mathématicien Jacques Hadamard, doyen de l'Institut de France*, Le Monde, 19 octobre 1963.

[II.48] *Mort d'un grand mathématicien*, Les Lettres Françaises, 24 octobre 1963.

[II.49] Nicoletis J., *Souvenirs sur Jacques Hadamard*, La Jaune et la Rouge, janvier 1964, 10—12.

[II.50] Painlevé P., *Rapport sur le mémoire de M. J. Hadamard*, Prix Vaillant, C. R. Acad. Sci. Paris **145** (1907), 984—986.

[II.51] Петровский И. Г., Соболев С. Л., *О работах Жака Адамара по уравнениям с частными производными*, Успехи мат. наук **2** (1936), 82—91.

[II.52] Полищук Е. М., Шапошникова Т. О., *Жак Адамар*, Наука, Л., 1990.

[II.53] *Prix Albert Ier de Monaco*, C. R. Acad. Sci. Paris **227** (1948), 1302.

[II.54] *Recepcion del profesor doctor Jacobo Hadamard el 13 de mayo de 1930*, Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Buenos Aires **110** (1930), 66—80.

[II.55] *Relazione sul Concorso al Premio Internazionale Antonio Feltrinelli per la Matematica e l'Astronomia per il 1951*, Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti delle Adunanze solenni **5**:6 (1951), 293—295.

[II.56] *Remise à M. Jacques Hadamard d'une médaille d'or à l'occasion du cinquantième anniversaire de son élection à l'Académie*, Acad. Sci. Paris, Notices et Discours **4** (1962), 730—739.

[II.57] Renteln M. von, *Geschichte der Analysis im 20 Jahrhundert von Hubert bis J. v. Neumann*, Skriptum zur Vorlesung, Universität Karlsruhe, 1987.

[II.58] Rossat-Mignod S., Rossat-Mignod A., *Jacques Hadamard*, Les Cahiers Rationalistes **269** (1969), 306—358.

[II.59] Стеклов В. А., Успенский Я. В., Иоффе А. Ф., *Заметка о научных работах Жака Адамара*, Изв. Российской академии наук, Сер. 6, 16 (1922), 33—37.

[II.60] Шилов Г. Е., *Жак Адамар и формирование функционального анализа*, Успехи мат. наук **19**:3 (1964), 183—185.

[II.61] Tricomi F. G., *Commemorazione del Socio straniero Jacques Hadamard*, Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Ser. 8, **39**:5 (1965), 375—379.

[II.62] *Tsortsis, A., On the occasion of the Jubilee of Jacques Hadamard* (на греч. яз.), Hellenike Mathematike Hetaireia **18** (1938), 203—207.

III. Использованная литература

[III.1] Abragam A., *Time reversal. An autobiography*, Clarendon Press, Oxford, 1989. Рус. пер.: Абрагам А., *Время вспять, или Физик, физик, где ты был*, Наука, М., 1991.

[III.2] Accadi L., *Vito Volterra and the development of functional analysis*, Convegno Internazionale in Memoria di Vito Volterra (Roma, 8—11 ottobre 1990), Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1992, 151—181.

[III.3] Adhemar R. d', *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles de second ordre, du type hyperbolique*, J. Math. Pures et Appl. Sér. 5, **10** (1904), 131—207.

[III.4] Adhemar R. d', *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique*, J. Math. Pures et Appl. Sér. 6, **2** (1906), 357—379.

[III.5] Agaian S. S., *Hadamard matrices and their applications*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1985.

[III.6] Albers D.J., Alexanderson G.L., Reid C., *International Mathematical Congresses. An illustrated history 1893—1986*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1987.

[III.7] Albers D. J., Alexanderson G. L., Reid C. (Eds.), *More mathematical people*, Harcourt Brace Jovanovich, Boston—San Diego—New York, 1990.

[III.8] Александров В. А., *Вложение локально-евклидовых и конформно-евклидовых метрик*, Мат. сб. **182**:8 (1991), 1105—1117.

[III.9] Almansi E., *Sull' integrazione dell' equazione differenziale*, Atti Accad. Sci. Torino **31** (1896), 527—534.

[III.10] Andersson K. G, *Poincaré's discovery of homoclinic points*, Arch. Hist. Exact Sci. **48**:2 (1994), 133—147.

[III.11] Аносов Д. В., *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны*, Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова **90** (1967), 3—209.

[III.12] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989.

[III.13] Арнольд В. И., *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.

[III.13a] Арнольд В. И., *Об А. Н. Колмогорове*, Колмогоров в воспоминаниях учеников, МЦНМО, М., 2006, 34—53.

[III.14] Asgeirsson L., *Some hints in Huygens' principle and Hadamard's conjecture*, Commun. Pure Appl. Math. **9**:3 (1956), 307—327.

[III.15] Atiyah M. F., Bott R., Gårding L., *Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients*, I. Acta Math. **124** (1970), 109—189; II. Ibid. **131** (1973), 145—206. Рус. пер.: Атья М. Ф., Ботт Р., Гординг Л., *Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами*, УМН **39**:3 (1984), 171—224.

[III.16] Бабич В. М., *Анзац Адамара, его аналоги, обобщения и приложения*, Алгебра и анализ **3**:5 (1991), 1—37.

[III.17] Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А., *Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1985.

[III.18] Bamberger A., Ha Duong T., *Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique*, I. Math. Methods Appl. Sci. **8**:3 (1986), 405—435.

[III.19] Barrow-Green J., *Poincaré and the three body problem*, AMS, Providence, R.I., 1997.

[III.20] Baumert L. D., Hall M., Jr., *Hadamard matrices of the Williamson type*, Math. of Computation **19** (1965), 442—447.

[III.21] Beaulieu L., *A Parisian café and ten proto-Bourbaki meetings (1934—1935)*, Math. Intelligencer **15**:1 (1993), 27—35.

[III.22] Beckenbach E. F., Bellman R., *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1961. Рус. пер.: Беккенбах Э., Беллман Р., *Неравенства*, Мир, М., 1965.

[III.23] Begehr H., Zhenyuan Xu, *Nonlinear Half-Dirichlet problems for first order elliptic equations in the unit bail of R^m $(m \geqslant 3)$*, Applicable Analysis **45** (1992), 3—18.

[III.24] Belhoste B., Dalmedico A. D., Picon A., *La formation polytechnicienne 1794—1994*, Dunod, Paris, 1994.

[III.25] Bellman R., *Introduction to matrix analysis*, Tata McGraw-Hil, New Delhi, 1979. Рус. пер.: Беллман Р., *Введение в теорию матриц*, Наука, М., 1976.

[III.26] Benzaghou B., *Sur le quotient de Hadamard de deux fractions rationnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris **267** (1968), 212—214.

[III.27] Benzaghou B., *Algèbres de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 209—252.

[III.28] Берест Ю. Ю., Веселов А. П., *Принцип Гюйгенса и интегрируемость*, Успехи мат. наук **49**:6 (1994), 7—78.

[III.29] Березанский Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова Думка, Киев, 1965.

[III.30] Berger M., Gostiaux B., *Differential geometry: manifolds, curves and surfaces*, Springer-Verlag, New York—Berlin—Heidelberg, 1988.

[III.31] Berger M.S., Berger M.S., *Perspectives in nonlinearity*, Benjamin, New York, 1970.

[III.32] Bernstein S. N., *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Thèse Fac. Sci. Paris, Teubner, Leipzig, 1904.

[III.33] Beth Th., Jungnickel D., Lenz H., *Design theory*, Bibliographisches Institut, Mannheim—Wien—Zürich, 1985.

[III.34] Beurling A., *Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés* I, Acta Math. **68** (1937), 255—291.

[III.35] Beurling A., *Ensembles exceptionnels*, Acta Math. **72** (1940), 1—13.

[III.36] Bieberbach L., *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag, Berlin, 1955. Рус. пер.: Бибербах Л., *Аналитическое продолжение*, Наука, М., 1967.

[III.37] Birkhoff G., *Hydrodynamics, A study in logic, fact, and similitude*, Dover, New York, 1955. Рус. пер.: Биркгоф Г., *Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие*, ИЛ, М., 1963.

[III.38] Birkhoff G. D., *Dynamical Systems*, AMS Publications, Providence, 1927; 1966. Рус. пер.: Биркгоф Дж. Д., *Динамические системы*, ГТТИ, М.—Л., 1941.

[III.39] Birkhoff G. (Ed.), *A source book in classical analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1973.

[III.40] Bishop R. L., Crittenden R. J., *Geometry of manifolds*, Academic Press, New York—London, 1964. Рус. пер.: Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Дж., *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967.

[III.41] Благовещенский А. С., *О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения*, Мат. сб. **63**:1 (1964), 137—168.

[III.42] Block H., *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Arkiv för Matem., Astronomi, Fysik **6**:31 (1911), 1—42.

[III.43] Blum L., *Souvenirs sur l'Affaire*, Gallimard, Paris, 1936.

[III.44] Boggio T., *Sull' equilibrio delle piastre elastiche incastrate*, Rend. Accad. Lincei **10** (1901), 201—203.

[III.45] Boggio T., *Determinazione della deformazione di un corpo elastico per date tensioni superficiali*, Atti Accad. Lincei **7** (1907), 441—449.

