В. Г. МАЗЬЯ, С. В. ПОБОРЧИЙ

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ В НЕЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

САНКТ - ПЕТЕРБУРГ
2006

Р е ц е н з е н т ы :
д.ф.м.н. А.М.Коточигов (С.-Петерб. гос. электротехн. ун-т),
проф. А. А. Соловьев (Челябинский гос. ун-т).

Мазья В.Г., Поборчий С.В.

П41 Теоремы вложения и продолжения для функций в нелипшицевых областях:

Монография. — СПб., 2006. — 378 с.

В предлагаемой монографии изучаются теоремы продолжения, вложения и пространства граничных значений для классов Соболева в областях с негладкой границей. В ней нашли отражение свойства пространств Соболева в так называемых сингулярно возмущенных областях, т.е. областях, зависящих от малых или больших параметров таким образом, что граница области теряет гладкость при стремлении упомянутых параметров к своим пределам. Значительная часть книги посвящена пространствам Соболева в областях с конкретными особенностями, в числе которых могут быть внешние и внутренние изолированные острия, нулевые ребра, 2π - ребра и другие особенности. Рассмотрены некоторые приложения полученных результатов к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Монография предназначена для специалистов по математической физике, теории функций и другим областям современного анализа, связанным с пространствами Соболева. Книга также будет полезна студентам старших курсов университетов и аспирантам, специализирующимся в указанных областях. От читателя требуется знание основ функционального анализа.

ББК 22.161.8, 22.193

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пространства функций с производными из L_p, называемые пространствами Соболева, занимают важное место в современном анализе, например, в теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории аппроксимации, теории потенциала. Начиная с тридцатых годов прошлого века, эти функциональные классы интенсивно изучались, и к настоящему времени многие связанные с ними проблемы решены. В частности, была развита более или менее завершенная теория пространств Соболева для функций, определенных на всем евклидовом пространстве и на областях с регулярной границей, нашедшая отражение в книгах С. Л. Соболева [69], Ч. Б. Морри [129], И. М. Стейна [71], Р. А. Адамса [83], О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [9], В. М. Гольдштейна и Ю. Г. Решетняка [21], В. Г. Мазья [40], У. П. Земера [144], В. И. Буренкова [91], Д. Р. Адамса и Л. И. Хедберга [82] и других. Однако теория пространств Соболева для областей с негладкой границей развита еще недостаточно. В настоящей монографии делается попытка частично заполнить этот пробел.

Книга содержит восемь глав. В первой главе приводятся предварительные сведения. Здесь, как правило без доказательств, но с необходимыми ссылками и комментариями формулируются используемые далее известные факты из теории пространств Соболева. В этой главе дан также краткий обзор результатов по продолжению функций из классов Соболева за пределы области определения с сохранением класса и обзор некоторых обобщений классической теоремы вложения Соболева. Приведенные в первой главе сведения служат материалом для ссылок в последующих главах.

Главы 2 и 3 посвящены изучению пространств Соболева в областях, зависящих от малых или больших параметров таким образом, что граница области теряет гладкость при стремлении указанных параметров к своим предельным значениям. Естественно ожидать, что при этом "хорошие" свойства пространств Соболева вырождаются. Нас интересует скорость вырождения оператора продолжения во внешность области и оператора сужения на границу области. Для этого нужно явно определить зависимость подходящих характеристик этих операторов (например, их норм) от упомянутых выше параметров. Такой анализ интересен не только сам по себе: он оказывается полезным в попытках обосновать формальную асимптотику решений краевых задач для уравнений в частных производных в сингулярно возмущенных областях (см. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский [120]).

В частности, для малого положительного параметра ε мы даем в главе 2 точные двусторонние, зависящие от ε оценки нормы оператора продолжения, переводящего функции из пространства Соболева на малой n-мерной области диаметра ε или на тонком цилиндрическом n-мерном слое ширины ε в функции из пространства Соболева на всем $\mathbf{R}^n$. Эти оценки используются в главе 4 при построении ограниченного оператора продолжения, переводящего функции из пространства Соболева на области с внешним пиком в весовое пространство Соболева на $\mathbf{R}^n$ с оптимальным весом.

Глава 3 содержит (среди прочих результатов) точные двусторонние, зависящие от малого положительного параметра оценки нормы оператора сужения на границу, действующего в пространстве Соболева первого порядка на внутренности или внешности малой области а также на внутренности или внешности тонкого цилиндра. Эти оценки используются в последующих главах при исследовании граничных следов функций из пространств Соболева в нелипшицевых областях.

В главах 4 – 7 изучаются свойства пространств Соболева в областях, имеющих особенности на границе. В частности, такими особенностями могут быть изолированные пики направленные как внутрь области, так и в ее внешность, а также входящие и выходящие ребра. Указанные особенности – простейшие нелипшицевы особенности, часто встечающиеся в приложениях. Предметом нашего исследования являются теоремы вложения классов Соболева в L_p и некоторые другие функциональные классы (включая выяснение условий компактности операторов вложения), теоремы о продолжении функций из пространств Соболева во внешность области определения и описание граничных значений функций с градиентом, принадлежащим L_p.

Эти теоремы с помощью известных рассуждений общего характера приводят к условиям разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных и к описанию структуры спектра соответствующих дифференциальных операторов (см. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева [30], В. Г. Мазья [40], Д. Гилбарг, Н. Трудингер [17]). Некоторые из таких приложений рассмотрены в главе 8.

Более подробное описание каждой главы читатель найдет во введениях к главам. В конце каждой из глав 2 – 8 приведены комментарии, содержащие замечания по истории рассматриваемых вопросов и ссылки на литературу.

Настоящая книга близка по духу к книге авторов [125]. Однако они независимы, хотя и имеют существенное пересечение. Содержание книги базируется преимущественно на совместных работах авторов.

От читателя настоящей монографии требуется знание стандартного университетского курса математического анализа. Предполагается также знакомство с основными фактами функционального анализа (теоремы Банаха–Штейнгауза, Хана–Банаха, теоремы об открытом отображении и замкнутом графике), которые могут быть найдены, например, в первых девяти главах книги Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [25] или в первых пяти главах учебника У. Рудина [65].

Сделаем пояснения относительно изложения материала. Каждая глава разбита на разделы. Некоторые разделы состоят из подразделов. Разделы и подразделы имеют соответственно двузначную и трехзначную нумерацию. Так, 1.7 означает раздел 7 главы 1, 3.1.2 – подраздел 2 раздела 1 главы 3. Мы используем независимую нумерацию теорем, лемм, следствий и т.д. внутри разделов (или подразделов). Если раздел (подраздел) содержит только одну теорему или лемму, то эта теорема или лемма не нумеруется. При ссылках на материал из другого раздела (подраздела) сначала указывается номер этого раздела (подраздела). Например, теорема 1.7 – (единственная) теорема в разделе 1.7, теорема 1.8/2 – теорема 2 в разделе 1.8, лемма 3.1.2/1 – лемма 1 в подразделе 3.1.2, запись (2.4.1/3) означает формулу (3) в подразделе 2.4.1.

Ливерпуль *В. Г. Мазья*

Санкт-Петербург *С. В. Поборчий*

Ноябрь 2005

Глава 1

Предварительные сведения

В этой главе перечисляются в основном хорошо известные факты из теории пространств Соболева, используемые в следующих главах. Как правило, эти факты приводятся без доказательств и снабжены необходимыми ссылками. Доказательствами сопровождаются лишь те утверждения, которые, по мнению авторов, не столь широко известны.

1.1 Обозначения

1.1.1 Точечные множества и пространства функций

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точка в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с нормой
$$|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$
При $r > 0$ символ $B_r(x)$ означает открытый шар в $\mathbf{R}^n$ с центром x и радиусом r. Далее $B_r = B_r(0)$. Будем также писать $B_r^{(n)}$, чтобы подчеркнуть размерность шара B_r. Положим еще
$$S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}.$$

Замыкание множества $G \subset \mathbf{R}^n$ обозначается через $\overline{G}$, а граница G – через ∂G. Кроме того, пусть χ_G – характеристическая функция множества G, т.е. $\chi_G(x) = 1$ при $x \in G$ и $\chi_G(x) = 0$ в противном случае. Диаметром множества G назовем величину

$$\operatorname{diam}(G) = \sup\{|x-y| : x, y \in G\}.$$

Если $G \subset \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$, то $\lambda G = \{\lambda x : x \in G\}$. Для $E, G \subset \mathbf{R}^n$ расстояние между множествами E и G есть

$$\operatorname{dist}(E, G) = \inf\{|x-y| : x \in E,\ y \in G\}.$$

Здесь и далее через Ω обозначается открытое непустое подмножество $\mathbf{R}^n$. Открытое непустое связное множество называется областью. Пусть $f : \Omega \to \mathbf{R}^1$. Носитель функции f определяется равенством

$$\operatorname{supp} f = \Omega \cap \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}.$$

Если $G \subset \mathbf{R}^n$ и $\overline{G}$ есть компакт, содержащийся в Ω, будем писать $G \subset\subset \Omega$.

Пусть $\mathbf{Z}^n$ – подпространство $\mathbf{R}^n$, состоящее из элементов с целыми компонентами, и пусть $\mathbf{Z}^n_+$ – подпространство $\mathbf{Z}^n$, образованное векторами с неотрицательными компонентами. Элемент

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{Z}^n_+$$

называется мультииндексом, а число $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$ – его длиной. Если $x \in \mathbf{R}^n$, $\beta \in \mathbf{Z}^n_+$, то

$$\beta! = \beta_1! \ldots \beta_n!, \quad x^\beta = x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}.$$

Через $\mathcal{P}_l^{(n)}$ (или просто $\mathcal{P}_l$ для фиксированного n) обозначим класс полиномов в $\mathbf{R}^n$ степени не выше l, $l = 0, 1, \ldots$

Положим

$$D_j = \partial/\partial x_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

а также

$$D^\beta = D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n} = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}, \quad \beta \in \mathbf{Z}^n_+.$$

Если l – натуральное число, то вектор

$$\nabla_l v = \{D^\beta v\}_{|\beta| = l}$$

называется градиентом функции v порядка l. По определению полагаем $\nabla_0 v = v$, $\nabla = \nabla_1$ и

$$|\nabla_l v| = \Big(\sum\nolimits_{|\beta|=l} \big|D^\beta v\big|^2\Big)^{1/2}.$$

Множество непрерывных в Ω функций обозначается через $C(\Omega)$. Пусть l – неотрицательное целое число. Символ $C^l(\Omega)$ означает класс (вещественных) функций $u \in C(\Omega)$, имеющих производные $D^\beta u \in C(\Omega)$ при $|\beta| \le l$. Кроме того, множество бесконечно дифференцируемых в Ω функций обозначается через $C^\infty(\Omega)$. Далее $C_0^l(\Omega)$ – класс функций из $C^l(\Omega)$ с компактными носителями в Ω. Аналогично определяется класс $C_0^\infty(\Omega)$.

Говорят, что функция $v : E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ удовлетворяет *условию Гёльдера* на E с показателем $\lambda \in (0,1)$, если

$$\sup_{x,y\in E, x\neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty.$$

Если последнее неравенство верно при $\lambda = 1$, то говорят, что функция v удовлетворяет *условию Липшица* на E.

При целом $l \ge 0$ и $\lambda \in (0,1]$ пространство $C^{l,\lambda}(\Omega)$ состоит из функций, принадлежащих $C^l(\Omega)$, производные которых порядка l удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ (условию Липшица при $\lambda = 1$) на любом компактном подмножестве Ω.

При $l = 0, 1, \dots$ пространство $C^l(\overline{\Omega})$ образовано теми функциями из $C^l(\Omega)$, все производные которых порядков $0, \dots, l$ имеют непрерывные продолжения на $\overline{\Omega}$. По определению $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$. Пространство сужений на Ω функций из $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ обозначается через $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Если $\lambda \in (0,1]$ и l – неотрицательное целое число, пространство $C^{l,\lambda}(\overline{\Omega})$ состоит из функций класса $C^l(\overline{\Omega})$, у которых производные порядка l удовлетворяют условию Гёльдера с показателем λ (условию Липшица при $\lambda = 1$) на Ω . Для ограниченного множества Ω пространства $C^l(\overline{\Omega})$ и $C^{l,\lambda}(\overline{\Omega})$ становятся банаховыми, если их снабдить нормами

$$\|v\|_{C^l(\overline{\Omega})} = \sum\nolimits_{j=0}^{l} \sup\{|(\nabla_j v)(x)| : x \in \Omega\},$$

$$\|v\|_{C^{l,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|v|_{C^l(\overline{\Omega})} + \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|(\nabla_l v)(x) - (\nabla_l v)(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

В дальнейшем буквой c будем обозначать положительные постоянные, которые могут принимать различные значения в одной и той же цепочке неравенств. Это не относится к постоянным, обозначаемым через $c_0, c_1, \ldots$

1.1.2 Интегральные неравенства

Пусть G – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbf{R}^n$. Обозначение $\mathrm{mes}_n(G)$ (или просто $\mathrm{mes}(G)$ при фиксированном n) будет использоваться для n-мерной меры Лебега множества G. Символы

$$\int_G v(x)dx \quad \text{или} \quad \int_G v dx$$

означают интегрирование по отношению к мере Лебега.

Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$ и $1 \le p \le \infty$. Пространство $L_p(\Omega)$ состоит из измеримых функций v, определенных на Ω, для которых

$$\|v\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad p < \infty, \tag{1}$$

и

$$\|v\|_{L_\infty(\Omega)} = \mathrm{ess\ sup}\{|v(x)| : x \in \Omega\} < \infty.$$

Для краткости будем также писать $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$.

Если $\Omega = \mathbf{R}^n$, то Ω часто опускается в обозначениях простррвнств и норм. Интегрирование без указания пределов означает интегрирование по $\mathbf{R}^n$.

Через $L_{p,loc}(\Omega)$ обозначим класс измеримых функций на Ω, которые суммируемы со степенью p (или существенно ограничены при $p = \infty$) на каждом компактном подмножестве Ω.

На самом деле элементы пространств $L_p(\Omega)$ или $L_{p,loc}(\Omega)$ являются не функциями, а эквивалентными классами измеримых функций. Две функции эквивалентны, если они равны почти везде на Ω. Мы игнорируем это различие, когда не возникает недоразумения, и рассматриваем элементы $L_{p,loc}(\Omega)$ просто как функции на Ω.

Пространство $L_{p,loc}(\Omega)$ становится полным метризуемым, если оно снабжено счетной системой полунорм $\|\cdot\|_{L_p(\omega_k)}$, где $\{\omega_k\}_{k\ge1}$ – последовательность непустых открытых множеств, для которых $\omega_k \subset\subset \omega_{k+1}$ и $\cup_k \omega_k = \Omega$. Метрика в этом пространстве может быть определена формулой

$$\sum_{k\ge1} \frac{2^{-k}\|u-v\|_{p,\omega_k}}{1+\|u-v\|_{p,\omega_k}}, \quad u, v \in L_{p,loc}(\Omega),$$

а сходимость в $L_{p,loc}(\Omega)$ есть сходимость в $L_p(\omega)$ для каждого открытого $\omega \subset\subset \Omega$.

Пространства $L_p(\Omega)$ будем иногда рссматривать и при $p \in (0,1)$. При этих p функционал (1) будет уже не нормой, а псевдонормой,[1] но пространство $L_p(\Omega)$ становится полным метрическим, если определить расстояние между его элементами u, v как $\|u-v\|^p_{p,\Omega}$.

Напомним некоторые интегральные неравенства. Предположим, что $1 \le p \le \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$. Тогда *неравенство Гёльдера*

$$\int_\Omega |uv| dx \le \|u\|_{p,\Omega} \|v\|_{p',\Omega}$$

имеет место для всех $u \in L_p(\Omega)$ и $v \in L_{p'}(\Omega)$.

Интегральное неравенство Минковского. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $G \subset \mathbf{R}^s$ – открытые множества и f – измеримая функция на $\Omega \times G \subset \mathbf{R}^{n+s}$. Тогда

$$\Big\| \int_G f(\cdot, y) dy \Big\|_{p,\Omega} \le \int_G \|f(\cdot, y)\|_{p,\Omega} dy, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2}$$

Неравенство Харди. Пусть $1 \le p \le \infty$, $s \ne 1/p$, и пусть

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt \quad \text{при} \quad s > 1/p, \qquad F(x) = \int\limits_x^\infty f(t)dt \quad \text{при} \quad s < 1/p.$$

Тогда

$$\|x^{-s} F\|_{p,(0,\infty)} \le \frac{1}{|s - 1/p|} \|x^{1-s} f\|_{p,(0,\infty)}. \tag{3}$$

Доказательство неравенств (2) и (3) можно найти, например, в книге О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [9] (гл. 1, § 2). Более общие весовые неравенства Харди будут сформулированы в разд. 4.1 и 5.1.

---

[1] линейное пространство называется псевдонормированным, если на его элементах определен функционал $\|x\| \ge 0$, удовлетворяющий условиям 1) если $\|x\| = 0$, то $x = 0$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, где λ – скалярный множитель; 3) если $\|x_k\| \to 0$ и $\|y_k\| \to 0$, то $\|x_k + y_k\| \to 0$.

1.2 Функции с обобщенными производными

1.2.1 Средние функции и производные

Сформулируем определение обобщенной производной по Соболеву [67, 68, 69].

Определение 1. Пусть Ω – непустое открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $u, v \in L_{1,loc}(\Omega)$ и $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ – мультииндекс. Если

$$\int_\Omega u D^\alpha \eta dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \eta dx$$

для произвольного элемента $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, то говорят, что v является *обобщенной производной* функции u в Ω и пишут $v = D^\alpha u$.

Пусть

$$K \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \ \ \mathrm{supp} K \subset B_1, \ \ \int K dx = 1.$$

С любой функцией $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ свяжем семейство ее усреднений

$$(M_h u)(x) = \frac{1}{h^n} \int K\Big(\frac{x-y}{h}\Big) u(y) dy, \ \ h > 0. \tag{1}$$

Функция K называется *усредняющим ядром*, а h – *радиусом усреднения*. Формула (1) имеет смысл по крайней мере для таких x, что $B_h(x) \subset \Omega$. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, С. Л. Соболев [69, с. 19–20, 41]) и может быть легко установлено непосредственно.

Лемма. (i) *Если $u \in L_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$, то $M_h u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, причем*

$$\big(D^\alpha M_h u\big)(x) = \int \big(D^\alpha K_h\big)(x-y) u(y) dy,$$

где $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$ и $K_h(x) = h^{-n} K(x/h)$.

(ii) *В случае $u \in L_p(\mathbf{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, имеем $M_h u \to u$* в $L_p(\mathbf{R}^n)$ при $h \to +0$.

(iii) *Если $u \in L_{p,loc}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, и G – внутренняя подобласть, т.е. $G \subset\subset \Omega$, то $M_h u \to u$ в $L_p(G)$ при $h \to 0$.*

(iiii) *Предположим, что функция $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ имеет производную $D^\alpha u$ в Ω. Тогда $\big(D^\alpha M_h u\big)(x) = \big(M_h D^\alpha u\big)(x)$, если $B_h(x) \subset \Omega$.*

Используя эту лемму, можно дать другое определение обобщенной производной, равносильное сформулированному выше.

Определение 2. Пусть $u, v \in L_{1,loc}(\Omega)$ и $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$. Функция v называется обобщенной производной $D^\alpha u$ функции u в Ω, если существует такая последовательность $\{u_k\}_{k\geq 1} \subset C^\infty(\Omega)$, для которой $u_k \to u$ и $D^\alpha u_k \to v$ в $L_{1,loc}(\Omega)$.

1.2.2 Пространства Соболева

Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ и l – натуральное число. Пространство $L_p^l(\Omega)$ состоит из функций, принадлежащих $L_{p,loc}(\Omega)$, все обобщеные производные которых порядка l существуют и принадлежат $L_p(\Omega)$. Пространства $W_p^l(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega)$ определяются следующим образом:

$$W_p^l(\Omega) = L_p(\Omega) \cap L_p^l(\Omega), \;\; V_p^l(\Omega) = \cap_{k=0}^l L_p^k(\Omega).$$

В случае $l = 0$ мы принимаем соглашение $L_p^0 = W_p^0 = V_p^0 = L_p$. Пространства $W_p^l(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega)$, снабженные нормами

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega},$$

$$\|u\|_{V_p^l(\Omega)} = \sum\nolimits_{k=0}^l \|\nabla_k u\|_{p,\Omega},$$

являются банаховыми (см. С. Л. Соболев [69, с. 76]).

Равносильное определение пространства $L_p^l(\Omega)$ можно сформулировать в терминах обобщенных функций. Именно, $L_p^l(\Omega)$ есть пространство обобщенных функций в Ω с производными порядка l из $L_p(\Omega)$ (см. Ж. Дени, Ж. Л. Лионс [97] при $l = 1$ и В. Г. Мазья [40, 1.1.2] при $l \geq 1$). Отсюда, в частности, вытекает, что функции из $L_p^l(\Omega)$ имеют все промежуточные производные порядков меньше l, принадлежащие $L_{p,loc}(\Omega)$.

Если Ω – область, то пространство $L_p^l(\Omega)$ становится банаховым будучи снабжено нормой

$$\|u\|_{L_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,\omega} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \tag{1}$$

где ω – внутренняя подобласть Ω, т.е. $\omega \subset\subset \Omega$. Изменение подобласти ω приводит к эквивалентной норме [40, 1.1.13].

Включения $V_p^l(\Omega) \subset W_p^l(\Omega) \subset L_p^l(\Omega)$ очевидны и могут быть заменены равенствами для области с “хорошей” границей (ср. следствие 1.5.1). Существуют, однако, области [131], [40, 1.1.4], [59], для которых одно из указанных включений или даже оба оказываются строгими.

Заметим, что если u – элемент одного из пространств $L_p^l(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ или $V_p^l(\Omega)$, то u – функция в Ω, определенная с точностью до множества лебеговой меры нуль. Будем говорить, что функция u является ограниченной, гладкой и т.п., если существует функция v, совпадающая с u почти всюду в Ω и v является ограниченной, гладкой и т.п.

1.2.3 Абсолютная непрерывность функций из $L_p^1(\Omega)$

Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Говорят, что функция, определенная в Ω, *абсолютно непрерывна* на прямой ℓ, если она абсолютно непрерывна на любом замкнутом отрезке ℓ, содержащемся в Ω. Следующее утверждение дает описание пространства $L_p^1(\Omega)$ в терминах абсолютно непрерывных функций.

Теорема. *Функция из $L_{p,loc}(\Omega)$, $p \geq 1$, принадлежит пространству $L_p^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда эта функция (быть может, измененная на множестве нулевой лебеговой меры) абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, и ее классические производные первого порядка принадлежат $L_p(\Omega)$. Кроме того, классический градиент функции совпадает с обобщенным градиентом почти всюду в Ω.*

Доказательство теоремы можно найти в книгах В. М. Гольдштейна и Ю. Г. Решетняка [21, с. 122], В. Г. Мазья [40, с. 13].

Отметим, что свойство абсолютной непрерывности функций на почти всех прямых, параллельных координатным осям, было положено в основу определения функциональных классов типа $L_p^1(\Omega)$ в работах Б. Леви [117], Л. Тонелли [139], Дж. Кэлкина [94], Ч. Морри [128] и др.

1.2.4 Об устранимых особенностях

Для точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ и $1 \leq i \leq n$ положим

$$p_i(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Следующее утверждение (см., например, Ю. Г. Решетняк [64, с. 15]) дает простые достаточные условия на множества устранимых особенностей для функций из пространств Соболева.

Теорема. *Пусть $u \in V_p^l(\Omega \setminus F)$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество и $F \subset \Omega$ – замкнутое относительно Ω множество, проекции $p_i(F)$ которого имеют лебегову меру нуль в $\mathbf{R}^{n-1}$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $u \in V_p^l(\Omega)$.*

Отметим, что условия теоремы выполняются, например, для относительно замкнутых в Ω подмножеств F нулевой $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа.

1.3 Классы областей

В этом разделе определяются некоторые классы областей в $\mathbf{R}^n$ и формулируются связи между ними. Начнем с определения классов C^l и $C^{l,\lambda}$, где l – целое неотрицательное число и $\lambda \in (0, 1]$.

Определение 1. Ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ принадлежит *классу* C^l ($C^{l,\lambda}$), если каждая точка $\partial\Omega$ имеет такую окрестность U, что множество $U \cap \Omega$ представляется в некоторой декартовой системе координат неравенством $x_n < f(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где $f \in C^l(\overline{G})$ ($f \in C^{l,\lambda}(\overline{G})$) и G – область в $\mathbf{R}^{n-1}$.

Области класса $C^{0,1}$ будем называть еще областями с липшицевой границей.

Определение 2. Область Ω называется *звездной* относительно множества $E \subset \Omega$, если любой луч с началом в E имеет единственную общую точку с $\partial\Omega$.

Отметим, что ограниченная область является звездной относительно начала сферических координат (r, ω) тогда и только тогда, когда ее граница задается уравнением $r = r(\omega)$ с непрерывной функцией $S^{n-1} \ni \omega \mapsto r(\omega)$. Такая область, впрочем, может не принадлежать классу C [125, p. 74].

Области класса $C^{0,1}$ связаны с областями, звездными относительно шара, следующим образом (см. В. И. Буренков [91, 4.3], В. Г. Мазья [40, 1.1.8]).

Лемма 1. *Ограниченная область, звездная относительно шара, принадлежит классу $C^{0,1}$.*

Введем еще один класс областей.

Определение 3. Говорят, что область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет *условию конуса*, если существуют такие числа $a, b \in (0, \infty)$, что каждая точка Ω является вершиной содержащегося в Ω вместе со своим замыканием конуса, конгруэнтного конусу

$$\{x : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 < ax_n^2,\ 0 < x_n < b\}.$$

Нетрудно проверить, что область класса $C^{0,1}$ удовлетворяет условию конуса. Пример шара с удаленным центром показывает, что обратное неверно. Однако имеет место следующее утверждение (см. В. П. Глушко [19], В. Г. Мазья [40, 1.1.9]).

Лемма 2. *Пусть Ω – ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. Тогда Ω является объединением конечного числа областей, звездных относительно шара.*

Из лемм 1 и 2 получаем, что ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, есть объединение конечного числа областей с липшицевой границей.

1.4 Плотность функций из C^∞ в пространствах Соболева

Из леммы 1.2.1 следует, что каждый элемент любого из пространств $L_p^l(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ или $V_p^l(\Omega)$ при $p < \infty$ может быть аппроксимирован бесконечно дифференцируемыми функциями на внутренних подобластях Ω. На самом деле аппроксимацию такими функциями можно осуществить на Ω. Следующий результат был доказан Ж. Дени и Ж. Л. Лионсом [97] в случае $l = 1$, а при $l \geq 1$ – Н. Мейерсом и Ж. Серрином [126].

Теорема 1. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ и $l = 1, 2, \ldots$.*
(i) *Для любой функции $u \in L_p^l(\Omega)$ существует такая последовательность $\{u_i\} \subset C^\infty(\Omega) \cap L_p^l(\Omega)$, что*

$$u_i \to u \ \text{ в } \ L_{p,loc}(\Omega) \quad \text{и} \quad \|\nabla_l(u_i - u)\|_{p,\Omega} \to 0.$$

(ii) *Множества $W_p^l(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ плотны в пространствах $W_p^l(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega)$ соответственно.*

Отметим, что в теореме 1 пространство $C^\infty(\Omega)$, вообще говоря, не может быть заменено пространством $C^\infty(\overline{\Omega})$. Необходимое и достаточное условие плотности множества $C^\infty(\overline{\Omega})$ в пространствах

Соболева неизвестно. Формулируемое ниже утверждение дает простые достаточные условия.

Теорема 2. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbf{R}^n$. *Предположим, что* Ω *либо звездна относительно точки, либо принадлежит классу* C. *Тогда множество* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *плотно в каждом из пространств* $L_p^l(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ *и* $V_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$.

Для областей класса C теорема 2 доказана Э. Гальярдо [102], а для звездных областей доказательство имеется в курсе В. И. Смирнова [66].

1.5 Неравенство Пуанкаре и эквивалентные нормы в пространствах Соболева

1.5.1 Обобщённое неравенство Пуанкаре

В дальнейшем часто будем использовать следующее утверждение, обобщающее хорошо известное неравенство Пуанкаре.

Теорема. *Пусть* Ω *– ограниченная область в* $\mathbf{R}^n$, *которая является объединением конечного числа областей класса* C, *и пусть* ω *– произвольное непустое открытое множество, такое, что* $\omega \subset\subset \Omega$. *Тогда для любой функции* $u \in L_p^l(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, *существует полином* $P \in \mathcal{P}_{l-1}$ *вида*

$$P(x) = \sum\nolimits_{|\beta|<l} x^\beta \int_\Omega \varphi_\beta(y) u(y) dy,$$

где функции φ_β, $|\beta| < l$, *принадлежат классу* $C_0^\infty(\omega)$ *и не зависят от* u, *а при всех* $k = 0, \dots, l-1$ *верна оценка*

$$\|\nabla_k(u - P)\|_{p,\Omega} \le c\,(n, l, p, \omega, \Omega)\, \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}. \tag{1}$$

Доказательство теоремы имеется в книге В. Г. Мазья [40, 1.1.11]. Из этой теоремы получаем важное следствие.

Следствие. *Пространства* $L_p^l(\Omega)$, $W_p^l(\Omega)$ *и* $V_p^l(\Omega)$ *совпадают для области, представимой в виде объединения конечного числа областей класса* C.

Сформулированная выше теорема верна, в частности, для ограниченной области с условием конуса (см. леммы 1.3/1 и 1.3/2). Впрочем, для такой области эта теорема в сочетании с теоремой вложения Соболева допускает более общую формулировку.

Замечание. Пусть область Ω та же, что и в теореме. Положим $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$ при $\varepsilon > 0$ и каждой функции $u \in L^l_p(\Omega_\varepsilon)$ сопоставим полином $P_\varepsilon = P(u \circ S_\varepsilon) \circ S_\varepsilon^{-1}$, где $S_\varepsilon(x) = \varepsilon\, x$ и P – полином из теоремы. Тогда при всех $k = 0, \dots, l-1$ верна оценка

$$\|\nabla_k(u - P_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{l-k}\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon}$$

с той же константой c, что и в (1).

Далее полезным окажется такое утверждение.

Лемма. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что существует линейный функционал $L^1_p(\Omega) \ni v \mapsto \ell(v) \in \mathbf{R}^1$, для которого*

$$\|v - \ell(v)\|_{p,\Omega} \le C\,\|\nabla v\|_{p,\Omega}, \quad C = \mathrm{const},$$

при всех $v \in L^1_p(\Omega)$. Тогда для каждого $l = 1, 2, \dots$ существует такое линейное отображение $L^l_p(\Omega) \ni v \mapsto Q \in \mathcal{P}_{l-1}$, что при $0 \le k \le l-1$ верна оценка

$$\|\nabla_k(v - Q)\|_{p,\Omega} \le c\,C^{l-k}\|\nabla_l v\|_{p,\Omega},$$

где $c = c\,(n, p, l)$ и v – произвольный элемент пространства $L^l_p(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $v \in L^l_p(\Omega)$ и $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ – мультииндекс длины $l-1$. Поскольку $D^\alpha v \in L^1_p(\Omega)$, то существует такое число ℓ_α, что

$$\|D^\alpha v - \ell_\alpha\|_{p,\Omega} \le C\,\|\nabla(D^\alpha v)\|_{p,\Omega}.$$

Отсюда

$$\|\nabla_{l-1} v_1\|_{p,\Omega} \le c\,C\,\|\nabla_l v\|_{p,\Omega},$$

где

$$v_1(x) = v(x) - \sum\nolimits_{|\alpha|=l-1} \ell_\alpha x^\alpha/\alpha!.$$

Продолжая этот процесс, построим при каждом $k = 1, \dots, l$ функцию $v_k \in L^{l-k}_p(\Omega)$ вида

$$v_k(x) = v_{k-1}(x) - \sum\nolimits_{|\alpha|=l-k} \ell_\alpha x^\alpha/\alpha!,$$

для которой верна оценка

$$\|\nabla_{l-k} v_k\|_{p,\Omega} \le c\,C\,\|\nabla_{l-k+1} v_{k-1}\|_{p,\Omega}$$

(мы считаем $v_0 = v$). Заметим, что коэффициенты ℓ_α являются линейными функционалами от v. Таким образом,

$$Q(x) = \sum\nolimits_{|\alpha|\le l-1} \ell_\alpha x^\alpha/\alpha!$$

есть требуемый полином. Доказательство леммы закончено.

1.5.2 Эквивалентные нормы в $W_p^l(\Omega)$

Сформулируем теорему, описывающую широкий класс эквивалентных нормировок пространства $W_p^l(\Omega)$ (см. С. Л. Соболев [69, § 9], В. Г. Мазья [40, 1.1.15]).

Теорема. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющая условию $L_p^l(\Omega) \subset L_p(\Omega)$, и пусть $F(u)$ – непрерывная полунорма в $W_p^l(\Omega)$, которая является нормой на $\mathcal{P}_{l-1}$. Тогда норма в $W_p^l(\Omega)$ эквивалентна норме $F(u) + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}$.*

Из следствия 1.5.1 вытекает, что эта теорема верна для областей, представимых в виде суммы конечного числа областей класса C и, в частности, для ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса.

Пусть ограниченная область Ω такова, что $L_p^l(\Omega) = V_p^l(\Omega)$, например, удовлетворяет условию конуса. Если непрерывный линейный оператор $\Pi : W_p^l(\Omega) \to \mathcal{P}_{l-1}$ обладает свойством $\Pi^2 = \Pi$ (т.е. является проектором на подпространство $\mathcal{P}_{l-1}$), то в теореме в качестве $F(u)$ можно выбрать полунорму $\|\Pi u\|_{p,\Omega}$.

Так как $\Pi(u - \Pi u) = 0$, из теоремы следует эквивалентность полунорм $\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}$ и $\|u - \Pi u\|_{V_p^l(\Omega)}$. В частности, при $0 \le k \le l-1$ верна оценка

$$\|\nabla_k(u - \Pi u)\|_{p,\Omega} \le c(l,n,p,\Omega)\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}. \tag{2}$$

Пусть ε – положительный параметр и $\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon\, x : x \in \Omega\}$. Полагая $\Phi(x) = \varepsilon\, x$, для любой функции $v \in W_p^l(\Omega_\varepsilon)$ получим оценку

$$\|\nabla_k\big(v - (\Pi(v\circ\Phi))\circ\Phi^{-1}\big)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l v\|_{p,\Omega_\varepsilon},$$

где $0 \le k \le l-1$, а константа c та же, что и в (2).

Приведем два примера построения проекторов для произвольной области.

Пример 1. Пусть

$$\psi \in C_0^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega \psi(x)dx = 1. \tag{3}$$

Тогда линейное отображение, заданное формулой

$$(\Pi u)(x) = \sum\nolimits_{|\alpha|<l} \frac{1}{\alpha!}\int_\Omega \big(D^\alpha u\big)(y)(x-y)^\alpha \psi(y)dy, \quad u \in L_p^l(\Omega), \tag{4}$$

действует как тождественный оператор на подпространстве $\mathcal{P}_{l-1}$. Кроме того, полином Πu может быть записан в виде

$$(\Pi u)(x) = \sum\nolimits_{|\beta|<l} x^\beta \int_\Omega \varphi_\beta(y) u(y) dy,$$

где $\varphi_\beta \in C_0^\infty(\Omega)$, так что отображение $L_p^l(\Omega) \ni u \mapsto \Pi u \in \mathcal{P}_{l-1}$ непрерывно.

Пример 2. Если вместе с (3) еще выполнены условия

$$\int \psi(x) x^\alpha dx = 0$$

для всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, $1 \le |\alpha| \le l-1$, то проектор $L_p^l(\Omega) \ni u \mapsto \Pi u \in \mathcal{P}_{l-1}$ можно определить формулой

$$(\Pi u)(x) = \sum\nolimits_{|\alpha|<l} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_\Omega \left(D^\alpha u\right)(y) \psi(y) dy, \tag{5}$$

правая часть которой представляется в виде

$$\sum_{|\alpha|<l} \frac{(-x)^\alpha}{\alpha!} \int_\Omega u(y) D^\alpha \psi(y) dy,$$

откуда следует непрерывность отображения $\Pi : L_p^l(\Omega) \to \mathcal{P}_{l-1}$.

1.5.3 Условие непрерывности оператора вложения: $L_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$

Пусть X, Y – метрические пространства и пусть $X \subset Y$. Будем говорить, что пространство X непрерывно вложено в Y (или оператор вложения: $X \to Y$ непрерывен), если тождественное отображение: $X \to Y$ непрерывно.