[III.46] Bolza O., *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Teubner, Leipzig—Berlin, 1909.

[III.47] Bombieri E., *On the large sieve*, Mathematika **12** (1965), 201—225.

[III.48] Borel E., *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **122** (1896), 1045—1048; см. также: *Œuvres de Emile Borel*, vol. 1, CNRS, Paris, 1972, 571—574.

[III.49] Borel E., *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta Math. **20** (1897), 357—396; см. также: *Œuvres de Emile Borel*, vol. 1, CNRS, Paris, 1972, 577—616.

[III.50] Borel E., *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1903.

[III.51] Borel E., *Remarques sur les principes de la théorie des ensembles*, Math. Ann. **60** (1905), 194—195; см. также: *Œuvres de Emile Borel*, vol. 3, CNRS, Paris, 1972.

[III.51a] Borel E., *Méthodes et problèmes de Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[III.52] Borel E., *Documents sur la psychologie de l'invention dans le domaine de la science*, Organon, Varsovie **1** (1935), 33—42; см. также: *Œuvres de Emile Borel*, vol. 4, CNRS, Paris, 1972, 2093—2102.

[III.53] Bottazzini U., *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer-Verlag, New York—Berlin—Heidelberg, 1986.

[III.54] Bottazzini U., *Three traditions in complex analysis: Cauchy, Riemann and Weierstrass*, Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences, Grattan-Guinness I. (Ed.), Routledge, London—New York, 1994, 419—431.

[III.55] Bottazzini U., Gray J. J., *Complex function theory from Zurich (1897) to Zurich (1932)*, Rend. Circolo Matematico di Palermo, Ser. II Supplemento, **44** (1996), 85—111.

[III.56] Bouligand G., *Sur divers problèmes de la dynamique des liquides*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[III.57] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1953. Рус. пер.: Бурбаки Н., *Топологические векторные пространства*, ИЛ, М., 1959.

[III.58] Bourbaki N., *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960. Рус. пер.: Бурбаки Н., *Очерки по истории математики*, Наука, М., 1963.

[III.59] Bourgin D. G., Duffin R., *The Dirichlet problem for the vibrating string equation*, Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), 851—859.

[III.60] Bradley S. (Ed.), *Archives biographiques françaises*, Bowker-Saur, London—Paris—Munich—New York, 1988—1990.

[III.61] Browder F. E., *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces*, Proc. Symposia in Pure Math. **18** (1976), part 2, AMS, Providence, R.I.

[III.62] Bruce J. W., Giblin P. J., *Curves and singularities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[III.62a] Burckel R. B., *An introduction to classical complex analysis*, V. 1, Academic Press, N. Y.—San Francisco, 1979.

[III.63] Bureau F. J., *Divergent integrals and partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 143—202.

[III.64] Bureau F. J., *Sur la question du Prix Bordin 1933*, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques **7** (1986), 1—13.

[III.65] Campbell D. M., *Beauty and the beast: the strange case of André Bloch*, Math. Intelligencer **7**:4 (1985), 36—38.

[III.66] Cannell D. M., *George Green. Mathematician and physicist, 1793—1841. The background to his life and work*, The Athlone Press, London and Atlantic Highlands, NJ, 1993.

[III.67] Carathéodory C., рец. на кн.: Hadamard J., *Leçons sur le calcul des variations*, Bull. Sci. Math. **35** (1911), 124—142.

[III.68] Carleman T., *Sur un théorème de M. Denjoy*, C. R. Acad. Sci. Paris **174** (1922), 373—376.

[III.69] Carleman T., *Les fonctions quasi analytiques*, Hermann, Paris, 1926.

[III.70] Cartan E.—Einstein A., *Letters on absolute parallelism 1929—1932*, (R. Debever, Ed.), Princeton University Press, 1979.

[III.71] Cartan H., Ferrand J., *The case of André Bloch*, Math. Intelligencer **10**:1 (1988), 23—26.

[III.71a] Cartwright M. L., *Integral Functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1964.

[III.72] Cattaneo C., *Su un teorema fondamentale nelle teoria delle onde di discontinuità*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. cl. sci. fis., mat. e natur. **1**:1 (1946), 66—72, **1**:6 (1946), 728—734.

[III.73] Cauchy A., *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Analyse algébrique*, Imprimerie Royale, Paris, 1821.

[III.74] Cauchy A., *Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce*, J. Ecole Polytechnique **18**, 28ème Cahier (1844), 147—248.

[III.75] Cauchy A., *Sur un nouveau genre d'intégrales : Exercices de mathématiques: 1826. Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris, 1887, Vol. 6, 78—88.

[III.76] *Chansons nationales*, Dumersan et Segur, Paris, 1851.

[III.77] Chauvin A., *Louis le Grand, lycée scientifique*, в кн.: *Louis le Grand, 1563—1963. Etudes. Souvenirs. Documents*, Paris, 1963, 21—24.

[III.78] Charle C., Telkes E., *Les professeurs du Collège de France, Dictionnaire biographique*, Editions du CNRS, Paris, 1988.

[III.79] Chen J. T., Hong H. K., *On the dual integral representation of boundary value problems in Laplace equation*, Boundary Elements Abstracts **4**:3 (1993), 114—116.

[III.80] Christoffel E. B., *Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten*, Ann. Math. **8**:2 (1877), 81—112.

[III.81] Christophe, *L'idée fixe du savant Cosinus*, Armand Colin, Paris, 1991.

[III.82] *Chronique*, Archives Israélites de France **6** (1845), 170.

[III.83] Clarke F. H., *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1983. Рус. пер.: Кларк Ф., *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988.

[III.84] Coffman C. V., *On the structure of solutions to $\Delta^2 u = \lambda u$ which satisfy the clamped plate conditions on a right angle*. SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 746—757.

[III.85] Coffman C. V., Duffin R. J., *On the fundamental eigenfunctions of a clamped punctured disk*, Adv. in Appl. Math. **13**:2 (1992), 142—151.

[III.86] *Compte rendu de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique*, Paris, 1—4 avril 1914, Enseign. Math. **16** (1914), 174—177, 298—302.

[III.87] Cooke R., *The mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer-Verlag, New York—Berlin—Heidelberg, 1984.

[III.88] *Corpus Iuris Civilis*, vol. 2: *Codex Iustinianus*, Apud Weidmannos, Berolini, 1915.

[III.89] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* (publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget), tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1905.

[III.90] Courant R., *Partial differential equations*, Interscience Publishers, New York, 1962. Рус. пер.: Курант Р., *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

[III.91] Courant R., Hilbert D., *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Interscience Publishers, New York, 1962. Рус. пер.: Курант Р., Гильберт Д., *Методы математической физики*, 3-е изд., т. 2, ГТТИ, М.—Л., 1951.

[III.92] Darboux G., *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série*, J. Math. Pures Appl. **4**:3 (1878), 5—56.

[III.93] Dauben J. W., *Mathematicians and World War I: the international diplomacy of G. H. Hardy and Gösta Mittag-Leffler as reflected in their personal correspondence*, Historia Mathematica **7** (1980), 261—288.

[III.94] *David Hilbert on Poincaré, Klein, and the world of mathematics* (translated from the German by D. E. Rowe), Math. Intelligencer **8**:1 (1986), 75—77.

[III.95] Delbourgo D., Elliott D., *On the approximate evaluation of Hadamard finite-part integrals*, IMA J. of Numerical Analysis **14** (1994), 485—500.

[III.96] Dell'Agnola C. A., *Estensione di un teorema di Hadamard*, Ven. Ist. Atti **58** (1899), 525—539, 669—677.

[III.97] Demidov S.S., *Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. d'Alembert*, Rev. Hist. Sci. **35**:1 (1982), 3—42.

[III.98] Demidov S.S., *The study of partial differential equations of the first order in the 18th and 19th centuries*, Arch. for Hist. Ex. Sci. **26** (1982), 325—350.

[III.99] *Den exakta forskningen i Sverige. Fyra uttalanden för Svenska Dagbladets jubileumsenquête*, Svenska Dagbladet, Oktober 27, 1939.

[III.100] Denjoy A., *Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle*, C. R. Acad. Sci. Paris **173** (1921), 1329—1331.

[III.101] Desplanques J., *Théorème d'algèbre*, J. de Math. Spec. **9** (1887), 12—13.

[III.102] *Déterminisme et causalité dans la physique contemporaine, C. R. de séance du 12 novembre 1929*, Bull. de la Société française de philosophie **29** (1929), 141—160.

[III.103] Diacu F., Holmes Ph., *Celestial encounters. The origins of chaos and stability*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996.

[III.104] Dieudonné J., *The work of Nicolas Bourbaki*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 134—145.

[III.105] Dieudonné J., *Abrégé d'histoire des mathématiques: 1700—1900*, vol. 1, 2, Hermann, Paris, 1978.

[III.106] Dirichlet P. C. L., *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Faktor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*, Abh. Akad. Berlin. Math. Abh. 1837—1839, 45—71.

[III.107] *Discours prononcé à la distribution solennelle des prix le 2 août 1878*, Donnaud, Paris, 1878.

[III.108] Domar Y., *On the foundation of Acta Mathematica*, Acta Math. **148** (1982), 3—8.

[III.109] Douglis A., *A criterion for the validity of Huygens' principle*, Commun. Pure Appl. Math. **9**:3 (1956), 391—402.

[III.110] Du Bois-Reymond P., *Die allgemeine Funktionentheorie*, Verlag der H. Laupp'schen Buchhandlung, Tübingen, 1882.

[III.111] Du Bois-Reymond P., *Über lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, J. reine und angew. Math. **104** (1889), 241—301.

[III.112] Duffin R. J., *On a question of Hadamard concerning superbiharmonic functions*, J. Math. and Phys. **27**:1 (1949), 253—258.

[III.113] Duffin R. J., *Some problems of mathematics and science*, Bull. Amer. Math. Soc. **80**:6 (1974), 1053—1070.

[III.114] Duhem P., *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, Hermann, Paris, 1891.

[III.115] Duhem P., *Recherches sur l'élasticité. Troisième partie: la stabilité des milieux élastiques*, Ann. Ecole Norm. Sup. **20**:3 (1905), 143—217.

[III.116] Duhem P., *La théorie physique: son objet, sa structure*, Marcel Rivière et Cie, Paris, 1906. Англ. пер.: Duhem P., *The aim and structure of physical theory*, Atheneum, New York, 1974. Рус. пер.: Дюгем П., *Физическая теория, ее цель и строение*, Из истории французской науки, АН СССР, М., 1960; УРСС, М., 2007.

[III.117] Duistermaat J. J., *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 207—281.

[III.118] Edwards H. M., *Riemann's zeta function*, Academic Press, New York—London, 1974.

[III.119] Егоров Д. Ф., *Письма к Н. Е. Лузину*, опубл. Ф. А. Медведевым и А. П. Юшкевичем, Историко-мат. исслед. **25** (1980), 335—361.

[III.120] Einstein A., *Œuvres choisies*, tome 4: *Correspondances françaises*, Editions du Seuil, Paris, 1989.

[III.120a] Einstein A., *Paul Langevin*, La Pensée **12** (1947), 13—14. Рус. пер.: *Поль Ланжевен*, в кн.: А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов* в 4 томах, Наука, М., 1967, т. 4, 255—256.

[III.121] Ellison W., Ellison F., *Prime numbers*, John Wiley & Sons, New York—London—Sydney—Toronto; Hermann, Paris, 1985.

[III.122] Engelsman S. B., *Lagrange's early contributions to the theory of first order partial differential equations*, Hist. Math. **7** (1980), 7—23.

[III.123] Engliš M., Peetre J., *Green's function for the annulus*, Annali di Matematica **171**, 313—377.

[III.124] Erdös P., *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. (Washington) **35** (1949), 374—384.

[III.125] Euler L., *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs* (Presented to Berlin Acad. of Sci. on June 22, 1747), Comment. Arithm. Collect. Petropoli **2** (1849), 639—647.

[III.126] Euler L., *Correspondance de Léonard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange*, в кн.: Euler L., *Opera Omnia*, vol. 5, ser. 4, 1980.

[III.127] Fabry E., *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor*, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris **13**:3 (1896), 367—399.

[III.128] Fantappiè L., *I funzionali analitici*, Atti Accad. dei Lincei **3**:6 (1928—1929), 453—683.

[III.129] Fattorini H. O., *The Cauchy problem*, Addison-Wesley, London—Amsterdam, 1983.

[III.130] Fichera G., *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[III.131] Фикера Г., *О распространении волны в упругой среде*, Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, Наука, М., 1972, 567—574.

[III.132] Fichera G., *Vito Volterra and the birth of functional analysis*, в кн.: Pier, J.-P. (Ed.), *Development of mathematics 1900—1950*, Birkhäuser Verlag, Basel—Boston—Berlin, 1994, 171—183.

[III.133] *Иностранные ученые о своих впечатлениях*, Вестник АН СССР **7** (1945), 149—152.

[III.134] Frantz E. G. (Ed.) Die Chronik Hessens, Harenberg Verlag, Dortmund, 1991.

[III.135] Fréchet M., *Sur la notion de différentielle*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **16** (1937), 233—250.

[III.136] Fréchet M., *Les principes de la théorie des probabilités. Second livre: Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaine dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, Gauthier-Villars, Paris, 1938.

[III. 137] Fredholm I., *Œuvres complètes*, Litos reprotryck, Malmö, 1955.

[III. 138] Fredholm I., *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar **1** (1900), 39—46; см. также Œuvres complètes, 61—68.

[III.139] Freudental H., *The cradle of modern topology according to Brouwer's inedita*, Hist. Math. **2** (1975), 495—502.

[III.140] Fujiwara D., Ozawa S., *The Hadamard variational formula for the Green functions of some normal elliptic boundary value problems*, Proc. Japan Acad. **54**, Ser. A (1978), 215—220.

[III.141] Gagliardo E., *Ulteriori proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili*, Ric. Mat. **8**:1 (1959), 24—51.

[III.142] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц*, 4-е изд., Наука, М., 1988.

[III.143] Garabedian P. R., *A partial differential equation arising in conformal mapping*, Pacific J. Math. **1** (1951), 485—524.

[III.144] Garipov R. M., *On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness*, Arch. Rat. Mech. Anal. **24**:5 (1967), 352—362.

[III.145] Gâteaux R., *Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel*, Bull. Soc. Math. France **97** (1919), 47—70.

[III.146] Gâteaux R., *Fonctions d'une infinité de variables indépendantes*, Bull. Soc. Math. France **97** (1919), 70—96.

[III.147] Gauss C. F., *Werke*, Leipzig, Bd. 2, 1863.

[III.148] Giaquinta M., Souček J., *Caccioppoli's inequality and Legendre—Hadamard condition*, Math. Ann. **270** (1985), 105—107.

[III.149] Gispert H., *La France mathématiques*, Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques. Société Mathématique de France, Paris, 1991.

[III.150] Гливенко В. И., *Понятие дифференциала по Марксу и Адамару*, Под знаменем марксизма **5** (1934), 79—85.

[III.151] Goldstein L. J., *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 599—615.

[III.152] Goldstine H. H., *A history of the calculus of variations from the l7th through the 19th century*, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1980.

[III.153] Goncourt E. de, Goncourt J. de, *Journal*, tome 9, Fasquelle et Flammarion, Monaco, 1956.

[III.154] Goursat E., *A course in mathematical analysis*, Athenaeum Press, Boston, Mass., vol. l 1904, vol. 2 1916, vol. 3 1917. Рус. пер.: Гурса Э., *Курс математического анализа*, 3-е изд., т. 1, 2, ОНТИ, М.—Л., 1936.

[III.155] Gragg W. B., *On Hadamard's theory of polar singularities*, в кн.: Graves-Morris P. R. (Ed.), *Padé approximants and their applications*, Proc. of the Conference held at the University of Kent 17—21 July, 1972, Academic Press, London and New York, 1973.

[III.156] Gray J. D., *The shaping of the Riesz representation theorem: a chapter in the history of analysis*, Arch. Hist. Exact Sci. **31** (1984), 125—187.

[III.157] Gray J. J., *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*, Birkhäuser Verlag, Boston—Basel—Stuttgart, 1986.

[III.158] Gray J. J., *Green and Green's functions*, Math. Intelligencer **16**:1 (1994), 45—47.

[III.159] Grunau H.-Ch., Sweers G., *Positivity for perturbations of polyharmonic operators with Dirichlet boundary conditions in two dimensions*, Math. Nachr. **179** (1996), 89—102.

[III.160] Günther P., *Zur Gültigkeit des Huygensschen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typ*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Naturwiss. Kl. **100** (1952), H. 2.

[III.161] Günther P., *Huygens' principle and hyperbolic equations*, Academic Press, Boston, 1988.

[III.162] Günther P., *Huygens' principle and Hadamard's conjecture*, Math. Intelligencer **13**:2 (1991), 56—63.

[III.163] Halmos P. R., *I want to be a mathematician*, Springer-Verlag, New York—Berlin—Heidelberg—Tokyo, 1985.

[III.164] Hamel G., *Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Göttingen, 1901.

[III.165] Hardy G. H., *Sur les zéros de la foncton $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1012—1014.

[III.166] Hardy G. H., Littlewood J. E., *Contributions to the arithmetic theory of series*, Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2, **11** (1912—1913), 411—478.

[III.167] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G., *Inequalities*, Cambridge University Press, London, 1934. Рус. пер.: Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

[III.168] Harwit M., Sloane N. J. A., *Hadamard transform optics*, Academic Press, New York, 1979.

[III.169] Hawkins T., *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*, The Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis.—London, 1970.

[III.170] Hayman W. K., Korenblum B., *Representation and uniqueness theorems for polyharmonic functions*, J. Anal. Math. **60** (1993), 113—133.

[III.171] Hedayat A., Wallis W. D., *Hadamard matrices and their applications*, Annals of Statistics **6**:6 (1978), 1184—1238.

[III.172] Hedenmalm H., *A computation of Green functions for the weighted biharmonic operators $\Delta|z|^{-2\alpha}\Delta$ with $\alpha > -1$*, Duke Math. J. **75**:1 (1994), 51—78.

[III.173] Heim R., *Exposé sur la nécessité de protéger certaines ressources en voie de disparition*, C. R. Acad. Sci. Paris, Vie Académique **265** (1967), 140—144.