В этом разделе мы покажем, что существование непрерывного оператора вложения: $L_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ равносильно справедливости неравенства типа Пуанкаре.

Лемма. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, $q > 0$ и $\mathcal{P}_{l-1} \subset L_q(\Omega)$. Для того, чтобы пространство $L_p^l(\Omega)$, $p \ge 1$, было непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $u \in L_p^l(\Omega)$ неравенство*

$$\inf\{\|u - Q\|_{q,\Omega} : Q \in \mathcal{P}_{l-1}\} \le C \,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega} \tag{1}$$

выполнялось с некоторой положительной постоянной C, не зависящей от u.

Доказательство. *Необходимость.* В определении (1.2.2/1) выберем в качестве ω открытый шар $B \subset\subset \Omega$. Тогда

$$\|u\|_{q,\Omega} \le C\left(\|u\|_{p,B} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}\right)$$

для всех $u \in L_p^l(\Omega)$ с некоторой постоянной $C = C(n, p, l, \Omega, B) > 0$. Таким образом, левая часть в (1) не превосходит

$$C\big(\inf\{\|u - Q\|_{p,B} : Q \in \mathcal{P}_{l-1}\} + \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}\big).$$

Применяя теорему 1.5.1 в шаре B, получаем (1).

Достаточность. Пусть (1) имеет место. Так как $\mathcal{P}_{l-1} \subset L_q(\Omega)$, то верно теоретико-множественное включение $L_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. Рассмотрим тождественное отображение банахова пространства $L_p^l(\Omega)$ в пространство $L_q(\Omega)$. Это отображение линейно и замкнуто, а, значит, непрерывно по теореме о замкнутом графике (см., например, Рудин [65, 2.15]). Доказательство леммы закончено.

При $l = 1$ лемма была доказана в работе Ж. Дени и Ж. Л. Лионса [97].

1.6 Продолжение функций во внешность области определения

В этом разделе мы сформулируем некоторые результаты о продолжении функций из классов Соболева во внешность области определения с сохранением класса. Начнем с хорошо известной процедуры отражения конечного порядка (см. М. Р. Хестенс [108], Л. Лихтенштейн [118]) для продолжения функций через плоскую часть границы.

Пусть ω – область в $\mathbf{R}^{n-1}$, $x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, и пусть $a \in (0, \infty)$. Положим $\Omega_+ = \omega \times (0, a)$ и $\Omega = \omega \times (-a/l, a)$, где l – натуральное число. Функции u, определенной в Ω_+, поставим в соответствие функцию Eu, определенную в Ω равенством

$$(Eu)(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in \Omega_+, \\ \sum_{j=1}^{l} a_j u(x', -jx_n), & \text{если } x \in \Omega \setminus \Omega_+, \end{cases} \tag{1}$$

где коэффициенты a_j удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{l}(-j)^k a_j = 1, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1. \tag{2}$$

Эта система имеет единственное решение, так как ее определитель (определитель Вандермонда) отличен от нуля.

Теорема 1. *Отображение $u \mapsto Eu$, заданное формулами* (1) *и* (2), *обладает следующими свойствами:*
1) *если функция u является сужением на Ω_+ функции из класса $C^\infty(\omega \times (-\infty, a))$, то $Eu \in C^{l-1}(\Omega)$;*
2) *если $u \in L_p^k(\Omega_+)$, то $Eu \in L_p^k(\Omega)$ для $k = 0, \ldots, l$ и $1 \le p \le \infty$; при этом верна оценка*

$$\|\nabla_k(Eu)\|_{p,\Omega} \le c\,\|\nabla_k u\|_{p,\Omega_+},$$

в которой постоянную c можно выбрать зависящей только от l.

Доказательство теоремы 1 имеется, например, в [40, 1.1.16].

Замечание 1. Пусть $Q \subset \mathbf{R}^n$ – открытый параллелепипед с ребрами, параллельными координатным осям. Применяя описанную выше процедуру отражения конечного порядка вдоль различных координатных направлений, продолжим функцию из Q в более широкий параллелепипед. Умножая это продолжение на гладкую срезающую функцию, получим продолжение из Q на $\mathbf{R}^n$. Таким образом, существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(Q) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$. Та же процедура приводит к следующему утверждению. Пусть Q – описанный выше параллелепипед и G – область в $\mathbf{R}^m$. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения:

$$V_p^l(Q \times G) \to V_p^l\big(\mathbf{R}^n \times G\big), \;\; 1 \le p \le \infty, \; l \ge 1,$$

норма которого ограничена постоянной, не зависящей от G.

Определение. Пусть $1 \le p \le \infty$ и $l \ge 1$ – целое число. Говорят, что открытое множество $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ принадлежит классу EV_p^l, если существует линейный непрерывный оператор

$$E : V_p^l(\Omega) \to V_p^l(\mathbf{R}^n), \tag{3}$$

который является оператором продолжения, т.е. $Eu\big|_\Omega = u$ для всех $u \in V_p^l(\Omega)$.

Предположим, что Ω – область в $\mathbf{R}^n$ класса C^l. Комбинируя процедуру (1) – (2) с разбиением единицы и локальным отображением Ω на цилиндр, можно построить линейный ограниченный оператор продолжения (3). Эта конструкция оператора продолжения была обоснована в работах В. М. Бабича [2] и С. М. Никольского [56]. Таким образом, давно известно, что области из C^l принадлежат классу EV_p^l при всех $p \geq 1$ и $l = 1, 2, \ldots$

А. Кальдерон [93] показал, что классу EV_p^l, $p \in (1, \infty)$, принадлежат области из $C^{0,1}$. Конструкция оператора продолжения Кальдерона основана на некотором интегральном представлении функций из $V_p^l(\Omega)$ и теореме о непрерывности сингулярных интегральных операторов в L_p. Аналогичный способ построения непрерывного оператора продолжения: $W_p^{\bar{l}}(\Omega) \to W_p^{\bar{l}}(\mathbf{R}^n)$, $p \in (1, \infty)$, для анизотропных пространств Соболева был использован О. В. Бесовым и В. П. Ильиным [8]. Здесь $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_1, \ldots, l_n$ – натуральные числа, а функции u из $W_p^{\bar{l}}(\Omega)$ характеризуются конечностью нормы

$$\|u\|_{W_p^{\bar{l}}(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i} u\|_{p,\Omega}. \tag{4}$$

Класс областей, для которых пригодна описанная в [8] конструкция оператора продолжения, содержит в случае $l_1 = l_2 = \ldots = l_n$ класс $C^{0,1}$.

Способ построения оператора продолжения в изотропном случае, охватывающий и предельные значения $p = 1$, $p = \infty$, был предложен И. Стейном [71] (гл. VI, § 3). Сформулируем теорему Стейна.

Область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ называется специальной липшицевой областью, если существует такое ортогональное преобразование T декартовых координат, что

$$T\Omega = \big\{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : \ x' \in \mathbf{R}^{n-1}, \ x_n > \varphi(x')\big\}, \tag{5}$$

где φ – функция, удовлетворяющая условию Липшица на $\mathbf{R}^{n-1}$.

Теорема 2. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и пусть существуют положительные числа r, M, натуральное число N и последовательность открытых множеств $\{U_i\}_{i\geq 1}$, удовлетворяющих условиям*

1) *если $x \in \partial\Omega$, то $B_r(x) \subset U_i$ при некотором i;*

2) *кратность пересечения множеств U_i не превосходит N;*

3) *для любого $i = 1, 2, \ldots$ существует специальная липшицева область Ω_i с функцией φ_i, такая, что $U_i \cap \Omega = U_i \cap \Omega_i$ и*

$$|\varphi_i(x') - \varphi_i(y')| \leq M|x' - y'|, \quad x', y' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

Тогда существует линейный оператор E, переводящий функции, определенные на Ω в функции, определенные на $\mathbf{R}^n$ и имеющий следующие свойства:

a) $Eu\big|_\Omega = u$;

b) *оператор* $E : V_p^l(\Omega) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ *непрерывен для всех* $1 \le p \le \infty$ *и* $l = 0, 1, 2, \ldots$;

c) *норма* $\|E\|_{V_p^l(\Omega)\to V_p^l(\mathbf{R}^n)}$ *ограничена константой, зависящей только от* n, p, l, r, M, N.

Отметим, что оператор продолжения Стейна не зависит от p и l. В частности, условие теоремы 2 выполнено для области класса $C^{0,1}$.

Замечание 2. Объединяя теорему 2 с леммами 1.3/1-2, получаем, что ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, является суммой конечного числа областей из EV_p^l при всех $l = 1, 2, \ldots$ и $1 \le p \le \infty$.

Критерий принадлежности области классу EV_p^l неизвестен. Случай $p = n = 2$, $l = 1$ является исключением. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн и Т. Г. Латфуллин [16] показали, что односвязная плоская область принадлежит классу EV_2^1 тогда и только тогда, когда ее граница есть *квазиокружность*, т.е. образ окружности при квазиконформном отображении плоскости на себя. По теореме Альфорса [1] это условие эквивалентно неравенству

$$|x - z| \le c\,|x - y|, \quad c = \mathrm{const},$$

где x, y – произвольные точки $\partial\Omega$, а z – любая точка той из дуг кривой $\partial\Omega$, соединяющих x и y, которая имеет меньший диаметр.

Плоская область, ограниченная квазиокружностью, принадлежит классу EV_p^l при всех $p \in [1, \infty]$ и $l = 1, 2, \ldots$ (см. В. М. Гольдштейн, С. К. Водопьянов [103] при $l = 1$ и П. Джонс [112] при $l \ge 1$). В. М. Гольдштейн [20] установил, что из одновременного включения плоской односвязной области и ее дополнения в EV_p^l вытекает, что такая область является квазикругом. В упомянутой работе П. Джонса описан класс n-мерных областей из EV_p^l, содержащий $C^{0,1}$ и совпадающий с классом квазикругов при $n = 2$. Сформулируем результат Джонса [112].

Теорема 3. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, и для некоторых $\varepsilon \in (0, \infty)$ и $\delta \in (0, \infty]$ любые точки $x, y \in \Omega$, $|x - y| < \delta$, могут быть соединены спрямляемой кривой $\gamma \subset \Omega$, удовлетворяющей неравенствам*

$$\ell(\gamma) \le |x - y|/\varepsilon, \quad \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \ge \varepsilon\,|x - z||y - z|/|x - y|,$$

где $\ell(\gamma)$ – длина γ и z – произвольная точка γ. Тогда Ω принадлежит классу EV_p^l для всех $p \in [1, \infty]$ и $l = 1, 2, \ldots$ При этом линейный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ может быть построен таким образом, что его норма ограничена постоянной, которая зависит только от $n, p, l, \varepsilon, \delta$ и $\operatorname{diam}(\Omega)$.

Отметим, что, в отличие от оператора продолжения Стейна, оператор продолжения Джонса зависит от l. Области, описанные в теореме 3, называются еще (ε, δ)-областями.

Теорема 3 обобщена на случай анизотропных пространств $W_p^{\bar{l}}$ в работах Б. Л. Файна [74] и П. А. Шварцмана [76]. Обобщение той же теоремы на случай весовых пространств Соболева получено в работе С. К. Чуа [95]. Недавно Л. Г. Роджерс [136] построил для (ε, δ)-области линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$, не зависящий от l, p.

1.7 Теорема вложения Соболева

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ и μ – неотрицательная борелевская мера в Ω. При $q \in (0, \infty)$ обозначим через $L_q(\Omega, \mu)$ пространство μ-измеримых функций в Ω, суммируемых со степенью q по отношению к мере μ. Если в $L_q(\Omega, \mu)$ отождествить μ-эквивалентные функции, то такое пространство становится банаховым с нормой

$$\|u\|_{L_q(\Omega,\mu)} = \left(\int_\Omega |u|^q d\mu \right)^{1/q}$$

при $q \geq 1$; при $q \in (0, 1)$ это пространство становится полным метрическим, если расстояние между его элементами u, v определить как $\|u - v\|^q_{L_q(\Omega,\mu)}$. В случае $\mu = \mathrm{mes}_n$ мы опускаем меру в обозначениях пространств и норм.

Следующее утверждение есть классическая теорема вложения С. Л. Соболева [67, 68, 69] с дополнениями В. П. Ильина [23] и Э. Гальярдо [102].

Теорема. *Пусть $p \in [1, \infty)$ и l – натуральное число. Предположим, что Ω – область в $\mathbf{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа областей класса EV_p^l. Обозначим через μ s-мерную меру Лебега на $\Omega \cap \mathbf{R}^s$, $s \leq n$. Тогда для всех $u \in C^\infty(\Omega) \cap V_p^l(\Omega)$ верна оценка*

$$\sum\nolimits_{j=0}^{k} \|\nabla_j u\|_{L_q(\Omega,\mu)} \leq C\, \|u\|_{V_p^l(\Omega)}, \tag{1}$$

где C – *положительная постоянная, не зависящая от* u, *а параметры* n, s, p, q, l, k *удовлетворяют неравенствам*

1) $p > 1,\ 0 < n - p(l-k) < s \le n,\ p \le q \le sp/(n-(l-k)p);$

2) $p = 1,\ 0 < n + k - l \le s \le n,\ 1 \le q \le s/(n-l+k);$

3) $p > 1,\ n = p(l-k),\ s \le n,\ p \le q < \infty.$

Если выполнено одно из условий

4) $p > 1,\ n < p(l-k)$ *или*

5) $p = 1,\ n \le l - k$, *то*

$$\sum\nolimits_{j=0}^{k} \sup\nolimits_\Omega |\nabla_j u| \le C\,\|u\|_{V_p^l(\Omega)}.$$

Если Ω *принадлежит классу* EV_p^l, *то в случае* 4) *утверждение теоремы может быть уточнено следующим образом:*

6) *если* $\lambda = l - k - n/p \in (0,1)$, *то для всех* $u \in V_p^l(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$

$$\sup_{x,y\in\Omega,\ x\ne y} \frac{|\nabla_k u(x) - \nabla_k u(y)|}{|x-y|^\lambda} \le C\,\|u\|_{V_p^l(\Omega)}. \tag{2}$$

7) *В случае* $(l-k-1)p = n$ *неравенство* (2) *верно для всех* $\lambda \in (0,1)$ *и* $u \in V_p^l(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

Доказательство этой теоремы можно найти в упомянутой работе Э. Гальярдо [102] а также в книгах Р. А. Адамса [83, 5.1 – 5.19] и В. Г. Мазья [40, 1.4]. Сделаем некоторые замечания относительно теоремы Соболева.

Замечание 1. Из 1) – 3) следует, что оператор сужения

$$C^\infty(\Omega) \cap V_p^l(\Omega) \ni u \mapsto u\big|_{\mathbf{R}^s\cap\Omega}$$

может быть единственным образом распространен до линейного непрерывного оператора: $V_p^l(\Omega) \to V_q^k(\mathbf{R}^s \cap \Omega)$.

Замечание 2. Пусть Ω – ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса. В силу замечания 1.6/2, для всех $1 \le p \le \infty$ и $l = 1, 2, \ldots$ эта область является объединением конечного числа областей класса EV_p^l. Следовательно, пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $V_q^k(\Omega)$ при

$$(l-k)p < n, \quad p \ge 1, \quad 1 \le q \le np/(n-(l-k)p).$$

То же самое верно для любого $q \in [1, \infty)$, если $(l-k)p = n$. В случае $(l-k)p > n$ или $p = 1$, $l - k \geq n$ пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C^k(\Omega) \cap V_\infty^k(\Omega)$.

Замечание 3. Пусть $\Omega \in EV_p^l$. Если выполнено условие 7) в теореме Соболева, то можно показать [60], что пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в пополнение $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{V_\infty^k(\Omega)} + \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|\nabla_k u(x) - \nabla_k u(y)|}{|x-y|(1+|\log|x-y||)^{(p-1)/p}}. \tag{3}$$

Замечание 4. Соотношения между параметрами p, l, n, k, λ в 4) – 6) и показатель $(p-1)/p$ в (3) точны. Это проверяется с помощью подходящих пробных функций.

Сформулированная выше теорема Соболева обобщалась в различных направлениях. Укажем некоторые из них.

В книге В. Г. Мазья [40, 1.4.5] дано обобщение теоремы на случай абстрактной меры. Именно, пусть Ω – та же область, что и в теореме Соболева и пусть μ – такая борелевская мера в Ω, что

$$\sup\left\{r^{-s}\mu\big(\Omega \cap B_r(x)\big) : x \in \mathbf{R}^n,\, r > 0\right\} < \infty,$$

где $s > 0$ (в частности, если s целое, то в качестве μ можно взять s-мерную меру Лебега в $\Omega \cap \mathbf{R}^s$). Тогда оценка (1) остается верной при выполнении одного из условий 1), 2) или 3). Доказательство этого результата основано на интегральном представлении Соболева для функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и теореме Д. Р. Адамса о потенциалах Рисса [80, 81] при $p > 1$.

Приведем обобщение теоремы Соболева на анизотропные пространства $W_p^{\bar{l}}(\Omega)$, $\bar{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{Z}^n$, $l_i > 0$, элементы которых характеризуются конечностью нормы (1.6/4).

Пусть $\bar{l}$ – вектор с натуральными компонентами, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$. Оказывается, что при определенных соотношениях между указанными параметрами и некоторых требованиях к области произвольная функция $u \in W_p^{\bar{l}}(\Omega)$ имеет обобщенную производную $D^\alpha u \in L_q(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|D^\alpha u\|_{q,\Omega} \leq C\, \|u\|_{W_p^{\bar{l}}(\Omega)} \tag{4}$$

с постоянной C, не зависящей от u.

Доказательство оценки (4) основано на интегральном представлении функций через несмешанные производные. Аппарат интегральных представлений, который в изотропном случае применялся для доказательства теорем вложения еще С. Л. Соболевым [68, 69], развивался в работах В. П. Ильина [24], О. В. Бесова [4, 5, 6], О. В. Бесова и В. П. Ильина [8] (см. также § 7 книги [9]). Отметим здесь также работы Ю. Г. Решетняка [62, 63] и В. И. Буренкова [12], где интегральные представления функций через их производные изучались в изотропном случае.

О. В. Бесов [5] получил интегральное представление функций через несмешанные производные, носителем которого является так называемый гибкий рог и показал, что неравенство (4) верно при соотношениях

$$\theta = 1 - (p^{-1} - q^{-1}) \sum\nolimits_{i=1}^{n} l_i^{-1} - \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i^{-1} \geq 0, \tag{5}$$

и при $\theta = 0$

либо $1 < p < q < \infty$, либо $1 = p < q = \infty$, либо $1 < p = q < \infty$,

где Ω – область в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющая условию гибкого рога. Не приводя здесь строгого описания названного класса областей, заметим, что области с условием гибкого рога могут иметь заострения на границе, характер вырождения которых зависит от компонент вектора $\bar{l}$, а при $l_1 = \ldots = l_n$ соответствующий класс областей (с условием гибкого конуса) содержит класс областей, удовлетворяющих условию Ф. Джона (последний еще называется классом J по терминологии, принятой в книге В. М. Гольдштейна и Ю. Г. Решетняка [21]).

Ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ по определению принадлежит классу J, если существуют точка $x_0 \in \Omega$ и постоянная $c > 0$, такие, что любая точка $x \in \Omega$ может быть соединена с x_0 спрямляемой кривой $\gamma \subset \Omega$, вдоль которой

$$\operatorname{dist}(y, \partial\Omega) \geq c\,|\gamma(x, y)|, \tag{6}$$

где y – произвольная точка кривой γ, а $|\gamma(x, y)|$ означает длину части γ, соединяющей точки x и y.

Описанные области ввел в рассмотрение Ф. Джон [111]. Класс J содержит области, удовлетворяющие условию конуса ([21], гл. 2, разд. 2.2), но, вообще говоря, области класса J устроены достаточно сложно.

Для изотропных пространств $W_p^l(\Omega)$ условие (5) при $\alpha = 0$ имеет вид

$$\theta = 1 - n(p^{-1} - q^{-1})l^{-1} \geq 0. \tag{7}$$

В силу вышесказанного, приходим к следующему утверждению: для области Ω класса J пространство $W_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в

$L_q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$, если выполнено неравенство (7) и дополнительно $q < \infty$ при $\theta = 0$ и $p > 1$; $q = \infty$ при $\theta = 0$ и $p = 1$.

Отметим, что при $\theta > 0$ этот результат был получен в работе Ю. Г. Решетняка [63] при помощи интегрального представления функции в области класса J через ее градиент порядка l. На самом деле ограничение $q = \infty$ при $\theta = 0$ и $p = 1$ может быть снято.

Б. Боярский [88] показал, что для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ класса J пространство $L^1_1(\Omega)$ вложено в пространство $L_{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$. Отсюда вытекает равенство $L^l_p(\Omega) = V^l_p(\Omega)$ при всех $p \ge 1$ и $l = 1, 2 \ldots$, а с помощью хорошо известных рассуждений общего характера выводится непрерывность оператора вложения: $L^l_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$ при $q \le np/(n - lp)$, $p \ge 1$, $lp < n$. Отметим также, что для области класса J пространство $L^l_p(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$ при $lp > n$ (см. Ю. Г. Решетняк [63], В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк [21], гл. 2, 4.3). Таким образом, теорема вложения, сформулированная в замечании 2 для ограниченных областей с условием конуса, полностью переносится на области класса J.

В определенном смысле класс J – самый широкий класс областей, для которого верна теорема вложения с соболевским предельным показателем. В работе [90] С. Бакли и П. Коскела доказали, что если $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная односвязная область и пространство $L^1_p(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_{2p/(2-p)}(\Omega)$ при некотором $p \in [1, 2)$, то Ω принадлежит классу J.

Упомянутый результат Б. Боярского был обобщен на случай весовых пространств Соболева в работах С. К. Чуа [96], Р. Хурри–Сюрьянен [109, 110], П. Хайлаша и П. Коскела [105], Т. Кильпеляйнена и Я. Малы [116]. Сформулируем результат, полученный в последней работе.

При $\lambda \ge 1$ ограниченные области, удовлетворяющие λ-условию Джона, характеризуются тем, что правая часть в (7) заменяется на $c\,|\gamma(x, y)|^\lambda$. Класс таких областей растет с ростом λ и при $\lambda = 1$ совпадает с классом J. В работе [116] для области, удовлетворяющей λ-условию Джона, установлена оценка

$$\inf_{t \in \mathbf{R}^1} \left(\int_\Omega |u - t|^q \varrho(x)^a dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \varrho(x)^b dx \right)^{1/p}, \ C = \text{const},$$

где

$$\varrho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \ \ b \ge 1 - n, \ a > -n, \ 1 \le p \le q < \infty, \ q(n - p) \le np,$$

$$(n + a)q^{-1} \ge (\lambda(n + b - 1) + 1)p^{-1} - 1$$

и u – любая гладкая функция в Ω, для которой $\varrho^{b/p}\,\nabla u \in L_p(\Omega)$.

Этот результат был обобщен О. В. Бесовым [6, 7] на весовые пространства Соболева любого порядка для некоторого класса областей, содержащего области с λ-условием Джона. О. В. Бесов доказал, в частности, непрерывность вложения $L^l_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область с λ-условием Джона ($\lambda \geq 1$),

$$1 < p < q < \infty, \quad l - (1 + \lambda(n-1))/p + n/q \geq 0.$$

Показатель q не может быть увеличен (см. Д. А. Лабутин [29]).

1.8 Теоремы о компактности

В этом разделе мы сформулируем несколько утверждений, показывающих, что множества, ограниченные в пространствах Соболева, могут быть относительно компактными в некоторых других функциональных пространствах. Начнем со следующей леммы, верной для произвольной области.

Лемма. *Если Ω – область в $\mathbf{R}^n$ и ω – такая подобласть, что $\omega \subset\subset \Omega$, то любое ограниченное множество в $L^l_p(\Omega)$ относительно компактно в $V^{l-1}_p(\omega)$.*

При $p = 2$ и $l = 1$ это утверждение есть классическая лемма Ф. Реллиха [134]. При $p = \infty$ оно вытекает из теоремы Арцела–Асколи. В общем случае доказательство леммы можно найти, например, в [40, 1.4.6].

Формулируемая ниже теорема 1 говорит о том, что если пространство Соболева непрерывно вложено в пространство L_q в области конечного объема с непредельным показателем q, то оператор вложения компактен.

Теорема 1. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ конечного объема. Если пространство $L^l_p(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$, где $p \geq 1$ и $q > 0$, то оператор вложения: $L^l_p(\Omega) \to L_r(\Omega)$ компактен при любом $r \in (0, q)$. В этом утверждении пространство $L^l_p(\Omega)$ можно заменить на $W^l_p(\Omega)$ или $V^l_p(\Omega)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $r \leq p$ и введем набор областей $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$, для которых $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$, $\cup_j \Omega_j = \Omega$. Для любого $j = 1, 2, \ldots$ и любой функции $u \in L^l_p(\Omega)$ с помощью неравенства Гёльдера получим

$$c(r)\,\|u\|_{r,\Omega} \leq \|u\|_{r,\Omega\setminus\Omega_j} + \|u\|_{r,\Omega_j} \leq$$

$$\le [\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \Omega_j)]^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \|u\|_{q,\Omega} + [\mathrm{mes}_n(\Omega)]^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} \|u\|_{p,\Omega_j}.$$

Поскольку $\mathrm{mes}_n(\Omega \setminus \Omega_j) \to 0$ и $L^l_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, то существуют постоянная $c > 0$ и бесконечно малая последовательность положительных чисел $\{\delta_j\}_{j\ge 1}$, не зависящие от u, такие, что

$$\|u\|_{r,\Omega} \le \delta_j \|u\|_{L^l_p(\Omega)} + c\,\|u\|_{p,\Omega_j}, \quad u \in L^l_p(\Omega), \quad j = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Пусть $\{u_k\}_{k\ge 1}$ – последовательность, содержащаяся в единичном шаре пространства $L^l_p(\Omega)$. В силу предыдущей леммы множество, ограниченное в $L^l_p(\Omega)$, относительно компактно в $L_p(\Omega_j)$ при всех $j \ge 1$. Используя этот факт и применяя известный диагональный метод, выделим из $\{u_k\}$ подпоследовательность $\{v_k\}$, сходящуюся в $L_{p,loc}(\Omega)$. Кроме того, из (1) при любых натуральных i, j, k вытекает оценка

$$\|v_k - v_i\|_{r,\Omega} \le 2\delta_j + c\,\|v_k - v_i\|_{p,\Omega_j}. \tag{2}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем номер j, для которого $\delta_j < \varepsilon/4$. Так как $\{v_k\}$ сходится в $L_p(\Omega_j)$, то найдется такой номер N, что последнее слагаемое в (2) не больше $\varepsilon/2$ при всех $i, k \ge N$. При тех же i, k имеем $\|v_k - v_i\|_{r,\Omega} < \varepsilon$. Итак, $\{v_k\}$ сходится в $L_r(\Omega)$, и заключение теоремы установлено в случае $r \le p$.

Пусть $p < r < q$ и последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $L^l_p(\Omega)$. В силу предыдущего, некоторая ее подпоследовательность $\{u^*_k\}$ сходится в $L_p(\Omega)$. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\|u^*_k - u^*_i\|_{r,\Omega} \le \|u^*_k - u^*_i\|^{\theta}_{p,\Omega} \|u^*_k - u^*_i\|^{1-\theta}_{q,\Omega}, \tag{3}$$

где i, k – любые натуральные числа и $r^{-1} = \theta p^{-1} + (1-\theta)q^{-1}$. Так как $\theta \in (0,1)$ и последний сомножитель в (3) ограничен, то $\|u_k - u_i\|_{r,\Omega} \to 0$ при $k, i \to \infty$.

Теорема доказана для пространства $L^l_p(\Omega)$. Те же рассуждения приводят к желаемому результату для пространств $W^l_p(\Omega)$ и $V^l_p(\Omega)$.

Другое доказательство теоремы 1 можно найти в [125, 1.10] и в[105]. Из теоремы 1 вытекает очевидное утверждение.

Следствие. *Если Ω – область в $\mathbf{R}^n$ конечного объема, то пространство $V^l_p(\Omega)$, $p > 1$, вполне непрерывно вложено в $V^{l-1}_q(\Omega)$ при любом $q \in [1, p)$.*

Следующая теорема показывает, что операторы сужения и вложения, упомянутые в замечаниях 1.7/1–2 (и непрерывные по теореме 1.7), вполне непрерывны при некоторых соотношениях между параметрами p, n, s, k, l, q.

Теорема 2. *Пусть* $p \geq 1$, $l = 1, 2, \ldots$, $0 \leq k \leq l-1$. *Предположим, что* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *– ограниченная область, которая является объединением конечного числа областей класса* EV_p^l.

1^o *Если* s *– такое целое число, что* $(l-k)p < n$, $n-(l-k)p < s \leq n$ *и* $1 \leq q < sp/(n-(l-k)p)$, *то оператор сужения*

$$V_p^l(\Omega) \ni u \mapsto u\big|_{\mathbf{R}^s\cap\Omega} \in V_q^k(\mathbf{R}^s \cap \Omega) \tag{4}$$

вполне непрерывен.

2^o *Если* $(l-k)p = n$, *то оператор* (4) *вполне непрерывен при любом* $q \in [1, \infty)$ *и* $s \leq n$.

3^o *Если* $(l-k)p > n$, *то пространство* $V_p^l(\Omega)$ *вполне непрерывно вложено в пространство* $C^k(\Omega) \cap V_\infty^k(\Omega)$ *с нормой* $\sum_{i=0}^k \sup_\Omega |\nabla_i u|$.

При $p > 1$ эта теорема была доказана В. И. Кондрашовым [26], а при $p = 1$ – Э. Гальярдо [102]. Ее доказательство можно также найти в книгах Р. А. Адамса [83, 6.1 – 6.7] и В. Г. Мазья [40, 1.4.6].

Отметим, что если $s = n$, а параметры p, l, k, q, n – те же, что и в пп. 1^o, 2^o, то заключение теоремы 2 следует из теоремы 1.7 и теоремы 1.

Замечание. Пусть параметры p, l, k, n, s удовлетворяют условиям 1^o теоремы 2. Если $q = sp/(n-(l-k)p)$, то оператор сужения $V_p^l(\Omega) \ni u \mapsto u\big|_{\mathbf{R}^s\cap\Omega}$ непрерывен как оператор: $V_p^l(\Omega) \to V_q^k(\mathbf{R}^s \cap \Omega)$ по теореме 1.7. Однако этот оператор не является вполне непрерывным. В самом деле, пусть Ω – произвольная область в $\mathbf{R}^n$, содержащая начало координат. Пусть $\eta \in C_0^\infty(B_2)$, $\eta = 1$ на B_1. Положим

$$v_i(x) = 2^{is/q} x_1^k \eta(2^i x), \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Тогда $v_i \in C_0^\infty(\Omega)$ для достаточно больших i, и без труда проверяется, что последовательность $\{v_i\}_{i\geq 1}$ ограничена в $V_p^l(\Omega)$. Если

$$A_i = \{x \in \mathbf{R}^n : 2^{-i-1} < |x| < 2^{-i}\}, \quad i \geq 1$$

и $j \geq i+2$, то

$$\|\nabla_k(v_i - v_j)\|_{L_q(\mathbf{R}^s\cap A_i)} = \|\nabla_k v_i\|_{L_q(\mathbf{R}^s\cap A_i)} \geq \mathrm{const} > 0.$$

Таким образом, последовательность $\{v_{2i}\}$ не имеет подпоследовательности, сходящейся в $V_q^k(\mathbf{R}^s \cap \Omega)$.

Глава 2

Продолжение функций, определенных в сингулярно возмущенных областях

Глава состоит из восьми разделов. В первых двух выводятся точные двусторонние оценки норм операторов продолжения внутрь и во внешность малой области. В разд. 2.3 получена асимптотика минимальной нормы оператора продолжения, переводящего функции из класса Соболева на малой области в класс Соболева на всем евклидовом пространстве. В разд. 2.4 исследуется оператор продолжения функций из внешности узкого цилиндрического слоя внутрь этого слоя. Следующий раздел носит вспомогательный характер. В нем изучаются свойства некоторого сглаживающего оператора, который используется в разд. 2.6 при построении оптимального оператора продолжения, переводящего функции из пространства Соболева на узком цилиндрическом слое в функции из пространства Соболева на более широком слое. В следующем разделе главы рассмотрены некоторые примеры областей, зависящих от малых параметров, и установлены двусторонние оценки норм соответствующих операторов продолжения. Наконец, в разделе 2.8 строится оптимальный оператор продолжения из пространства Соболева на малом тонком цилиндре – области, зависящей от двух малых параметров.

Полученные в настоящей главе теоремы о продолжении функций из малой области и тонкого цилиндра будут использованы в гл. 4 для построения продолжений функций во внешность области с вершиной пика на границе.

Перечислим некоторые результаты, полученные во второй главе. Здесь, в частности, устанавливаются двусторонние оценки норм произвольных операторов продолжения

$$E : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta), \quad \text{и} \quad F : V_p^l(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta), \tag{1}$$

где ε – малый положительный параметр, $0 < \delta \le \infty$,

$$\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon x : x \in \Omega\}, \quad G_\delta = \{\delta x : x \in G\}, \quad \overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta,$$

Ω и G – ограниченные области в $\mathbf{R}^n$, G содержит начало координат. В случае $\delta = \infty$ полагаем $G_\delta = \mathbf{R}^n$.

1^o. Пусть $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \in EV_p^l$ и пусть $\operatorname{dist}(\Omega_\varepsilon, \mathbf{R}^n \setminus G_\delta) \ge c\,\varepsilon$, где dist означает расстояние между множествами и $c > 0$ – постоянная, не зависящая от “сингулярных” параметров ε, δ. Тогда существует линейный оператор продолжения F, норма которого ограничена равномерно относительно ε, δ.

2^o. Если $\Omega \in EV_p^l$, то верно соотношение

$$\inf \|E\| \sim \begin{cases} \varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p}, \varepsilon^{n/p-l}\} & \text{при } lp < n, \\ \varepsilon^{-l} \min\{\delta^l, \, |\log \varepsilon|^{(1-p)/p}\} & \text{при } lp = n, \\ \varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p}, 1\} & \text{при } lp > n. \end{cases}$$

Символ $\sim$ означает эквивалентность, равномерную относительно ε, δ. При условии $\Omega \in EV_p^l$ в гл. 2 изучается также оператор продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ с минимальной нормой. В случае когда $(l-1)p < n$ получена асимптотика такой нормы при $\varepsilon \to +0$. В частности, показано, что если $p = 2$, $l = 1$, $n \ge 3$, то любой оператор продолжения $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию

$$\|\mathcal{E}\| \ge \left(\frac{s_n (n-2) \operatorname{cap} \Omega}{\operatorname{mes}_n(\Omega)} \right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon},$$

и существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E}$, для которого

$$\|\mathcal{E}\| \le \left(\frac{s_n (n-2) \operatorname{cap} \Omega}{\operatorname{mes}_n(\Omega)} \right)^{1/2} \frac{1 + o(1)}{\varepsilon}.$$

Здесь s_n – площадь сферы S^{n-1}, cap – емкость Винера в $\mathbf{R}^n$ и $o(1)$ – положительная бесконечно малая при $\varepsilon \to +0$.

Аналогичные результаты доказаны для операторов продолжения во внешность и внутрь тонкого цилиндрического слоя. Положим

$$\Omega_\varepsilon = \left\{(y,z) \in \mathbf{R}^{n+s} : y/\varepsilon \in \omega \subset \mathbf{R}^n,\ z \in \mathbf{R}^s\right\},$$

$$G_\delta = \left\{(y,z) \in \mathbf{R}^{n+s} : y/\delta \in g \subset \mathbf{R}^n,\ z \in \mathbf{R}^s\right\},$$

где ω – ограниченная липшицева область и g – ограниченная область, содержащая начало координат. Пусть ε означает малый положительный параметр, $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$, и пусть E, F – произвольные операторы продолжения, указанные в (1). Тогда приведенные выше утверждения 1^o и 2^o верны и для цилиндрических слоев Ω_ε, G_δ.

2.1 Продолжение внутрь малой области

В этом разделе доказывается существование оператора продолжения: $V_p^l(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$ с нормой, ограниченной равномерно относительно ε, δ. Здесь $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, ε – малый параметр, $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$, $\Omega_\varepsilon = \{\varepsilon x : x \in \Omega\}$, $G_\delta = \{\delta x : x \in G\}$, Ω и G – ограниченные области в $\mathbf{R}^n$. Через c обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от n, p, l, Ω, G. Если $X \subset \mathbf{R}^n$ и $\lambda \in \mathbf{R}^1$, то $\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$. Для краткости будем писать $\|\cdot\|_{p,l,G}$ вместо $\|\cdot\|_{V_p^l(G)}$.