[III.174] Hermite C., *Estrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Mittag-Leffler sur quelques points de la théorie des fonctions*, J. für Mathem. **91** (1881), 53—78.

[III.175] Herz H., *Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhängen dargestellt*, Ges. Werke, Leipzig, Bd. 3, 1894—1895. Рус. пер.: Герц Г., *Принципы механики, изложенные в новой связи*, Изд-во АН СССР, М., 1959.

[III.176] Hilbert D., *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, Comptes Rendus du deuxième Congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 58—114. Рус. пер.: *Проблемы Гильберта*: Сб. статей под ред. П. С. Александрова, Наука, М., 1969.

[III.177] Holland A. S. B., *Introduction to the theory of entire functions*, Academic Press, New York—London, 1973.

[III.178] Holmgren E., *Über Système von linearen partiellen Differentialgleichungen*, Öfversigt af Kongl. Vetenskapsakad. förh. **58** (1901), 91—105.

[III.179] Holmgren E., *Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann*, Ark. Mat., Astron., Fys. **1**:22 (1904), 317—326.

[III.180] Hörmander L., *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math. **54** (1955), 161—248. Рус. пер.: Хёрмандер Л., *К теории общих дифференциальных операторов в частных производных*, ИЛ, М., 1959.

[III.181] Horn R. A., Johnson C. R., *Topics in matrix analysis*, Cambrige University Press, Cambridge, 1991.

[III.182] Huber A., *Die erste Randwertaufgabe für geschlossene Bereiche bei der Gleichung* $\partial^2 z/\partial x \partial y = f(x, y)$, Monatshefte Math. Phys. **39** (1932), 79—100.

[III.183] Hugoniot H., *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits*, J. Ec. Polytechn. **57** (1887), 1—97; **58** (1889), 1—125.

[III.184] Hunt L. R., Su R., Meyer G., *Global transformations of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **28**:1 (1983), 24—30.

[III.185] Hurwitz A., *Sur un théorème de M. Hadamard*, C. R. Acad. Sci. Paris **128** (1899), 350—353.

[III.186] Ибрагимов Н. Х., *Конформная инвариантность и принцип Гюйгенса*, Докл. АН СССР **194**:1 (1970) 24—27.

[III.187] Ибрагимов Н. Х., *Принцип Гюйгенса*, в кн.: *Некоторые проблемы математики и механики*, Наука, Л., 1970, 159—170.

[III.188] Ибрагимов Н. Х., *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983.

[III.189] Ibragimov N. H., Mamontov E. V., *Sur le problème de J. Hadamard relatif à la diffusion des ondes*, C. R. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 456—458.

[III.190] Ikehara S., *An extension of Landau's theorem in the analytical theory of numbers*, J. Math. and Phys. **10** (1931), 1—12.

[III.191] Infeld L., *My reminiscences about Einstein* (на польск. яз), Twórczość **9** (1955), 41—85. Рус. пер.: Инфельд Л., *Мои воспоминания об Эйнштейне*, Успехи мат. наук **59**:1 (1956), 135—184.

[III.192] Ingham A. E., *The distribution of prime numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1932. Рус. пер.: Ингам А.Е., *Распределение простых чисел*, ОНТИ, М.—Л., 1936.

[III.193] Jacobi C. G. J., *Vorlesungen über Dynamik*, Reimer, Berlin, 1866. Рус. пер.: Якоби К. Г. Я., *Лекции по динамике*, ОНТИ, М.—Л., 1936; УРСС, М., 2004.

[III.194] Jaki S. L., *Uneasy genius: the life and work of Pierre Duhem*, Martinus Nijhoff, Dordrecht—Boston—Lancaster, 1987.

[III.195] Jeannin P., *Deux siècles à Normale Sup. Petite histoire d'une Grand Ecole*, Larousse, Paris, 1994.

[III.196] Jensen J. L. W., *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions*, Acta Math. **21** (1897), 359—365.

[III.197] Jentsch R., *Über Integralgleichungen mit positivem Kern*, J. für die reine und angew. Math. **141** (1912), 235—244.

[III.198] John F., *The Dirichlet problem for a hyperbolic equation*, Amer. J. Math. **63**:1 (1941), 141—154.

[III.199] John F., *On quasi-isometric mappings*, I, Comm. Pure and Appl. Math. **21** (1968), 77—110.

[III.200] Johnson D. M., *The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology*, II, Archive for History of Exact Sciences **25** (1981), 85—266.

[III.201] Julia G., *Variation de la fonction qui fournit la représentation conforme d'une aire sur un cercle, lorsque le contour de l'aire varie*, C. R. Acad. Sci. Paris **172** (1921), 568—570.

[III.202] Julia G., *Deux conséquences de l'équation aux dérivées fonctionnelles qu'on tire de la représentation conforme*, C. R. Acad. Sci. Paris **172** (1921), 738—741.

[III.203] Julia G., *Sur une équation aux dérivées fonctionnelles analogue à l'équation de M. Hadamard*, C. R. Acad. Sci. Paris **172** (1921), 831—833.

[III.204] Julia G., *Les séries d'itérations et les fonctions quasi analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **180** (1925), 720—723.

[III.205] Julia G., *Sur un type de fonctions quasi analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1150—1153.

[III.206] Julia G., *Fonctions quasi analytiques et fonctions entières d'ordre nul*, C. R. Acad. Sci. Paris **180** (1925), 1240—1242.

[III.207] Kahane J.-P., *Des séries de Taylor au mouvement brownien, avec un aperçu sur le retour*, в кн.: *Development of Mathematics 1900—1950*, Jean-Paul Pier (Ed.), Birkhäuser Verlag, Basel—Boston—Berlin, 1994, 415—429.

[III.207a] Kahane J.-P., *Hadamard et la stabilité du système solaire*, Travaux mathématiques, Fasc. XI, Sem. Math. Luxembourg, Centre Univ. Luxembourg, Luxembourg, 1999, 33—48.

[III.208] Канторович Л. В., *Мой путь в науке*: Предполагавшийся доклад в Моск. матем. об-ве, Успехи мат. наук **42**:2 (1987), 183—214.

[III.209] Kennedy H. C., *Karl Marx and the foundations of differential calculus*, Историко-мат. исслед. **26** (1982), 17—39; см. также: Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, USA, August 30—September 6, 1950; AMS, Providence, R.I., 1952, 121—123.

[III.210] Kneser A., *Studien über die Bewegungsvorgänge in der Umgebung instabiler Gleichgewichtslagen*, J. für die reine und angew. Math. **118** (1897), 186—223.

[III.211] Kneser A., *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Braunschweig, 1900.

[III.212] Koch H. von, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math. **24** (1901), 159—182.

[III.213] Kolmogorov A. N., *Une généralisation de l'inégalité de M. J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction*, C. R. Acad. Sci. Paris **207** (1938), 764—765.

[III.214] Колмогоров А. Н., *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале*, Ученые записки МГУ, Математика **3**:3 (1939), 3—16.

[III.215] Колмогоров А. Н., *О некоторых асимптотических характеристиках тотально ограниченных метрических пространств*, Доклады АН СССР **108**:2 (1956), 179—182.

[III.216] Колмогоров А. Н., *Избранные труды. Т. 1. Теория вероятностей и математическая статистика*, Наука, М., 1986.

[III.217] Kőnig G., *Ein allgemeiner Ausdruck fur die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n-ten Grades*, Math. Annalen **9** (1876), 530—540.

[III.218] Козлов В. А., Кондратьев В. А., Мазья В. Г., *О знакопеременности и отсутствии «сильных» нулей решений эллиптических уравнений*, Изв. АН СССР, Сер. матем., **53**:2 (1989), 328—344.

[III.218a] Kresin G. I., Maz'ya V. G., *Sharp parametric estimates for analytic and harmonic functions related to Hadamard—Borel—Carathéodory inequalities*, Functional Differential Equations, **9**:1—2 (2002), 1—29.

[III.219] Kronecker L., *Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen*, Berlin (1881), 535—600.

[III.220] *La création artistique. C. R. de séance du 28 janvier 1928*, Bull. de la Société française de Philosophie **28** (1928), 1—23.

[III.221] Lamb H., *Hydrodynamics* (6th ed.), Cambridge University Press, London, 1932. Рус. пер.: Ламб Г., *Гидродинамика*, ОГИЗ; ГИТТЛ, М.; Л., 1947; репринт. изд.: т. 1, 2, НИЦ «РХД», М.; Ижевск, 2003.

[III.222] Landau E., *Über die Multiplikation Dirichlet'scher Reihen*, Rend. Circolo Mat. Palermo **24** (1907), 81—160.

[III.223] Landau E., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. 1, 2, Teubner, Leipzig, 1909.

[III.224] Landau E., *Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen*, Proc. London Math. Soc. **13** (1913), 43—49.

[III.225] Landau E., *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1, 2, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1927.

[III.226] Ландис Е. М., Олейник О. А., *Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений*, Успехи мат. наук **29**:2 (1974), 190—206.

[III.227] *La théorie de la relativité. C. R. de séance du 6 avril 1922*, Bull. de la Société française de Philosophie **17** (1922), 91—113.

[III.228] Lauricella G., *Integrazione dell' equazione* $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ *in un campo di forma circolare*, Atti Acad. Sci. Torino **31** (1896), 610—618.