2.1.1 Обобщенное неравенство Пуанкаре для областей из EV_p^l

Сформулируем сначала следующую версию теоремы 1.5.2 для пространства $V_p^l(\Omega)$, где Ω является конечной суммой областей из EV_p^l (см. определение 1.6).

Лемма. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа ограниченных областей класса EV_p^l. Если $F(v)$ – такая непрерывная полунорма в $V_p^l(\Omega)$, что $F(P) \neq 0$ для любого ненулевого полинома $P \in \mathcal{P}_{l-1}$, то норма в $V_p^l(\Omega)$ эквивалентна норме $F(v) + \|\nabla_l v\|_{p,\Omega}$.*

Доказательство. Требуется проверить неравенство

$$\|v\|_{p,l,\Omega} \le c\,(F(v) + \|\nabla_l v\|_{p,\Omega}) \tag{1}$$

для произвольной функции $v \in V_p^l(\Omega)$. Если (1) не имеет места, то существует последовательность $\{v_k\}_{k\geq 1} \subset V_p^l(\Omega)$, для которой $\|v_k\|_{p,l,\Omega} = 1$ и

$$F(v_k) + \|\nabla_l v_k\|_{p,\Omega} < 1/k, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2}$$

По лемме 1.8 существует ее подпоследовательность (не уменьшая общности, считаем, что это сама последовательность $\{v_k\}$), сходящаяся в $V_p^{l-1}(\Omega)$. Обозначим через v предел v_k в $V_p^{l-1}(\Omega)$. В силу (2) имеем $v_k \to v$ в $V_p^l(\Omega)$ и $v \in \mathcal{P}_{l-1}$. Кроме того, $F(v) = 0$ ввиду непрерывности F, и значит, $v = 0$. Однако это противоречит условию $\|v_k\|_{p,l,\Omega} = 1$. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает такое утверждение.

Следствие. *Пусть Ω – та же область, что и в лемме, $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$, $\varepsilon \in (0,\infty)$. Тогда существует линейное отображение*

$$V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni v \mapsto P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{l-1},$$

для которого

$$\|\nabla_s(v - P_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \leq c\,\varepsilon^{l-s}\|\nabla_l v\|_{p,\Omega_\varepsilon} \tag{3}$$

при всех $s = 0, 1, \dots, l-1$ и $v \in V_p^l(\Omega)$.

Доказательство. Проверим, что можно положить

$$P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \sum_{|\alpha|<l} \frac{1}{\alpha!} \int_{\Omega_\varepsilon} D^\alpha v(y)(x-y)^\alpha \psi(y/\varepsilon)dy,$$

где $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\int \psi dx = 1$.

Достаточно рассмотреть случай $\varepsilon = 1$. Поскольку отображение $v \mapsto P_1$ является непрерывным проектором $V_p^l(\Omega)$ на подпространство $\mathcal{P}_{l-1}$ (см. пример 1.5.2/1), то в предыдущей лемме можно выбрать $F(v) = \|P_1\|_{p,\Omega}$. Требуемый результат вытекает из той же леммы с помощью замены v на $v - P_1$.

2.1.2 Продолжение функций из одной малой области на другую

Сначала сформулируем простое утверждение о продолжении с растяжением, которое будем часто использовать в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область класса EV_p^l при некоторых $l = 1, 2, \ldots$ и $p \in [1, \infty]$. Если $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$, $\varepsilon \in (0, \infty)$, то существует линейный оператор продолжения $E_\varepsilon : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$, такой, что оценка*

$$\|\nabla_j (E_\varepsilon u)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c \sum\nolimits_{k=0}^{l} \varepsilon^{k-j} \|\nabla_k u\|_{p,\Omega_\varepsilon} \tag{1}$$

верна при всех $u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$ и $j = 0, 1, \ldots, l$.

Доказательство. По определению 1.6 существует линейный непрерывный оператор продолжения $E : V_p^l(\Omega) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$. Легко видеть, что требуемый оператор продолжения может быть задан формулой

$$E_\varepsilon u = \big(E(u \circ \Phi)\big) \circ \Phi^{-1}, \text{ где } \Phi : \mathbf{R}^n \ni x \mapsto \varepsilon x. \tag{2}$$

При этом постоянная c в (1) совпадает с постоянной в неравенстве

$$\|\nabla_j E v\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\, \|v\|_{p,l,\Omega}.$$

Замечание. Пусть Ω удовлетворяет условиям теоремы 1.6/2 и пусть E означает оператор продолжения по Стейну из Ω в $\mathbf{R}^n$. Поскольку E является ограниченным оператором: $V_p^j(\Omega) \to V_p^j(\mathbf{R}^n)$ для любого неотрицательного целого j, то верна оценка

$$\|\nabla_j (E_\varepsilon u)\|_p \le c\,(j, p, n, \Omega) \sum\nolimits_{k=0}^{j} \varepsilon^{k-j} \|\nabla_k u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

где оператор E_ε определяется формулой (2).

Установим еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть G – область в $\mathbf{R}^n$ с компактным замыканием и Ω – ее подобласть класса EV_p^l. Тогда для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ существует линейный оператор продолжения: $V_p^l(\varepsilon\,\Omega) \to V_p^l(\varepsilon\, G)$ с нормой, ограниченной равномерно относительно ε.*

Доказательство. Пусть $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$, $G_\varepsilon = \varepsilon\, G$. Предположим, что $E_\varepsilon : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ – линейный оператор продолжения, для которого верна оценка (1) при $j = 0, 1, \ldots, l$. Рассмотрим еще линейное отображение

$$V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni v \mapsto P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{l-1},$$

удовлетворяющее условию (2.1.1/3). Положим

$$\mathcal{E} v = P_\varepsilon + E_\varepsilon(v - P_\varepsilon), \quad v \in V_p^l(\Omega_\varepsilon).$$

Тогда $\mathcal{E}$ является оператором продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\varepsilon)$. В силу (2.1.1/3) и (1) имеем

$$\|\nabla_k E_\varepsilon(v - P_\varepsilon)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\,\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l v\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad 0 \le k \le l.$$

Используя оценку

$$\|Q\|_{p,G_\varepsilon} \le c\,\|Q\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad Q \in \mathcal{P}_{l-1},$$

получим, что

$$\|\nabla_k P_\varepsilon\|_{p,G_\varepsilon} \le c\,\|\nabla_k P_\varepsilon\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le$$

$$\le c\left(\|\nabla_k v\|_{p,\Omega_\varepsilon} + \varepsilon^{l-k}\|\nabla_l v\|_{p,\Omega_\varepsilon}\right), \quad 0 \le k < l.$$

Итак, $\mathcal{E}$ – требуемый оператор продолжения.

Заметим, что если $\Omega \in C^{0,1}$, то заключение леммы 2 справедливо для всех $\varepsilon \in (0,\infty)$. В самом деле, существование линейного оператора продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\varepsilon),\ \varepsilon \ge 1$, с условием $\|\mathcal{E}\| \le c$ следует из приведенного выше замечания.

2.1.3 Оператор продолжения: $V_p^l(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$ с равномерно ограниченной нормой

Пусть Ω и G – ограниченные области в $\mathbf{R}^n$ $(n \ge 2)$. Предположим, что G содержит начало координат. Пусть $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$, $G_\delta = \delta\,G$, где $\varepsilon \in (0,1/2)$ и $\delta > 0$. Случай $\delta = \infty$ также не исключается; по определению $G_\infty = \mathbf{R}^n$. Будем называть Ω_ε *малой областью.*

Теорема. *Пусть Ω односвязна и $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \in EV_p^l$ при некоторых $p \in [1,\infty]$ и $l = 1,2,\dots$ Предположим, что Ω_ε – малая область, $\Omega_\varepsilon \subset G_\delta$ и $\operatorname{dist}(\Omega_\varepsilon, \partial G_\delta) \ge c\,\varepsilon$. Тогда существует линейный оператор продолжения: $V_p^l(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$, норма которого ограничена равномерно относительно ε, δ.*

Доказательство. В силу условий теоремы $\operatorname{dist}(\Omega, \partial G_{\delta\varepsilon^{-1}}) \ge c$. Поэтому существует область $g \subseteq \mathbf{R}^n$ с компактным замыканием и гладкой границей, такая, что $\overline{\Omega} \subset g$, $\overline{g} \subset G_{\delta\varepsilon^{-1}}$ и g не зависит от параметров ε, δ. Заметим, что $g \setminus \overline{\Omega} \in EV_p^l$ и положим $g_\varepsilon = \varepsilon g$. Так как $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset g_\varepsilon \subset G_\delta$, то достаточно построить линейный оператор продолжения: $V_p^l(g_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(g_\varepsilon)$ с нормой, ограниченной равномерно относительно ε. Ссылка на лемму 2.1.2/2 завершает доказательство.

2.2 Внешность малой области

В этом разделе даются двусторонние оценки нормы оператора продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$, где Ω_ε – малая область. Мы сохраняем обозначения, введенные в предыдущем разделе. Эквивалентность $a \sim b$ положительных величин означает, что их отношение ограничено сверху и снизу положительными постоянными, не зависящими от “сингулярных” параметров ε, δ.

2.2.1 Оценки для функций, заданных в шаре

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченая область и пусть $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$. Предположим, что $\Omega_\varepsilon \subset B_\delta$. В настоящем разделе мы установим некоторые зависящие от ε, δ оценки для функций из $L_p^l(B_\delta)$. Эти оценки будут использованы в разд. 2.2.2, а также в главе 4.

Лемма. *Пусть $\Omega_\varepsilon \subset B_\delta$. Если $u \in L_p^l(B_\delta)$ и $u(x) \geq 1$ при почти всех $x \in \Omega_\varepsilon$, то*

$$\varepsilon^{lp-n}\|\nabla_l u\|_{p,B_\delta}^p + \delta^{-n}\|u\|_{p,B_\delta}^p \geq c, \quad lp < n, \tag{1}$$

и

$$|\log(\delta\varepsilon^{-1})|^{p-1}\|\nabla_l u\|_{p,B_\delta}^p + \delta^{-n}\|u\|_{p,B_\delta}^p \geq c, \quad lp = n. \tag{2}$$

Доказательство. Положим $\varrho = 2\sup_{x\in\Omega}|x|$. Если $\delta \leq \varepsilon\max\{\varrho, 2\}$, то

$$\delta^{-n}\|u\|_{p,B_\delta}^p \geq (\max\{\varrho,2\}\,\varepsilon)^{-n}\,\|u\|_{p,\Omega_\varepsilon}^p \geq c,$$

и оценки (1), (2) верны.

Пусть $\delta > \varepsilon\max\{\varrho, 2\}$. В этом случае $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset \overline{B}_{\varrho\varepsilon/2} \subset \overline{B}_{\varrho\varepsilon} \subset B_\delta$. Воспользуемся интегральным представлением Соболева для функций в шаре B_δ, согласно которому (см. С. Л. Соболев [69, § 7], В. Г. Мазья [40, 1.1.10])

$$u(x) = Q(x) + \sum\nolimits_{|\alpha|=l}\int_{B_\delta}\frac{f_\alpha(x,y)}{|x-y|^{n-l}}D^\alpha u(y)dy, \quad x \in B_\delta,$$

где Q – полином из $\mathcal{P}_{l-1}$ вида

$$Q(x) = \delta^{-n}\sum\nolimits_{|\gamma|<l}\left(\frac{x}{\delta}\right)^\gamma\int_{B_{\delta/2}}\phi_\gamma(y/\delta)u(y)dy, \tag{3}$$

$\phi_\gamma \in C_0^\infty(B_{1/2})$ – некоторые стандартные функции при $|\gamma| \leq l-1$, а f_α при $|\alpha| = l$ являются гладкими функциями аргументов x, y, ограниченными равномерно относительно x, y, δ.

Интегрируя неравенство

$$c \le |Q(x)|^p + \sum\nolimits_{|\alpha|=l} \left(\int_{B_\delta} \frac{|D^\alpha u(y)| dy}{|x-y|^{n-l}} \right)^p, \quad x \in \Omega_\varepsilon,$$

придем к оценке

$$c\,\varepsilon^n \le \|Q\|^p_{p,\Omega_\varepsilon} + \sum\nolimits_{|\alpha|=l} \int_{\Omega_\varepsilon} dx \left(\int_{B_\delta} \frac{|D^\alpha u(y)| dy}{|x-y|^{n-l}} \right)^p. \tag{4}$$

Применение неравенства Гёльдера к каждому интегралу в (3) дает

$$|Q(x)|^p \le c\,\delta^{-n} \|u\|^p_{p,B_{\delta/2}}, \quad x \in B_\delta.$$

Отсюда

$$\|Q\|^p_{p,\Omega_\varepsilon} \le c_1 \varepsilon^n \|Q\|^p_{\infty,B_\delta} \le c_2 (\varepsilon/\delta)^n \|u\|^p_{p,B_{\delta/2}}. \tag{5}$$

Чтобы оценить сумму в (4), зафиксируем мультииндекс α, $|\alpha| = l$, положим $v = |D^\alpha u|$ и оценим отдельно интегралы

$$I_1 = \int_{\Omega_\varepsilon} dx \left(\int_{B_{\varrho\varepsilon}} \frac{v(y)dy}{|x-y|^{n-l}} \right)^p, \;\; I_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} dx \left(\int_{B_\delta \setminus B_{\varrho\varepsilon}} \frac{v(y)dy}{|x-y|^{n-l}} \right)^p.$$

Во внутреннем интеграле I_1 доопределим $v(y)$ нулем при $|y| \ge \varrho\varepsilon$, сделаем замену $y - x = z$, а затем применим неравенство Минковского. Тогда

$$I_1^{1/p} \le \int_{B_{2\varrho\varepsilon}} \frac{dz}{|z|^{n-l}} \|v(\cdot + z)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\,\varepsilon^l \|v\|_{p,B_\delta}. \tag{6}$$

Для оценки I_2 рассмотрим сначала случай $p > 1$. Заметим, что $|y - x| \ge |y|/2$ при $x \in \Omega_\varepsilon$, $y \in B_\delta \setminus B_{\varrho\varepsilon}$. Используя неравенство Гёльдера, получим

$$I_2 \le c\,\varepsilon^n \|v\|^p_{p,B_\delta} \left(\int_{B_\delta \setminus B_{\varrho\varepsilon}} |y|^{(l-n)p/(p-1)} dy \right)^{p-1},$$

откуда

$$I_2 \le \begin{cases} c\,\varepsilon^{lp} \|v\|^p_{p,B_\delta}, & lp < n, \\ c\,\varepsilon^n \left(\log \frac{\delta}{\varrho\varepsilon}\right)^{p-1} \|v\|^p_{p,B_\delta}, & lp = n. \end{cases} \tag{7}$$

Последняя оценка справедлива и при $p = 1$. В самом деле, если $y \in B_\delta \setminus B_{\varrho\varepsilon}$, $x \in \Omega_\varepsilon$, то $|y-x| \geq c\,\varepsilon$, и подынтегральная функция во внутреннем интеграле I_2 не превосходит $c\,\varepsilon^{l-n}v(y)$. Таким образом,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} dx \int_{B_\delta \setminus B_{\varrho\varepsilon}} \frac{v(y)dy}{|x-y|^{n-l}} \leq c\,\varepsilon^l \|v\|_{1,B_\delta}, \quad l \leq n.$$

Теперь оценки (1) и (2) следуют из (4) – (7). Лемма доказана.

2.2.2 Оценки нормы оператора продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$

Формулируемое ниже утверждение является основным результатом раздела 2.2.

Теорема. *Пусть $\Omega_\varepsilon \subset \mathbf{R}^n$ – малая область и пусть $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$. Предположим, что $\Omega \in EV_p^l$ при некоторых $p \in [1, \infty]$ и $l = 1, 2, \ldots$ Верно соотношение*

$$\inf \|\mathcal{E}\| \sim \begin{cases} \varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p},\ \varepsilon^{n/p-l}\} & \text{при } lp < n, \\ \varepsilon^{-l} \min\{\delta^l, |\log \varepsilon|^{(1-p)/p}\} & \text{при } lp = n, \\ \varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p}, 1\} & \text{при } lp > n, \end{cases}$$

где $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$ – произвольный линейный оператор продолжения.

Доказательству теоремы предпошлем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область класса EV_p^l и $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_\delta$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Тогда существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(B_\delta)$, норма которого удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathcal{E}\| \leq c\,\varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p}, 1\}. \tag{1}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать $\overline{\Omega} \subset B_1$ (в противном случае мы запишем $\Omega_\varepsilon = (\varrho^{-1}\Omega)_{\varrho\varepsilon}$ при $\overline{\Omega} \subset B_\varrho$ и используем $\varrho^{-1}\Omega$ вместо Ω). В силу следствия 2.1.1 существует такое линейное отображение

$$V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni u \mapsto P_\varepsilon \in \mathcal{P}_{l-1},$$

что

$$\|\nabla_j(u - P_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \leq c\,\varepsilon^{l-j} \|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad 0 \leq j \leq l. \tag{2}$$

При $\delta \le 1$ оператор продолжения $\mathcal{E}^{(1)} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(B_\delta)$, определим формулой

$$\mathcal{E}^{(1)}u = P_\varepsilon + E_\varepsilon(u - P_\varepsilon), \tag{3}$$

где $E_\varepsilon : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ – линейный оператор продолжения, построенный в лемме 2.1.2/1. Проверим оценку

$$\|\mathcal{E}^{(1)}u\|_{p,l,B_\delta} \le c\,(\delta\varepsilon^{-1})^{n/p}\|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}, \quad u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon). \tag{4}$$

Из (2.1.2/1) и (2) следует, что

$$\|\nabla_s E_\varepsilon(u - P_\varepsilon)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\,\varepsilon^{l-s}\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad 0 \le s \le l. \tag{5}$$

Оценим величину $\|P_\varepsilon\|_{p,l,B_\delta}$. С этой целью зафиксируем мультииндекс α, $|\alpha| = s \le l-1$, и заметим, что

$$\|D^\alpha P_\varepsilon\|_{p,B_\delta} \le c\,\delta^{n/p}\sum\nolimits_{|\gamma|\le l-1-s}\delta^{|\gamma|}|D^{\alpha+\gamma}P_\varepsilon(0)|/\gamma!.$$

Поскольку

$$|Q(0)| \le c\,\varepsilon^{-n/p}\|Q\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad Q \in \mathcal{P}_{l-1},$$

то

$$\|D^\alpha P_\varepsilon\|_{p,B_\delta} \le c\,(\delta\varepsilon^{-1})^{n/p}\sum\nolimits_{|\gamma|\le l-1-s}\|D^{\alpha+\gamma}P_\varepsilon\|_{p,\Omega_\varepsilon}.$$

Общий член последней суммы не превосходит

$$\|D^{\alpha+\gamma}u\|_{p,\Omega_\varepsilon} + \|D^{\alpha+\gamma}(u - P_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon}.$$

Отсюда и из (2) получаем

$$\|\nabla_s P_\varepsilon\|_{p,B_\delta} \le c\,(\delta\varepsilon^{-1})^{n/p}\sum\nolimits_{j=s}^{l}\|\nabla_j u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad s \le l-1. \tag{6}$$

Оценки (5) и (6) приводят к (4).

Пусть $1 < \delta \le \infty$. Введем срезающую функцию $\eta \in C_0^\infty(B_1)$, $\eta\big|_{B_{1/2}} = 1$, и положим

$$\mathcal{E}^{(2)}u = \eta P_\varepsilon + E_\varepsilon(u - P_\varepsilon), \quad u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon),$$

где P_ε и E_ε имеют тот же смысл, что и выше. По предположению $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_\varepsilon \subset B_{1/2}$, значит, $\mathcal{E}^{(2)}$ есть линейный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, оценки (6) (при $\delta = 1$) и (5) приводят к неравенству

$$\|\mathcal{E}^{(2)}u\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le c\,\varepsilon^{-n/p}\|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}.$$

Определим $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)}$ при $\delta \le 1$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(2)}$ при $\delta > 1$. Тогда верна оценка (1). Доказательство леммы 1 закончено.

Лемма 2. *Пусть Ω – ограниченная область класса EV_p^l и пусть $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_\delta$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$. При $lp < n$ существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(B_\delta)$, норма которого удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathcal{E}\| \le c \min\left\{(\delta\varepsilon^{-1})^{n/p},\ \varepsilon^{-l}\right\}. \tag{7}$$

В случае $lp = n$ существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(B_\delta)$, для которого

$$\|\mathcal{E}\| \le c\,\varepsilon^{-l} \min\left\{\delta^l, |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\right\}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть E_ε и $\mathcal{E}^{(1)}$ – операторы, введенные при доказательстве леммы 1. Заметим, что из (2.1.2/1) следует оценка

$$\|E_\varepsilon u\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le c\,\varepsilon^{-l}\|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}, \quad u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon). \tag{9}$$

Положим $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)}$, если $\delta^n \le \varepsilon^{n-lp}$ и $\mathcal{E} = E_\varepsilon$ в противном случае. Объединяя (4) и (9), приходим к (7).

Обращаясь к случаю $lp = n$, мы построим сначала линейный оператор продолжения

$$\mathcal{E}^{(3)} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n),$$

такой, что

$$\|\mathcal{E}^{(3)}\| \le c\,\varepsilon^{-l}|\log\varepsilon|^{(1-p)/p}. \tag{10}$$

Достаточно считать $\overline{\Omega} \subset B_1$. Пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\varphi(t) = 0$ при $t \le 1/3$, $\varphi(t) = 1$ при $t \ge 2/3$. Положим

$$(\mathcal{E}^{(3)}u)(x) = \overline{u}_\varepsilon\, w(x) + \left(E_\varepsilon(u - \overline{u}_\varepsilon)\right)(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

где

$$w(x) = \varphi(\log|x|/\log\varepsilon), \tag{11}$$

$u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$ и $\overline{u}_\varepsilon$ – среднее значение u на Ω_ε. Поскольку $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ и $w|_{B_\varepsilon} = 1$, то $\mathcal{E}^{(3)}u|_{\Omega_\varepsilon} = u$. Отметим, что $w \in C_0^\infty(B_1)$ и, значит,

$$\|w\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le c\,\|\nabla_l v\|_{p,B_1}.$$

Отсюда

$$\|w\|^p_{p,l,\mathbf{R}^n} \le c\,|\log\varepsilon|^{-p}\int_{B_1\setminus B_\varepsilon} |x|^{-lp}dx \le c\,|\log\varepsilon|^{1-p}. \tag{12}$$

Объединяя (2.1.2/1), (12) и оценки

$$|\overline{u}_\varepsilon|(\,\mathrm{mes}_n(\Omega_\varepsilon))^{1/p} \le \|u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \tag{13}$$

$$\|u-\overline{u}_\varepsilon\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le c\,\varepsilon\,\|\nabla u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \tag{14}$$

приходим к неравенству

$$c\,\varepsilon^l\|\mathcal{E}^{(3)}u\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\|u\|_{p,\Omega_\varepsilon} + \varepsilon \sum\nolimits_{s=1}^{l} \|\nabla_s u\|_{p,\Omega_\varepsilon}.$$

Таким образом, верна оценка (10). Положим

$$\mathcal{E} = \begin{cases} \mathcal{E}^{(3)}, & \text{если } \ \delta^n > \min\{1, |\log\varepsilon|^{1-p}\}, \\ \mathcal{E}^{(1)} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\mathcal{E}^{(1)}$ определяется в (3). Тогда в силу (4) и (10) справедлива оценка (8). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) = \inf\left\{\|u\|_{p,l,G_\delta} : u \in V_p^l(G_\delta),\ u=1 \text{ п.в. } \Omega_\varepsilon\right\}.$$

Так как

$$\|\mathcal{E}\| \ge \Lambda(\varepsilon,\delta)/\,[\mathrm{mes}\,(\Omega_\varepsilon)]^{1/p}, \tag{15}$$

то требуемая нижняя оценка нормы оператора $\mathcal{E}$ является следствием доказываемого далее неравенства

$$c\,\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge \begin{cases} \min\{\delta^{n/p}, \varepsilon^{n/p-l}\} \ \text{ при } \ lp<n, \\ \min\{\delta^l,\ |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\} \ \text{ при } \ lp=n, \\ \min\{\delta^{n/p}, 1\} \ \text{ при } \ lp>n. \end{cases} \tag{16}$$

Зафиксируем положительное число r_0, удовлетворяющее условию $\overline{B}_{r_0} \subset G$ (напомним, что G содержит начало координат). Рассмотрим сначала случай $\overline{\Omega}_\varepsilon \not\subset B_{r_0\delta}$. Здесь мы очевидно имеем $\varepsilon \ge c\,\delta$. С другой стороны, из включения $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$ следует оценка $\varepsilon\,\mathrm{diam}\,(\Omega) \le \delta\,\mathrm{diam}\,(G)$. Таким образом, $\varepsilon \sim \delta$, и правая часть в (16) эквивалентна $\varepsilon^{n/p}$ при $\varepsilon \in (0,1/2)$. В то же время

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge [\,\mathrm{mes}\,(\Omega_\varepsilon)]^{1/p} \sim \varepsilon^{n/p},$$

откуда вытекает (16).

Обратимся к проверке (16) при условии $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_{r_0\delta}$. Зафиксируем такое положительное число r_1, что $\overline{\Omega} \subset B_{r_1}$. Если $r_1\varepsilon \ge r_0\delta$, то ε и δ

сравнимы, и в этом случае неравенство (16) уже было установлено. Пусть $r_1\varepsilon < r_0\delta$. Без ограничения общности можно предположить $r_1 = r_0 = 1$. Тогда $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_\varepsilon \subset \overline{B}_\varepsilon \subset B_\delta \subset G_\delta$, и первое неравенство (16) является следствием леммы 2.2.1.

Для доказательства второго неравенства (16) рассмотрим два случая. Если $lp = n$, $\varepsilon < \delta \le 1$, то

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge \inf\{\|u\|_{p,l,B_\delta} : u\big|_{\Omega_\varepsilon} = 1\}, \tag{17}$$

и оценка

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge c \min\{\delta^l, |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\}$$

вытекает из леммы 2.1.4. Если $lp = n$, $\delta > 1$, то $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_1 \subset B_\delta$ при $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Ясно, что здесь

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge \inf\big\{\|u\|_{p,l,B_1} : u\big|_{\Omega_\varepsilon} = 1\big\}, \quad \delta > 1. \tag{18}$$

Применяя лемму 2.2.1 к функции $u \in V_p^l(B_1)$, $u|_{\Omega_\varepsilon} = 1$, получим

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge c\,|\log\varepsilon|^{(1-p)/p}.$$

Итак, второе неравенство (16) установлено.

Обращаясь к случаю $pl > n$, $\delta > 1$, мы вновь используем (18). В силу соболевского вложения $V_p^l(B_1) \subset L_\infty(B_1)$ инфимум в (18) ограничен снизу положительной постоянной, зависящей только от n, l, p, так что $\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge c$. Если $\varepsilon < \delta \le 1$, $lp > n$, то верна оценка (17). Преобразование подобия $y = x/\delta \in B_1$, $x \in B_\delta$ приводит к неравенству

$$\Lambda(\varepsilon,\delta) \ge \delta^{n/p} \inf\big\{\|v\|_{p,l,B_1} : v\big|_{\Omega_{\varepsilon/\delta}} = 1\big\},$$

правая часть которого не меньше $c\,\delta^{n/p}$ в силу упомянутого выше соболевского вложения. Неравенство (16) и требуемая нижняя оценка для $\|\mathcal{E}\|$ доказаны.

Получим верхнюю оценку для $\|\mathcal{E}\|$. Зафиксируем такое положительное число r, что $\overline{G} \subset B_r$. Согласно леммам 1 и 2 существует оператор продолжения

$$\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(B_{r\delta}),$$

для нормы которого верно неравенство (1), (7) или (8). Поскольку $\overline{G}_\delta \subset B_{r\delta}$, то тот же оператор $\mathcal{E}$ является оператором продолжения:

$V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$, норма которого мажорируется величиной, эквивалентной правой части сформулированного в теореме соотношения. Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Доказанная теорема допускает более короткую, но менее явную формулировку. Именно

$$\inf \|\mathcal{E}\| \sim \varepsilon^{-n/p} \left[\operatorname{cap} \left(\overline{\Omega}_\varepsilon; V_p^l(G_\delta) \right) \right]^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{19}$$

где $\mathcal{E}$ – произвольный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$ и

$$\operatorname{cap} \left(F; V_p^l(D) \right) = \inf \left\{ \|u\|_{p,l,D}^p : \ u \in C^\infty(D), \ u\big|_F \ge 1 \right\}$$

для открытого множества D и относительно замкнутого $F \subset D$.

Соотношение (19) вытекает из доказанной выше теоремы и следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть Ω и G – ограниченные области в $\mathbf{R}^n$, причем G содержит начало координат. Если*

$$\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega, \ \ G_\delta = \delta\,G, \ \ \varepsilon \in (0, 1/2), \ \ 0 < \delta \le \infty, \ \ \overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta,$$

то величина

$$\Gamma(\varepsilon, \delta) = \left[\operatorname{cap} (\overline{\Omega}_\varepsilon; \, V_p^l(G_\delta)) \right]^{1/p}$$

эквивалентна правой части неравенства (16).

Доказательство. Повторяя рассуждения, приводящие к неравенству (16), убедимся, что правая часть (16) не превосходит $c\,\Gamma(\varepsilon, \delta)$. Обратное неравенство устанавливается путем выбора подходящей пробной функции $u \in V_p^l(G_\delta) \cap C^\infty(G_\delta)$, удовлетворяющей условию $u|_{\overline{\Omega}_\varepsilon} = 1$. Будем для определенности считать, что $\overline{\Omega} \subset B_1$. Пусть

$$\eta \in C_0^\infty(B_1), \ \ \eta\big|_\Omega = 1, \quad \psi \in C_0^\infty(B_1), \ \ \psi\big|_{B_{1/2}} = 1,$$

и пусть w – функция, определенная в (11). Тогда одна из функций

$$u = 1, \ \ G_\delta \ni x \mapsto u(x) = \eta(x/\varepsilon), \ \ u = w \ \text{ или } \ u = \psi$$

может служить в качестве требуемой пробной функции.

2.3 Наилучший оператор продолжения из малой области

Мы сохраняем обозначения, введенные в предыдущих разделах. Как было отмечено в теореме 2.2.2, для любого оператора продолжения

$$\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$$

выполнено неравенство (2.2.2/15). Здесь мы показываем, что в случае $(l-1)p < n$ и $\delta = \infty$ оператор $\mathcal{E}$ может быть построен так, чтобы его норма удовлетворяла обратному неравенству с точностью до множителя $1+o(1)$ в правой части. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть Ω_ε – малая область, полученная сжатием ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\Omega \in EV_p^l$. Тогда норма любого оператора продолжения*

$$\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\mathcal{E}\| \geq \Lambda_\varepsilon |\Omega_\varepsilon|^{-1/p},$$

а в случае $l-1 < n/p$ существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E}$, для которого

$$\|\mathcal{E}\| \leq (1+o(1))\, \Lambda_\varepsilon |\Omega_\varepsilon|^{-1/p}, \tag{1}$$

где $|\Omega_\varepsilon| = \mathrm{mes}_n(\Omega_\varepsilon)$, *$o(1)$ – положительная бесконечно малая при $\varepsilon \to +0$ и*

$$\Lambda_\varepsilon = \inf\left\{\|u\|_{p,l,\mathbf{R}^n} : u \in V_p^l(\mathbf{R}^n),\ u = 1 \text{ почти всюду в } \Omega_\varepsilon\right\}.$$

Доказательство. Проверить нужно только существование оператора $\mathcal{E}$, для которого выполнено неравенство (1). Рассмотрим функцию f со следующими свойствами:

$$f \in V_p^l(\mathbf{R}^n), \quad f\big|_{\Omega_\varepsilon} = 1, \quad \|f\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \leq (1+\varepsilon)\Lambda_\varepsilon.$$

Пусть $E_\varepsilon : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ – оператор продолжения, введенный в лемме 2.1.2/1. Положим

$$\mathcal{E}u = \overline{u}_\varepsilon\, f + E_\varepsilon(u - \overline{u}_\varepsilon),$$

где $u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$ и $\overline{u}_\varepsilon$ – среднее значение функции u на Ω_ε. Ясно, что $\mathcal{E}$ является линейным оператором продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$. Проверим оценку (1). Используя (2.2.2/14) и (2.1.2/1), получим

$$\|E_\varepsilon(u - \overline{u})\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le c\,\varepsilon^{1-l}\|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}.$$

Из этого неравенства и (2.2.2/13) выводим

$$\|\mathcal{E}\| \le (1+\varepsilon)\Lambda_\varepsilon|\Omega_\varepsilon|^{-1/p} + c\,\varepsilon^{1-l}. \tag{2}$$

Согласно теореме 2.2.2

$$\Lambda_\varepsilon \sim \begin{cases} \varepsilon^{-l+n/p} \ \text{ при } \ lp < n, \\ |\log\varepsilon|^{(1-p)/p} \ \text{ при } lp = n, \\ 1 \ \text{ при } \ 0 < l - n/p < 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{1-l}|\Omega_\varepsilon|^{1/p}\Lambda_\varepsilon^{-1} \to 0, \ \text{ если } \ \varepsilon \to +0.$$

Отсюда и из (2) вытекает (1). Более того, оценка (1) может быть уточнена следующим образом:

$$o(1) = \begin{cases} O(\varepsilon) \ \text{ при } \ lp < n, \\ O(\varepsilon|\log\varepsilon|^{(p-1)/p}) \ \text{ при } \ lp = n, \\ O(\varepsilon^{1-l+n/p}) \ \text{ при } \ 0 < l - n/p < 1. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство теоремы закончено.

Рассмотрим случай $p = 2, \ l = 1$ более детально. Нам понадобятся некоторые вспомогательные неравенства с малым положительным параметром.

Лемма 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная область, содержащая начало координат, и $\varepsilon > 0$. Если $u \in V_2^1(\mathbf{R}^2)$, $u|_\Omega = 1$ и $u(x) = 0$ при $|x| > \varepsilon^{-1}$, то*

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2)} \ge \frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}(1 - o(1)),$$

где $o(1)$ – положительная бесконечно малая при $\varepsilon \to +0$, не зависящая от u.

Доказательство. Зафиксируем такое $\varrho > 0$, что $\bar{B}_\varrho \subset \Omega$. Ясно, что

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2)} \ge \|\nabla u\|^2_{L_2(B_{1/\varepsilon}\setminus\bar{B}_\varrho)}.$$

Так как функция u удовлетворяет граничным условиям $u|_{\partial B_\varrho} = 1$, $u|_{\partial B_{1/\varepsilon}} = 0$, то правая часть последнего неравенства не меньше интеграла Дирихле от гармонической функции в кольце $B_{1/\varepsilon} \setminus \bar{B}_\varrho$, удовлетворяющей тем же граничным условиям. Упомянутая гармоническая функция равна

$$B_{1/\varepsilon} \setminus \bar{B}_\varrho \ni x \mapsto v(x) = \log(\varepsilon|x|)/\log(\varepsilon\varrho),$$

поэтому

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2)} \geq \|\nabla v\|^2_{L_2(B_{1/\varepsilon}\setminus\bar{B}_\varrho)} = \frac{2\pi}{|\log(\varepsilon\varrho)|} \geq \frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}(1 - o(1)).$$

Доказательство леммы закончено.

Лемма 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *– ограниченная область и* ε *– малый положительный параметр. Если* $v \in V_2^1(\mathbf{R}^2)$ *и* $v|_\Omega = 1$, *то справедливо неравенство*

$$\varepsilon^2\|v\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2)} + \|\nabla v\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2)} \geq \frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}(1 - o(1))$$

с положительной бесконечно мелой $o(1)$ *при* $\varepsilon \to +0$, *не зависящей от* v.

Доказательство. С помощью сдвига рассмотрение сводится к области, содержащей начало координат. Пусть

$$\sigma \in C_0^\infty(B_1), \quad \sigma\big|_{B_{1/2}} = 1, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Положим $\sigma_\varepsilon(x) = \sigma(\varepsilon x)$ и $u = \sigma_\varepsilon v$. Тогда $u|_\Omega = 1$ при достаточно малом ε, а также

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^2)} = \int \sigma_\varepsilon^2|\nabla v|^2 dx + \int v^2|\nabla\sigma_\varepsilon|^2 dx + \int \sigma_\varepsilon\nabla\sigma_\varepsilon\nabla(v^2)dx =$$

$$= \int \sigma_\varepsilon^2|\nabla v|^2 dx - \int \sigma_\varepsilon(\Delta\sigma_\varepsilon)v^2 dx.$$

Применяя лемму 1 к функции u, получим

$$c\,\varepsilon^2\int v^2 dx + \int |\nabla v|^2 dx \geq \frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}(1 - o(1)).$$

Для завершения доказательства остается заменить ε на $c^{-1/2}\varepsilon$ в последнем неравенстве.