[III.229] Lebesgue H., *Sur la définition de l'aire d'une surface*, C. R. Acad. Sci. Paris **129** (1899), 870—873.

[III.230] Lecornu L., *Sur les séries entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **104** (1887), 349—352.

[III.231] Legendre A. M., *Recherches d'analyse indéterminée*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, Année 1785, avec les Mémoires de Mathématiques et de Physique pour la même année, Imprimerie Royale, Paris, 1788, 465—559.

[III.232] Legendre A.M., *Essai sur la théorie des nombres*, Courcier, Paris, 1808.

[III.233] *Le lycée de Versailles*, Revue de l'Histoire de Versailles et de Seine-et-Oise, Léon Bernard, Versailles, 1911.

[III.234] *Les chevaux savants d'Elberfeld. C. R. de séance du 13 mars 1913*, Bull. de la Société française de Philosophie **13** (1913).

[III.237] Lévy L., *Sur la possibilité de l'équilibre électrique*, C. R. Acad. Sci. Paris **93** (1881), 706—708.

[III.238] Lévy M., *Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes*, J. Math. Pures et Appl. Sér. 3, **3** (1877), 219—307.

[III.239] Lévy P., *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1922.

[III.240] Lévy P., *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[III.241] Lévy P., *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Albert Blanchard, Paris, 1970.

[III.242] Lévy P., *Les noms des Israélites en France: histoire et dictionnaire*, PUF, Paris, 1960.

[III.243] Lewy H., *An example of a smooth linear partial differential equation without solution*, Ann. Mat. **66** (1957), 155—158.

[III.244] Li Y., McLaughlin D. W., Shatah J., Wiggins S., *Persistent homoclinic orbits for a perturbed nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Pure Appl. Math. **49**:11 (1996), 1175—1255.

[III.245] Littlewood J. E., *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris **158** (1914), 1869—1872.

[III.245a] Littlewood J. E., *Lectures on the theory of functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1944.

[III.246] Littlewood J. E., *A mathematician's miscellany*, Methuen, London, 1953. Рус. пер.: Литлвуд Дж., *Математическая смесь*, Наука, М., 1990.

[III.247] Loewner Ch., *On generation of solution of biharmonic equations in the plane by conformal mapping*, Pacific J. Math. **3** (1953), 417—436.

[III.248] Lorch L., рец. на кн.: D. J. Albers, G. L. Alexanderson, C. Reid, *International Mathematical Congresses. An illustrated history, 1893—1986*, Math. Intelligencer **10**:1 (1988), 65—69.

[III.249] Lützen J., *The prehistory of the theory of distributions*, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1982.

[III.250] Lützen J., *Joseph Liouville, 1809—1882, master of pure and applied mathematics*, Springer-Verlag, New York—Berlin—Heidelberg, 1990.

[III.251] Lützen J., *Partial differential equations*, в кн.: *Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences*, I. Grattan-Guinness (Ed.), vol. 2, 1994, London—New York, 452—469.

[III.252] Lützen J., *Interaction between mechanics and differential geometry in the 19th century*, Arch. Hist. Exact Sci. **49**:1 (1995), 1—72.

[III.253] Luzin N., *Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensemblés*, C. R. Acad. Sci. Paris **190** (1930), 349—351.

[III.254] Лузин Н. Н. *Письмо О. Ю. Шмидту*, опубл. С. С. Демидовым, Историко-мат. исслед. **28** (1985), 278—285.

[III.255] *Lycée Charlemagne. Distribution des prix*, Seringe frères, Paris, 1874.

[III.256] *Lycée de Louis-le-Grand. Distribution des prix faite aux élèves du grand et du moyen collège le 7 août 1877*, Donnaud, Paris, 1877.

[III.257] *Lycée de Louis-le-Grand. Distribution des prix faite aux élèves du grand et du moyen collège le 6 août 1878*, Donnaud, Paris, 1978.

[III.258] *Lycée de Louis-le-Grand. Distribution des prix faite aux élèves du grand et du moyen collège le 5 août 1879*, Donnaud, Paris, 1879.

[III.259] *Lycée de Louis-le-Grand. Distribution des prix*, Donnaud, Paris, 1880—1884.

[III.260] Люстерник Л. А., *Молодость Московской математической школы*, Успехи мат. наук **22**:1 (1967), 137—161; **22**:2 (1967), 199—239; **22**:4 (1967), 147—185; **25**:4 (1970), 189—196.

[III.261] MacWilliams F. J., Sloane N. J. A., *The theory of error-correcting codes*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

[III.262] Малышев В. А., *Гипотеза Адамара и оценки функции Грина*, Алгебра и анализ **4**:4 (1992), 1—44.

[III.263] Mandelbrojt S., *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1952. Рус. пер.: Мандельбройт С., *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения*, ИЛ, М., 1955.

[III.264] Mandelbrojt S., *Selecta*, Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[III.265] Mandelbrojt S., *Souvenirs à bâtons rompus de Szolem Mandelbrojt recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques **6** (1985), 1—46.

[III.266] Mangoldt H. von, *Zu Riemann's Abhandlung «Über die Anzahl...»*, J. reine angew. Math. **114** (1895), 255—305.

[III.267] Marguet, *Notice nécrologique sur Amédée Hadamard*, Association amicale des anciens élèves du lycée Charlemagne. Avril 1889, Seringe frères et Noailles, Paris, 1889.

[III.268] Маркушевич А. И., *Теория аналитических функций*, Гостехиздат, М., 1950.

[III.269] Marx K., *Mathematische Manuskripte*, Scriptor-Verlag, 1974.

[III.270] Mathieu E. L., *Sur le mouvement vibratoire des plaques*, J. Math. Pures et Appl. Sér. 2, **14** (1869), 241—259.

[III.271] Mathisson M., *Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischen Typus*, Math. Ann. **107** (1932), 400—419.

[III.272] Mathisson M., *Le problème de M. Hadamard relatif à la diffusion des ondes*, Acta Math. **70** (1939), 249—282.

[III.273] Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A., *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten*, Akademie-Verlag, Berlin, Bd. I, II, 1991.

[III.274] Menshov D. E., *Impressions sur mon voyage à Paris en 1927*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques **6** (1985), 55—59.

[III.275] Michell J. H., *The flexture of circular plates*, Proc. Math. Soc. London **34** (1901), 223—228.

[III.276] Miller D. G., *Pierre-Maurice-Marie Duhem*, Dictionary of scientific biography, New York, vol. 4, 1971, 225—233.

[III.277] Minkowski H., *Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlkörpern*, Nachr. Königlichen Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl, 90—93, Gesammelte Abh. 1 (1900), 316—319.

[III.278] Михлин С. Г., *О равномерной сходимости рядов аналитических функций*, Мат. сб. **39**:3 (1932), 88—96.

[III.279] Mirsky L., *On a generalization of Hadamard's inequality due to Szasz*, Ark. Mat. **8** (1957), 274—275.

[III.280] Mitrinović D. S., Lacković I. B., *Hermite and convexity*, Aequationes Mathematicae **28** (1985), 229—232.

[III.281] Mittag-Leffler G., *Une page de la vie de Weierstrass*, Comptes Rendus du Deuxième Congrès International des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 131—153.

[III.282] Mittag-Leffler G., *Om en generalisering av potensserien*, Övers. Vet. Akad. Stockholm **55** (1898), 135—138.

[III.283] Moore G. H., *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development, and influence*, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin, 1982.

[III.284] Mordell L. J., *Reminiscences of an octogenarian mathematician*, Amer. Math. Monthly **78**:6 (1971), 952—961.

[III.285] Morrey C. B., Jr., *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.

[III.286] Muir A., *The psychology of mathematical creativity*, Math. Intelligencer **10**:1 (1988), 33—37.

[III.287] Muir T., *Hadamard's approximation theorem since 1900*, Trans. of the Royal Soc. of South Africa **13** (1926), 299—308.

[III.288] Muir T., *Contributions to the history of determinants 1900—1920*, Blackie, London, 1930.

[III.289] Nadirashvili N. S., *Rayleigh's conjecture on the principal frequency of the clamped plate*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), 1—10.

[III.290] Nadirashvili N. S., *Hadamard's and Calabi—Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces*, Invent. math. **126** (1996), 457—465.

[III.291] Nathan O., Norden H. (Eds.), *Einstein on peace*, Simon and Schuster, New York, 1960.

[III.292] *Nécrologie. Notice sur Madame Rebecca Hadamard, née Lambert, de Metz*, Archives Israélites de France **4** (1843), 220—223.

[III.293] Neumann C., *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*, Teubner, Leipzig, 1877.

[III.294] Nirenberg L., *On elliptic partial differential equations: Lecture II*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. 3, **13** (1959), 115—162.

[III.295] Nirenberg L., *Partial differential equations in the first half of the century*, в кн.: Pier J.-P. (Ed.), *Development of mathematics 1900—1950*, Birkhäuser-Verlag, Basel—Boston—Berlin, 1994, 479—515.

[III.296] Ostrowski A., *On Hadamard's test for singular points*, J. London Math. Soc. **1** (1926), 236—239.

[III.297] Ostrowski A., *Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen*, Acta Math. **53** (1929), 181—266.

[III.298] Ostrowski A., *Sur la détermination des bornes inférieures pour une classe de déterminants*, Bull. Sci. Math. **61**:2 (1937), 19—32.

[III.299] Painlevé P., *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Thèse, 1887; Toulouse Ann., 1888.

[III.300] Painlevé P., *Rapport sur le mémoire de M. J. Hadamard*, C. R. Acad. Sci. Paris **145** (1907), 984—986.

[III.301] Painlevé P., *Œuvres*, tome 3 : *La correspondance entre P. Painlevé et G. Mittag-Leffler*, CNRS, Paris, 1975.

[III.302] Palais R. S., *Natural opérations on differential forms*, Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 125—141.

[III.303] Pečarić J. E., *Notes on convex functions*, Internat. Series of Numer. Math. **103** (1992), 449—454.

[III.304] Pellegrino F., *Una condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di potenze abbia sulla circonferenza di convergenza un solo polo multiplo*, Pont. Acc. Sci. **6** (1942), 115—123.

[III.305] Persson J., *The Cauchy problem and Hadamard's example*, J. Math. Anal. Appl. **59** (1977), 522—530.

[III.306] Petrini H., *Les dérivées premières et second du potential logarithmique*, Journal de Mathématiques, ser. 6, **5** (1909), 127—223.

[III.307] Petrowsky I. G., *Sur le problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles dans le domaine réel*, C. R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 4010—1012.

[III.308] Петровский И. Г., *О задаче Коши для системы дифференциальных уравнений с частными производными*, Мат. сб. **2**:5 (1937) 815—870.

[III.309] Петровский И. Г., *О рассеянии волн и лакунах для гиперболических уравнений*, Мат. сб. **17**:3 (1945), 289—379.

[III.310] Петровский И. Г., *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия*, Наука, М., 1986.

[III.311] Peyrefitte A., *Rue d'Ulm. Chroniques de la vie normalienne*, Fayard, Paris, 1994.

[III.312] Pini B., *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **23** (1954), 422—434.

[III.313] Piranian G., *Algebraic-logarithmic singularities and Hadamard's determinants*, Duke Math. J. **2** (1944), 147—153.

[III.314] Plastock R., *Homeomorphisms between Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1974), 169—183.

[III.315] Poincaré H., *Sur les fonctions entières*, Bull. Soc. Math. France **11** (1883), 136—144.

[III.316] Poincaré H., *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, Acta Soc. Sci. Fennicae **12** (1883), 343—350.

[III.317] Poincaré H., *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*, Acta Math. **8** (1886), 295—344.

[III.318] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, vol. 1 1892, vol. 2 1893, vol. 3 1899. Англ. пер.: Dover, New York, 1957. Рус. пер.: Пуанкаре А., *Новые методы небесной механики*, в кн.: *Избранные труды* в 3 томах, Наука, М., 1971—1974, Т. 1, 2.

[III.319] Poincaré H., *La notation différentielle et l'enseignement*, Enseignement Math. **1** (1899), 106—110.

[III.320] Poincaré H., *Calcul des probabilités*, Red. de A. Quiquet, 2ème éd., Gauthier-Villars, Paris, 1912.

[III.321] Poincaré H., *Science et méthode*, Flammarion, Paris, 1918. Англ. пер.: *Science and method*, Dover, New York, 1952. Рус. пер.: Пуанкаре А., *Наука и метод*, Изд. Н. П. Карбасникова, СПб., 1910; см. также: А. Пуанкаре, *О науке*, Наука, М., 1989, 367—521.

[III.322] Pólya D., *Über gewisse Determinantenkriterien für eine Potenzreihe*, Math. Ann. **99** (1928), 687—706.

[III.323] Pólya D., *Mathematical discovery*, John Wiley and Sons, vol. 1 1962, vol. 2 1965. Рус. пер.: Пойа Д., *Математическое открытие*, 2-е изд., Наука, М., 1976.

[III.324] Pólya, G., *Picture album: encounters of a mathematician*, Birkhäuser, Boston—Basel, 1987.

[III.325] Pólya G., Szegö G., *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, 1951. Рус. пер.: Полиа Г., Сеге Г., *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962.

[III.326] Pont J. C., *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Univ. de France, Paris, 1974.

[III.327] Понтрягин Л. С., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, 5-е изд., Наука, М., 1982.

[III.328] Posner E. C., *Combinatorial structures in planetary reconnaissance*, в кн.: Mann H. B. (Ed.), *Error correcting codes*, Wiley, New York, 1969.

[III.329] Pourciau B., *Global invertibility of nonsmooth mappings*, J. Math. Anal. and Appl. **131** (1988), 170—179.

[III.330] Poznanski R., *Être juif en France pendant la Seconde Guerre mondiale*, Hachette, Paris, 1996.

[III.331] Pringsheim A., *Vorlesungen über Funktionenlehre*, II, Teubner, Leipzig, 1932.

[III.332] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Massachusetts, U.S.A., August 30—September 6, 1950*, AMS, Providence, R.I., 1952.

[III.333] Protter M. H., Weinberger H. F., *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[III.334] *Prix Bordin*, C. R. Acad. Sci. Paris **123**, juillet—décembre (1896), 1109—1111.

[III.335] Prym F., *Zur Integration der Differentialgleichung* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, J. reine angew. Math. **73** (1871), 340—364.

[III.336] Raghavarao D., *Constructions and combinatorial problems in design of experiments*, Wiley, New York, 1971.

[III.337] Rankine N. J., *On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance*, Trans. Roy. Soc. London **160** (1870), 277—288.

[III.338] Rayleigh J. W. (Strutt J. W.), *The theory of sound*, vol. 1, 2, Macmillan, London, 1894—1896. Рус. пер.: Рэлей (Стретт Дж. В.), *Теория звука*, в 2 томах, 2-е изд., ГТТИ, М., 1955.

[III.339] Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, New York—San Francisco—London, 1975. Рус. пер.: Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики*, т. 1—4, Мир, М., 1977—1982.

[III.340] Reid C., *Hilbert*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1970. Рус. пер.: Рид К., *Гильберт*, Наука, М., 1977.

[III.341] *Отчет о заграничной командировке для научных занятий приват-доцента Московского университета Николая Лузина*, подготовка к публикации Л. Е. Майстрова, Историко-мат. исслед. **8** (1955), 57—70.

[III.342] Riemann B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Berlin. Akad. (1859), 671—680. Рус. пер.: Риман Б., *О числе простых чисел, не превышающих данной величины*, в кн.: Риман Б., *Сочинения*, ОГИЗ; ГИТТЛ, М.; Л., 1948, 216—224.

[III.343] Riemann B., *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwinungsweite*, Göttinger Abh. **8** (1860). Рус. пер.: Риман Б., *О распространении плоских волн конечной амплитуды*, в кн.: Риман Б., *Сочинения*, ОГИЗ; ГИТТЛ, М.; Л., 1948, 376—395.

[III.344] Riemann B., *Gesammelte mathematische Werke*, Hrsg. von H. Weber und R. Dedekind, Leipzig, 1876.

[III.345] Riesz F., *Sur les opérations fonctionnelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **149** (1909), 974—977.

[III.346] Ривкинд В. Я., *Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ им. В. А. Стеклова АН СССР **84** (1979), 220—242.

[III.347] Rowe D. E., *David Hilbert on Poincaré, Klein, and the world of mathematics*, Math. Intelligencer **8**:1 (1986), 75—77.

[III.348] Rowe D. E., *Klein, Mittag-Leffler, and the Klein—Poincaré correspondence of 1881—1882*, в кн.: Demidov S. S., Folkerts M., Rowe D. E., Scriba C. J. (Eds.), *Amphora*, Birkhäuser Verlag, Basel—Boston—Berlin, 1992, 597—618.

[III.349] Rozendorn E. R., *Surfaces of negative curvature*, в кн.: Burago Yu. D., Zalgaller V. A. (Eds.), *Geometry III*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1992, 89—178. Рус. пер.: Розендорн Э. Р.,*Поверхности отрицательной* *кривизны*, в кн.: Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Фундаментальные направления, Геометрия—3, ВИНИТИ, М., 1989, 99—196.

[III.350] Rybczynski W., *Über die fortschreitende Bewegung einer Hussigen Kugel in einem zähen Medium*, Bull. Inst. Acad. Cracovia. Cl. sci. math. et natur. Ser. A (1911), 40—44.

[III.351] Saalschütz L., *Bemerkungen über die Gammafunktionen mit negativen Argumenten*, Zeitschr. Math. u. Phys. **32** (1887), 246—250.

[III.352] Saalschütz L., *Weitere Bemerkungen über die Gammafunktionen mit negativen Argumenten*, Zeitschr. Math. u. Phys. **33** (1888), 362—374.

[III.353] Saint-Venant B. de, *Mémoire sur la torsion des prismes*, Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. Sci. **14** (1856), 233—560.

[III.354] Salaff S., *A biography of Hua Lo-keng*, в кн.: Sivin N. (Ed.), *Science and technology in East Asia*, Science History Publications, New York, 1977, 207—247.

[III.355] Самко С. Г. , Килбас А. А., Маричев О. Л., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.

[III.356] Schauder J., *Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung*, Fundamenta Mathematicae **24** (1935), 213—246.