Мы теперь сформулируем теорему об операторе продолжения: $V_2^1(\Omega_\varepsilon) \to V_2^1(\mathbf{R}^2)$ с минимальной нормой, где Ω_ε – малая область.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная область класса EV_2^1 с площадью $|\Omega|$ и $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$, где ε – малый положительный параметр. Тогда для любого оператора продолжения $\mathcal{E} : V_2^1(\Omega_\varepsilon) \to V_2^1(\mathbf{R}^2)$ верна оценка*

$$\|\mathcal{E}\| \geq \left(\frac{2\pi}{|\Omega|}\right)^{1/2} \frac{1-o(1)}{\varepsilon|\log\varepsilon|^{1/2}},$$

и существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E}$, для которого

$$\|\mathcal{E}\| \leq \left(\frac{2\pi}{|\Omega|}\right)^{1/2} \frac{1+o(1)}{\varepsilon|\log\varepsilon|^{1/2}}.$$

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно проверить неравенство

$$1 - o(1) \leq \Lambda_\varepsilon \left(|\log\varepsilon|/2\pi\right)^{1/2} \leq 1 + o(1). \tag{4}$$

Левое неравенство (4) выводится из леммы 2 с помощью преобразования подобия $x \mapsto \varepsilon x$.

Для проверки правого неравенства положим $\varrho = \sup\{|x| : x \in \Omega\}$ и определим пробную функцию $u \in V_2^1(\mathbf{R}^2)$ равенством

$$u(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ |x| \leq \varrho\varepsilon, \\ \log(\varrho^{-1}|x|)/\log\varepsilon \ \text{ при } \ \varrho\varepsilon < |x| < \varrho, \\ 0 \ \text{ при } \ |x| \geq \varrho. \end{cases}$$

Тогда $u|_{\Omega_\varepsilon} = 1$ и

$$\|u\|_{2,\mathbf{R}^2} + \|\nabla u\|_{2,\mathbf{R}^2} = (2\pi/|\log\varepsilon|)^{1/2} + O\big(|\log\varepsilon|^{-1}\big).$$

Отсюда вытекает требуемое неравенство. Теорема доказана.

Обратимся к многомерному случаю. Здесь "наилучший" оператор продолжения: $V_2^1(\Omega_\varepsilon) \to V_2^1(\mathbf{R}^n)$ будет охарактеризован в терминах емкости Винера (см. Ландкоф [31]). Для многомерной области Ω положим

$$\operatorname{cap}\Omega = s_n^{-1}(n-2)^{-1}\inf\left\{\|\nabla u\|^2_{L_2(\mathbf{R}^n)} :\ u \in V_2^1(\mathbf{R}^n),\ u\big|_\Omega = 1\right\},$$

где s_n – площадь сферы S^{n-1}.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ *– ограниченная область класса* EV_2^1, ε *– малый положительный параметр и* $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$. *Тогда для любого оператора продолжения* $\mathcal{E} : V_2^1(\Omega_\varepsilon) \to V_2^1(\mathbf{R}^n)$ *верна оценка*

$$\|\mathcal{E}\| \geq \left(\frac{s_n(n-2)\operatorname{cap}\Omega}{|\Omega|}\right)^{1/2} \frac{1}{\varepsilon},$$

где $|\Omega|$ *– объем* Ω, *и существует оператор продолжения* $\mathcal{E}$, *для которого*

$$\|\mathcal{E}\| \leq \left(\frac{s_n(n-2)\operatorname{cap}\Omega}{|\Omega|}\right)^{1/2} \frac{1+o(1)}{\varepsilon}.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно проверить неравенство

$$1 \leq \alpha^{-1}\varepsilon^{2-n}\Lambda_\varepsilon^2 \leq 1 + o(1),$$

где $\alpha = s_n(n-2)\operatorname{cap}\Omega$.

С помощью преобразования подобия найдем, что

$$\varepsilon^{2-n}\Lambda_\varepsilon^2 = \inf\Big\{ \big(\varepsilon\|u\|_{2,\mathbf{R}^n} + \|\nabla u\|_{2,\mathbf{R}^n}\big)^2 : \ u\big|_\Omega = 1\Big\}.$$

Отсюда $\varepsilon^{2-n}\Lambda_\varepsilon^2 \geq \alpha$ и, кроме того, $\varepsilon^{2-n}\Lambda_\varepsilon^2 \to \alpha$ при $\varepsilon \to +0$. Доказательство теоремы закончено.

2.4 Внутренность тонкого цилиндра

В настоящем разделе получены оценки нормы оператора продолжения:

$$V_p^l(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta),$$

где $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$, Ω_ε – тонкий цилиндрический слой ширины, сравнимой с ε и G_δ – цилиндрический слой ширины, сравнимой с δ.

2.4.1 Оператор продолжения с равномерно ограниченной нормой

Пусть ω и g – ограниченные области в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $\omega \in C^{0,1}$, а область g содержит начало координат. Положим $\omega_\varepsilon = \varepsilon\,\omega$, $g_\delta = \delta\,g$, где $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $0 < \delta \leq \infty$, $g_\infty = \mathbf{R}^n$. Пусть s – натуральное число. Положим

$$\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times \mathbf{R}^s \subset \mathbf{R}^{n+s}, \quad G_\delta = g_\delta \times \mathbf{R}^s \subset \mathbf{R}^{n+s}.$$

Далее через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от n, s, p, l, ω, g. Сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема. *Пусть область ω односвязна, $\overline{\omega}_\varepsilon \subset g_\delta$, и пусть*

$$\operatorname{dist}(\omega_\varepsilon, \mathbf{R}^n \setminus \overline{g}_\delta) \geq c\varepsilon.$$

Тогда для всех $1 \leq p \leq \infty$ и $l = 1, 2, \ldots$ существует линейный оператор продолжения: $V_p^l(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$, норма которого ограничена равномерно относительно ε, δ.

Доказательство. *Построение оператора продолжения.* Пусть d – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$, такая, что

$$\overline{\omega} \subset d \subset \overline{d} \subset g_{\delta/\varepsilon}$$

и d не зависит от параметров ε, δ. Полагая $d_\varepsilon = \varepsilon d$, рассмотрим цилиндрические слои

$$D_\varepsilon = d_\varepsilon \times \mathbf{R}^s, \quad T_\varepsilon = (d_\varepsilon \setminus \overline{\omega}_\varepsilon) \times \mathbf{R}^s.$$

Поскольку $\overline{\omega}_\varepsilon \subset d_\varepsilon \subset \overline{d}_\varepsilon \subset g_\delta$, то достаточно построить линейный оператор продолжения $E : V_p^l(T_\varepsilon) \to V_p^l(D_\varepsilon)$ с нормой, ограниченной равномерно относительно ε.

Пусть $\{\xi_j\}_{j \in \mathbf{Z}^s}$ означает гладкое разбиение единицы в $\mathbf{R}^s$, подчиненное покрытию $\{Q_j\}$, где

$$Q_j = \{z \in \mathbf{R}^s : \; |z_k - j_k| < 1, \; k = 1, \ldots, s\}, \quad j \in \mathbf{Z}^s.$$

Можно считать, что $|\nabla_r \xi_j| \leq c$ при $j \in \mathbf{Z}^s, \; r = 0, \ldots, l$. Положим

$$T^{(j)} = (d \setminus \overline{\omega}) \times Q_j \subset \mathbf{R}^{n+s}, \quad T_\varepsilon^{(j)} = \varepsilon T^{(j)}.$$

Отметим, что $T^{(j)} \in EV_p^l$ при всех $1 \leq p \leq \infty, \; l = 1, 2, \ldots$ (см. замечание 1.6/1 и теорему 1.6/2). По лемме 2.1.2/1 существует линейный оператор продолжения

$$E_\varepsilon^{(j)} : V_p^l(T_\varepsilon^{(j)}) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s}),$$

для которого

$$\|\nabla_k (E_\varepsilon^{(j)} f)\|_{p, \mathbf{R}^{n+s}} \leq c \sum\nolimits_{i=0}^{l} \varepsilon^{i-k} \|\nabla_i f\|_{p, T_\varepsilon^{(j)}} \tag{1}$$

при всех $f \in V_p^l(T_\varepsilon^{(j)})$ и $0 \le k \le l$.

В силу следствия 2.1.1 существует такое линейное отображение

$$V_p^l(T_\varepsilon^{(j)}) \ni u \mapsto P_{\varepsilon,j} \in \mathcal{P}_{l-1}^{(n+s)},$$

что

$$\|\nabla_k(u - P_{\varepsilon,j})\|_{p,T_\varepsilon^{(j)}} \le c\,\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,T_\varepsilon^{(j)}}, \quad 0 \le k \le l. \tag{2}$$

Определим отображение $V_p^l(T_\varepsilon) \ni u \mapsto Eu$ формулой

$$Eu = v + w, \tag{3}$$

где

$$v(x) = \sum\nolimits_{j \in \mathbf{Z}^s} \xi_j(z/\varepsilon)P_{\varepsilon,j}(x), \tag{4}$$

$$w(x) = \sum\nolimits_{j \in \mathbf{Z}^s} \xi_j(z/\varepsilon)\Big(E_\varepsilon^{(j)}(u_j - P_{\varepsilon,j})\Big)(x), \tag{5}$$

$$u_j = u\big|_{T_\varepsilon^{(j)}}, \quad x = (y,z), \quad y \in D_\varepsilon, \quad z \in \mathbf{R}^s.$$

Ясно, что отображение $u \mapsto Eu$ линейно и $Eu\big|_{T_\varepsilon} = u$.

Оценка нормы оператора продолжения. Установим неравенство

$$\|Eu\|_{p,l,D_\varepsilon} \le c\,\|u\|_{p,l,T_\varepsilon}, \quad u \in V_p^l(T_\varepsilon). \tag{6}$$

Пусть $\Gamma \subset \mathbf{Z}_+^s$ – множество мультииндексов, компонентами которых являются только два числа 0 или 1. Положим

$$\Pi_j = \big\{z \in \mathbf{R}^s : \; 0 < z_k - j_k < 1, \; k = 1, \dots, s\big\}, \quad j \in \mathbf{Z}^s.$$

Тогда

$$\sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma} \xi_{j+\gamma}(z) = 1, \quad z \in \Pi_j. \tag{7}$$

Объединяя (4) и (7), получим

$$v(x) = P_{\varepsilon,j}(x) + \sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma} \xi_{j+\gamma}(z/\varepsilon)\big(P_{\varepsilon,j+\gamma}(x) - P_{\varepsilon,j}(x)\big),$$

если

$$x = (y,z) \in D_\varepsilon^{(j)}, \quad D_\varepsilon^{(j)} = \varepsilon\,(d \times \Pi_j).$$

Отсюда

$$c\,\|\nabla_k v\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}} \le \|\nabla_k P_{\varepsilon,j}\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}} +$$

$$+ \sum\nolimits_{\gamma \in \Gamma} \sum\nolimits_{i=0}^{k} \varepsilon^{i-k}\|\nabla_i(P_{\varepsilon,j+\gamma} - P_{\varepsilon,j})\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}}, \quad k = 0, \dots, l. \tag{8}$$

Положим
$$S_\varepsilon^{(j)} = \{(y,z):\ y/\varepsilon \in d \setminus \overline{\omega},\ z/\varepsilon \in \Pi_j\}.$$
Так как
$$\|Q\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}} \le c\,\|Q\|_{p,S_\varepsilon^{(j)}}$$
для произвольного полинома $Q \in \mathcal{P}_{l-1}^{(n+s)}$, то в правой части (8) можно заменить $\|\cdot\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}}$ на $\|\cdot\|_{p,S_\varepsilon^{(j)}}$. Кроме того, справедливы оценки
$$\|\nabla_k P_{\varepsilon,j}\|_{p,S_\varepsilon^{(j)}} \le \|\nabla_k u\|_{p,T_\varepsilon^{(j)}} + \|\nabla_k(u - P_{\varepsilon,j})\|_{p,T_\varepsilon^{(j)}},$$
$$\|\nabla_i(P_{\varepsilon,j+\gamma} - P_{\varepsilon,j})\|_{p,S_\varepsilon^{(j)}} \le \sum\nolimits_{\beta=0,\gamma} \|\nabla_i(u - P_{\varepsilon,j+\beta})\|_{p,T_\varepsilon^{(j+\beta)}},$$
где $\gamma \in \Gamma$ (последняя оценка верна поскольку $S_\varepsilon^{(j)} \subset T_\varepsilon^{(j+\gamma)}$ для всех $\gamma \in \Gamma$). Таким образом,
$$c\,\|\nabla_k v\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}} \le\ \|\nabla_k u\|_{p,T_\varepsilon^{(j)}} +$$
$$+ \sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\ \sum\nolimits_{i=0}^{k} \varepsilon^{i-k} \|\nabla_i(u - P_{\varepsilon,j+\gamma})\|_{p,T_\varepsilon^{(j+\gamma)}}.$$
В силу (2) общий член последней суммы мажорируется величиной $c\,\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,T_\varepsilon^{(j+\gamma)}}$, и, значит,
$$c\,\|\nabla_k v\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}} \le \|\nabla_k u\|_{p,T_\varepsilon^{(j)}} + \sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma} \|\nabla_l u\|_{p,T_\varepsilon^{(j+\gamma)}}, \tag{9}$$
где $j \in \mathbf{Z}^s$, $k = 0, \ldots, l$. Так как кратность покрытия $\{T_\varepsilon^{(j)}\}$ зависит только от s, то из (9) следует, что
$$\|v\|_{p,l,D_\varepsilon} \le c\,\|v\|_{p,l,T_\varepsilon}. \tag{10}$$

Оценим теперь величину $\|w\|_{p,l,D_\varepsilon}$. Зафиксируем k, $k = 0, \ldots, l$. Объединяя (5) и (7), найдем, что
$$\|\nabla_k w\|_{p,D_\varepsilon^{(j)}} \le c \sum_{\gamma\in\Gamma}\ \sum_{m=0}^{k} \varepsilon^{m-k} \|\nabla_m E_\varepsilon^{(j+\gamma)}\big(u_{j+\gamma} - P_{\varepsilon,j+\gamma}\big)\|_{p,\mathbf{R}^{n+s}}.$$
Принимая во внимание (1) и (2), оценим сверху общий член последней суммы через
$$c\,\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,T_\varepsilon^{(j+\gamma)}}.$$
Следовательно,
$$\|w\|_{p,l,D_\varepsilon} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,T_\varepsilon}.$$
Из этой оценки и (10) выводим (6). Итак, оператор (3)–(5) есть требуемый оператор продолжения $E: V_p^l(T_\varepsilon) \to V_p^l(D_\varepsilon)$. Теорема доказана.

2.4.2 Случай $n = 1$

Случай $n = 1$ не охватывается предыдущей теоремой. Мы рассмотрим его отдельно.

Теорема. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *и пусть*

$$D_\varepsilon = (\mathbf{R}^1 \setminus [0, \varepsilon]) \times \mathbf{R}^s \subset \mathbf{R}^{s+1}.$$

(i) *Для любого оператора продолжения* $E : V_p^l(D_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{s+1})$ *справедлива оценка*

$$\|E\| \ge c\,\varepsilon^{-l+1/p}.$$

(ii) *Существует линейный оператор продолжения* E, *норма которого удовлетворяет обратному неравенству.*

Доказательство. (i) Пусть $x = (y, z)$ – точка в $\mathbf{R}^{s+1}$, где $y \in \mathbf{R}^1$, $z \in \mathbf{R}^s$. Введем функции $\varphi \in C_0^\infty(B_2^{(s)})$ и $\psi \in C^\infty(\varepsilon, \infty)$, такие, что

$$\varphi\big|_{B_1^{(s)}} = 1, \quad \psi\big|_{(\varepsilon,1)} = 1, \quad \psi\big|_{(2,\infty)} = 0.$$

Ясно, что функция

$$D_\varepsilon \ni x \mapsto u_0(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \;\; y < 0, \; z \in \mathbf{R}^s, \\ \varphi(z)\psi(y) \quad \text{при} \;\; y > \varepsilon, \; z \in \mathbf{R}^s, \end{cases}$$

принадлежит пространству $V_p^l(D_\varepsilon)$. Положим $v = Eu_0$. Тогда

$$\|E\| \ge \|v\|_{p,l,\mathbf{R}^{s+1}} / \|u_0\|_{p,l,D_\varepsilon}$$

и

$$\|E\| \ge c\biggl(\int_{B_1} dz \int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial^l v}{\partial y^l}(y,z)\right|^p dy\biggr)^{1/p}. \qquad (1)$$

Заметим, что

$$1 = v(\varepsilon, z) = \int_0^\varepsilon dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 \dots dy_{l-1} \int_0^{y_{l-1}} \frac{\partial^l v}{\partial y^l}(y,z)dy \le$$

$$\le \varepsilon^{l-1/p}\biggl(\int_0^\varepsilon \left|\frac{\partial^l v}{\partial y^l}(y,z)\right|^p dy\biggr)^{1/p}$$

для почти всех $z \in B_1$. Таким образом, правая часть в (1) не меньше, чем $c\,\varepsilon^{-l+1/p}$.

(ii) Пусть

$$D_\varepsilon^+ = \{x \in D_\varepsilon : \ y > \varepsilon\}, \quad D_\varepsilon^- = D_\varepsilon \setminus D_\varepsilon^+,$$

и пусть $u \in V_p^l(D_\varepsilon)$. Положим $u^+ = u|_{D_\varepsilon^+}$, $u^- = u|_{D_\varepsilon^-}$ и продолжим отдельно функции u^+, u^- на $\mathbf{R}^{s+1}$. С этой целью рассмотрим линейный оператор продолжения

$$E^+ : \ V_p^l(D_\varepsilon^+) \to V_p^l(\mathbf{R}^{s+1}),$$

норма которого ограничена равномерно относительно ε. Пусть еще $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $\xi(t) = 0$ при $t < 0$, $\xi(t) = 1$ при $t > 1$. Определим функцию

$$\mathbf{R}^{s+1} \ni (y, z) \mapsto v(y, z) = \xi(y/\varepsilon)(E^+ u^+)(y, z). \tag{2}$$

Очевидно, $v \in V_p^l(\mathbf{R}^{s+1})$, $v^- = 0$, $v^+ = u^+$. Проверим неравенство

$$\|v\|_{p,l,\mathbf{R}^{s+1}} \le c\,\varepsilon^{-l+1/p} \|u^+\|_{p,l,D_\varepsilon^+}. \tag{3}$$

Мы получим (3) как следствие оценки

$$\|v\|_{p,l,\Pi_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{-l+1/p} \|u^+\|_{p,l,D_\varepsilon^+},$$

где $\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^{s+1} : y \in (0, \varepsilon)\}$. Установим последнюю. Из (2) вытекает, что

$$\|\nabla_k v\|_{p,\Pi_\varepsilon} \le c \sum\nolimits_{i=0}^{k} \varepsilon^{i-k} \|\nabla_i (E^+ u^+)\|_{p,\Pi_\varepsilon}, \quad k \le l. \tag{4}$$

При $i = k = l$ соответствующее слагаемое не больше $c\,\|u^+\|_{p,l,D_\varepsilon^+}$. Если же $|\gamma| = i < l$, то при почти всех $y \in (0, \varepsilon)$ по теореме вложения Соболева имеем

$$\|(D^\gamma E^+ u^+)(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,\|E^+ u^+\|_{p,l,\mathbf{R}^{s+1}}.$$

Отсюда

$$\|\nabla_i E^+ u^+\|_{p,\Pi_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{1/p} \|u^+\|_{p,l,D_\varepsilon^+}.$$

Таким образом, сумма в (4) не превосходит правой части в (3), и тем самым оценка (3) доказана. Мы построили продолжение

$$V_p^l(D_\varepsilon^+) \ni u^+ \mapsto v \in V_p^l(\mathbf{R}^{s+1}),$$

такое, что $v^- = 0$ и верна оценка (3). Аналогично строится продолжение

$$V_p^l(D_\varepsilon^-) \ni u^- \mapsto w \in V_p^l(\mathbf{R}^{s+1}),$$

для которого $w^+ = 0$ и

$$\|w\|_{p,l,\mathbf{R}^{s+1}} \le c\,\varepsilon^{-l+1/p} \|u^-\|_{p,l,D_\varepsilon^-}.$$

Таким образом, требуемый оператор продолжения E можно задать формулой $Eu = v + w$. Доказательство теоремы закончено.

Отметим один специальный случай теоремы.

Следствие. *Существует линейный оператор продолжения*

$$E : V_1^1(D_\varepsilon) \to V_1^1(\mathbf{R}^{s+1}),$$

норма которого ограничена равномерно относительно ε.

2.5 Сглаживающий оператор

Пусть d – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и пусть $K \in C_0^\infty(\mathbf{R}^s)$. Для функции u, определенной в цилиндре $D = d \times \mathbf{R}^s \subset \mathbf{R}^{n+s}$, положим

$$(\mathcal{M}u)(x) = \int_{\mathbf{R}^s} K(t)u(y, z + |y|t)dt, \quad x = (y, z) \in D. \qquad (1)$$

Отображение $u \mapsto \mathcal{M}u$ будет использовано в следующем разделе при построении оператора продолжения из тонкого цилиндра в его внешность. Здесь мы изучим свойства отображения (1). В этом разделе через c обозначаются различные положительные постоянные, не зависящие от u, d и y.

Лемма 1. *Пусть l – натуральное число. Предположим, что*

$$\int K(t)t^\nu dt = 0 \qquad (2)$$

для всех мультииндексов $\nu \in \mathbf{Z}_+^s$, $|\nu| \le l - 1$. Если $u \in C^\infty(D)$, то верна оценка

$$\|D_y^\gamma(\mathcal{M}u)(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^{l-|\gamma|} \|(\nabla_l u)(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}, \qquad (3)$$

где $y \in d \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$, $|\gamma| \le l$, $p \ge 1$. Кроме того, если $n = 1$ и d содержит точку $y = 0$, то

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial^k}{\partial y^k}(\mathcal{M}u)(y, z) = 0, \quad k = 0, \dots, l - 1, \quad z \in \mathbf{R}^s. \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\gamma = 0$. Применяя формулу Тейлора к $u(y,\cdot)$ и используя (2), получаем

$$(\mathcal{M}u)(y,z) = l|y|^l \int K(t)dt \int_0^1 \sum_{|\alpha|=l} \frac{t^\alpha}{\alpha!}(D_z^\alpha u)(y, z+\tau|y|t)(t-\tau)^{l-1}d\tau.$$

В силу неравенства Минковского имеем

$$\|(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^l \|(\nabla_l u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s},$$

и, значит, оценка (3) верна для $\gamma = 0$.

Продолжим доказательство индукцией по l. Пусть $l = 1$. Легко видеть, что

$$\lim_{y\to 0}(\mathcal{M}u)(y,z) = (\mathcal{M}u)(0,z) = 0$$

при $n = 1$ и $z \in \mathbf{R}^s$. Кроме того,

$$\frac{\partial \mathcal{M}u}{\partial y_i} = \frac{y_i}{|y|}\sum\nolimits_{j=1}^s \int t_j K(t)\frac{\partial u}{\partial z_j}(y, z+|y|t)dt +$$

$$+\int K(t)\frac{\partial u}{\partial y_i}(y, z+|y|t)dt = \mathcal{M}u_{y_i} + \frac{y_i}{|y|}\sum\nolimits_{j=1}^s \mathcal{M}_j u_{z_j}, \qquad (5)$$

где $1 \le i \le n$ и $\mathcal{M}_j$ есть оператор вида (1) с ядром $K_j(t) = t_j K(t)$. Применение неравенства Минковского дает

$$\Big\|\frac{\partial \mathcal{M}u}{\partial y_i}(y,\cdot)\Big\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,\|\nabla u(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}.$$

Случай $l = 1$ исчерпан.

Пусть $l \ge 2$ и пусть утверждение леммы 1 справедливо для порядков не выше $l-1$. Проверим оценку (3) при $0 < |\gamma| \le l$. Заметим, что $D_y^\gamma = D_y^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i}$ при некотором $i = 1,\dots,n$ и $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$, $|\alpha| = |\gamma| - 1 \le l-1$. Принимая во внимание (5), находим

$$D_y^\gamma \mathcal{M}u = D_y^\alpha(\mathcal{M}u_{y_i}) + \sum\nolimits_{j=1}^s D_y^\alpha(y_i|y|^{-1}\mathcal{M}_j u_{z_j}). \qquad (6)$$

Для каждого слагаемого в последней сумме верна оценка

$$\big\|D_y^\alpha\big(y_i|y|^{-1}(\mathcal{M}_j u_{z_j})(y,\cdot)\big)\big\|_{p,\mathbf{R}^s} \le$$

$$\le c\sum\nolimits_{\delta\le\alpha} |y|^{|\delta|-|\alpha|}\|D_y^\delta(\mathcal{M}_j u_{z_j})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}. \qquad (7)$$

Неравенство $\delta \le \alpha$ означает, что $\delta_i \le \alpha_i$ при всех $i = 1, \dots, n$. Так как ядро K_j удовлетворяет условию (2) при $|\nu| \le l-2$, то применимо индукционное предположение по отношению к оператору $\mathcal{M}_j$ и функции u_{z_j}. Отсюда

$$\|D_y^\delta(\mathcal{M}_j u_{z_j})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^{l-1-|\delta|}\|(\nabla_{l-1}u_{z_j})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}.$$

Индукционное предположение применимо также к первому члену в правой части (6). Поэтому

$$\|D_y^\alpha(\mathcal{M}u_{y_i})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^{l-1-|\alpha|}\|(\nabla_{l-1}u_{y_i})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}.$$

Объединяя две последние оценки с (6) и (7), приходим к (3).

Пусть $n = 1$ и $0 \in d$. Проверим равенство (4) при $k = l-1$. Если $y > 0$, то из (6) следует

$$\frac{\partial^{l-1}\mathcal{M}u}{\partial y^{l-1}} = \frac{\partial^{l-2}\mathcal{M}u_y}{\partial y^{l-2}} + \sum\nolimits_{j=1}^{s}\frac{\partial^{l-2}\mathcal{M}_j u_{z_j}}{\partial y^{l-2}}.$$

При $y < 0$ знак $+$ в правой части нужно заменить на $-$. Теперь равенство

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial^{l-1}\mathcal{M}u}{\partial y^{l-1}}(y,z) = 0, \quad z \in \mathbf{R}^s,$$

вытекает из индукционного предположения относительно (4), примененного к u_y и u_{z_j}. Доказательстао леммы 1 закончено.

В следующей лемме устанавливается непрерывность оператора $\mathcal{M} : L_p^l(D) \to L_p^l(D)$ при некоторых условиях на ядро K.

Лемма 2. *Пусть равенство* (2) *выполнено для всех* $\nu \in \mathbf{Z}_+^s$, $1 \le |\nu| \le l-1$. *Тогда оператор* $L_p^l(D) \ni u \mapsto \mathcal{M}u \in L_p^l(D)$ *ограничен при* $1 \le p \le \infty$, *и верна оценка*

$$\|\nabla_l \mathcal{M}u\|_{p,D} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,D}, \quad u \in L_p^l(D). \tag{8}$$

Доказательство. Если $l = 0$, то (8) проверяется с помощью неравенства Минковского. То же неравенство приводит к непрерывности оператора $\mathcal{M} : L_{p,loc}(D) \to L_{p,loc}(D)$.

При $l \ge 1$ и $u \in C^\infty(D) \cap L_p^l(D)$ докажем оценку (8) индукцией по l. Пусть $l = 1$. Так как $\partial\mathcal{M}u/\partial z_j = \mathcal{M}(\partial u/\partial z_j)$ при $j = 1, \dots, s$ и имеет место (5), то для $n \ge 2$ требуемая оценка вытекает из непрерывности оператора $\mathcal{M}$ в $L_p(D)$. Если $n = 1$, то мы должны проверить абсолютную непрерывность функции

$$d = (a, b) \ni y \mapsto (\mathcal{M}u)(y, z), \quad \text{где} \quad z \in \mathbf{R}^s.$$

В проверке нуждается только случай $0 \in (a, b)$. Здесь функция $y \mapsto (\mathcal{M}u)(y, z)$ является гладкой при $y \neq 0$ и, кроме того,

$$\lim_{y \to -0} (\mathcal{M}u)(y, z) = \lim_{y \to +0} (\mathcal{M}u)(y, z) = u(0, z) \int K(t) dt.$$

Отсюда следует абсолютная непрерывность указанной функции, и тем самым случай $l = 1$ исчерпан.

Пусть $l \geq 2$ и пусть включение $\mathcal{M}u \in L_p^k(D)$ и неравенство (8) (с заменой l на k) верны для всех $k \leq l - 1$ и всех $u \in C^\infty(D) \cap L_p^k(D)$. Докажем оценку (8) для $u \in C^\infty(D) \cap L_p^l(D)$. Заметим, что

$$D_y^\gamma D_z^\beta \mathcal{M}u = D_y^\gamma (\mathcal{M} D_z^\beta u), \tag{9}$$

где $y \neq 0$, $\beta \in \mathbf{Z}_+^s$, $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$.

Пусть $|\beta| + |\gamma| = l$. Если $\gamma = 0$, то

$$\|D_z^\beta \mathcal{M}u\|_{p,D} = \|\mathcal{M} D_z^\beta u\|_{p,D} \leq c \, \|\nabla_l u\|_{p,D}$$

в силу непрерывности оператора $\mathcal{M} : L_p(D) \to L_p(D)$. Предположим, что $0 < |\gamma| < l$. Тогда согласно (9) и индукционному предположению (примененному к $D_z^\beta u$) получим

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta \mathcal{M}u\|_{p,D} \leq c \, \|\nabla_{|\gamma|}(D^\beta u)\|_{p,D} \leq c \, \|\nabla_l u\|_{p,D}.$$

Пусть $|\beta| = 0$, $|\gamma| = l$ и пусть $D_y^\gamma = D_y^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i}$. Ввиду (6) и (7) верна оценка

$$\|D_y^\gamma (\mathcal{M}u)(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \leq \|D_y^\alpha (\mathcal{M}u_{y_i})(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} +$$

$$+ c \sum\nolimits_{j=1}^{s} \sum\nolimits_{\delta \leq \alpha} |y|^{|\delta| - |\alpha|} \|D_y^\delta (\mathcal{M}_j u_{z_j})(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s},$$

где $\mathcal{M}_j$ имеет тот же смысл, что и в (5). Заметим, что ядро K_j оператора $\mathcal{M}_j$ удовлетворяет условию (2) при $0 \leq |\nu| \leq l-2$. Следовательно, лемма 1 применима к $\mathcal{M}_j$ и функции u_{z_j}. Таким образом, общий член в последней сумме не превосходит $\|(\nabla_{l-1} u_{z_j})(y, \cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}$. Интегрируя по $y \in d$, приходим к оценке

$$\|D^\gamma \mathcal{M}u\|_{p,D} \leq \|D^\alpha \mathcal{M}u_{y_i}\|_{p,D} + c \, \|\nabla_l u\|_{p,D}.$$

Согласно индукционному предположению, первое слагаемое в правой части не больше $c\|\nabla_{l-1}u_{y_i}\|_{p,D}$. Отсюда вытекает оценка (8) для гладких функций.

В случае $n=1$ и $0\in d$ требуется установить равенство

$$\lim_{y\to -0}\frac{\partial^{l-1}\mathcal{M}u}{\partial y^{l-1}}(y,z)=\lim_{y\to +0}\frac{\partial^{l-1}\mathcal{M}u}{\partial y^{l-1}}(y,z),\quad z\in\mathbf{R}^s. \tag{10}$$

В самом деле, пусть $y>0$. Объединяя (5) и (6), получим

$$\frac{\partial^{l-1}}{\partial y^{l-1}}\mathcal{M}u=\frac{\partial^{l-2}}{\partial y^{l-2}}\mathcal{M}u_y+\sum\nolimits_{j=1}^{s}\frac{\partial^{l-2}}{\partial y^{l-2}}\mathcal{M}_j u_{z_j}. \tag{11}$$

В случае $y<0$ знак $+$ в правой части следует заменить на $-$. По лемме 1 (примененной к $\mathcal{M}_j$ и u_{z_j}, $j=1,\dots,s$) сумма в правой части (11) стремится к нулю при $y\to 0$. Поэтому левая часть (10) равна

$$\lim_{y\to -0}\frac{\partial^{l-2}\mathcal{M}u_y}{\partial y^{l-2}}(y,z),$$

в то время как правая часть равна

$$\lim_{y\to +0}\frac{\partial^{l-2}\mathcal{M}u_y}{\partial y^{l-2}}(y,z).$$

Последние два предела совпадают в силу индукционного предположения, примененного к u_y.

Включение $\mathcal{M}u\in L_p^l(D)$ и оценка (8) доказаны для произвольной глакой функции $u\in L_p^l(D)$. Так как гладкие функции плотны в $L_p^l(D)$ при $p<\infty$ и оператор $\mathcal{M}: L_{p,loc}(D)\to L_{p,loc}(D)$ непрерывен, то указанное включение и неравенство (8) верны для всех функций $u\in L_p^l(D)$, $p<\infty$.

Чтобы установить (8) при $p=\infty$, следует повторить предыдущие рассуждения для $u\in L_\infty^l(D)$. Доказательство леммы 2 закончено.

В формулируемой ниже лемме 3 приводятся оценки разности $u-\mathcal{M}u$ в случае когда K является усредняющим ядром (ср. 1.2.1).

Лемма 3. *Пусть l – натуральное число и пусть условие* (2) *выполнено для всех ν, $1\le|\nu|\le l-1$. Предположим, что $\int K(t)dt=1$. Тогда справедлива оценка*

$$\|\nabla_k(\mathcal{M}u-u)\|_{p,D}\le c\,r^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,D}, \tag{12}$$

где $0 \le k \le l$, $r = \sup\{|y| : y \in d\}$ *и* u *– произвольная функция из* $L_p^l(D)$.

Доказательство. Пусть $u \in C^\infty(D) \cap L_p^l(D)$. Применяя формулу Тейлора к $u(y,\cdot)$, найдем, что

$$\big|(\mathcal{M}u)(y,z) - u(y,z)\big| = \left|\int K(t)\big(u(y,z+|y|t) - u(y,z)\big)dt\right| \le$$

$$\le c\,|y|^l \int \big|K(t)\big|dt \int_0^1 \sum\nolimits_{|\beta|=l} \big|(D_z^\beta u)(y,z+|y|\tau t)\big|\, d\tau.$$

Неравенство Минковского приводит к оценке

$$\|\mathcal{M}u - u\|_{p,D} \le c\,r^l \|\nabla_l u\|_{p,D}. \tag{13}$$

Продолжим доказательство индукцией по l. Пусть $l = 1$. При $k = 0$ неравенство (12) вытекает из (13). Если $k = 1$, то (12) следует из леммы 2. Оценка (12) в случае $l = 1$ установлена.

Пусть $l \ge 2$ и пусть утверждение леммы 3 верно для порядков не выше $l-1$. Предположим, что мультииндексы $\beta \in \mathbf{Z}_+^s$, $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$ удовлетворяют условиям $|\beta| > 0$, $|\beta| + |\gamma| = k \le l$. Тогда

$$D_y^\gamma\, D_z^\beta(\mathcal{M}u - u) = D_y^\gamma(\mathcal{M}D_z^\beta u - D_z^\beta u).$$

Индукционное предположение, примененное к $\mathcal{M}$ и $D_z^\beta u$, приводит к неравенству

$$\|D^\beta\, D^\gamma(\mathcal{M}u - u)\|_{p,D} \le c\,r^{l-|\beta|-|\gamma|}\|\nabla_{l-|\beta|} D^\beta u\|_{p,D}.$$

В случае $|\beta| = 0$, $0 < |\gamma| = k \le l$ положим $D_y^\gamma = D_y^\alpha \frac{\partial}{\partial y_i}$ при некотором $i = 1, \ldots, n$. Из (6) следует, что

$$\|D^\gamma(\mathcal{M}u - u)\|_{p,D} \le$$

$$\le \|D^\alpha(\mathcal{M}u_{y_i} - u_{y_i})\|_{p,D} + \sum\nolimits_{j=1}^s \|D^\alpha(y_i|y|^{-1}\mathcal{M}_j u_{z_j})\|_{p,D}, \tag{14}$$

где $\mathcal{M}_j$ – оператор вида (1) с ядром $K_j(t) = t_j K(t)$. Чтобы оценить общий член суммы в (14), мы используем неравенство (7), а затем применим лемму 1 к $\mathcal{M}_j$ и u_{z_j}. В результате упомянутый общий член оценим сверху через

$$c\,r^{l-1-|\alpha|}\|\nabla_{l-1} u_{z_j}\|_{p,D}.$$

Кроме того, по индукционному предположению имеем

$$\|D^\alpha(\mathcal{M}u_{y_i} - u_{y_i})\|_{p,D} \le c\, r^{l-1-|\alpha|} \|\nabla_{l-1} u_{y_i}\|_{p,D},$$

и, значит,

$$\|D^\gamma(\mathcal{M}u - u)\|_{p,D} \le c\, r^{l-k} \|\nabla_l u\|_{p,D}.$$

Доказательство оценки (12) для гладких функций закончено. В силу плотности гладких функций в $L^l_p(D)$, $p < \infty$, и ввиду непрерывности отображения $u \mapsto \mathcal{M}u$ в $L_{p,loc}(D)$, неравенство (12) верно для всех $u \in L^l_p(D)$, $p < \infty$, и $0 \le k \le l$.

Для проверки (12) при $p = \infty$ следует повторить рассуждения леммы 3 для функции $u \in L^l_\infty(D)$.

В доказываемых ниже леммах 4 и 5 изучаются свойства оператора (1), действующего на функции u, не зависящие от y. В этом случае можно считать, что функции u определены на $\mathbf{R}^s$.

Лемма 4. *Пусть $u \in L_p(\mathbf{R}^s)$, $p \ge 1$. Тогда при всех $\gamma \in \mathbf{Z}^n_+$ и $y \in B^{(n)}_1 \setminus \{0\}$ верна оценка*

$$\|D^\gamma_y(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^{-|\gamma|} \|u\|_{p,\mathbf{R}^s}. \tag{15}$$

Доказательство. Если $|\gamma| = 0$, то (15) является следствием неравенства Минковского. Пусть $|\gamma| = 1$. Тогда при $i = 1, \dots, n$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\mathcal{M}u = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|y|^s}\int K\left(\frac{t-z}{|y|}\right) u(t)dt\right) =$$

$$= -\frac{y_i}{|y|^2}\big(s\mathcal{M}u + \tilde{\mathcal{M}}u\big), \tag{16}$$

где $\tilde{\mathcal{M}}$ – оператор вида (1) с ядром

$$\tilde{K}(t) = \sum\nolimits_{j=1}^{s} t_j K_{t_j}(t).$$

Вновь используя неравенство Минковского, получим оценку (15) при $|\gamma| = 1$.

Пусть $k \ge 2$ и пусть (15) имеет место для всех производных D^γ_y порядков $|\gamma| \le k-1$. Если $|\gamma| = k$, то $D^\gamma_y = D^\alpha_y \frac{\partial}{\partial y_i}$ при некотором $i = 1, \dots, n$. Принимая во внимание (16), найдем, что

$$\|D^\gamma_y(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le$$

$$\le c \sum\nolimits_{\delta\le\alpha} |y|^{|\delta|-\alpha-1}\Big[\|D_y^\delta(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} + \|D_y^\delta(\tilde{\mathcal{M}}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}\Big].$$

Применяя индукционное предположение к каждому слагаемому в квадратных скобках, приходим к (15). Лемма доказана.

Следующая лемма уточняет оценку (15), если ядро K оператора $\mathcal{M}$ имеет нулевые моменты порядков $1,\dots,l-1$.

Лемма 5. *Допустим, что условие* (2) *выполнено для всех* $\nu\in\mathbf{Z}^s_+$, $1\le|\nu|\le l-1$. *Тогда*

$$\|D_y^\gamma(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^{l-|\gamma|}\|\nabla_l u\|_{p,\mathbf{R}^s}, \tag{17}$$

где $y\in B_1^{(n)}\setminus\{0\}$, $\gamma\in\mathbf{Z}^n_+$, $|\gamma|\ge l\ge 0$ *и* u *– произвольная функция из* $L^l_p(\mathbf{R}^s)$.

Доказательство. Установим (17) индукцией по l. Если $l=0$, то (17) следует из леммы 4. Пусть $l\ge 1$. Предположим, что неравенство

$$\|D_y^\beta(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,|y|^{l-1-|\beta|}\|\nabla_{l-1} u\|_{p,\mathbf{R}^s}$$

имеет место для $u\in L^{l-1}_p(\mathbf{R}^s)$, $|\beta|\ge l-1$, если ядро оператора $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (2) при $1\le|\nu|\le l-2$.

Пусть $|\gamma|\ge l$. Тогда $D^\gamma_y = D^\alpha_y\frac{\partial}{\partial y_i}$ при некотором $i=1,\dots,n$. Имеем

$$\|D_y^\gamma(\mathcal{M}u)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} = \bigg\|D^\alpha_y\bigg(\frac{y_i}{|y|}\sum\nolimits_{j=1}^{s}(\mathcal{M}_j u_{z_j})(y,\cdot)\bigg)\bigg\|_{p,\mathbf{R}^s} \le$$
$$\le c\,\big(S_1+S_2\big), \tag{18}$$

где $\mathcal{M}_j$ – оператор вида (1) с ядром $K_j(t)=t_jK(t)$,

$$S_1=\sum\nolimits_{j=1}^{s}\ \sum\nolimits_{\delta\le\alpha,|\delta|\le l-1}|y|^{|\delta|-|\alpha|}\|D^\delta_y(\mathcal{M}_j u_{z_j})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s},$$

а S_2 – сумма с тем же общим членом для индексов $1\le j\le s$, $\delta\le\alpha$, $|\delta|\ge l$. Поскольку ядро K_j удовлетворяет условию (2) при $|\nu|\le l-2$, то при $|\delta|\le l-1$ верна оценка

$$\|D^\delta_y(\mathcal{M}_j u_{z_j})(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}\le c\,|y|^{l-1-|\delta|}\|\nabla_{l-1}u_{z_j}\|_{p,\mathbf{R}^s}. \tag{19}$$

Последняя доказывается так же, как неравенство (3) в лемме 1. По индукционному предположению (примененному к $\mathcal{M}_j$ и u_{z_j}) оценка (19) верна и при $|\delta|\ge l$. Теперь (17) следует из (18), (19). Доказательство леммы закончено.

2.6 Продолжение во внешность тонкого цилиндра

Цель настоящего раздела – получить двусторонние оценки нормы оператора продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$ из тонкого цилиндрического слоя на более широкий. Здесь $\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times \mathbf{R}^s$, $G_\delta = g_\delta \times \mathbf{R}^s$ – цилиндрические слои в $\mathbf{R}^{n+s}$, $\omega_\varepsilon = \varepsilon\,\omega$, $g_\delta = \delta\, g$, $\overline{\omega}_\varepsilon \subset g_\delta$, ω и g – ограниченные области в $\mathbf{R}^n$, $\omega \in C^{0,1}$, а область g содержит начало координат, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, $0 < \delta \le \infty$, $g_\infty = \mathbf{R}^n$. Для определенности мы далее предполагаем, что $\overline{\omega} \subset B_1^{(n)}$.

Точку $x \in \mathbf{R}^{n+s}$ будем записывать в виде $x = (y, z)$, где $y \in \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{R}^s$. Через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от l, n, s, p, g, ω. Соотношение $a \sim b$ означает, что $c^{-1} \le a/b \le c$. Как и выше, мы пишем для краткости $\|\cdot\|_{p,l,D}$ вместо $\|\cdot\|_{V_p^l(D)}$.

2.6.1 Три леммы о функциях в тонком цилиндре

Пусть $\psi \in C_0^\infty(\omega)$ и $\int \psi(y)dy = 1$. Каждой функции $u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$ поставим в соответствие функцию

$$Q_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}_+^n, |\gamma| < l} \frac{1}{\gamma!} \int_{\omega_\varepsilon} D_\xi^\gamma u(\xi, z)(y - \xi)^\gamma \psi(\xi/\varepsilon) d\xi, \qquad (1)$$

где $x = (y, z) \in \mathbf{R}^{n+s}$.

Пусть $K \in C_0^\infty(B_1^{(s)})$. Предположим, что $\int K(z)dz = 1$ и условие (2.5/2) выполнено для всех $\nu \in \mathbf{Z}_+^s$, $1 \le |\nu| \le l - 1$. Далее $\mathcal{M}$ означает оператор, заданный формулой (2.5/1) с ядром K.

Лемма 1. *Отображение $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni u \mapsto \mathcal{M}Q_\varepsilon$ является непрерывным линейным оператором: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$, $1 \le p \le \infty$, $g_\delta \subset B_1^{(n)}$. Более того, верна оценка*

$$\|\nabla_k(\mathcal{M}Q_\varepsilon)\|_{p,G_\delta} \le$$

$$\le c\,(\delta\varepsilon^{-1})^{n/p} \sum\nolimits_{i=k}^{l} \|\nabla_i u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad k = 0, \dots, l. \qquad (2)$$

Доказательство. Функция, определенная формулой (1), может быть представлена следующим образом:

$$Q_\varepsilon(y, z) = \varepsilon^{-n} \sum\nolimits_{|\gamma| < l} \left(\frac{y}{\varepsilon}\right)^\gamma \int_{\omega_\varepsilon} \psi_\gamma\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) u(\xi, z) d\xi,$$

где $\psi_\gamma \in C_0^\infty(\omega)$ и ψ_γ не зависят от u. Поэтому отображение

$$V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni u \mapsto Q_\varepsilon \in V_p^l(G_\delta)$$

непрерывно, и первое утверждение леммы следует из леммы 2.5/2.

Перейдем к проверке оценки (2). Для этого перепишем $Q_\varepsilon(x)$ в виде

$$Q_\varepsilon(x) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^n} \sum_{|\alpha|<l} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\varkappa \le \alpha} (-1)^{|\alpha-\varkappa|} \binom{\alpha}{\varkappa} y^\varkappa \int\limits_{\omega_\varepsilon} D_\xi^\alpha u(\xi, z) \xi^{\alpha-\varkappa} \psi\Big(\frac{\xi}{\varepsilon}\Big) d\xi.$$

Пусть f – функция, определенная в Ω_ε. При $\alpha, \varkappa \in \mathbf{Z}_+^n$, $\alpha \ge \varkappa$, положим

$$\varphi(\xi) = D^{\alpha-\varkappa}\big(\xi^{\alpha-\varkappa}\psi(\xi)\big)$$

и

$$(\Phi_{\alpha,\varkappa} f)(z) = \varepsilon^{-n} \int_{\omega_\varepsilon} f(\xi, z)\varphi(\xi/\varepsilon) d\xi. \tag{3}$$

Тогда

$$Q_\varepsilon(y, z) = \sum\nolimits_{|\alpha|<l} \frac{1}{\alpha!} \sum\nolimits_{\varkappa \le \alpha} \binom{\alpha}{\varkappa} y^\varkappa (\Phi_{\alpha,\varkappa} v)(z),$$

где

$$v(y, z) = (D_y^\varkappa u)(y, z).$$

Заметим, что при $\beta \in \mathbf{Z}_+^s$, $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$, $|\beta| + |\gamma| = k \le l$, справедлива оценка

$$\|D_y^\gamma D_z^\beta \mathcal{M} Q_\varepsilon\|_{p,G_\delta} \le$$

$$\le c \sum\nolimits_{|\alpha|<l} \sum\nolimits_{\varkappa \le \alpha} \|D_y^\gamma\big(y^\varkappa D_z^\beta \mathcal{M} \Phi_{\alpha,\varkappa} v\big)\|_{p,G_\delta}. \tag{4}$$

Чтобы оценить общий член последней суммы, мы рассмотрим три случая.

1. Пусть $|\varkappa| \le |\gamma|$. Тогда

$$D_z^\beta \mathcal{M} \Phi_{\alpha,\varkappa} v = \mathcal{M} \Phi_{\alpha,\varkappa}(D_z^\beta v) = \mathcal{M} \Phi_{\alpha,\varkappa}(D_y^\varkappa D_z^\beta u).$$

Полагая $w(z) = (\Phi_{\alpha,\varkappa} D_z^\beta v)(z)$, получаем при $y \in g_\delta \setminus \{0\}$

$$\|D_y^\gamma\big(y^\varkappa (\mathcal{M} w)(y, \cdot)\big)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le$$

$$\leq c \sum\nolimits_{\lambda \leq \gamma, \lambda \leq \varkappa} |y|^{|\varkappa| - |\lambda|} \| D_y^{\gamma - \lambda} (\mathcal{M} w)(y, \cdot) \|_{p, \mathbf{R}^s}.$$

Поскольку $w \in L_p^{|\gamma| - |\varkappa|}(\mathbf{R}^s)$, то из леммы 2.5/5 следует, что

$$\| D_y^\gamma \big(y^\varkappa (\mathcal{M} w)(y, \cdot) \big) \|_{p, \mathbf{R}^s} \leq c \, \| \nabla_{|\gamma| - |\varkappa|} w \|_{p, \mathbf{R}^s} \leq$$

$$\leq c \sum\nolimits_{|\nu| = k} \| \Phi_{\alpha, \varkappa} (D^\nu u) \|_{p, \mathbf{R}^s} \leq$$

$$\leq c \, \varepsilon^{-n/p} \| \nabla_k u \|_{p, \Omega_\varepsilon}, \quad k = |\beta| + |\gamma|.$$

Здесь $\nu \in \mathbf{Z}_+^{n+s}$ – мультииндекс длины k. Кроме того, было использовано неравенство

$$\Big| (\Phi_{\alpha, \varkappa} f)(z) \Big| \leq c \, \varepsilon^{-n/p} \| f(\cdot, z) \|_{p, \omega_\varepsilon}. \tag{5}$$

Интегрируя по $y \in g_\delta$, приходим к оценке

$$\big\| D_y^\gamma \left(y^\varkappa D_z^\beta \mathcal{M} \Phi_{\alpha, \varkappa} v \right) \big\|_{p, G_\delta} \leq c \, (\delta / \varepsilon)^{n/p} \| \nabla_k u \|_{p, \Omega_\varepsilon}. \tag{6}$$

2. Пусть $|\varkappa| > k = |\beta| + |\gamma|$. Положим $w(z) = \big(\Phi_{\alpha, \varkappa} v \big)(z)$ и обозначим через $\mathcal{M}'$ оператор вида (2.5/1) с ядром $D^\beta K$. Тогда

$$D^\beta \mathcal{M} w = \big(- |y|^{-|\beta|} \big) \mathcal{M}' w,$$

и мы имеем

$$\| D_y^\gamma \big(y^\varkappa (D_z^\beta \mathcal{M} w)(y, \cdot) \big) \|_{p, \mathbf{R}^s} \leq$$

$$\leq c \sum\nolimits_{\lambda \leq \gamma} \big| D_y^\lambda \big(|y|^{-|\beta|} y^\varkappa \big) \big| \| D_y^{\gamma - \lambda} \big(\mathcal{M}' w \big)(y, \cdot) \|_{p, \mathbf{R}^s} \leq$$

$$\leq c \sum\nolimits_{\lambda \leq \gamma} |y|^{|\varkappa| - |\beta| - |\lambda|} \| D_y^{\gamma - \lambda} \big(\mathcal{M}' w \big)(y, \cdot) \|_{p, \mathbf{R}^s}, \quad y \in g_\delta \setminus \{0\}.$$

По лемме 2.5/4 каждое слагаемое последней суммы не превосходит

$$c \, |y|^{|\varkappa| - k} \| w \|_{p, \mathbf{R}^s},$$

что, очевидно, не больше $c\,\|w\|_{p,\mathbf{R}^s}$ при $|y|<1$. В свою очередь, из (5) следует оценка

$$\|w\|_{p,\mathbf{R}^s} \le c\,\varepsilon^{-n/p}\|D^{\varkappa}u\|_{p,\Omega_\varepsilon}.$$

Интегрируя по $y \in g_\delta$, убедимся, что величина $c(\delta/\varepsilon)^{n/p}\|\nabla_{|\varkappa|}u\|_{p,\Omega_\varepsilon}$ является мажорантой для левой части в (6).

3. Пусть $|\gamma| < |\varkappa| \le k = |\beta| + |\gamma|$. Зафиксируем такой мультииндекс $\mu \in \mathbf{Z}_+^s$, что $\mu \le \beta$ и $|\mu|+|\varkappa| = k$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}$ оператор вида (2.5/1) с ядром $D^{\beta-\mu}K$. Тогда

$$D_z^\beta\big(\mathcal{M}\Phi_{\alpha,\varkappa}v\big) = D_z^{\beta-\mu}\mathcal{M}w = (-|y|)^{|\mu|-|\beta|}\tilde{\mathcal{M}}w, \quad y \in g_\delta \setminus \{0\},$$

где $w(z) = \big(\Phi_{\alpha,\varkappa}D_z^\mu v\big)(z)$. Таким образом,

$$\|D_y^\gamma\big(y^\varkappa\big(D^\beta\mathcal{M}\Phi_{\alpha,\varkappa}v\big)(y,\cdot)\big)\|_{p,\mathbf{R}^s} =$$

$$= \|D_y^\gamma\big(y^\varkappa|y|^{|\gamma|-|\varkappa|}\big(\tilde{\mathcal{M}}w\big)(y,\cdot)\big)\|_{p,\mathbf{R}^s} \le$$

$$\le c\sum\nolimits_{\lambda\le\gamma}|y|^{|\gamma|-|\lambda|}\|\big(D_y^{\gamma-\lambda}\tilde{\mathcal{M}}w\big)(y,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s}.$$

Применяя лемму 2.5/4 , оценим сверху каждое слагаемое в последней сумме величиной $c\,\|w\|_{p,\mathbf{R}^s}$, которая не больше

$$c\,\varepsilon^{-n/p}\|D_z^\mu D_y^\varkappa u\|_{p,\Omega_\varepsilon}$$

в силу (5). После интегрирования по $y \in g_\delta$ приходим к (6).

Итак, общий член суммы в (4) не превосходит правой части в (2). Доказательство леммы закончено.

В следующем утверждении приводится аналог обобщенного неравенства Пуанкаре для функций в тонком цилиндре.

Лемма 2. *Пусть $u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$ и пусть Q_ε – функция, определенная в (1). Тогда*

$$\|\nabla_i(u - Q_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{l-i}\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon} \tag{7}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, l-1$.

Доказательство. Достаточно установить (7) для $\varepsilon = 1$ а затем использовать преобразование подобия. При $\varepsilon = 1$ положим $P = P_1$, $\Omega = \Omega_1 = \omega \times \mathbf{R}^s$. Пусть

$$u \in V_p^l(\Omega), \quad \alpha \in \mathbf{Z}_+^n, \quad \beta \in \mathbf{Z}_+^s, \quad |\alpha| + |\beta| = i < l.$$

Тогда

$$D_y^\alpha D_z^\beta (u - P) = D_y^\alpha (D_z^\beta u - H) - \sum\nolimits_\gamma D_z^\beta S_\gamma, \tag{8}$$

где сумма распространяется на все мультииндексы $\gamma \in \mathbf{Z}_+^n$, такие, что $\gamma \geq \alpha$ и $l > |\gamma| \geq l - |\beta|$,

$$S_\gamma(y, z) = \frac{1}{(\gamma - \alpha)!} \int_\omega D_\xi^\gamma u(\xi, z)(y - \xi)^{\gamma - \alpha} \psi(\xi) d\xi,$$

$$H(y, z) = \sum_{|\gamma| \leq l - 1 - |\beta|} \frac{1}{\gamma!} \int_\omega D_\xi^\gamma D_z^\beta u(\xi, z)(y - \xi)^\gamma \psi(\xi) d\xi.$$

Заметим, что отображение

$$V_p^{l - |\beta|}(\omega) \ni v \mapsto \sum_{|\gamma| \leq l - 1 - |\beta|} \frac{1}{\gamma!} \int_\omega D^\gamma v(\xi)(y - \xi)^\gamma \psi(\xi) d\xi$$

является непрерывным проектором на $\mathcal{P}_{l - |\beta| - 1}^{(n)}$, и теорема 1.5.2 приводит к оценке

$$\|D^\alpha \big(D_z^\beta u(\cdot, z) - H(\cdot, z)\big)\|_{p,\omega} \leq c \left\| \big(\nabla'_{l - |\beta|} D_z^\beta u\big)(\cdot, z) \right\|_{p,\omega}.$$

Здесь $\nabla'_{l-|\beta|}$ означает градиент порядка $l - |\beta|$ по отношению к переменным $y_1, \ldots, y_n$. Интегрирование последнего неравенства по $z \in \mathbf{R}^s$ дает

$$\|D_y^\alpha (D_z^\beta u - H)\|_{p,\Omega} \leq c \, \|\nabla_l u\|_{p,\Omega}. \tag{9}$$

Для оценки величины $\| D^\beta S_\gamma \|_{p,\Omega}$ зафиксируем мультииндекс $\nu \in \mathbf{Z}_+^n$, $\alpha \leq \nu \leq \gamma$, $|\nu| = l - |\beta|$. Тогда

$$D_z^\beta S_\gamma(y, z) = \frac{(-1)^{|\gamma - \nu|}}{(\gamma - \alpha)!} \int_\omega D_\xi^\nu D_z^\beta u(\xi, z) D_\xi^{\gamma - \nu} \big((y - \xi)^{\gamma - \alpha} \psi(\xi)\big) d\xi.$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\|D^\beta S_\gamma\|_{p,\Omega} \le \int_\omega \|(\nabla_l u)(\xi,\cdot)\|_{p,\mathbf{R}^s} \|f(\xi,\cdot)\|_{p,\omega} d\xi,$$

где $f(\xi,y) = D_\xi^{\gamma-\nu}\big((y-\xi)^{\gamma-\alpha}\psi(\xi)\big)$. Поскольку $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, то второй сомножитель в подынтегральной функции ограничен равномерно относительно $\xi \in \omega$. Итак,

$$\|D^\beta S_\gamma\|_{p,\Omega} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (8) и (9), завершаем доказательство леммы.

Введем линейный оператор продолжения

$$E_\varepsilon : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s}),$$

удовлетворяющий условию

$$\|\nabla_k E_\varepsilon v\|_{p,\mathbf{R}^{n+s}} \le c \sum_{i=0}^{l} \varepsilon^{i-k} \|\nabla_i v\|_{p,\Omega_\varepsilon} \tag{10}$$

при всех $v \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$, $0 \le k \le l$ (см. лемму 2.1.2/1). В формулируемой ниже лемме 3 строится некоторый вспомогательный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$, используемый при доказательстве основного результата разд. 2.6.

Лемма 3. *Пусть $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$. Для любых $l = 1, 2, \ldots$ и $1 \le p \le \infty$ существует линейный оператор продолжения*

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta),$$

для которого

$$\|\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta}\| \le c\,\varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p}, 1\}.$$

Доказательство. Пусть $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni u \mapsto Q_\varepsilon$ и $Q_\varepsilon \mapsto \mathcal{M}Q_\varepsilon$ – отображения, введенные в начале настоящего раздела. Положим

$$\mathcal{E}_\varepsilon u = \mathcal{M}Q_\varepsilon + E_\varepsilon(u - \mathcal{M}Q_\varepsilon), \quad u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon),$$

где E_ε – оператор продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s})$, удовлетворяющий условию (10). Проверим, что

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon u\|_{p,l,G_\delta} \le c\,(\delta/\varepsilon)^{n/p} \|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}, \tag{11}$$

если $g_\delta \subset B_1^{(n)}$. Используя очевидное неравенство

$$\|\nabla_i(u-\mathcal{M}Q_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le$$

$$\le \|\nabla_i(u-\mathcal{M}u)\|_{p,\Omega_\varepsilon} + \|\nabla_i\mathcal{M}(u-Q_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon},$$

леммы 2.5/2–3 и лемму 2, получим оценку

$$\|\nabla_i(u-\mathcal{M}Q_\varepsilon)\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{l-i}\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \tag{12}$$

где $0 \le i \le l-1$. По лемме 1 оценка (12) верна также и при $i = l$. Объединяя (10) и (12), найдем, что

$$\|\nabla_k E_\varepsilon(u-\mathcal{M}Q_\varepsilon)\|_{p,\mathbf{R}^{n+s}} \le c\,\varepsilon^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \quad 0 \le k \le l. \tag{13}$$

Теперь (11) следует из (13) и леммы 1.

Введем линейный непрерывный оператор продолжения

$$E : V_p^l\big(B_1^{(n)} \times \mathbf{R}^s\big) \to V_p^l\big(\mathbf{R}^{n+s}\big).$$

Пусть $\mathcal{E}_\varepsilon^{(1)}u$ есть сужение функции $\mathcal{E}_\varepsilon u$ на цилиндр $B_1^{(n)} \times \mathbf{R}^s$. Тогда норма оператора продолжения

$$V_p^l(\Omega_\varepsilon) \ni u \mapsto E(\mathcal{E}_\varepsilon^{(1)}u) \in V_p^l(\mathbf{R}^{n+s})$$

не превосходит $c\,\varepsilon^{-n/p}$.

Положим $\delta_0 = (\sup\{|y| : y \in g\})^{-1}$. Требуемый оператор $\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta}$ можно определить следующим образом: $\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta} = \mathcal{E}_\varepsilon$, если $\delta < \delta_0$ и $\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta} = E\mathcal{E}_\varepsilon^{(1)}$, если $\delta \ge \delta_0$. Доказательство леммы 3 закончено.

Замечание. Пусть

$$\mathbf{R}_+^{n+s} = \big\{(y,z) : y \in \mathbf{R}^n,\ z \in \mathbf{R}^s,\ z_s > 0\big\}.$$

Оператор $\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta}$ в лемме 3 может быть построен так, чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta}u\big|_{G_\delta \cap \mathbf{R}_+^{n+s}} = 0, \quad \text{если} \quad u\big|_{\Omega_\varepsilon \cap \mathbf{R}_+^{n+s}} = 0.$$

Для этого нужно потребовать, чтобы ядро K оператора $\mathcal{M}$ удовлетворяло условию

$$\operatorname{supp} K \subset \{z \in B_1^{(s)} :\ z_s \ge 0\},$$

а кроме того, для операторов E_ε и E, участвующих в определении $\mathcal{E}_{\varepsilon,\delta}$, выполнялось требование

$$(Eu)(y,z) = (E_\varepsilon u)(y,z) = 0 \text{ при } z_s > 0, \text{ если } u(y,z) = 0 \text{ при } z_s > 0.$$

2.6.2 Оператор продолжения во внешность тонкого цилиндра

Мы сохраняем введенные выше обозначения. Следующая теорема является основным результатом раздела 2.6.

Теорема. *Пусть* $\overline{\omega}_\varepsilon \subset g_\delta$, $1 \le p \le \infty$, $l = 1, 2, \ldots$ *Верно соотношение*

$$\inf \|\mathcal{E}\| \sim \begin{cases} \varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p},\ \varepsilon^{-l+n/p}\} & \textit{при} \quad lp < n, \\ \varepsilon^{-l} \min\{\delta^{l},\ |\log \varepsilon|^{(1-p)/p}\} & \textit{при} \quad lp = n, \\ \varepsilon^{-n/p} \min\{\delta^{n/p},\ 1\} & \textit{при} \quad lp > n, \end{cases}$$

где $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta)$ – *произвольный линейный оператор продолжения.*

Доказательство. Сначала проверим оценку

$$\|\mathcal{E}\| \ge \Lambda_n(\varepsilon, \delta) |\omega_\varepsilon|^{-1/p}, \tag{1}$$

где $|\omega_\varepsilon| = \mathrm{mes}_n(\omega_\varepsilon)$ и

$$\Lambda_n(\varepsilon, \delta) = \inf\{\|u\|_{p,l,g_\delta} :\ u \in V_p^l(g_\delta),\ u\big|_{\omega_\varepsilon} = 1\}.$$

Пусть $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^s)$, $\eta \not\equiv 0$. Зафиксируем $\varrho > 0$ и положим

$$v_\varrho(x) = \varrho^{s/p} \eta(\varrho z), \quad x = (y, z) \in \Omega_\varepsilon.$$

Тогда при почти всех $z \in \mathbf{R}^s$ имеем

$$\|(\mathcal{E} v_\varrho)(\cdot, z)\|_{p,l,g_\delta} \ge \Lambda_n(\varepsilon, \delta) \varrho^{s/p} |\eta(\varrho z)|.$$

Отсюда

$$\|\mathcal{E} v_\varrho\|_{p,l,G_\delta} \ge \Lambda_n(\varepsilon, \delta) \|\eta\|_{p,\mathbf{R}^s}.$$

Поскольку

$$\|\mathcal{E}\| \ge \|\mathcal{E} v_\varrho\|_{p,l,G_\delta} / \|v_\varrho\|_{p,l,\Omega_\varepsilon},$$

то

$$\|\mathcal{E}\| \ge \frac{\Lambda_n(\varepsilon, \delta)}{(\mathrm{mes}_n(\omega_\varepsilon))^{1/p}} \ \frac{\|\eta\|_{p,\mathbf{R}^s}}{\sum_{k=0}^{l} \varrho^k \|\nabla_k \eta\|_{p,\mathbf{R}^s}}.$$

Оценка (1) получается предельным переходом при $\varrho \to +0$ в последнем неравенстве. Теперь требуемая оценка снизу для $\|\mathcal{E}\|$ вытекает из соотношения

$$\Lambda_n(\varepsilon,\delta) \sim \begin{cases} \min\{\delta^{n/p},\ \varepsilon^{n/p-l}\} & \text{при} \quad lp < n, \\ \min\{\delta^l, |\log\,\varepsilon|^{(1-p)/p}\} & \text{при} \quad lp = n, \\ \min\{\delta^{n/p}, 1\} & \text{при} \quad lp > n, \end{cases} \tag{2}$$

доказанного в теореме 2.2.2.

Получим требуемую оценку сверху для $\|\mathcal{E}\|$. По лемме 2.6.1/3 достаточно в каждом случае $lp < n$ или $lp = n$ построить оператор продолжения

$$\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(G_\delta),$$

такой, что

$$\|\mathcal{E}\| \le c\,\varepsilon^{-l} \ \text{ при } \ lp < n$$

и

$$\|\mathcal{E}\| \le c\,\varepsilon^{-l} |\log\,\varepsilon|^{(1-p)/p} \ \text{ при } \ lp = n.$$

Мы докажем более сильное утверждение: если $l - 1 < n/p$, то существует линейный оператор продолжения

$$\mathcal{E} : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s}),$$

для которого верна оценка

$$\|\mathcal{E}\| \le \Lambda_n(\varepsilon,\infty)|\omega_\varepsilon|^{-1/p}(1+o(1)), \tag{3}$$

где $o(1)$ – положительная бесконечно малая при $\varepsilon \to +0$.

Для $v \in L_p(\Omega_\varepsilon)$ и $z \in \mathbf{R}^s$ пусть $\overline{v}(z)$ есть среднее значение функции $v(\cdot, z)$ на ω_ε. Тогда

$$\|\overline{v}\|_{p,\mathbf{R}^s} |\omega_\varepsilon|^{1/p} \le \|v\|_{p,\Omega_\varepsilon}, \tag{4}$$

а если $\nabla v \in L_p(\Omega_\varepsilon)$, то верна еще оценка

$$\|v - \overline{v}\|_{p,\Omega_\varepsilon} \le c\,\varepsilon\, \|\nabla v\|_{p,\Omega_\varepsilon}. \tag{5}$$

Предположим, что

$$w_\varepsilon \in V_p^l(\mathbf{R}^n), \quad w_\varepsilon\big|_{\omega_\varepsilon} = 1 \ \text{ и } \ \|w_\varepsilon\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le (1+\varepsilon)\Lambda_n(\varepsilon,\infty).$$

Введем линейный оператор продолжения

$$E_\varepsilon : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s}),$$

удовлетворяющий условию (2.6.1/10) и положим

$$(\mathcal{E}u)(x) = \overline{u}(z)\, w_\varepsilon(y) + \big(E_\varepsilon(u-\overline{u})\big)(x), \tag{6}$$

где $u \in V_p^l(\Omega_\varepsilon)$, $x = (y,z) \in \mathbf{R}^{n+s}$. Формула (6) определяет линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s})$. Докажем оценку (3). Из (4), (5) и (2.6.1/10) следует, что

$$\|E_\varepsilon(u-\overline{u})\|_{p,l,\mathbf{R}^{n+s}} \le c\,\varepsilon^{1-l}\|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}. \tag{7}$$

Далее, легко проверяется неравенство

$$\|\overline{u}w_\varepsilon\|_{p,l,\mathbf{R}^{n+s}} \le \|w_\varepsilon\|_{p,l,\mathbf{R}^n}\|\overline{u}\|_{p,l,\mathbf{R}^s}.$$

Поскольку

$$\big|(\nabla_j\overline{u})(z)\big| \le \overline{|\nabla_j u|}(z), \quad z \in \mathbf{R}^s,$$

и имеет место (4), то

$$\|\nabla_j\overline{u}\|_{p,\mathbf{R}^s} \le \|\nabla_j u\|_{p,\Omega_\varepsilon}|\omega_\varepsilon|^{-1/p}, \quad j = 0,\dots,l.$$

Таким образом,

$$\|\overline{u}\; w_\varepsilon\|_{p,l,\mathbf{R}^{n+s}} \le \|w_\varepsilon\|_{p,l,\mathbf{R}^n}\|u\|_{p,l,\Omega_\varepsilon}|\omega_\varepsilon|^{-1/p}. \tag{8}$$

Объединяя (6) – (8), приходим к оценке

$$\|\mathcal{E}\| \le \Lambda_n(\varepsilon,\infty)(1+\varepsilon)|\omega_\varepsilon|^{-1/p} + c\,\varepsilon^{1-l}.$$

Кроме того, из (2) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon^{1-l}|\omega_\varepsilon|^{1/p}\big(\Lambda_n(\varepsilon,\infty)\big)^{-1} = 0,$$

если $l-1 < n/p$. Итак, оценка (3) верна для оператора (6). Доказательство теоремы закончено.

Замечание 1. Можно считать, что оператор $\mathcal{E}$, определенный в (6), обладает свойством

$$(\mathcal{E}u)(y,z) = 0 \ \text{ при } \ z_s > 0, \ \text{ если } \ u(y,z) = 0 \ \text{ при } \ z_s > 0$$

(ср. замечание 2.6.1).

В ходе доказательства теоремы установлено следующее утверждение об операторе продолжения: $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s})$ с минимальной нормой.

Следствие. *Пусть* $\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times \mathbf{R}^s \subset \mathbf{R}^{n+s}$ *– тонкий цилиндрический слой. Норма любого оператора продолжения:* $V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^{n+s})$ *не меньше* $\Lambda_n(\varepsilon)|\omega_\varepsilon|^{-1/p}$, *а если* $l-1 < n/p$, *то существует линейный оператор продолжения, действующий как указано выше, норма которого не превосходит* $\Lambda_n(\varepsilon)|\omega_\varepsilon|^{-1/p}(1+o(1))$, *где*

$$\Lambda_n(\varepsilon) = \inf\{\|u\|_{p,l,\mathbf{R}^n} : u \in V_p^l(\mathbf{R}^n),\ u\big|_{\omega_\varepsilon} = 1\}$$

и $o(1)$ *– положительная бесконечно малая при* $\varepsilon \to 0$.

Замечание 2. При $p=2$, $l=1$ имеем

$$\sqrt{\frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}}\,(1-o(1)) \le \Lambda_2(\varepsilon) \le \sqrt{\frac{2\pi}{|\log\varepsilon|}}\,(1+o(1))\,,$$

а если $n \ge 3$, то

$$\varepsilon^{(n-2)/2} \le \left((n-2)s_n \operatorname{cap}\omega\right)^{-1/2}\Lambda_n(\varepsilon) \le \varepsilon^{(n-2)/2}\,(1+o(1))\,,$$

где s_n – площадь сферы S^{n-1} и cap – емкость Винера в $\mathbf{R}^n$. Указанные неравенства были доказаны в теоремах 2.3/2–3.

Замечание 3. Бесконечно малая $o(1)$ в сформулированном выше следствии может быть уточнена равенством (2.3/3).

2.7 Операторы продолжения для некоторых областей с малым параметром

Оценки норм операторов продолжения, полученные ранее в этой главе для малых областей и тонких цилиндров, позволяют выводить двусторонние оценки норм операторов продолжения для областей более сложной конфигурации, зависящих от больших или малых параметров. В настоящем разделе мы рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

Далее $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а символ $\sim$ означает эквивалентность положительных величин, равномерную относительно ε.