[III.357] Schwartz L., *Quelques réflexions et souvenirs sur Paul Lévy*, Colloque Paul Lévy sur les processus stochastiques (22—26 juin 1987, Ecole Polytechnique, Palaiseau), Astérisque **157—158** (1988), 13—28.

[III.358] Schwartz L., *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, Paris, 1997.

[III.358a] Schwartz L., *Le petit père Hadamard*, Pour la Science, **233** (1997), mars, 88—93.

[III.359] Schwartz W., *Some remarks on the history of the prime number theorem from 1896 to 1960*, в кн.: Pier J.-P. (Ed.), *Development of mathematics 1900—1950*, Birkhäuser-Verlag, Basel—Boston—Berlin, 1994, 565—614.

[III.360] Selberg A., *On the zeros of Riemann's zeta function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo **10** (1943), 3—59.

[III.361] Selberg A., *An elementary proof of the prime number theorem*, Ann. of Math. **50** (1949), 305—313.

[III.362] Shapiro H. S., Tegmark M., *An elementary proof that the biharmonic Green function of an eccentric ellipse changes sign*, SIAM Review **36**:1 (1994), 99—101.

[III.363] *Колмогоров в воспоминаниях*, ред.-сост. А. Н. Ширяев, Наука, М., 1993.

[III.364] Siegmund-Schultze R., *Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900*, Archive for Hist. of Exact Sci. **26**, (1982), 13—71.

[III.364a] Siegmund-Schultze R., *Mathematiker auf der Flucht von Hitler. Quellen und Studien zur Emigration einer Wissenschaft*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig; Deutsche Mathematiker Vereinigung, Berlin, 1998.

[III.365] Sjöstrand O., *Sur une équation aux dérivées partielles du type composite* (Note 1), Arkiv Mat., Astron., Fysik **25**A:21 (1937), 1—11.

[III.366] Sjöstrand O., *Sur une équation aux dérivées partielles du type composite* (Note 2), Arkiv Mat., Astron., Fysik **26**A:1 (1938), 1—10.

[III.367] Смирнов В. И., *Из переписки П. Аппеля, Ж. Адамара, Г. Буркхарда, В. Вольтерра, П. Дюэма, К. Жордана, А. Пуанкаре и Н. Радо с академиком А. М. Ляпуновым*, Труды Института истории естествознания и техники **19** (1957), 690—719.

[III.368] Соболев С. Л. *Об одном обобщении формулы Kirchhoff'a*, Доклады АН СССР **1**:6 (1933), 256—258.

[III.369] Соболев С. Л. *Задача Коши в пространстве функционалов*, Доклады АН СССР **3**:7 (1935), 291—294.

[III.370] Соболев С. Л. *О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом*, Доклады АН СССР **1**:7 (1936), 267—270.

[III.371] Sobolev S. L., *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales*, Мат. сб. **1**:1 (1936), 39—72.

[III.372] Sommerfeld A., *Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen*, Enzykl. math. Wiss. Leipzig **2**:4 (1904), 504—560; **2**:5, 561—570.

[III.373] Speziali P., *Tannery Jules*, Dictionary of scientific biography, New York, 249—251.

[III.374] Spivak M., *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. 3, Publish or Perish, Berkeley, 1979.

[III.375] Steklov V. A., *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Sér. 2, **2** (4800), 207—272.

[III.376] Стеклов В. А., *Математика и ее значение для человечества*, Госиздат, М.; Л.; Берлин, 1923.

[III.377] Stellmacher K. L., *Ein Beispiel einer Huygensschen Differentialgleichung*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., **11**a:10 (1953), 133—138.

[III.378] Stellmacher K.L., *Eine Klasse Huygensscher Differentialgleichung en und ihre Integration*, Math. Ann. **130** (1955), 219—233.

[III.379] Stieltjes T. J., *Sur une fonction uniforme*, C. R. Acad. Sci. Paris **101**:2 (1885), 153—154.

[III.380] Stone H. A., *Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids*, Ann. Rev. Fluid Mech. **26** (1994), 65—102.

[III.381] Sylvester J.J., *Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers*, Ann. of Philosophy Ser. 4, **34** (1867), 461—475.

[III.382] Sylvester J. J., *On Tchebycheff's theorem on the totality of prime numbers comprised within given limits*, Amer. J. Math. **4** (1881), 230—247.

[III.383] Szász O., *Über eine Verallgemeinerung des Hadamardschen Determinantensatzes*, Monat. Math. Phys. **28** (1917), 253—257.

[III.384] Szegö G., *On membranes and plates*, Proc. Nat. Acad. of Sciences USA **36**:3 (1950), 210—216.

[III.385] Szegö G., *Remark on the preceeding paper of Charles Loewner*, Pacific J. Math. **3** (1953), 437—446.

[III.386] Szénássy B., *History of mathematics in Hungary until the 20th century*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1992.

[III.387] Szőkefalvy-Nagy B., *Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung*, Acta Sci. Math. Szeged **10** (1941), 64—74.

[III.388] Sutter E. E., *The fast m-transform: a fast computation of cross-correlations with binary m-sequences*, SIAM J. Comput. **20**:4 (1991), 686—694.

[III.389] Tannery J., *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, A. Hermann, Librairie scientifique, Paris, 1886. Рус. пер.: Таннери Ж., *Введение в теорию функций с одной переменною*, Изд-во типолитогр. т-ва И. Н. Кушнарева и K^0, М., 1912, т. 1, 2.

[III.390] Taussky O., *A recurring theorem on determinants*, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 672—676.

[III.391] Taylor A. E., *A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals*, Arch. History of Exact Sciences **37** (1982), 233—295.

[III.392] Taylor S. J., *Paul Lévy*, Bull. London Math. Soc. **7** (1975), 300—320.

[III.393] Tchebycheff P. L., *Sur les nombres premiers*, J. Math. **17** (1852), 366—390.

[III.394] Teissier G. F., *Essai philologique sur les commencements de la typographie à Metz, et sur les imprimeurs de la ville*, Docquet, Metz, 1828.

[III.395] *The fire that has been burning for ten years*, The New York Times, December 22, 1943; The New York Herald Tribune, December 28, 1943.

[III.396] Thom R., *Structural stability and morphogenesis*, W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1975. Рус. пер.: Том Р., *Структурная устойчивость и морфогенез*, Логос, М., 2002.

[III.397] Titchmarsh E. C., *The theory of the Riemann zeta function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. Рус. пер.: Титчмарш Е., *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953.

[III.398] Titchmarsh E. C., *The theory of functions*, Oxford University Press, London, 1939. Рус. пер.: Титчмарш Е., *Теория функций*, Наука, М., 1980.

[III.399] Tricomi F. G., *La mia vita di matematico attraverso la cronistoria dei miei lavori*, Edizioni Cedam, Padova, 1967.

[III.400] Triebel H., *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[III.401] Truesdell C., *General and exact theory of waves in finite elastic strain*, Arch. Rat. Mech. Anal. **8**:4 (1961), 263—296.

[III.402] Truesdell C., Topin R., *The classical field theories*, в кн.: Flügge S. (Ed.), *Encyclopedia of Physics*, vol. III/1. *Principles of classical mechanics and field theory*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960, 226—793.

[III.403] Tuck E. O., *Application and solution of Cauchy singular integral equations*, в кн.: *The application and numerical solution of integral equations*, Anderssen R. S. et al. (Eds.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.

[III.404] Valéry P., *Lettres à quelques-uns*, Gallimard, Paris, 1952.

[III.405] Vallée Poussin Ch. de la, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **20** (1896), 183—256, 281—297.

[III.406] Vallée Poussin Ch. de la, *Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers, inférieurs à une limite donnée*, Mém. Acad. Roy. Sci. Belgique **59**:1 (1899—1900), 7—38.

[III.407] Volterra V., *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes*, Acta Math. **18** (1894), 161—232.

[III.408] Volterra V., *Betti, Brioschi, Casorati. Trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse*, C. R. du Deuxième Congrès International des Mathématiciens tenu à Paris, 1900, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 43—57.

[III.409] Volterra V., *Sur les équations aux dérivées partielles*, C. R. du Deuxième Congrès International des Mathématiciens tenu à Paris, 1900, Gauthier-Villars, Paris, 1902, 377—378.

[III.410] Volterra V., *Sull' applicazione del metodo della immagine alle equazioni di tipo iperbolico*, Atti IV Congr. Intern. Mat. **2** (1908), 90—93.

[III.411] Volterra V., *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

[III.412] Walfisz A., *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, Deutscher Verl. der Wiss., Berlin, 1963.

[III.413] Wallis W. D., Street A. P., Wallis J. S., *Combinatorics: Room squares, sum-free sets, Hadamard matrices*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972.

[III.414] Warschawski S. E., *On Hadamard's variational formula for Green's function*, J. Math. Mech. **9** (1960), 497—511.

[III.415] Weierstrass K., *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Math. Abh. Akad. Wiss. Berlin (1876), 11—60.

[III.416] Weierstrass K., *Zur Funktionenlehre*, Monatsber. Acad. Wiss. Berlin (1880), 719—743.

[III.417] Weil A., *Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston—Basel—Stuttgart, 1983. Рус. пер.: Вейль А., *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972.