Пример 1. Рассмотрим “шляпу” $\Omega^{(\varepsilon)}$ в $\mathbf{R}^n : \Omega^{(\varepsilon)} = Q \cup G^{(\varepsilon)}$ (см. Рис. 1). Здесь

$$Q = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n :\ x_n \in [0, 2),\ |x'| < 1\}$$

и
$$G^{(\varepsilon)} = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : \, x_n \in (-\varepsilon, 0), \, |x'| < 2\}.$$

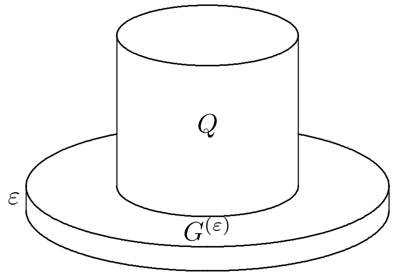

Рис. 1

Пусть
$$E : V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n) \tag{1}$$
означает произвольный оператор продолжения. Проверим соотношение
$$\inf \|E\| \sim \varepsilon^{-1/p}.$$
Чтобы получить оценку снизу для $\|E\|$, рассмотрим такую функцию $f \in C_0^\infty(1,2)$, что $f(t) = 1$ при $4/3 \le t \le 5/3$. Определим пробную функцию $u \in V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ равенством $u(x', x_n) = f(|x'|)$. Тогда для любого оператора продолжения E, указанного в (1), имеем
$$\|(Eu)(x', \cdot)\|_{p,l,\mathbf{R}^1} \ge c(p,l) > 0$$
при п.в. $x' \in \omega$, $\omega = \{x' \in \mathbf{R}^{n-1} : 4/3 < |x'| < 5/3\}$. Отсюда
$$\|Eu\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \ge \|Eu\|_{p,l,\omega\times\mathbf{R}^1} \ge c,$$
и
$$\|E\| \ge \|Eu\|_{p,l,\mathbf{R}^n} / \|u\|_{p,l,\Omega^{(\varepsilon)}} \ge c\,\varepsilon^{-1/p}.$$

Построим линейный оператор продолжения E, для которого
$$\|E\| \le c\,\varepsilon^{-1/p}. \tag{2}$$
С этой целью продолжим сначала произвольную функцию класса $V_p^l(G^{(\varepsilon)})$ из $G^{(\varepsilon)}$ в тонкий слой $\mathbf{R}^{n-1} \times (-\varepsilon, 0)$. Это может быть сделано отражением конечного порядка (см. теорему 1.6/1) по каждому радиусу шара $B_2^{(n-1)}$. Именно, пусть $G^{(\varepsilon)} \ni x = (\varrho, \theta, x_n)$,

где (ϱ, θ) – сферические координаты в $\mathbf{R}^{n-1}$. Пусть u – гладкая функция на $\overline{G^{(\varepsilon)}}$. Определим функцию $\tilde{u}$ на

$$D^{(\varepsilon)} = \{x = (\varrho, \theta, x_n) : \varrho < 2 + 1/l,\, \theta \in S^{n-2},\, x_n \in (-\varepsilon, 0)\}$$

следующим образом: положим $\tilde{u} = u$ на $G^{(\varepsilon)}$ и

$$\tilde{u}(\varrho, \theta, x_n) = \sum\nolimits_{k=1}^{l} a_k u(2 - k(\varrho - 2), \theta, x_n) \quad \text{на} \quad D^{(\varepsilon)} \setminus G^{(\varepsilon)}, \qquad (3)$$

где коэффициенты a_k удовлетворяют системе (1.6/2). Легко убедиться (ср. с теоремой 1.6/1), что тогда $\tilde{u} \in C^{l-1}(D^{(\varepsilon)})$, а также

$$\|\tilde{u}\|_{p,l,D^{(\varepsilon)}} \le c\,(l, p, n)\, \|u\|_{p,l,G^{(\varepsilon)}}.$$

Следовательно, отображение $u \mapsto \tilde{u}$ может быть единственным образом расширено до линейного ограниченного оператора:

$$V_p^l(G^{(\varepsilon)}) \to V_p^l(D^{(\varepsilon)}).$$

Умножая $\tilde{u}$ на гладкую срезающую функцию, зависящую только от ϱ, имеющую носитель в промежутке $[0, 2 + 1/l)$ и равную 1 на отрезке $[0, 2]$, получим линейный непрерывный оператор продолжения

$$E_1 : V_p^l(G^{(\varepsilon)}) \to V_p^l(\Omega_\varepsilon), \quad \Omega_\varepsilon = \mathbf{R}^{n-1} \times (-\varepsilon, 0)),$$

норма которого ограничена равномерно относительно ε.

Положим $\mathbf{R}^n_- = \{x : x_n < 0\}$. По теореме 2.6.2 существует линейный непрерывный оператор продолжения

$$E_2 : V_p^l(\Omega_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n_-)$$

с нормой $O(\varepsilon^{-1/p})$. Обозначая через S оператор сужения на $G^{(\varepsilon)}$, мы построим ограниченный линейный оператор продолжения

$$E_3 : V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n_- \cup Q)$$

с нормой $O(\varepsilon^{-1/p})$, определив $E_3 u = E_2 E_1 S u$ на $\mathbf{R}^n_-$ и $E_3 u = u$ на Q. Пусть еще

$$E_4 : V_p^l(\mathbf{R}^n_- \cup Q) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$$

есть линейный оператор продолжения с нормой $O(1)$. Тогда оператор $E = E_4 E_3$ является оператором продолжения вида (1) с условием (2).

Обратимся к продолжению функций из внешности “шляпы” на $\mathbf{R}^n$. Пусть

$$F : V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega^{(\varepsilon)}}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n) \tag{4}$$

означает произвольный оператор продолжения. Убедимся, что

$$\inf \|F\| \sim \varepsilon^{-l+1/p}. \tag{5}$$

Оценка снизу для $\|F\|$ выводится с помощью гладкой пробной функции, равной 1 на множестве

$$\{(x', x_n) : 4/3 < |x'| < 5/3,\ x_n \in (-1, -\varepsilon)\}$$

и 0 над “полями шляпы”. Рассуждения здесь те же, что и в доказательстве теоремы 2.4.2 (i).

Чтобы установить соотношение (5), построим оператор продолжения (4), для которого $\|F\| \le c\,\varepsilon^{-l+1/p}$. По теореме 1.6/2 существует линейный оператор продолжения

$$F_1 : V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega^{(\varepsilon)}}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}})$$

с нормой, ограниченной равномерно относительно ε. Введем еще линейный оператор продолжения

$$F_2 : V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n), \quad \Omega_\varepsilon = \mathbf{R}^{n-1} \times (-\varepsilon, 0),$$

удовлетворяющий условию $\|F_2\| \le c\,\varepsilon^{-l+1/p}$ (см. теорему 2.4.2). Пусть $u \in V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega^{(\varepsilon)}})$. Положим

$$u_1 = (F_1 u)\big|_{\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon}, \quad v = F_1 u - F_2 u_1.$$

Тогда

$$v \in V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}}), \quad v\big|_{\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon} = 0. \tag{6}$$

Построим линейное отображение $v \mapsto F_3 v$, переводящее функцию, подчиненную требованиям (6), в функцию $F_3 v \in V_p^l(\mathbf{R}^n)$, такую, что $F_3 v = v$ на $\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}}$ и

$$\|F_3 v\|_{p,l,\mathbf{R}^n} \le c\,\|v\|_{p,l,\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}}}. \tag{7}$$

Если это отображение построено, то искомое продолжение Fu может быть определено формулой $Fu = F_2u_1 + F_3(F_1u - F_2u_1)$.

Итак, пусть выполнены условия (6) и пусть

$$g^{(\varepsilon)} = \{x : |x'| < 3, x_n \in (-\varepsilon, 0)\}.$$

Применяя радиальную процедуру отражения конечного порядка, аналогичную (3), подолжим v из кольца $g^{(\varepsilon)} \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}}$ в более широкое кольцо $g^{(\varepsilon)} \setminus \overline{h^{(\varepsilon)}}$,

$$h^{(\varepsilon)} = \{x \in G^{(\varepsilon)} : |x'| < 2 - 1/l\}$$

За продолженной функцией оставим старое обозначение v. Теперь функция $F_3v \in V_p^l(\mathbf{R}^n)$, подчиненная условию (7), определяется на $G^{(\varepsilon)}$ следующим образом: $F_3v = 0$ на $h^{(\varepsilon)}$ и $F_3v = \eta v$ на $G^{(\varepsilon)} \setminus h^{(\varepsilon)}$, где η – гладкая срезающая функция, зависящая только от $|x'|$, $\eta = 1$ при $|x'| \geq 2$, $\eta = 0$ при $|x'| \leq 2 - 1/l$.

Пример 2. Проверим соотношения

$$\inf \|\mathcal{E}\| \sim \begin{cases} \varepsilon^{-\min\{l,\,(n-1)/p\}} & \text{при } \ lp \neq n-1, \\ \varepsilon^{-l} |\log \varepsilon|^{(1-p)/p} & \text{при } \ lp = n-1 \end{cases} \tag{8}$$

и

$$\inf \|\mathcal{F}\| \sim 1 \tag{9}$$

для произвольных операторов продолжения

$$\mathcal{E} : V_p^l(G^{(\varepsilon)}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n), \quad \mathcal{F} : V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n), \tag{10}$$

где $n > 1$ и $G^{(\varepsilon)}$ – “гантель” в $\mathbf{R}^n$, изображенная на Рис. 2.

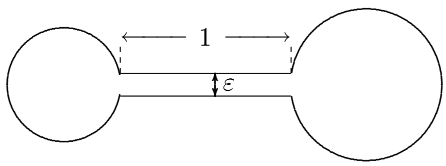

Рис. 2

С помощью конечного разбиения единицы доказательство соотношений (8), (9) сводится к модельной области (см. Рис. 3)

$$G^{(\varepsilon)} = \mathbf{R}^n_+ \cup \big\{x = (x', x_n) :\ x' \in B_\varepsilon^{(n-1)},\ x_n \in (-1, 0]\big\},$$

где $\mathbf{R}^n_+ = \{x \in \mathbf{R}^n : \; x_n > 0\}$.

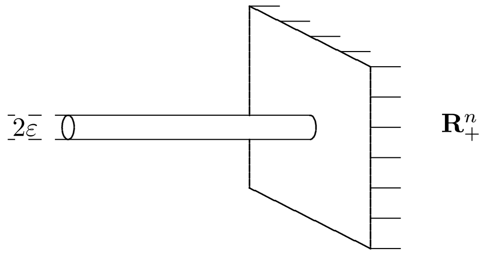

Рис. 3

Обращаясь к (8), заметим, что оценка снизу для $\|\mathcal{E}\|$ проверяется с использованием гладкой пробной функции, зависящей только от x_n и имеющей носитель на стержне $B^{(n-1)}_\varepsilon \times (-1, 0)$. Здесь доказательство аналогично доказательству теоремы 2.6.2.

Построим линейный оператор продолжения $u \mapsto \mathcal{E}u$ с нормой, эквивалентной правой части (8). Ясно, что общий случай сводится к случаю $u(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n_+$. При этом конечный стержень можно заменить на бесконечный вида $B^{(n-1)}_\varepsilon \times (-\infty, 0)$ (см. теорему 1.6/1). Пусть $\Omega_\varepsilon = B^{(n-1)}_\varepsilon \times \mathbf{R}^1$ и пусть $E : V^l_p(\Omega_\varepsilon) \to V^l_p(\mathbf{R}^n)$ – оператор продолжения, построенный в теореме 2.6.2. В соответствии с замечанием 2.6.2/1 можно считать, что $Eu(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^n_+$. Полагая

$$(\mathcal{E}u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при} \qquad x \in \Omega_\varepsilon \cup \mathbf{R}^n_+, \\ (Eu)(x) & \text{для остальных} \quad x \in \mathbf{R}^n, \end{cases}$$

получаем требуемое продолжение функции u.

Для доказательства соотношения (9) построим оператор продолжения $\mathcal{F}$ (см. (10)), норма которого ограничена равномерно относительно ε. Пусть $D_\varepsilon = B^{(n-1)}_\varepsilon \times (-1, \infty)$. Применяя отражение конечного порядка через плоскость $x_n = 0$ и используя гладкую срезающую функцию, построим продолжение $v \in V^l_p(\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}_\varepsilon)$ функции $u \in V^l_p(\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}})$, такое, что

$$\|v\|_{p,l,\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}_\varepsilon} \le c\, \|u\|_{p,l,\mathbf{R}^n \setminus \overline{G^{(\varepsilon)}}}\,.$$

Остается продолжить v из внешности D_ε на $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим узкий цилиндр $\Omega_\varepsilon = B^{(n-1)}_\varepsilon \times \mathbf{R}^1$. По теореме 2.4.1 существует линейный оператор продолжения: $V_p^l(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ с нормой, ограниченной равномерно относительно ε, и мы можем считать, что $v = 0$ во внешности Ω_ε. В этом случае требуемое продолжение функции v из $\mathbf{R}^n \setminus \overline{D}_\varepsilon$ на цилиндр D_ε определяется как произведение гладкой срезающей функции на отражение конечного порядка через плоскую часть $\{x : x' \in B_\varepsilon^{(n-1)},\ x_n = -1\}$ границы цилиндра D_ε.

2.8 Область, зависящая от двух параметров

В этом разделе строится оптимальный оператор продолжения, действующий из пространства Соболева в малом тонком цилиндре. Полученные в ходе построения оценки будут использованы и в главе 4, где изучается возможность продолжения функций из классов Соболева во внешность области с вершиной пика на границе.

Пусть $\varrho \in (0, 1/2)$ и $\varepsilon \in (0, \varrho/2)$. Рассмотрим n-мерный малый тонкий цилиндр
$$D_{\varepsilon,\varrho} = B_\varepsilon^{(n-1)} \times (-\varrho, \varrho).$$
Пусть
$$\mathcal{E} : V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n) \tag{1}$$
означает произвольный оператор продолжения. Оказывается, появление второго параметра увеличивает число вариантов. Ниже будет доказано соотношение

$$\inf \|\mathcal{E}\| \sim \begin{cases} \varepsilon^{-l} \quad \text{при} \quad lp < n-1, \\ \varepsilon^{-l}\big(\log(\varrho/\varepsilon)\big)^{(1-p)/p} \quad \text{при} \quad lp = n-1, \\ \varrho^{-l}(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p} \quad \text{при} \quad n-1 < lp < n, \\ \varepsilon^{(1-n)/p}\varrho^{-1/p}|\log\varrho|^{(1-p)/p} \quad \text{при} \quad lp = n, \\ \varepsilon^{(1-n)/p}\varrho^{-1/p} \quad \text{при} \quad lp > n. \end{cases} \tag{2}$$

Предположим, что $v \in V_p^l(\mathbf{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$ и $v(x) = 1$ при п.в. $x \in D_{\varepsilon,\varrho}$. Тогда функция v может быть аппроксимирована в V_p^l функциями из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, которые равны 1 в окрестности $\overline{D}_{\varepsilon,\varrho}$ (простое доказательство этого факта вытекает из звездности $D_{\varepsilon,\varrho}$ относительно начала координат). Следовательно, норма любого упомянутого выше оператора продолжения $\mathcal{E}$ удовлетворяет неравенству

$$\|\mathcal{E}\| \ge \big(\mathrm{Cap}\,(\overline{D}_{\varepsilon,\varrho}; V_p^l)/\mathrm{mes}_n(D_{\varepsilon,\varrho})\big)^{1/p},$$

где емкость $\mathrm{Cap}\,(F; V_p^l)$ определяется для произвольного компакта $F \subset \mathbf{R}^n$ как[1]

$$\inf\bigl\{\|u\|^p_{p,l,\mathbf{R}^n} :\; u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\; u = 1 \text{ в окрестности } F\bigr\}. \qquad (3)$$

Если $F \subset B_1$, то с помощью гладкой срезки с носителем в B_2 и равной 1 в B_1 легко показать, что емкость $\mathrm{Cap}\,(F; V_p^l)$ эквивалентна другой емкости

$$\mathrm{Cap}\,\bigl(F; \mathring{L}{}_p^l(B_2)\bigr) =$$

$$= \inf\bigl\{\|\nabla_l u\|^p_{p,B_2} : u \in C_0^\infty(B_2),\; u = 1 \text{ в окрестности } F\bigr\}.$$

Отсюда

$$c\,\|\mathcal{E}\| \ge \bigl(\varepsilon^{1-n}\varrho^{-1}\mathrm{Cap}\,(\overline{D}_{\varepsilon,\varrho}; \mathring{L}{}_p^l(B_2))\bigr)^{1/p}.$$

Сошлемся теперь на книгу В. Г. Мазья [40, 9.1], где, в частности, показано, что правая часть последнего неравенства эквивалентна правой части (2). Таким образом, соотношение (2) может быть записано короче но менее явно в виде

$$\inf\|\mathcal{E}\| \sim \bigl(\mathrm{Cap}\,(\overline{D}_{\varepsilon,\varrho}; V_p^l)/\mathrm{mes}_n(D_{\varepsilon,\varrho})\bigr)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Доказательство соотношения (2) сводится к построению линейного оператора продолжения $\mathcal{E}$, указанного в (1), норма которого не превосходит константы, умноженной на правую часть (2). Нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Существует линейное отображение*

$$L_p^l(D_{\varepsilon,\varrho}) \ni u \mapsto Q \in \mathcal{P}_{l-1},$$

такое, что

$$\|\nabla_k(u-Q)\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}} \le c\,\varrho^{l-k}\|\nabla_l u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}, \quad k \le l. \qquad (4)$$

Доказательство. По лемме 1.5.2 достаточно проверить (4) при $l = 1$. Пусть $u \in L_p^1(D_{\varepsilon,\varrho})$ и пусть $\tilde{u}$ есть среднее значение u на $D_{\varepsilon,\varrho}$. Обозначим через $\overline{u}(t)$, $t \in (-\varrho,\varrho)$, среднее значение функции $B_\varepsilon^{(n-1)} \ni x' \mapsto u(x',t)$ на $B_\varepsilon^{(n-1)}$. Ясно, что

$$\|u-\tilde{u}\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}} \le c\,\varepsilon^{(n-1)/p}\|\overline{u}-\tilde{u}\|_{p,(-\varrho,\varrho)} +$$

[1] на самом деле инфимум в (3) эквивалентен инфимуму того же выражения по множеству $\{u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n) : u|_F \ge 1\}$ (см. В. Г. Мазья [40, 9.3] при $p > 1$ и Ю. В. Нетрусов [52] при $p = 1$).

$$+\left(\int_{-\varrho}^{\varrho}\|u(\cdot,x_n)-\overline{u}(x_n)\|^p_{p,B_\varepsilon}dx_n\right)^{1/p}. \qquad (5)$$

Поскольку $\tilde{u}$ есть среднее значение функции $(-\varrho,\varrho)\ni t\mapsto\overline{u}(t)$, то

$$\|\tilde{u}-\overline{u}\|_{p,(-\varrho,\varrho)}\le c\,\varrho\|\overline{u}'\|_{p,(-\varrho,\varrho)}.$$

Кроме того, в силу неравенства Гёльдера

$$|\overline{u}'(x_n)|=|\overline{u_{x_n}}(x_n)|\le c\,\varepsilon^{(1-n)/p}\|u_{x_n}(\cdot,x_n)\|_{p,B_\varepsilon^{(n-1)}},$$

и первое слагаемое в правой части (5) не больше $c\,\varrho\,\|\nabla u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}$. Применяя неравенство Пуанкаре к функции $u(\cdot,x_n)$ в шаре $B_\varepsilon^{(n-1)}$, оценим сверху второе слагаемое в правой части (5) выражением $c\,\varepsilon\,\|\nabla u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}$. Итак, оценка (4) установлена для $l=1$ и $Q=\tilde{u}$.

Лемма 2. *Пусть $D_\varrho=B_\varrho^{(n-1)}\times(-\varrho,\varrho)\subset\mathbf{R}^n$. Для любого полинома $Q\in\mathcal{P}_{l-1}^{(n)}$ верна оценка*

$$\|Q\|_{p,D_\varrho}\le c\,(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p}\sum\nolimits_{k=0}^{l-1}\varrho^k\|\nabla_k Q\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}.$$

Доказательство. Если S – полином в $\mathbf{R}^{n-1}$, то справедлива оценка

$$|S(0)|\le c\,\varepsilon^{(1-n)/p}\|S\|_{p,B_\varepsilon^{(n-1)}} \qquad (6)$$

с константой c, зависящей только от p,n и степени полинома. Зафиксируем $z\in(-\varrho,\varrho)$. Используя (6), получаем

$$\|Q(\cdot,z)\|_{p,B_\varrho^{(n-1)}}\le c\sum\nolimits_{|\alpha|\le l-1}\left|D^\alpha Q(0,z)\right|\varrho^{|\alpha|+(n-1)/p}\le$$

$$\le c\,(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p}\sum\nolimits_{|\alpha|\le l-1}\varrho^{|\alpha|}\|D^\alpha Q(\cdot,z)\|_{p,B_\varepsilon^{(n-1)}},$$

где $D^\alpha Q(\cdot,z)$ означает дифференцирование по первым $n-1$ переменным. Интегрируя по $z\in(-\varrho,\varrho)$, приходим к требуемой оценке.

Лемма 3. *Пусть $D_{\varepsilon,\varrho}=B_\varepsilon^{(n-1)}\times(-\varrho,\varrho)$, $\varepsilon\in(0,\varrho/2)$. Если $lp\ne n-1$, то существует линейный оператор продолжения*

$$E_{\varepsilon,\varrho}:V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho})\to V_p^l(\mathbf{R}^n),$$

такой, что

$$\|\nabla_i(E_{\varepsilon,\varrho}u)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le$$

$$\le c\left(\varrho\varepsilon^{-1}\right)^{\min\{l,(n-1)/p\}} \sum\nolimits_{k=0}^{l} \varrho^{k-i}\|\nabla_k u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}$$

при всех $u \in V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho})$ *и* $i = 0,\dots,l$. *В случае* $lp = n-1$ *существует линейный оператор продолжения* $E_{\varepsilon,\varrho}$, *действующий как указано выше и удовлетворяющий условию*

$$\|\nabla_i(E_{\varepsilon,\varrho}u)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le$$

$$\le c\,(\varrho\varepsilon^{-1})^l\big(\log(\varrho\varepsilon^{-1})\big)^{(1-p)/p} \sum\nolimits_{k=0}^{l} \varrho^{k-i}\|\nabla_k u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}$$

при всех $u \in V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho})$, $i = 0,\dots,l$.

Доказательство. С помощью преобразования $x \mapsto \phi(x) = x/\varrho$ дело сводится к случаю $\varrho = 1$. По теореме 1.6/1 существует линейный оператор продолжения: $V_p^l(D_{\varepsilon,1}) \to V_p^l(B_\varepsilon^{(n-1)} \times \mathbf{R}^1)$ с нормой, ограниченной равномерно относительно ε. Из теоремы 2.6.2 при $\delta = \infty$ следует, что в каждом случае $lp \ne n-1$ или $lp = n-1$ существует линейный оператор продолжения

$$\mathcal{E}_\varepsilon : V_p^l(D_{\varepsilon,1}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n),$$

такой, что

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon\| \le c\,\varepsilon^{-\min\{l,(n-1)/p\}}, \quad \text{если} \quad lp \ne n-1,$$

$$\|\mathcal{E}_\varepsilon\| \le c\,\varepsilon^{-l}|\log\varepsilon|^{(1-p)/p}, \quad \text{если} \quad lp = n-1.$$

Таким образом, можно положить $E_{\varepsilon,\varrho}\,u = \big(\mathcal{E}_{\varepsilon/\varrho}(u\circ\phi^{-1})\big)\circ\phi$.

Лемма 4. *Пусть* D_ϱ *– цилиндр, определенный в лемме 2. Если* $lp > n-1$, *то существует линейный оператор продолжения*

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,\varrho} : V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho}) \to V_p^l(D_\varrho),$$

норма которого не превосходит $c\,(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p}$.

Доказательство. Согласно лемме 3 существует линейный оператор продолжения $V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho}) \ni u \mapsto E_{\varepsilon,\varrho}u \in V_p^l(\mathbf{R}^n)$, такой, что

$$\|\nabla_i(E_{\varepsilon,\varrho}u)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le$$

$$\leq c\left(\varrho\varepsilon^{-1}\right)^{(n-1)/p} \sum\nolimits_{k=0}^{l-1} \varrho^{k-i} \|\nabla_k u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}} \tag{7}$$

при $i = 0, \dots, l$. Пусть линейное отображение

$$V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho}) \ni u \mapsto Q \in \mathcal{P}_{l-1}$$

удовлетворяет условию (4). Объединяя (4) и (7), получаем оценку

$$\|\nabla_i\big(E_{\varepsilon,\varrho}(u-Q)\big)\|_{p,\mathbf{R}^n} \leq$$

$$\leq c\,(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p} \varrho^{l-i} \|\nabla_l u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}, \quad i \leq l. \tag{8}$$

Кроме того, по лемме 2

$$\|\nabla_i Q\|_{p,D_\varrho} \leq c\,(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p} \sum\nolimits_{s=0}^{l-i-1} \varrho^s \|\nabla_{i+s} Q\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}.$$

Так как

$$\|\nabla_{i+s} Q\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}} \leq \|\nabla_{i+s} u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}} + c\,\varrho^{l-s-i} \|\nabla_l u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}},$$

то

$$\|\nabla_i Q\|_{p,D_\varrho} \leq$$

$$\leq c\,(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p} \sum\nolimits_{k=i}^{l} \|\nabla_k u\|_{p,D_{\varepsilon,\varrho}}, \quad i = 0, \dots, l.$$

Из последней оценки и (8) следует, что требуемый оператор продолжения может быть определен формулой

$$\mathcal{E}_{\varepsilon,\varrho} u = Q + E_{\varepsilon,\varrho}(u-Q).$$

Доказательство леммы 4 закончено.

Обратимся к построению линейного оператора продолжения $\mathcal{E}$, действующего как в (1), норма которого мажорируется произведением константы на правую часть (2).

1. $lp < n-1$. По лемме 2.1.2/1 существует линейный оператор продолжения $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условию $\|\mathcal{E}\| \leq c\,\varepsilon^{-l}$.

2. В каждом случае $lp = n-1$ или $n-1 < lp < n$ положим $\mathcal{E} = E_{\varepsilon,\varrho}$, где $E_{\varepsilon,\varrho}$ – оператор, построенный в лемме 3. Тогда

$$\|\mathcal{E}\| \leq c\,\varepsilon^{-l}\big(\log(\varrho/\varepsilon)\big)^{(1-p)/p}, \quad \text{если} \quad lp = n-1,$$

$$\|\mathcal{E}\| \leq c\,\varrho^{-l}(\varrho/\varepsilon)^{(n-1)/p}, \quad \text{если} \quad n-1 < lp < n.$$

3. $lp = n$. Пусть D_ϱ – цилиндр, введенный в лемме 2, и пусть

$$\mathcal{F} : V_p^l(D_\varrho) \to V_p^l(\mathbf{R}^n) \tag{9}$$

означает линейный оператор продолжения, для которого

$$\|\mathcal{F}\| \leq c\,\varrho^{-l}|\log\,\varrho|^{(1-p)/p}$$

(см. теорему 2.2.2). Если $\mathcal{E}_{\varepsilon,\varrho}$ – оператор, построенный в лемме 4, то

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}\mathcal{E}_{\varepsilon,\varrho} : V_p^l(D_{\varepsilon,\varrho}) \to V_p^l(\mathbf{R}^n) \tag{10}$$

является оператором продолжения, причем

$$\|\mathcal{E}\| \leq c\,(\varrho\varepsilon^{-1})^{(n-1)/p}\varrho^{-l}|\log\,\varrho|^{(1-p)/p}.$$

4. $lp > n$. По теореме 2.2.2 существует линейный оператор продолжения, действующий как в (9) и такой, что $\|\mathcal{F}\| \leq c\,\varrho^{-n/p}$. Пусть $\mathcal{E}_{\varepsilon,\varrho}$ – оператор, построенный в лемме 4. Определим оператор $\mathcal{E}$ формулой (10). Тогда

$$\|\mathcal{E}\| \leq c\,\varepsilon^{(1-n)/p}\varrho^{-1/p}.$$

Последний случай не исключает $p = \infty$.

Интересно отметить, что если в области $D_{\varepsilon,\varrho} = B_\varepsilon^{(n-1)} \times (-\varrho, \varrho)$ предположить $2\varrho < \varepsilon < 1/2$, то результат будет отличен от (2). Можно показать, что в этом случае для произвольного оператора продолжения (1) верно соотношение

$$\inf\|\mathcal{E}\| \sim \begin{cases} (\varepsilon\varrho^{-1})^{1/p}\,\varepsilon^{-l} & \text{при} \quad lp < n, \\ (\varepsilon\varrho^{-1})^{1/p}\,\varepsilon^{-l}|\log\varepsilon|^{(1-p)/p} & \text{при} \quad lp = n, \\ (\varepsilon\varrho^{-1})^{1/p}\,\varepsilon^{-n/p} & \text{при} \quad lp > n. \end{cases}$$

2.9 Комментарии к главе 2

Лемма 2.1.1 хорошо известна (см., например, С. Л. Соболев [69], В. И. Смирнов [66]). Содержание разд. 2.1.2–2.1.3 и разд. 2.2 соответствует работе авторов [43]. Теорема 2.3/1 доказана в той же работе.

В связи с материалом разд. 2.1–2.3 упомянем некоторые результаты об оценках минимальных норм операторов продолжения, действующих в пространствах Соболева.

Г. А. Калябин [115] показал, что если Ω – выпуклая область в $\mathbf{R}^2$, $d = \operatorname{diam}(\Omega) \leq 1$ и $E : W_p^1(\Omega) \to W_p^1(\mathbf{R}^2)$ – произвольный оператор продолжения, то

$$\inf \|E\| \sim \begin{cases} |\Omega|^{-1/p} d^{(2-p)/p} \quad \text{при} \quad p \in (1,2), \\ |\Omega|^{-1/2}\big(\log(2/d)\big)^{-1/2} \quad \text{при} \quad p = 2, \\ |\Omega|^{-1/p} \qquad \text{при} \quad p > 2, \end{cases}$$

где $|\Omega|$ означает площадь области Ω, а константы в этом соотношении эквивалентности зависят только от p.

В. И. Буренков и А. Л. Горбунов [14] (см. также В. И. Буренков [91, Chap. 6]) получили следующие двусторонние оценки минимальных норм операторов продолжения в пространствах W_p^l. Пусть (a,b) – конечный интервал в $\mathbf{R}^1$ и E – произвольный ограниченный оператор продолжения: $W_p^l(a,b) \to W_p^l(\mathbf{R}^1)$, $1 \leq p \leq \infty$, $l = 1, 2, \ldots$ Тогда существуют такие абсолютные константы c_1, $c_2 > 0$, что

$$c_1^l\big(1 + l^l(b-a)^{1-l-1/p}\big) \leq \inf \|E\| \leq c_2^l\big(1 + l^l(b-a)^{1-l-1/p}\big).$$

Отсюда для интервалов малой длины $b - a = \varepsilon$ следует соотношение

$$\inf \|E\|_{W_p^l(a,b) \to W_p^l(\mathbf{R}^1)} \sim \varepsilon^{1-l-1/p}.$$

Интересно отметить, что по теореме 2.2.2

$$\inf \|E\|_{V_p^l(a,b) \to V_p^l(\mathbf{R}^1)} \sim \varepsilon^{-1/p}.$$

Таким образом, два последних инфимума, вообще говоря, не эквивалентны равномерно относительно $b - a$.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ есть либо ограниченная область класса $C^{0,1}$, либо специальная липшицева область вида (1.6/5). В работе [14] установлено, что если E – произвольный оператор продолжения: $W_p^l(\Omega) \to W_p^l(\mathbf{R}^n)$, то существуют константы $c_3(\Omega)$, $c_4(\Omega) > 0$, удовлетворяющие неравенствам

$$c_3(\Omega)^l l^l \leq \inf \|E\| \leq c_4(\Omega)^l l^l \quad \text{для ограниченной области } \Omega;$$

$$c_3(\Omega)^l \leq \inf \|E\| \leq c_4(\Omega)^l \quad \text{для специальной липшицевой } \Omega.$$

Для тонкого цилиндрического слоя $\Omega_\varepsilon = \omega_\varepsilon \times \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^n$ асимптотические оценки при $\varepsilon \to +0$ минимальной нормы оператора продолжения: $V_2^1(\Omega_\varepsilon) \to V_2^1(\mathbf{R}^n)$ были получены в работе В. Г. Мазья [39]. Мы следуем этой работе в разд. 2.3. Содержание разд. 2.4–2.8 взято из статьи авторов [124]. Двусторонние оценки норм операторов продолжения в пространствах Соболева для некоторых областей, зависящих от малых параметров, даны в обзоре [41].

Глава 3

Следы функций класса W_p^1 на сингулярно возмущенной границе области

Если граница области локально является графиком липшицевой функции, то элементы пространств Соболева имеют следы на границе. Обозначим через $TW_p^1(\Omega)$ пространство граничных следов функций из $W_p^1(\Omega)$. Норма $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega)}$ определяется как норма в фактор-пространстве $W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$, где $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ означает замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_p^1(\Omega)$. Согласно известной теореме Гальярдо для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$ имеем $TW_p^1(\Omega) = W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ при $p \in (1,\infty)$ и $TW_1^1(\Omega) = L_1(\partial\Omega)$. Здесь $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$ – пространство функций на $\partial\Omega$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\partial\Omega)} + \left(\iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} |f(x) - f(y)|^p \frac{ds_x ds_y}{|x-y|^{n+p-2}} \right)^{1/p},$$

где ds_x, ds_y – элементы площади на $\partial\Omega$.

Пусть Ω_ε – область класса $C^{0,1}$, зависящая от малого параметра ε таким образом, что предельная область $\lim_{\varepsilon\to 0}\Omega_\varepsilon$ имеет нелипшицеву границу. Тогда эквивалентные нормы

$$\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon)}, \quad p\in(1,\infty),$$

$$\|\cdot\|_{TW_1^1(\Omega_\varepsilon)} \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_1(\partial\Omega_\varepsilon)}$$

могут не быть эквивалентными равномерно относительно ε.

В этой главе мы находим явную зависящую от ε норму функции на $\partial\Omega_\varepsilon$, эквивалентную $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)}$ равномерно относительно ε для некоторых областей, зависящих от параметра. В частности, рассмотрены малые области и тонкие (ширины ε) цилиндры и их внешности. Теоремы о малых областях и тонких цилиндрах будут применяться в главах 6, 7 при описании пространства $TW_p^1(\Omega)$ для областей с особенностями на границе.

Сформулируем некоторые результаты, полученные в настоящей главе. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ – односвязная область из $C^{0,1}$. Для малого $\varepsilon>0$ положим $\Omega_\varepsilon=\varepsilon\,\Omega$. Тогда норма следа $\|f\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)}$ оказывается эквивалентной (равномерно относительно ε) норме

$$\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon} = a(\varepsilon)\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)}+$$

$$+\Big(\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon\times\partial\Omega_\varepsilon}|f(x)-f(y)|^pQ_\varepsilon(x,y)ds_xds_y\Big)^{1/p},$$

где ds_x, ds_y – элементы площади поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$, $a(\varepsilon)=\varepsilon^{1/p}$, а весовая функция Q_ε задана равенством

$$Q_\varepsilon(x,y)=\begin{cases} r^{2-n-p} & \text{при } p\in(1,\infty),\\ \varepsilon^{1-n} & \text{при } p=1,\end{cases}$$

$r=|x-y|$.

Норма $\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)}$ также эквивалентна $\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon}$, где

$$a(\varepsilon)=\begin{cases} \min\{\varepsilon^{(1-p)/p},\ \varepsilon^{(1-n)/p}\} & \text{при } p\neq n,\\ (\varepsilon|\log\varepsilon|)^{(1-p)/p} & \text{при } p=n,\end{cases}$$

$Q_\varepsilon(x,y)=0$, если $p=1$ и $Q_\varepsilon(x,y)=r^{2-n-p}$, если $p\in(1,\infty)$.

Пусть Ω_ε – тонкий цилиндр вида $\Omega_\varepsilon=\omega_\varepsilon\times\mathbf{R}^1\subset\mathbf{R}^n$, где $n>2$, $\omega_\varepsilon=\varepsilon\,\omega$ и $\omega\subset\mathbf{R}^{n-1}$ – односвязная область из $C^{0,1}$. Тогда норма следа $\|f\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)}$ эквивалентна норме $\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon}$, где $a(\varepsilon)=\varepsilon^{1/p}$,

$$Q_\varepsilon(x,y)=\begin{cases} r^{2-n-p}\chi(r/\varepsilon) & \text{при } p\in(1,\infty),\\ \varepsilon^{1-n}\chi(r/\varepsilon) & \text{при } p=1.\end{cases}$$

Здесь χ – характеристическая функция интервала $(0,1)$.

Для внешности тонкого цилиндра норма $\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)}$ эквивалентна норме $\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon}$, где

$$a(\varepsilon)=\begin{cases}\min\{\varepsilon^{(1-p)/p},\ \varepsilon^{(2-n)/p}\} \text{ при } p\neq n-1,\\ (\varepsilon|\log\varepsilon|)^{(1-p)/p} \text{ при } p=n-1\end{cases}$$

и

$$Q_\varepsilon(x,y)=\begin{cases}0 \text{ при } p=1,\\ r^{2-n-p} \text{ при } p\in(1,n-1),\\ r^{2-n-p}+\varepsilon^{2(2-n)}r^{-1}\left(\log(1+r/\varepsilon)\right)^{-p} \text{ при } p=n-1,\\ r^{2-n-p}+\varepsilon^{2(2-n)}r^{n-2-p} \text{ при } p\in(n-1,\infty).\end{cases}$$

Во всех перечисленных случаях существует оператор продолжения: $TW_p^1(\Omega_\varepsilon)\to W_p^1(\Omega_\varepsilon)$ (или $TW_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)\to W_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)$) с нормой, ограниченной равномерно относительно ε. Этот оператор линеен при $p>1$ и нелинеен при $p=1$.

3.1 Следы на малых и больших компонентах границы

3.1.1 Теорема Гальярдо и ее следствия

Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ – область с границей, локально представимой в виде графика липшицевой функции. Пусть $TW_p^1(\Omega)$ означает множество следов $v|_{\partial\Omega}$ функций $v\in W_p^1(\Omega)$, $p\in[1,\infty)$. Линейное множество $TW_p^1(\Omega)$ снабжается нормой

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}=\inf\{\|v\|_{W_p^1(\Omega)}: v\in W_p^1(\Omega),\ v\big|_{\partial\Omega}=f\}. \tag{1}$$

Аналогично определяется пространство $TL_p^1(\Omega)$ граничных следов функций из $L_p^1(\Omega)$, в котором вводится полунорма

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega)}=\inf\{\|\nabla v\|_{L_p(\Omega)}: v\in L_p^1(\Omega),\ v\big|_{\partial\Omega}=f\}. \tag{2}$$

Пусть σ – измеримое подмножество $\partial\Omega$. Для функции f, заданной и измеримой на σ, положим

$$[f]_{p,\sigma}=\Big(\iint\limits_{\sigma\times\sigma}|f(x)-f(y)|^p\frac{ds_x ds_y}{|x-y|^{n+p-2}}\Big)^{1/p},\quad p\in(1,\infty), \tag{3}$$

где ds_x, ds_y – элементы площади поверхности σ. По определению пространство $W_p^{1-1/p}(\sigma)$ состоит из функций $f \in L_p(\sigma)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} = \|f\|_{L_p(\sigma)} + [f]_{p,\sigma}, \quad p \in (1, \infty). \tag{4}$$

Для области класса $C^{0,1}$ нетрудно показать, что пространство $TW_p^1(\Omega)$ изоморфно фактор-пространству $W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$, где через $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ обозначено замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_p^1(\Omega)$. Это обстоятельство может служить основанием для формального определения пространства $TW_p^1(\Omega)$ как указанного фактор-пространства и для нелипшицевых областей.

Следующий результат принадлежит Э. Гальярдо [101].

Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная односвязная область класса $C^{0,1}$. Если $\Gamma = \partial\Omega$, то пространства*

$$TW_p^1(\Omega) \quad \text{и} \quad W_p^{1-1/p}(\Gamma), \quad p \in (1, \infty),$$

$$TW_1^1(\Omega) \quad \text{и} \quad L_1(\Gamma)$$

совпадают с эквивалентностью норм. Кроме того, существует ограниченный оператор продолжения

$$E : W_p^{1-1/p}(\Gamma) \to W_p^1(\mathbf{R}^n), \quad 1 < p < \infty,$$

или

$$E : L_1(\Gamma) \to W_1^1(\mathbf{R}^n).$$

Оператор E линеен при $p \in (1, \infty)$ и нелинеен при $p = 1$.

Сделаем здесь одно простое замечание относительно операторов продолжения с растяжением (ср. с леммой 2.1.2/1).

Замечание. Пусть Γ и E – те же, что и в теореме. При $\varepsilon > 0$ положим $\Gamma_\varepsilon = \varepsilon\,\Gamma$. Тогда формула

$$f \mapsto E_\varepsilon f = (E(f \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1},$$

где $\Phi x = \varepsilon x,\ x \in \mathbf{R}^n$, задает оператор продолжения

$$E_\varepsilon : W_p^{1-1/p}(\Gamma_\varepsilon) \to W_p^1(\mathbf{R}^n), \quad p \in (1, \infty),$$

или

$$E_\varepsilon : L_1(\Gamma_\varepsilon) \to W_1^1(\mathbf{R}^n),$$

такой, что

$$\varepsilon^{-1}\|E_\varepsilon f\|_{L_p(\mathbf{R}^n} + \|\nabla E_\varepsilon f\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le$$
$$\le c\,(n,p,\Gamma)\left(\varepsilon^{(1-p)/p}\|f\|_{L_p(\Gamma_\varepsilon)} + [f]_{p,\Gamma_\varepsilon}\right), \quad p \in (1,\infty), \tag{5}$$

или

$$\varepsilon^{-1}\|E_\varepsilon f\|_{L_1(\mathbf{R}^n} + \|\nabla E_\varepsilon f\|_{L_1(\mathbf{R}^n)} \le c\,(n,\Gamma)\|f\|_{L_1(\Gamma_\varepsilon)}. \tag{6}$$

В дальнейшем нам понадобится аналог неравенства Пуанкаре для функций, определенных на поверхности. Пусть σ – измеримое подмножество границы области класса $C^{0,1}$ с положительной площадью $|\sigma|$. Для $f \in L_1(\sigma)$ введем полунорму

$$[f]_{1,\sigma} = |\sigma|^{-1} \iint\limits_{\sigma\times\sigma} |f(x) - f(y)|ds_x ds_y. \tag{7}$$

Лемма. *Если* $f \in L_p(\sigma)$, $1 \le p < \infty$, *то*

$$\|f - \overline{f}\|_{L_1(\sigma)} \le [f]_{1,\sigma},$$
$$\|f - \overline{f}\|^p_{L_p(\sigma)} \le (\operatorname{diam}\sigma)^{n+p-2}|\sigma|^{-1}[f]^p_{p,\sigma}, \quad p > 1,$$

где $\overline{f}$ *– среднее значение функции* f *на* σ:

$$\overline{f} = |\sigma|^{-1}\int_\sigma f(x)ds_x.$$

Сформулированное утверждение легко доказывается с помощью неравенства Гёльдера. Объединяя последнюю лемму с (5) и (6), приходим к такому утверждению.

Следствие. *Пусть* Γ *– та же поверхность, что и в теореме, и* $\Gamma_\varepsilon = \varepsilon\,\Gamma$, $\varepsilon > 0$. *Предположим, что*

$$E_\varepsilon : W_p^{1-1/p}(\Gamma_\varepsilon) \to W_p^1(\mathbf{R}^n), \quad p \in (1,\infty),$$

является оператором продолжения, подчиненным условию (5) *или*

$$E_\varepsilon : L_1(\Gamma_\varepsilon) \to W_1^1(\mathbf{R}^n)$$

есть оператор продолжения, удовлетворяющий условию (6). *Тогда*

$$\varepsilon^{-1}\|E_\varepsilon(f - \overline{f})\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla E_\varepsilon(f - \overline{f})\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\,(n,\Gamma,p)[f]_{p,\Gamma_\varepsilon},$$

где $1 \le p < \infty$, $f \in W_p^{1-1/p}(\Gamma_\varepsilon)$ *при* $p > 1$, $f \in L_1(\Gamma_\varepsilon)$ *при* $p = 1$, $\overline{f}$ *– среднее значение* f *на* Γ_ε *и* $[\cdot]_{p,\Gamma_\varepsilon}$ *– полунорма* (3) *или* (7).

3.1.2 Внутренность малой или большой области

Пусть $n \geq 2$ и $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная односвязная область класса $C^{0,1}$. При $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$. В данном разделе мы находим зависящую от ε норму в пространстве $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon)$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)}$ равномерно относительно ε.

Через c обозначаются положительные постоянные, которые зависят только от n, p, Ω. Эквивалентность положительных величин a, b (записываемая как $a \sim b$) означает, что $c^{-1} \leq a/b \leq c$.

Теорема. *Если* $p \in [1, \infty)$ *и* $\varepsilon \in (0, 1]$, *то*

$$\|h\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)} \sim \varepsilon^{1/p}\|h\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \tag{1}$$

и

$$\|h\|_{TL_p^1(\Omega_\varepsilon)} \sim [h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}, \tag{2}$$

где $[\cdot]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}$ *– полунорма, определенная в* (3.1.1/3) *или в* (3.1.1/7).

Доказательство. Пусть $u \in W_p^1(\Omega_\varepsilon),\ u\big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = h$. Оценку

$$[h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \leq c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}, \tag{3}$$

достаточно проверить при $\varepsilon = 1$. Общий случай выводится при помощи преобразования подобия. Пусть $\overline{h}$ – среднее значение функции h на $\partial\Omega$. Применяя теорему 3.1.1 и теорему 1.5.2, получаем

$$[h]_{p,\partial\Omega} = [h - \overline{h}]_{p,\partial\Omega} \leq c\,\|u - \overline{h}\|_{W_p^1(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Итак, оценка (3) установлена.

Неравенство

$$\varepsilon^{1/p}\|h\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c\left(\|u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)}\right) \tag{4}$$

выводится из известной оценки

$$\|v\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega)}$$

также с помощью преобразования подобия. Из (3) и (4) вытекают неравенства

$$\|h\|_{TL_p^1(\Omega_\varepsilon)} \geq c\,[h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon},$$

$$\|h\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)} \geq c\left(\varepsilon^{1/p}\|h\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}\right).$$

Для доказательства обратных неравенств следует построить оператор продолжения

$$\mathcal{E} : W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon) \to W_p^1(\Omega_\varepsilon) \ \text{ при } \ p > 1 \ \text{ или } \ \mathcal{E} : L_1(\partial\Omega_\varepsilon) \to W_1^1(\Omega_\varepsilon),$$

такой, что

$$\|\nabla \mathcal{E} h\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \le c\,[h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}, \tag{5}$$

$$c\,\|\mathcal{E} h\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} \le \varepsilon^{1/p}\|h\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [h]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}. \tag{6}$$

Введем ограниченный оператор продолжения

$$E_\varepsilon : W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon) \to W_p^1(\mathbf{R}^n) \ \text{ при } \ p > 1$$

или

$$E_\varepsilon : L_1(\partial\Omega_\varepsilon) \to W_1^1(\mathbf{R}^n),$$

удовлетворяющие соответственно условиям (3.1.1/5) или (3.1.1/6), где $\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$ (см. замечание 3.1.1). Пусть $\overline{h}$ есть среднее значение h на $\partial\Omega_\varepsilon$. Тогда формула

$$\mathcal{E} h = \overline{h} + E_\varepsilon(h - \overline{h})$$

задает требуемый оператор продолжения, поскольку (5) вытекает из следствия 3.1.1, а (6) – из того же следствия и оценки

$$|\overline{h}|^p \mathrm{mes}_n(\Omega_\varepsilon) \le c\,\varepsilon \|h\|^p_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)}.$$

Доказательство соотношений (1) и (2) закончено.

Замечание 1. Пусть Ω – та же область, что и в теореме, $\delta \ge 1$ и $\Omega_\delta = \delta\,\Omega$. Используя гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию границы $\partial\Omega_\delta$ конечным набором открытых шаров, нетрудно установить соотношение

$$\|h\|_{TW_p^1(\Omega_\delta)} \sim \begin{cases} \|h\|_{W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\delta)} & \text{при } \ p > 1, \\ \|h\|_{L_1(\partial\Omega_\delta)} & \text{при } \ p = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание 2. Соотношения, аналогичные (1), (2) и (7), могут быть записаны для любой связной компоненты границы области $\Omega_\delta = \delta\,\Omega$, если $\Omega \in C^{0,1}$ ограничена и многосвязна. Пусть, например, S_δ – такая компонента. Тогда

$$\inf\{\|u\|_{W_p^1(\Omega_\delta)} : u\big|_{S_\delta} = h\} \sim \min\{\delta^{1/p}, 1\}\|h\|_{L_p(S_\delta)} + [h]_{p,S_\delta},$$

где $\delta > 0$, $p \ge 1$. Эти соотношения выводятся аналогично (1), (7).

3.2 Пространство TW_p^1 для внешности малой области

Пусть Ω и G – ограниченные односвязные области в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Предположим, что эти области принадлежат классу $C^{0,1}$ и G содержит начало координат. Пусть еще ε, δ – положительные параметры, $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$, $G_\delta = \delta\,G$, $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$. Случай $\delta = \infty$ также рассматривается: $G_\infty = \mathbf{R}^n$. В пространствах $W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon)$, $W_p^{1-1/p}(\partial G_\delta)$ следов функций из $W_p^1(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon)$ мы находим явно задаваемые зависящие от ε, δ нормы, эквивалентные фактор-нормам

$$\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon} = \inf\{\|u\|_{W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} : u\big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = f\}, \tag{1}$$

$$\langle f\rangle_{p,\partial G_\delta} = \inf\{\|u\|_{W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} : u\big|_{\partial G_\delta} = f\} \tag{2}$$

равномерно относительно ε, δ. Далее через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от n, p, Ω, G, а соотношение $a \sim b$ равносильно неравенству $c^{-1} \leq a/b \leq c$.

Теорема. *Пусть* $\varepsilon \in (0, 1/2)$. *Если* $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$ *и* $\operatorname{dist}(\Omega_\varepsilon, \partial G_\delta) \geq c\,\varepsilon$, *то верны соотношения*

$$\langle f\rangle_{p,\partial G_\delta} \sim \min\{\delta^{1/p}, 1\}\|f\|_{L_p(\partial G_\delta)} + [f]_{p,\partial G_\delta}, \quad \delta < \infty, \tag{3}$$

$$\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \sim a(\varepsilon,\delta)\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}, \tag{4}$$

где $p \in [1, \infty)$, *нормы* $\langle\cdot\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon}$, $\langle\cdot\rangle_{p,\partial G_\delta}$ *определены в* (1), (2), $[\cdot]_{p,S}$ – *полунорма* (3.1.1/3) *или* (3.1.1/7) *и*

$$a(\varepsilon,\delta) = \begin{cases} \varepsilon^{(1-n)/p}\min\{\delta^{n/p}, \varepsilon^{n/p-1}\} & \text{при } p < n, \\ \varepsilon^{(1-n)/p}\min\{\delta, |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\} & \text{при } p = n, \\ \varepsilon^{(1-n)/p}\min\{\delta^{n/p}, 1\} & \text{при } p > n. \end{cases}$$

Доказательство. По теореме 2.1.3 существует линейный оператор продолжения:

$$W_p^1(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to W_p^1(G_\delta),$$

норма которого ограничена равномерно относительно ε, δ. Отсюда

$$\langle f\rangle_{p,\partial G_\delta} \sim \|f\|_{TW_p^1(G_\delta)},$$

значит, (3) следует из теоремы 3.1.2 (см. также замечание 3.1.2/1).

Обратимся к соотношению (4). Зафиксируем такие положительные числа ϱ, d, что $\overline{\Omega} \subset B_\varrho$, $G \supset B_d$ и рассмотрим несколько случаев.

1) Начнем со случая $2\varrho\varepsilon \geq \delta\, d$. Тогда $\varepsilon \sim \delta$, так как из включения $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset G_\delta$ следует неравенство $\varepsilon \leq c\,\delta$. При этих условиях соотношение (4) вытекает из теоремы 3.1.2 и замечания 3.1.2/2 (здесь роль области Ω в теореме 3.1.2 играет область $G_{\delta\varepsilon^{-1}} \setminus \overline{\Omega}$).

Для удобства дальнейших рассуждений введем ограниченную область $g \subset \mathbf{R}^n$ класса $C^{0,1}$, не зависящую от ε, δ и такую, что $\overline{\Omega} \subset g \subset G_{\delta\varepsilon^{-1}}$ (область g существует, так как $\operatorname{dist}(\Omega, \partial G_{\delta\varepsilon^{-1}}) \geq c$). Положим $g_\varepsilon = \varepsilon\, g$.

2) Пусть $2\varrho\varepsilon \geq 1$. По лемме 2.1.2/1 существует линейный оператор продолжения: $W_p^1(g_\varepsilon \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$, норма которого ограничена равномерно относительно ε. В этом случае

$$\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \sim \inf\{\|u\|_{W_p^1(g_\varepsilon\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} : u\big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = f\},$$

и (4) опять является следствием теоремы 3.1.2.

3) Предположим, что $2\varrho\varepsilon < \min\{1, \delta\, d\}$. Пусть

$$u \in W_p^1(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon), \quad u\big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = f.$$

Неравенство

$$[f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)}$$

следует из оценки

$$[f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \leq c\,\|\nabla u\|_{L_p(g_\varepsilon\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)},$$

которая доказывается точно так же, как (3.1.2/3) в теореме 3.1.2. Установим неравенство

$$a(\varepsilon,\delta)\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_{\varrho\varepsilon} \subset \overline{B}_{2\varrho\varepsilon} \subset B_{d\delta} \subset G_\delta.$$

Из известного неравенства

$$c\,\|v\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{L_p(\partial B_\varrho)} + \|\nabla v\|_{L_p(B_\varrho\setminus\overline{\Omega})}, \quad v \in W_p^1(B_\varrho \setminus \overline{\Omega}),$$

(см. теорему 1.5.2) с помощью преобразования подобия получаем

$$c\,\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{1-1/p}\|\nabla u\|_{L_p(B_{\varrho\varepsilon}\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} + \|u\|_{L_p(\partial B_{\varrho\varepsilon})}.$$

Поскольку $a(\varepsilon,\delta)\varepsilon^{1-1/p}\le c$, то (5) сводится к оценке

$$a(\varepsilon,\delta)\|u\|_{L_p(\partial B_{\varrho\varepsilon})}\le c\,\|u\|_{W_p^1(B_{d\delta}\setminus\overline{B}_{\varrho\varepsilon})}. \tag{6}$$

Не ограничивая общности, можно считать $d=\varrho=1$. Итак, пусть $2\varepsilon<\min\{1,\delta\}$, $u\in W_p^1(B_\delta\setminus\overline{B}_\varepsilon)$ и $u(x)=0$ при $|x|>1$, если $\delta>1$. Перейдем к сферическим координатам $x=(r,\theta)$ и запишем очевидную оценку

$$\left|u(\varepsilon,\theta)-\frac{2}{\delta}\int_{\delta/2}^{\delta}u(r,\theta)dr\right|\le\int_\varepsilon^\delta|u_r(r,\theta)|dr,\quad \theta\in S^{n-1}.$$

Используя неравенство Гёльдера, найдем, что

$$c\,|u(\varepsilon,\theta)|^p\le\delta^{-n}\int_{\delta/2}^{\delta}|u(r,\theta)|^p r^{n-1}dr+$$

$$+\int_\varepsilon^\delta|u_r(r,\theta)|^p r^{n-1}dr\left(\int_\varepsilon^1 r^{(p-n)/(p-1)}\frac{dr}{r}\right)^{p-1}$$

(в случае $p=1$ последний сомножитель следует заменить на ε^{1-n}). Интегрирование по сфере S^{n-1} приводит к оценке

$$c\,\varepsilon^{1-n}\|u\|^p_{L_p(\partial B_\varepsilon)}\le\delta^{-n}\|u\|^p_{L_p(B_\delta\setminus\overline{B}_\varepsilon)}+C\|\nabla u\|^p_{L_p(B_\delta\setminus\overline{B}_\varepsilon)},$$

где $C=\max\left\{1,\varepsilon^{p-n}\right\}$ при $p\ne n$ и $C=|\log\varepsilon|^{p-1}$ при $p=n$.

Таким образом,

$$\varepsilon^{(1-n)/p}\min\left\{\delta^{n/p},C^{-1/p}\right\}\|u\|_{L_p(\partial B_\varepsilon)}\le c\,\|u\|_{W_p^1(B_\delta\setminus\overline{B}_\varepsilon)}.$$

Следовательно, верны оценки (6) и (5). Мы показали, что

$$c\,\langle f\rangle_{p,\partial\Omega_\varepsilon}\le a(\varepsilon,\delta)\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)}+[f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}.$$

Для проверки обратного неравенства в случае 3) требуется построить оператор продолжения

$$\mathcal{E}:W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon)\to W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)\ \text{ при }\ p>1$$

или

$$\mathcal{E}:L_1(\partial\Omega_\varepsilon)\to W_1^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)$$

так, чтобы

$$c\,\|\mathcal{E}f\|_{W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} \le a(\varepsilon,\delta)\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}, \quad 1 \le p < \infty. \qquad (7)$$

Сначала определим вспомогательные операторы продолжения

$$\mathcal{E}_i : W_p^{1-1/p}(\partial\Omega_\varepsilon) \to W_p^1(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon), \quad p \in (1,\infty), \quad 1 \le i \le 4,$$

или

$$\mathcal{E}_i : L_1(\partial\Omega_\varepsilon) \to W_1^1(G_\delta \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon),$$

для которых

$$c\,\|\mathcal{E}_i f\|_{W_p^1(G_\delta\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} \le a_i\|f\|_{L_p(\Omega_\varepsilon)} + [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon},$$

где $1 \le i \le 4$, $1 \le p < \infty$, $a_1 = \varepsilon^{(1-p)/p}$, $a_2 = (\varepsilon^{1-n}\delta^n)^{1/p}$, $a_3 = \varepsilon^{(1-n)/p}$, $a_4 = (\varepsilon|\log\varepsilon|)^{(1-p)/p}$ (последнее для $p = n$).

В силу замечания 3.1.1 существует продолжение $f \mapsto E_\varepsilon f$ из $\partial\Omega_\varepsilon$ на $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющее условию

$$\varepsilon^{-1}\|E_\varepsilon f\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla E_\varepsilon f\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\left(\varepsilon^{(1-p)/p)}\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}\right).$$

Таким образом, можно положить $\mathcal{E}_1 = E_\varepsilon$. Далее, оператор $\mathcal{E}_2$ может быть определен формулой

$$\mathcal{E}_2 f = \overline{f} + E_\varepsilon(f - \overline{f}),$$

где $\overline{f}$ – среднее значение f на $\partial\Omega_\varepsilon$. Требуемая оценка для $\mathcal{E}_2$ (при $\delta < \infty$) вытекает из следствия 3.1.1 и неравенства

$$|\overline{f}|^p \mathrm{mes}_n(G_\delta) \le c\,\delta^n\varepsilon^{1-n}\|f\|^p_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)}.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(B_1)$, $\psi\big|_{B_{1/2}} = 1$. Тогда

$$\|\overline{f}\psi\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le c\,\varepsilon^{(1-n)/p}\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)},$$

а кроме того, $\left(\overline{f}\psi + E_\varepsilon(f - \overline{f})\right)\big|_{\partial\Omega_\varepsilon} = f$, так как $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset B_{\varrho\varepsilon} \subset B_{1/2}$. Следовательно, можно положить

$$\mathcal{E}_3 f = \overline{f}\psi + E_\varepsilon(f - \overline{f}).$$

Пусть $p = n$ и пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \ \text{если} \ x \in B_{\varrho\varepsilon}, \\ \log|x/\varrho|/\log\varepsilon, \ \text{если} \ x \in B_\varrho \setminus B_{\varrho\varepsilon}, \\ 0, \ \text{если} \ x \in \mathbf{R}^n \setminus B_\varrho. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $\varphi \in W_p^1(\mathbf{R}^n)$ и

$$\|\varphi\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le c\,|\log\varepsilon|^{(1-p)/p}.$$

Поскольку

$$|\overline{f}|\,\|\varphi\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n} + \|E_\varepsilon(f-\overline{f})\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le$$

$$\le c\,(\varepsilon|\log\varepsilon|)^{(1-p)/p}\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon},$$

то $\mathcal{E}_4$ можно задать формулой

$$\mathcal{E}_4 f = \overline{f}\varphi + E_\varepsilon(f-\overline{f}).$$

Определим оператор $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условию (7). В случае $p<n$ положим

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \ \text{ при } \ \delta^n > \varepsilon^{n-p} \ \text{ и } \ \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \ \text{ в противном случае.}$$

Если $p=n$, то выберем

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_4 \ \text{ при } \ \delta^p > |\log\varepsilon|^{1-p} \ \text{ и } \ \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \ \text{ в противном случае.}$$

Наконец, в случае $p>n$ определим

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_3 \ \text{ при } \ \delta > 1 \ \text{ и } \ \mathcal{E} = \mathcal{E}_2 \ \text{ при } \ \delta \le 1.$$

Теорема доказана.

При $\delta = \infty$ мы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если $\varepsilon \in (0, 1/2)$, то*

$$\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} \sim a(\varepsilon)\|f\|_{L_p(\partial\Omega_\varepsilon)} + [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon},$$

где $[\cdot]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}$ – та же полунорма, что и в теореме и

$$a(\varepsilon) = \begin{cases} \min\{\varepsilon^{(1-n)/p},\ \varepsilon^{(1-p)/p}\} \ \text{ при } \ p \ne n, \\ (\varepsilon|\log\varepsilon|)^{(1-p)/p} \ \text{ при } \ p = n. \end{cases}$$

Отметим еще одно свойство следов функций, определенных на $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$.

Замечание. Пусть Ω_ε – та же область, что и в теореме. Имеет место следующее соотношение:

$$\|f\|_{TL_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega}_\varepsilon)} \sim [f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon}, \quad p \in [1,\infty).$$

В самом деле, пусть $u \in L^1_p(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon)$, $u|_{\partial\Omega_\varepsilon} = f$. Зафиксируем такое число $r > 0$, что $\overline{\Omega} \subset B_r$. Оценка

$$[f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon} \leq c \,\|\nabla u\|_{L_p(B_{r\varepsilon} \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon)}$$

доказывается так же, как и (3.1.2/3) в теореме 3.1.2. Отсюда

$$\|f\|_{TL^1_p(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon)} \geq c\,[f]_{p,\Omega_\varepsilon}.$$

Обратное неравенство является следствием оценки

$$\|\nabla \mathcal{E}_2 f\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leq c\,[f]_{p,\partial\Omega_\varepsilon},$$

где $f \mapsto \mathcal{E}_2 f$ – оператор продолжения из $\partial\Omega_\varepsilon$ на $\mathbf{R}^n$, построенный в теореме.

3.3 Пространство следов для тонкого цилиндра

В этом разделе мы рассматриваем тонкий цилиндр (ширины $O(\varepsilon)$) и решаем задачу, аналогичную той, что была сформулирована в разд. 3.1.2. Функции, определенной на границе цилиндра, ставится в соответствие явно задаваемая норма (или полунорма), эквивалентная фактор-норме (3.1.1/1) (или полунорме (3.1.1/2)) равномерно относительно ε. Полученные результаты применяются в разд. 3.3.2 для описания пространства граничных следов функций в “бесконечной воронке”.

3.3.1 Норма в пространстве следов на тонком цилиндре

Пусть $n > 2$ и $\omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ – область класса $C^{0,1}$ с компактным замыканием и связной границей γ. Для определенности будем далее предполагать, что $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$. Обозначим через Ω цилиндр

$$\Omega = \left\{ x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : \ y \in \omega, \ z \in \mathbf{R}^1 \right\}$$

и положим $\Gamma = \partial\Omega$. При $\varepsilon > 0$ снабдим пространство $W^1_p(\Omega)$ нормой

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega,\varepsilon)} = \varepsilon\,\|u\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \quad p \geq 1. \tag{1}$$

В пространстве следов $u|_{\partial\Omega}$ функций $u \in W_p^1(\Omega)$ указанная норма порождает фактор-норму

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega,\varepsilon)} = \inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\Omega,\varepsilon)} : \ u\big|_{\partial\Omega} = f\right\} \tag{2}$$

В настоящем разделе через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от n, p, ω. По определению $a \sim b$, если $c^{-1} \le a/b \le c$.

В следующем утверждении дана явная норма функции на Γ, эквивалентная норме (2) равномерно относительно $\varepsilon \in (0, 1]$.

Теорема 1. *При* $p \in [1, \infty)$, $\varepsilon \in (0, 1]$ *верны соотношения*

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega)} \sim |f|_{p,\Gamma}, \tag{3}$$

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega,\varepsilon)} \sim \varepsilon \, \|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma}, \tag{4}$$

где

$$|f|_{p,\Gamma} = \Bigg(\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta - z|<1\}} |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \Bigg)^{1/p}, \ \ p > 1, \tag{5}$$

$$|f|_{1,\Gamma} = \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta - z|<1\}} |f(x) - f(\xi)| ds_x ds_\xi, \tag{6}$$

$x = (y, z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$ *и* ds_x, ds_ξ *– элементы площади поверхности* Γ.

Доказательство. Пусть $u \in L_p^1(\Omega)$, $u|_\Gamma = f$. Положим

$$\Gamma_j = \gamma \times (j - 1, j + 2), \quad j \in \mathbf{Z}^1.$$

Тогда

$$|f|^p_{p,\Gamma} = \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} \int_j^{j+1} dz \int_\gamma d\gamma_y \int_{\{\xi\in\Gamma:|\zeta-z|<1\}} \frac{|f(x) - f(\xi)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}} \, ds_\xi \le$$

$$\le \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} [f]^p_{p,\Gamma_j}, \quad p \in (1, \infty).$$

Здесь $[\cdot]_{p,\Gamma_j}$ – полунорма, определенная в (3.1.1/3). Пусть

$$\Omega_j = \omega \times (j - 1, j + 2).$$

Из теоремы 3.1.2 следует, что

$$[f]^p_{p,\Gamma_j} \leq c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega_j)}, \quad j \in \mathbf{Z}^1.$$

Суммируя по $j \in \mathbf{Z}^1$, приходим к оценке

$$|f|_{p,\Gamma} \leq c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{7}$$

Аналогичные рассуждения приводят к (7) и в случае $p = 1$.

Пусть теперь $u \in W^1_p(\Omega),\ u|_\Gamma = f$. По теореме 3.1.1

$$\|f\|_{L_p(\Gamma_j)} \leq c\,\|u\|_{W^1_p(\Omega_j)}, \quad j \in \mathbf{Z}^1, \quad p \geq 1,$$

откуда

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} \leq c\,\|u\|_{W^1_p(\Omega)}.$$

Итак, справедливы неравенства

$$|f|_{p,\Gamma} \leq c\,\|f\|_{TL^1_p(\Omega)}$$

и

$$\varepsilon\,\|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma} \leq c\,\|f\|_{TW^1_p(\Omega,\varepsilon)}.$$

Чтобы установить обратные неравенства, определим продолжение $\mathcal{E}f$ функции f с поверхности Γ в цилиндр Ω, такое, что

$$\|\nabla \mathcal{E}f\|_{L_p(\Omega)} \leq c\,|f|_{p,\Gamma}, \tag{8}$$

$$\|\mathcal{E}f\|_{W^1_p(\Omega,\varepsilon)} \leq c\left(\varepsilon\,\|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma}\right). \tag{9}$$

Построение продолжения $f \mapsto \mathcal{E}f$. Пусть

$$\sigma_j = ((j-1)/2,\ (j+1)/2)\,, \quad j \in \mathbf{Z}^1.$$

Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\varphi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ в $\mathbf{R}^1$, подчиненное покрытию $\{\sigma_j\}$. Введем еще набор функций $\{\psi_j\}$, удовлетворяющих условиям

$$\psi_j \in C_0^\infty(\sigma_j), \quad \psi_j\varphi_j = \varphi_j, \quad j \in \mathbf{Z}^1.$$

Можно считать, что

$$\operatorname{dist}\,(\operatorname{supp}\psi_j, \mathbf{R}^1 \setminus \sigma_j) \geq c$$

и, кроме того, $|\varphi_j'(z)| + |\psi_j'(z)| \le c$ для всех $j \in \mathbf{Z}^1$ и $z \in \mathbf{R}^1$. Пусть $f \in L_{p,loc}(\Gamma)$ и $|f|_{p,\Gamma} < \infty$. Обозначим через $\overline{f}_j$ среднее значение f на поверхности

$$S_j = \gamma \times \sigma_j$$

и положим

$$f_j(x) = \psi_j(z)\big(f(x) - \overline{f}_j\big), \quad x = (y, z) \in S_j.$$

По теореме 3.1.1 существует продолжение $E_j f_j$ функции f_j с поверхности S_j на $\mathbf{R}^n$, такое, что

$$c\,\|E_j f_j\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le \|f_j\|_{L_p(S_j)} + [f_j]_{p,S_j} \tag{10}$$

(при $p = 1$ последнее слагаемое можно опустить). Проверим, что требуемый оператор продолжения $f \mapsto \mathcal{E}f$ может быть определен формулой

$$(\mathcal{E}f)(x) = \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} \overline{f}_j \varphi_j(z) + \sum\nolimits_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j(z)(E_j f_j)(x), \tag{11}$$

где $x = (y, z) \in \Omega$. В самом деле, равенство $\mathcal{E}f|_\Gamma = f$ следует из (11). Обозначим через $v(x)$ первую сумму в правой части (11). Ясно, что

$$v\big|_{G_j} = \overline{f}_{j+1} + (\overline{f}_j - \overline{f}_{j+1})\varphi_j, \quad G_j = \omega \times (j/2, (j+1)/2),$$

и, значит,

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega)} = \sum\nolimits_j |\overline{f}_j - \overline{f}_{j+1}|^p \|\nabla \varphi_j\|^p_{L_p(G_j)} \le$$

$$\le c \sum\nolimits_j \|f - \overline{f}_j\|^p_{L_p(S_j)} \le c \sum\nolimits_j [f]^p_{p,S_j}. \tag{12}$$

Здесь на последнем шаге использована лемма 3.1.1. Поскольку

$$[f]^p_{p,S_j} \le \int_{S_j} ds_x \int_{\{\xi \in \Gamma : |\zeta - z| < 1\}} |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_\xi}{|x - \xi|^{n+p-2}}, \quad p > 1,$$

то последняя сумма в (12) не превосходит $c\,|f|^p_{p,\Gamma}$. Таким образом,

$$\|\nabla v\|_{L_p(\Omega)} \le c\,|f|_{p,\Gamma}. \tag{13}$$

Те же рассуждения приводят к (13) и в случае $p = 1$.

Обозначим через $w(x)$ вторую сумму в правой части (11). С помощью (10) получаем

$$\|w\|^p_{W^1_p(\Omega)} \le c \sum\nolimits_j \left(\|f_j\|^p_{L_p(S_j)} + [f_j]^p_{p,S_j}\right) \tag{14}$$

(слагаемое $[f_j]^p_{p,S_j}$ может быть опущено при $p = 1$). Если $p > 1$, то

$$[f_j]^p_{p,S_j} \le c\,(A_1 + A_2),$$

где

$$A_1 = \int_{S_j} |\psi_j(z)|^p ds_x \int_{S_j} |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}},$$

$$A_2 = \int_{S_j} |f(\xi) - \overline{f}_j|^p ds_\xi \int_{S_j} |\psi_j(z) - \psi_j(\zeta)|^p \frac{ds_x}{|x-\xi|^{n+p-2}},$$

$x = (y, z),\ \xi = (\eta, \zeta)$. В силу оценки

$$|\psi_j(z) - \psi_j(\zeta)| \le c\,|\zeta - z|$$

последний интеграл по S_j ограничен независимо от $j \in \mathbf{Z}^1$ и $\xi \in S_j$. Отсюда и из леммы 3.1.1 следует оценка $A_2 \le c\,[f]^p_{p,S_j}$. Ясно также, что $A_1 \le c\,[f]^p_{p,S_j}$. Таким образом,

$$[f_j]_{p,S_j} \le c\,[f]_{p,S_j}.$$

Кроме того, по лемме 3.1.1

$$\|f_j\|_{L_p(S_j)} \le c\,[f]_{p,S_j}, \quad p \ge 1.$$

Объединяя две последние оценки с (13) и (14), получим

$$\|w\|^p_{W^1_p(\Omega)} \le c \sum\nolimits_j [f]^p_{p,S_j} \le c\,|f|^p_{p,\Gamma}, \quad p \in [1, \infty). \tag{15}$$

Теперь из (13) и (15) вытекает (8).