[III.418] Weil A., *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, Basel, 1991. Англ. пер.: Weil A., *The apprenticeship of a mathematician*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1992.

[III.419] Whitham G. B., *Linear and non-linear waves*, Wiley, New York, 1974. Рус. пер.: Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.

[III.420] Wiener N., *A new method in Tauberian theorems*, J. Math, and Phys. Massachusetts Inst. Tech. **7** (1928), 161—184.

[III.421] Wiener N., *Tauberian theorems*, Ann. Math. **33** (1932), 1—100.

[III.422] Wiener N., *I am a mathematician*, Doubleday, New York, 1956. Рус. пер.: Винер Н., *Я — математик*, Наука, М., 1964.

[III.423] Wiener N., *Collected works with commentaries* (P. Masani, Ed.), vol. 4, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts—London, 1985.

[III.424] Wintner A., *On the Hölder restrictions in the theory of partial differential equations*, Amer. Journ. of Math. **72** (1950), 731—738.

[III.425] Wloka J., *Partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, 1987.

[III.426] Young L. C., *Lectures on calculus of variations and optimal control theory*, Saunders, Philadelphia, 1969. Рус. пер.: Янг Л., *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Мир, М., 1974.

[III.426a] Zalcman L., *Picard's theorem without tears*, Amer. Math. Monthly, **85**:4 (1978), 265—268.

[III.427] Zermelo E., *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, Math. Annalen **59** (1904), 514—516.

[III.428] Zerner M., *Le règne de J. Bertrand (1874—1900)*, в кн.: Gispert H., *La France mathématique*, Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques. Société Mathématique de France, Paris, 1991, 299—322.

[III.429] *Zprávy. Návštěva francouzského matematika* (на чешск. яз.), Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky **57** (1928), 319—320.

[III.430] Zygmund A., *Trigonometric series*, vol. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge—London—New York, 1959. Рус. пер.: Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965.

[III.432] Grattan-Guinness I., *Preliminary notes on the historical significance of quantification and the axiom of choice in the development of mathematical analysis*, Historia Math., vol. 2 (1975), 475-488.

[III.434] Grattan-Guinness I., *Why did George Green write his essay of 1828 on electricity and magnetism?*, Amer. Math. Monthly, vol. 102, nr. 5 (1995), 387-396.

[III.437] Медведев Ф.А., *Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX-XX вв.* М.: Наука, 1976.

IV. Архивные материалы

Семейный архив Адамаров

[IV.1] Jacqueline Hadamard, *Enfant de grand homme* (рукописная автобиография).
[IV.2] Jacques Hadamard, *A nos petits-enfants* (рукописные заметки).
[IV.3] Jacques Hadamard, *Congrès Scientifique Indien, février-mars 1947* (4 машинописных страницы).
[IV.4] *Tableau d'ascendance de Jacques Salomon Hadamard* (составлено Майером (P.-A. Meyer) на основе реестра *d'état civil de la communauté juive de Metz*).
[IV.5] Речь Даниэля Майера (Daniel Mayer) на похоронах Адамара (5 машинописных страниц).
[IV.6] Письмо Чжу Цзяхуа к Адамару.
[IV.7] Письмо Рамана (C. V. Raman) к Адамару.
[IV.8] Письмо Хуа Локена к Адамару.
[IV.9] Письмо У-Синмо к Адамару.
[IV.10] Письмо Биркгофа (G. Birkhoff) к Адамару.
[IV.11] Письмо Эбина (A. Ebin) к Адамару.
[IV.12] Письмо Адамара к Мендес-Франсу (P. Mendès-France).
[IV.13] Воспоминания Э. Кахана (E. Kahane).
[IV.14] Письмо Монтеля (P. Montel) к Адамару.
[IV.15] Приветствие Адамару от Международной конференции по теории дифференциальных уравнений в частных производных, Париж, июнь 1962.
[IV.16] Письмо Лебега (H. Lebesgue) к Адамару.
[IV.17] Телеграмма от Батлера (N. M. Butler) к Адамару.
[IV.18] Письмо Робсона (P. Robeson) к Адамару.
[IV.19] Письмо Эйнштейна (A. Einstein) к Адамару.
[IV.20] Ответ де Бройля (Louis de Broglie) на анкету Адамара.
[IV.21] Письмо Мандельбройта (S. Mandelbrojt) к Луизе Адамар.

Архив Академии наук Франции (Archives de l'Académie des Sciences)

[IV.22] Личное дело Жака Адамара.
[IV.23] Личное дело Поля Леви (P. Lévy).

Национальный архив, Париж (Archives Nationales)

[IV.24] *Dossiers des anciens fonctionnaires des enseignements primaire, secondaire et supérieure, XIX siècle* (включает личные дела Амедея и Давида Адамаров (Amédée Hadamard, David Hadamard)), F17/20923.

[IV.25] *Archives personnelles des professeurs du Collège de France* (личное дело Жака Адамара), F17/24600.
[IV.26] *Dossiers administratifs du rectorat de Paris* (личное дело Жака Адамара), AJ16/6016.
[IV.27] *Dossier d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure de Jacques Hadamard*, AJ61/229.

Архив Политехнической школы (Archives de l'Ecole Polytechnique)

[IV.28] *Concours d'admission de 1884*, IIc, 3.
[IV.29] *Extrait du Journal Officiel du 13 novembre 1937, page 12469. Pensions civiles*, VI, 1, Sect. b, no 2.
[IV.30] Письмо Василеско (A. Vasilesco) к Адамару, A3b/367.

Архив Массачусетского технологического института (Archives of the Massachusetts Institute of Technology)

[IV.31] Письмо Адамара к Винеру (N. Wiener), MC22, boxes 1, 4.

Исследовательский центр Вудсона, Университет Райса (Woodson Research Center, Rice University)

[IV.32] Семь писем Адамара к Ловетту (E. O. Lovett).
[IV.33] Статья из нью-йоркской газеты «Town & Country», April 1, 1920.
[IV.34] Статья *Noted Frenchman is guest of Institute* из студенческой газеты Университета Райс «The Thresher».

Центральный архив Еврейского университета в Иерусалиме (Central Archives of the Hebrew University of Jerusalem)

[IV.35] Протокол второго заседания ученого совета Еврейского университета, состоявшегося 16 и 18 августа 1929 г. в Цюрихе.
[IV.36] Протоколы заседаний правления, 1925—1931.

Архив Российской академии наук (Санкт-Петербург)

[IV.37] Два письма Адамара к А. М. Ляпунову, ф. 186, оп. 1.
[IV.38] Письмо Адамара к В. А. Стеклову, ф. 162, оп. 2.
[IV.39] Письмо В. А. Стеклова к А. М. Ляпунову ф. 257, оп. 1.
[IV.40] Письмо Адамара к А. П. Карпиньскому, ф. 265, оп. 6.
[IV.41] Письма Адамара к А. Н. Крылову, ф. 759, оп. 3.
[IV.42] Стенограмма речи А. Н. Крылова в честь Адамара, ф. 759, оп. 2.

Национальная библиотека, Париж (Bibliothèque Nationale)

[IV.43] *Factum pour le Sieur Paul Guerre Maître de Forge à Moyeuvre, Appellant d'une Sentence renduë au Bailliage de Metz le vingt-troisième Août dix-sept cent quinze & Demandeur aux fins de la commission du vingt & un Décembre suivant contre Natan Hodomard, Juif, résidant à Metz, Intimé & anticipant. Et contre Isaac Spire Lévy, autre Juif, Marchand de Fer, demeurant audit Metz, Deffendeur. Metz, 1715, B.N. naf 22705.*

Библиотека Академии деи Линчеи (Accademia dei Lincei)

[IV.44] Переписка Адамара и Вольтерра (V. Volterra).

Библиотека Института Миттаг-Леффлера (Mittag-Leffler Institute)

[IV.45] Письма Миттаг-Леффлера (G. Mittag-Leffler) к Адамару.
[IV.46] Письма Адамара к Миттаг-Леффлеру (G. Mittag-Leffler).
[IV.47] Карлеман (T. Carleman), некролог о Миттаг-Леффлере (G. M. Mittag-Leffler).
[IV.48] Письмо Адамара Фредгольму (I. Fredholm).

Государственная и Университетская библиотека земли Нижняя Саксония в Гёттингене. Отдел рукописей и редких изданий (Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen. Abteilung für Handschriften und seltene Drucke)

[IV.49] Два письма Адамара к Гурвицу (A. Hurwitz), Math. Arch. 76: 183—184.
[IV.50] Три письма Адамара к Гильберту (D. Hilbert), Cod. Ms. D. Hilbert 125.

Нью-Йоркская публичная библиотека (New York Public Library)

[IV.51] *Acts of the Emergency Committee in Aid of Displaced German (Foreign) Scholars*, Box 103, f.: H. Weyl.

Архив Гарвардского университета (Harward University Archives)

[IV.52] Birkhoff Papers. Harvard, 4312.2, Box 14, file P-R (1940).

Предметный указатель

Общий указатель

Указатель имён

Владимир Гилелевич Мазья
Татьяна Олеговна Шапошникова

ЖАК АДАМАР — ЛЕГЕНДА МАТЕМАТИКИ

Редакторы Т. Л. Коробкова, О. А. Васильева

Подписано в печать 12.05.2008 г. Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 33. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.