Пусть $f \in L_p(\Gamma)$, $\quad |f|_{p,\Gamma} < \infty$. В этом случае требуется проверить неравенство (9). Согласно (13) и (15), (9) следует из цепочки

$$\|v\|^p_{L_p(\Omega)} \le c \sum\nolimits_j |\overline{f}_j|^p \le c \sum\nolimits_j \|f\|^p_{L_p(S_j)} \le c\,\|f\|^p_{L_p(\Gamma)}.$$

Доказательство теоремы 1 закончено.

Замечание 1. Формула (11) имеет смысл для $x \in \mathbf{R}^n$, а из доказательства оценок (8) и (9) следует, что они остаются верными, если Ω заменить на более широкий цилиндр, например на $B_2^{(n-1)} \times \mathbf{R}^1$.

Замечание 2. Если $\omega \in C^{0,1}$ – многосвязная область и Γ – связная компонента $\partial\Omega$, то

$$\inf \left\{ \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} : u\big|_\Gamma = f \right\} \sim |f|_{p,\Gamma}$$

и

$$\inf \left\{ \|u\|_{W_p^1(\Omega,\varepsilon)} : u\big|_\Gamma = f \right\} \sim \varepsilon \, \|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma}.$$

Эти соотношения доказываются так же, как (3) и (4).

Замечание 3. Если $a \in (0, \infty)$, то

$$|f|_{p,\Gamma}^p \sim \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma : |\zeta - z| < a\}} g(x,\xi) ds_x ds_\xi, \tag{16}$$

где

$$g(x,\xi) = \begin{cases} |f(x) - f(\xi)|^p |x-\xi|^{2-n-p} & \text{при} \ \ p > 1, \\ |f(x) - f(\xi)| \ \ \text{при} \ \ p = 1, \end{cases}$$

а константы в соотношении эквивалентности (16) зависят только от n, p, ω, a.

Для проверки этого утверждения следует повторить доказательство соотношения (3) при

$$\Gamma_j = \{x \in \Gamma : z \in ((j-1)a, (j+2)a)\}$$

и

$$\sigma_j = ((j-1)a/2, (j+1)a/2)\,.$$

Рассмотрим тонкий цилиндр $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$ и положим $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$. Формулируемое ниже утверждение вытекает из теоремы 1 при помощи преобразования подобия.

Теорема 2. *Если $p \in [1, \infty)$ и $\varepsilon \in (0,1)$, то верны соотношения*

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega_\varepsilon)} \sim |f|_{p,\Gamma_\varepsilon,\varepsilon}, \tag{17}$$

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)} \sim \varepsilon^{1/p} \|f\|_{L_p(\Gamma_\varepsilon)} + |f|_{p,\Gamma_\varepsilon,\varepsilon}, \tag{18}$$

где норма $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon)}$ *и полунорма* $\|\cdot\|_{TL_p^1(\Omega_\varepsilon)}$ *заданы в* (3.1.1/1–2),

$$|f|^p_{p,\Gamma_\varepsilon,\varepsilon} = \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma_\varepsilon:|\zeta-z|<\varepsilon\}} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}, \quad p>1, \tag{19}$$

$$|f|_{1,\Gamma_\varepsilon,\varepsilon} = \varepsilon^{1-n} \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma_\varepsilon:|\zeta-z|<\varepsilon\}} |f(x)-f(\xi)| ds_x ds_\xi, \tag{20}$$

$x=(y,z),\ \xi=(\eta,\zeta)$ *и* ds_x, ds_ξ – *элементы площади поверхности* Γ_ε.

3.3.2 Следы на границе бесконечной воронки

В качестве приложения результатов предыдущего раздела мы изучим пространство граничных значений функций, определенных в описываемой ниже бесконечной воронке.

Пусть φ – положительная функция на $[0,\infty)$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $\varphi(z)\to 0$ при $z\to\infty$. Пусть еще $\omega\subset \mathbf{R}^{n-1}$ $(n\ge 3)$ – односвязная область класса $C^{0,1}$. Рассмотрим бесконечную воронку

$$G=\{x=(y,z)\in\mathbf{R}^n : z\in(0,\infty),\ y/\varphi(z)\in\omega\},$$

соответствующую заданным φ и ω (см. Рис. 4).

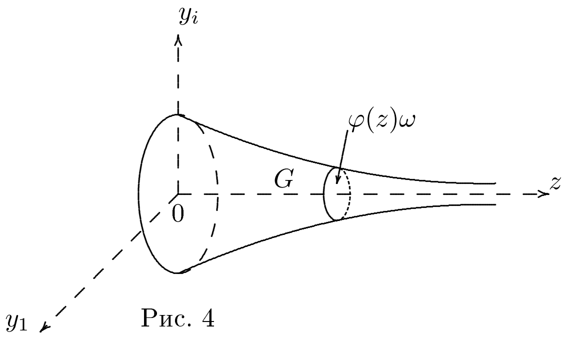

Рис. 4

Положительные константы c, фигурирующие в данном разделе и константы в соотношениях эквивалентности зависят только от n, p, ω, φ.

Ниже мы дополнительно предполагаем, что $\varphi(z)\sim\varphi(\zeta)$ при $|z-\zeta|\le 1$. В следующем утверждении дано описание пространства $TW_p^1(G)$ для $p\in(1,\infty)$.

Теорема 1. *Если $p \in (1,\infty)$, то верно соотношение*

$$\|f\|_{TW_p^1(G)} \sim [f]_{p,\sigma} + \left(\int_S |f(x)|^p \varphi(z) ds_x\right)^{1/p} +$$

$$+\Bigg(\iint\limits_{\{x,\xi\in S: |\zeta - z| < M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\Bigg)^{1/p}, \qquad (1)$$

где $\sigma = \{x \in \partial G : z < 2\}$, $[\cdot]_{p,\sigma}$ – полунорма (3.1.1/3), $x = (y,z)$, $\xi = (\eta,\zeta)$, $S = \{x \in \partial G : z > 0\}$ и $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z),\varphi(\zeta)\}$.

Доказательство. Обозначим через $\langle f\rangle_{p,S}$ сумму двух последних слагаемых в правой части (1). Установим сначала соотношение

$$\|f\|_{TW_p^1(G)} \sim \langle f\rangle_{p,S} \qquad (2)$$

для функций f, определенных на ∂G и удовлетворяющих условию $f(x) = 0$ при $z < 1$.

Введем гладкое разбиение единицы $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty$ на интервале $[1,\infty)$, подчиненное покрытию $(j-1, j+1)$, $j = 1,2,\dots$ Пусть еще

$$\lambda_j \in C_0^\infty(j-1,j+1), \quad \lambda_j\mu_j = \mu_j \ \text{ при } \ j \geq 1.$$

При этом можно считать, что $0 \leq \lambda_j, \mu_j \leq 1$ и $|\lambda_j'| + |\mu_j'| \leq c$. Проверим соотношение

$$\langle f\rangle_{p,S}^p \ \sim \sum\nolimits_{j=1}^\infty \langle \mu_j f\rangle_{p,S}^p, \qquad (3)$$

где $f(x) = 0$ при $z < 1$. В самом деле, очевидно, что

$$\int_S |f(x)|^p \varphi(z) ds_x \sim \sum\nolimits_{j\geq 1} \int_S |\mu_j(z) f(x)|^p \varphi(z) ds_x.$$

Далее, пусть $\{f\}_{p,S}$ есть последнее слагаемое в правой части (1). Тогда

$$\{f\}_{p,S}^p \leq c \sum\nolimits_{j\geq 1} \{\mu_j f\}_{p,S}^p,$$

так как

$$|f(x) - f(\xi)|^p \leq c \sum\nolimits_{j\geq 1} |\mu_j(z) f(x) - \mu_j(\zeta) f(\xi)|^p.$$

Отсюда

$$\langle f\rangle_{p,S}^p \leq c \sum\nolimits_{j\geq 1} \langle \mu_j f\rangle_{p,S}^p.$$

Для доказательства обратного неравенства заметим, что

$$\sum_{j\geq 1}\{\mu_j f\}^p_{p,S} \leq c\sum_{j\geq 1}\iint\limits_H |\mu_j(z)-\mu_j(\zeta)|^p|f(x)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}+$$

$$+\,c\sum_{j\geq 1}\iint\limits_H \mu_j(\zeta)^p|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}, \tag{4}$$

где $H=\{(x,\xi): x,\xi\in S,\ |\zeta-z|<M(z,\zeta)\}$. Поскольку $\varphi(z)\sim\varphi(\zeta)$ при $(x,\xi)\in H$ и

$$\sum\nolimits_{j\geq 1}|\mu_j(z)-\mu_j(\zeta)|^p\leq c\,|z-\zeta|^p,$$

то первая сумма в правой части (4) не превосходит

$$c\int_S |f(x)|^p ds_x\int_{\{\xi\in S:|\zeta-z|<c\,\varphi(z)\}}\frac{ds_\xi}{|x-\xi|^{n-2}},$$

что не больше

$$c\int_S |f(x)|^p\varphi(z)ds_x.$$

Так как $\sum_{j\geq 1}\mu_j(\zeta)^p\ \leq\ 1$, то вторая сумма в правой части (4) мажорируется величиной $\{f\}^p_{p,S}$. Соотношение (3) установлено.

Пусть $f\in TW^1_p(G)$ и $u\in W^1_p(G)$, $u\big|_{\partial G}=f$. Тогда

$$c\,\|u\|^p_{W^1_p(G)}\geq\sum\nolimits_{j\geq 1}\|\mu_j u\|^p_{W^1_p(G)},$$

причем

$$\operatorname{supp}\mu_j u\subset G_j,\quad G_j=\{x\in G: z\in(j-1,j+1)\}.$$

Рассмотрим отображение

$$x\mapsto F_j x=X=(s,t),\quad s=y/\varphi(z),\ t=z/\varphi_j,$$

где $\varphi_j=\varphi(j)$. Очевидно F_jG_j – подобласть цилиндра $\Omega=\omega\times\mathbf{R}^1$. Замена переменных дает

$$\|u\|^p_{W^1_p(G)}\geq c\ \sum\nolimits_{j=1}^{\infty}\varphi_j^{n-p}\|(\mu_j u)\circ F_j^{-1}\|^p_{W^1_p(\Omega,\varphi_j)},$$

откуда

$$\|f\|^p_{TW^1_p(G)} \geq c \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \varphi_j^{n-p} \|(\mu_j f) \circ F_j^{-1}\|^p_{TW^1_p(\Omega,\varphi_j)} \tag{5}$$

(напомним, что нормы $\|\cdot\|_{W^1_p(\Omega,\varphi_j)}$ и $\|\cdot\|_{TW^1_p(\Omega,\varphi_j)}$ определены в (3.3.1/1–2)). По теореме 3.3.1/1 (см. также замечание 3.3.1/3) при всех $j \geq 1$ верно соотношение

$$\varphi_j^{n-p} \|(\mu_j f) \circ F_j^{-1}\|^p_{TW^1_p(\Omega,\varphi_j)} \sim \langle \mu_j f \rangle^p_{p,S}. \tag{6}$$

Объединяя (3), (5) и (6), получим

$$\|f\|_{TW^1_p(G)} \geq c \, \langle f \rangle_{p,S}.$$

Проверим обратное неравенство. Пусть $\langle f \rangle_{p,S} < \infty$ и $f(x) = 0$ при $z < 1$. Согласно теореме 3.3.1/1 и ввиду (6), для каждого $j \geq 1$ существует такая функция $v_j \in W^1_p(\Omega)$, что $v_j|_{\partial\Omega} = (\mu_j f) \circ F_j^{-1}$ и

$$\|v_j\|_{W^1_p(\Omega,\varphi_j)} \leq c \, \varphi_j^{(p-n)/p} \langle \mu_j f \rangle_{p,S}.$$

Носитель функции $w_j = (\lambda_j \circ F_j^{-1}) v_j$ содержится в множестве $F_j G_j$. Кроме того, $w_j\big|_{\partial\Omega} = (\mu_j f) \circ F_j^{-1}$ и

$$\|w_j\|_{W^1_p(\Omega,\varphi_j)} \leq c \, \|v_j\|_{W^1_p(\Omega,\varphi_j)}.$$

Полагая $u_j = w_j \circ F_j$, получим, что $\operatorname{supp} u_j \subset G_j$, $u_j|_{\partial G} = \mu_j f$ а также

$$\|u_j\|_{W^1_p(G)} \leq c \, \langle \mu_j f \rangle_{p,S}.$$

Пусть $u = \sum_{j \geq 1} u_j$. Тогда $u\big|_{\partial G} = f$ и

$$\|u\|^p_{W^1_p(G)} \leq c \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \|u_j\|^p_{W^1_p(G)} \leq c \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} \langle \mu_j f \rangle^p_{p,S}.$$

Отсюда и из (3) вытекает неравенство

$$\|f\|_{TW^1_p(G)} \leq c \, \langle f \rangle_{p,S}$$

и, следовательно, соотношение (2).

Для завершения доказательства теоремы выведем (1) из (2). Это может быть сделано с помощью срезающей функции g со свойствами

$$g \in C^{\infty}([0,\infty)), \quad 0 \leq g \leq 1, \quad g\big|_{[0,1]} = 1, \quad g\big|_{[3/2,\infty)} = 0.$$

В самом деле, для любой функции $f \in L_{p,loc}(\partial G)$ имеем

$$\langle f\rangle_{p,S} + [f]_{p,\sigma} \le c\,\langle (1-g)f\rangle_{p,S} + c\,\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}. \tag{7}$$

Если $f \in TW_p^1(G)$, тогда в силу (2) и теоремы 3.1.1 правая часть (7) не превосходит

$$c\,\|(1-g)f\|_{TW_p^1(G)} + c\,\|f\|_{TW_p^1(G)}.$$

Отсюда

$$\langle f\rangle_{p,S} + [f]_{p,\sigma} \le c\,\|f\|_{TW_p^1(G)}.$$

Проверим обратную оценку. Пусть $\langle f\rangle_{p,S} + [f]_{p,\sigma} < \infty$. Из (2) следуют включение $(1-g)f \in TW_p^1(G)$ и оценка

$$\|(1-g)f\|_{TW_p^1(G)} \le c\,\langle (1-g)f\rangle_{p,S}.$$

Кроме того, по теореме 3.1.1

$$\|gf\|_{TW_p^1(G)} \le c\,\|gf\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}.$$

Заметим, что последняя норма не больше $c\left([f]_{p,\sigma} + \|f\|_{L_p(S\cap\sigma)}\right)$.

Таким образом, $f \in TW_p^1(G)$ и

$$\|f\|_{TW_p^1(G)} \le \|gf\|_{TW_p^1(G)} + \|(1-g)f\|_{TW_p^1(G)} \le$$

$$\le c\left([f]_{p,\sigma} + \langle f\rangle_{p,S}\right).$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Поверхность σ в теореме может быть заменена поверхностью $\{x \in \partial G : z < a\}$, $a \in (0,\infty)$. В этом случае константы в соотношении эквивалентности (1) вообще говоря зависят от a.

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 1 (и даже несколько проще).

Теорема 2. *В обозначениях теоремы* 1 *верно соотношение*

$$\|f\|_{TW_1^1(G)} \sim \|f\|_{L_1(\partial G\setminus S)} + \int_S \varphi(z)|f(x)|ds_x +$$

$$+ \iint\limits_{\{x,\xi\in S:|\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|\frac{ds_x ds_\xi}{M(z,\zeta)^{n-1}}.$$

3.4 Интегральные оценки для функций на цилиндрической поверхности

В этом разделе мы докажем несколько вспомогательных интегральных неравенств для функций, определенных на границе цилиндра

$$\Omega = \omega \times \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^n, \quad n > 2,$$

описанного в разд. 3.3.1. Эти неравенства будут использованы в последующих разделах при изучении следов функций, определенных во внешности цилиндра. Мы сохраняем условия и обозначения, введенные в начале разд. 3.3.1. Рассмотрим еще круговой цилиндр

$$G = B_1^{(n-1)} \times \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^n$$

с границей $\partial G = S$. Предположим, что $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$ и, следовательно, $\overline{\Omega} \subset G$. Начнем с такого утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\varphi \in L_1(\mathbf{R}^1)$, $\varphi \geq 0$. Если $u \in L_p^1(G \setminus \overline{\Omega})$, то*

$$c \int\limits_{\mathbf{R}^1} \|\Delta_h u\|^p_{L_p(\Gamma)} \varphi(h) dh \leq$$

$$\leq \|\nabla u\|^p_{L_p(G \setminus \overline{\Omega})} + \int\limits_{\mathbf{R}^1} \|\Delta_h u\|^p_{L_p(S)} \varphi(h) dh, \tag{1}$$

где $p \in [1, \infty)$, $c = c(n, p, \gamma, \varphi) > 0$, $(\Delta_h u)(y, z) = u(y, z+h) - u(y, z)$. Неравенство (1) остается верным, если Γ и S поменять местами.

Доказательство. Пусть $B = B_1^{(n-1)}$. Из хорошо известного неравенства

$$c\,\|v\|_{L_p(\gamma)} \leq \|v\|_{L_p(\partial B)} + \|\nabla v\|_{L_p(B \setminus \overline{\omega})}, \quad v \in L_p^1(B \setminus \overline{\omega}),$$

при всех $h \in \mathbf{R}^1$ и почти всех $z \in \mathbf{R}^1$ вытекает оценка

$$c\,\|(\Delta_h u)(\cdot, z)\|^p_{L_p(\gamma)} \;\leq\; \|(\Delta_h u)(\cdot, z)\|^p_{L_p(\partial B)} +$$

$$+ \|(\nabla u)(\cdot, z+h)\|^p_{L_p(B \setminus \overline{\omega})} + \|(\nabla u)(\cdot, z)\|^p_{L_p(B \setminus \overline{\omega})}.$$

Интегрирование по $z \in \mathbf{R}^1$ дает

$$c\,\|\Delta_h u\|^p_{L_p(\Gamma)} \leq \|\Delta_h u\|^p_{L_p(S)} + \|\nabla u\|^p_{L_p(G \setminus \overline{\Omega})}.$$

Умножая последнее неравенство на $\varphi(h)$ и интегрируя по $h \in \mathbf{R}^1$, приходим к (1). Аналогично выводится неравенство, которое получается, если Γ и S поменять местами в (1).

Лемма 2. *Пусть* $g \in L_{p,loc}(\Gamma)$, $p \in [1, \infty)$ *и* φ *– неотрицательная функция из* $L_1(1, \infty)$. *Тогда*

$$\iint_{\gamma\times\gamma} \|g(y,\cdot) - g(\eta,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} d\gamma_y d\gamma_\eta \le c\,|g|^p_{p,\Gamma} \tag{2}$$

и

$$|g|^p_{p,\Gamma} + \iint_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta - z|>1\}} |g(x) - g(\xi)|^p \varphi(|\zeta - z|) ds_x ds_\xi \sim$$

$$\sim |g|^p_{p,\Gamma} + \int_1^\infty \|\Delta_h g\|^p_{L_p(\Gamma)} \varphi(h) dh, \tag{3}$$

где $x = (y, z), \xi = (\eta, \zeta)$, $(\Delta_h g)(x) = g(y, z + h) - g(x)$ *и* $|\cdot|_{p,\Gamma}$ *– полунорма, определенная в* (3.3.1/5–6). *Константы в соотношении эквивалентности* (3) *могут зависеть от* φ.

Доказательство. Ввиду теоремы 3.3.1/1 можно продолжить функцию g из Γ в Ω так, чтобы для продолжения (обозначим его через u) выполнялась оценка

$$\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \le c\,|g|_{p,\Gamma}.$$

Применяя соотношение (3.1.2/2) (при $\varepsilon = 1$) к сечению $z = \mathrm{const}$, найдем, что

$$\iint_{\gamma\times\gamma} |g(y,z) - g(\eta,z)|^p d\gamma_y d\gamma_\eta \le c\,\|(\nabla u)(\cdot, z)\|^p_{L_p(\omega)}$$

при п.в. $z \in \mathbf{R}^1$. Интегрирование по $z \in \mathbf{R}^1$ приводит к (2).

Проверим соотношение (3). Так как

$$|g(x) - g(\xi)| \le |g(y,z) - g(y,\zeta)| + |g(y,\zeta) - g(\eta,\zeta)|,$$

то интеграл в левой части (3) не превосходит

$$c\int_{\mathbf{R}^1} dz \int_\gamma d\gamma_y \int_{|h|>1} |\Delta_h g(x)|^p \varphi(|h|) dh+$$

$$+c\,\|\varphi\|_{L_1(1,\infty)} \iint_{\gamma\times\gamma} \|g(y,\cdot) - g(\eta,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} d\gamma_y d\gamma_\eta.$$

Используя оценку (2), убедимся, что левая часть (3) мажорируется правой частью (3), умноженной на положительную постоянную.

Для проверки обратного неравенства запишем оценку

$$c\,|\Delta_h g(x)|^p \le \int_\gamma |g(y,z+h)-g(\eta,z+h)|^p d\gamma_\eta +$$

$$+\int_\gamma |g(\eta,z+h)-g(y,z)|^p d\gamma_\eta .$$

Полагая $\zeta = z+h,\ \xi=(\eta,\zeta)$, выводим из этой оценки неравенство

$$c\int_1^\infty \|\Delta_h g\|^p_{L_p(\Gamma)}\varphi(h)dh \le$$

$$\le \|\varphi\|_{L_1(1,\infty)}\iint_{\gamma\times\gamma}\|g(y,\cdot)-g(\eta,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)}d\gamma_y d\gamma_\eta +$$

$$+\iint_{\{x,\xi\in\Gamma:\zeta-z>1\}}|g(x)-g(\xi)|^p\varphi(\zeta-z)ds_x ds_\xi .$$

Для завершения доказательства леммы остается применить оценку (2).

Пусть g – функция, определенная на поверхности $S=S^{n-2}\times\mathbf{R}^1$. При $z\in\mathbf{R}^1$ обозначим через $\overline{g}(z)$ среднее значение $g(\cdot,z)$ на сфере S^{n-2}.

Лемма 3. *Пусть $g\in L_{p,loc}(S),\ p\in(1,\infty)$. Справедливы следующие оценки:*

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in S:|\zeta-z|<1\}}|\overline{g}(z)-\overline{g}(\zeta)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\le c\,|g|^p_{p,S}, \tag{4}$$

$$\int_0^1\frac{dh}{h^p}\int_{\mathbf{R}^1}|\overline{g}(z+h)-\overline{g}(z)|^p dz\le c\,|g|^p_{p,S}. \tag{5}$$

Здесь $x=(y,z),\xi=(\eta,\zeta)$ и $|\cdot|_{p,S}$ – полунорма (3.3.1/5).

Доказательство. Рассмотрим $\overline{g}$ как функцию, определенную на S (и зависящую только от z). Тогда левая часть неравенства (4) равна $|\overline{g}|^p_{p,S}$. Ясно, что

$$c\,|\overline{g}|^p_{p,S}\le$$

$$\int_{-1}^{1} \|\Delta_h \overline{g}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} dh \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{S^{n-2}} \frac{d\alpha}{(|h| + |\alpha - \theta|)^{n+p-2}} \,,$$

где

$$\Delta_h \overline{g}(z) = \overline{g}(z+h) - \overline{g}(z).$$

С помощью замены $\alpha - \theta = |h|\beta$ последний интеграл по сфере S^{n-2} мажорируется величиной $c\,|h|^{-p}$. Отсюда

$$|\overline{g}|^p_{p,S} \leq c \int_{-1}^{1} \|\Delta_h \overline{g}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} |h|^{-p} dh,$$

и неравенство (4) следует из (5).

Для проверки неравенства (5) заметим, что

$$\int_0^1 \frac{dh}{h^p} \int_{\mathbf{R}^1} |\overline{g}(z+h) - \overline{g}(z)|^p dz \leq$$

$$\leq c \sum\nolimits_{k=-\infty}^{\infty} \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{k-1}^{k} dz \int_0^1 |g(\theta, z+h) - g(\theta, z)|^p \frac{dh}{h^p}. \qquad (6)$$

Оценим общий член последней суммы. По теореме 3.3.1/1 (примененной к цилиндру $G = B_1^{(n-1)} \times \mathbf{R}^1$ и поверхности $S = \partial G$) существует продолжение $u \in L_p^1(G)$ функции g, для которого

$$\|\nabla u\|_{L_p(G)} \leq c\,|g|_{p,S}.$$

Пусть

$$G_k = \{(y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (k-1, k+1),\ 1/2 < |y| < 1\},$$

$$\Pi_k^{(\theta)} = \{(y,z) \in G_k : y/|y| = \theta\}, \ \ k = 0, \pm 1, \ldots,\ \theta \in S^{n-2}.$$

Множество $\Pi_k^{(\theta)}$ можно рассматривать как двумерное сечение G_k гиперплоскостью $\theta = \mathrm{const}$. В этом сечении введем переменные $r = |y| \in (1/2, 1)$ и $z \in (k-1, k+1)$. Так как $u \in W_p^1(\Pi_k^{(\theta)})$ при п.в. $\theta \in S^{n-2}$, то применима теорема 3.1.1, согласно которой

$$\int_{k-1}^{k+1} \int_{k-1}^{k+1} |g(\theta, z) - g(\theta, \zeta)|^p \frac{dz d\zeta}{|\zeta - z|^p} \leq$$

$$\leq c \int_{k-1}^{k+1} dz \int_{1/2}^{1} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|^p \right) dr.$$

Интегрируя это неравенство по $\theta \in S^{n-2}$, получим, что общий член суммы в (6) мажорируется величиной $c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(G_k)}$. Таким образом, правая часть оценки (6) не превосходит $c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(G)}$, что не больше $c\,|g|^p_{p,S}$. Доказательство леммы закончено.

В заключение приведем два утверждения, касающихся области $\omega^{(e)} = \mathbf{R}^{n-1} \setminus \overline{\omega}$. При заданном $\varepsilon \in (0, 1/2)$ норма $\|\cdot\|_{W_p^1(\omega^{(e)},\varepsilon)}$ определяется аналогично (3.3.1/1). Формулируемая ниже лемма 4 выводится из следствия 3.2 с помощью преобразования подобия.

Лемма 4. *Для любой функции $v \in W_p^1(\omega^{(e)})$ верна оценка*

$$a(\varepsilon)\,\|v\|^p_{L_p(\gamma)} \le c\,\|v\|^p_{W_p^1(\omega^{(e)},\varepsilon)}, \tag{7}$$

где

$$a(\varepsilon) = \begin{cases} \min\{1, \varepsilon^{p+1-n}\} & \text{при } \ p \in [1,\infty), \quad p \ne n-1, \\ |\log \varepsilon|^{1-p} & \text{при } \qquad\qquad\qquad\quad p = n-1. \end{cases}$$

Переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (7) ведет к такому результату.

Следствие. *Если $v \in W_p^1(\omega^{(e)})$ и $p \in [1, n-1)$, то*

$$\|v\|_{L_p(\gamma)} \le c\,\|\nabla v\|_{L_p(\omega^{(e)})}.$$

3.5 Норма в пространстве TW_p^1 для внешности цилиндра в $\mathbf{R}^n$, $p < n-1$

Мы сохраняем обозначения, использованные в разд. 3.3.1 и 3.4. Пусть $\Omega^{(e)} = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ – внешность цилиндра $\Omega = \omega \times \mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^n$, описанного в разд. 3.3.1. Далее ε означает малый положительный параметр. Нормы $\|\cdot\|_{W_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}$ и $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}$ вводятся аналогично (3.3.1/1–2). В настоящем и в двух последующих разделах для функций, определенных на $\Gamma = \partial\Omega$, строится явная норма, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}$ равномерно относительно ε. Отсюда получаются теоремы о следах функций из $W_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})$, где $\Omega_\varepsilon^{(e)} = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ – внешность тонкого цилиндра $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $v \in L_p^1(\mathbf{R}^n)$, $p \in [1,n)$. Тогда существуют число $a \in \mathbf{R}^1$ и последовательность $\{v_k\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, такие, что $v_k \to v - a$ в $L_p^1(\mathbf{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть (r,θ) означают сферические координаты точки $x \in \mathbf{R}^n$. Установим сначала, что при почти всех $\theta \in S^{n-1}$ существует $\lim_{r\to\infty} v(r,\theta)$. В самом деле, пусть $0 < r < R < \infty$. Тогда при п.в. $\theta \in S^{n-1}$

$$|v(R,\theta) - v(r,\theta)|^p = \Big| \int_r^R v_\rho(\rho,\theta)d\rho\Big|^p \le$$

$$\le c\, r^{p-n} \int_0^\infty |v_\rho(\rho,\theta)|^p \rho^{n-1} d\rho.$$

Так как последний интеграл конечен при п.в. θ, то при тех же θ существует предел $\lim_{r\to\infty} v(r,\theta) = g(\theta)$. Кроме того,

$$\|g - v(r,\cdot)\|_{L_p(S^{n-1})} \le c\, r^{1-n/p} \|\nabla v\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}, \tag{1}$$

и из включения $v(r,\cdot) \in L_p(S^{n-1})$ следует включение $g \in L_p(S^{n-1})$. Покажем, что $g(\theta) =$ const почти всюду на S^{n-1}. С этой целью рассмотрим произвольные измеримые множества $\sigma_1, \sigma_2 \subset S^{n-1}$ положительной меры и обозначим через $\overline{v}_i(r)$ среднее значение функции

$$S^{n-1} \ni \theta \mapsto v(r,\theta)$$

на σ_i, $i = 1,2$, $r > 0$. Пусть $\Omega_r = \{x \in \mathbf{R}^n : r < |x| < 2r\}$. По теореме об эквивалентных нормировках в W_p^1 верна оценка

$$|\overline{v}_1(r) - \overline{v}_2(r)| \le c\, r^{(p-n)/p} \|\nabla v\|_{L_p(\Omega_r)},$$

откуда

$$\overline{v}_1(r) - \overline{v}_2(r) \to 0 \ \text{ при } \ r \to \infty.$$

Кроме того, из (1) следует, что $\lim_{r\to\infty} \overline{v}_i(r) = \overline{g}_i$, где $\overline{g}_i$ – среднее значение g на σ_i, $i = 1,2$. Таким образом, $\overline{g}_1 = \overline{g}_2$, и $g(\theta) =$ const в силу произвольности σ_1, σ_2.

Пусть $a = g(\theta)$,

$$\eta \in C^\infty([0,\infty)), \ \ \eta\big|_{[0,1]} = 1, \ \ \eta\big|_{[2,\infty)} = 0.$$

Положим

$$w_k(x) = \big(v(x) - a\big)\eta(|x|/k), \ \ k = 1,2,\ldots, \ \ x \in \mathbf{R}^n.$$

Тогда $w_k \to v - a$ в $L_{p,loc}(\mathbf{R}^n)$, а также

$$c\,\|\nabla(w_k - v)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le$$

$$\|\nabla v\|_{L_p(\mathbf{R}^n\setminus\overline{B}_k)} + k^{-1}\|v-a\|_{L_p(B_{2k}\setminus\overline{B}_k)}. \tag{2}$$

Первое слагаемое в правой части (2) стремится к нулю при $k\to\infty$, а второе слагаемое не превосходит

$$c\,\left(\int_{S^{n-1}} d\theta \int_k^\infty |v(r,\theta)-a|^p r^{n-1-p}dr\right)^{1/p}. \tag{3}$$

Применяя неравенство Харди (1.1.2/3), мажорируем величину (3) выражением $c\,\|\nabla v\|_{L_p(\mathbf{R}^n\setminus\overline{B}_k)}$. Отсюда и из (2) получаем

$$\|\nabla(w_k - v)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \to 0.$$

Для завершения доказательства леммы остается построить усреднение v_k функции w_k с таким малым радиусом усреднения, что $v_k - w_k \to 0$ в $W_p^1(\mathbf{R}^n)$.

Ниже мы предполагаем, что $n > 2$ и $\varepsilon \in (0, 1/2)$. В следующей теореме дается явная норма, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{TW_1^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}$ равномерно относительно ε.

Теорема 1. *Пространство $TL_1^1(\Omega^{(e)})$ представляется в виде прямой суммы $L_1(\Gamma)\dot{+}\mathbf{R}^1$. Если $f = g + a,\ g \in L_1(\Gamma),\ a = \mathrm{const}$, то*

$$\|f\|_{TL_1^1(\Omega^{(e)})} \sim \|g\|_{L_1(\Gamma)}.$$

Кроме того, верно соотношение

$$\|f\|_{TW_1^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \sim \|f\|_{L_1(\Gamma)}.$$

Доказательство. Пусть $v \in L_1^1(\Omega^{(e)}),\ \ v\big|_\Gamma = f$. Проверим, что существует константа $a \in \mathbf{R}^1$, для которой

$$\|f-a\|_{L_1(\Gamma)} \le c\,\|\nabla v\|_{L_1(\Omega^{(e)})}. \tag{4}$$

Применим теорему 3.3.1/1 (см. также замечание 3.3.1/2) к цилиндру $D = (B_1^{(n-1)}\setminus\overline{\omega})\times\mathbf{R}^1$ и поверхности Γ. Мы получим тогда оценку

$$|f|_{1,\Gamma} \le c\,\|\nabla v\|_{L_1(D)},$$

где $|\cdot|_{1,\Gamma}$ – полунорма (3.3.1/6). По той же теореме существует продолжение функции f с Γ в Ω (оставим за этим продолжением обозначение v), удовлетворяющее условию

$$\|\nabla v\|_{L_1(\Omega)} \leq c\,|f|_{1,\Gamma}.$$

Таким образом, можно считать, что $v \in L_1^1(\mathbf{R}^n)$ и справедлива оценка

$$\|\nabla v\|_{L_1^1(\mathbf{R}^n)} \leq c\,\|\nabla v\|_{L_1(\Omega^{(e)})}.$$

Согласно предыдущей лемме существуют число $a \in \mathbf{R}^1$ и последовательность $\{v_k\}_{k\geq 1} \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, для которых

$$v_k \to v - a \ \text{ в } \ L_{1,loc}(\mathbf{R}^n) \ \text{ и } \ \|\nabla(v_k - v)\|_{L_1(\mathbf{R}^n)} \to 0.$$

Пусть $\omega^{(e)} = \mathbf{R}^{n-1} \setminus \overline{\omega}$, $\gamma = \partial\omega$. Тогда по следствию 3.4

$$\|v_k(\cdot, z)\|_{L_1(\gamma)} \leq c\,\|(\nabla v_k)(\cdot, z)\|_{L_1(\omega^{(e)})}, \quad z \in \mathbf{R}^1.$$

Интегрируя по $z \in \mathbf{R}^1$, придем к оценке

$$\|v_k\|_{L_1(\Gamma)} \leq c\,\|\nabla v_k\|_{L_1(\Omega^{(e)})}, \ \ k = 1, 2, \ldots$$

Заменяя в этой оценке v_k на $v_k - v_j$ при $k, j = 1, 2, \ldots$, получим $v_k|_\Gamma - v_j|_\Gamma \to 0$ в $L_1(\Gamma)$ при $k, j \to \infty$. Таким образом, существует предел g последовательности $\{v_k|_\Gamma\}$ в $L_1(\Gamma)$, причем

$$\|g\|_{L_1(\Gamma)} \leq c\,\|\nabla v\|_{L_1(\Omega^{(e)})}.$$

С другой стороны, $\{v_k|_\Gamma\}$ сходится к $f - a$ в $L_{1,loc}(\Gamma)$. Отсюда $g = f - a$, и оценка (4) установлена.

Пусть теперь $v \in W_1^1(\Omega^{(e)})$, $v\big|_\Gamma = f$. Ввиду следствия 3.4

$$\|f(\cdot, z)\|_{L_1(\gamma)} \leq c\,\|(\nabla v)(\cdot, z)\|_{L_1(\omega^{(e)})}$$

при почти всех $z \in \mathbf{R}^1$. Интегрирование по $z \in \mathbf{R}^1$ приводит к (4) при $a = 0$. Итак, верны неравенства

$$\|f\|_{L_1(\Gamma)} \leq c\,\|f\|_{TW_1^1(\Omega^{(e)}, \varepsilon)}, \tag{5}$$

$$\|f - a\|_{L_1(\Gamma)} \leq c\,\|f\|_{TL_1^1(\Omega^{(e)})}, \tag{6}$$

при этом число a в (6) определяется по функции f однозначно.

Для доказательства обратных неравенств рассмотрим оператор продолжения $\mathcal{E}$, определенный в (3.3.1/11). Пусть

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1}),\ \ \varphi(y) = 1 \ \text{ при } \ |y| < 1,\ \ \varphi(y) = 0 \ \text{ при } \ |y| > 2.$$

Положим для $f \in L_1(\Gamma)$

$$\big(Ef\big)(x) = \varphi(y)\big(\mathcal{E}f\big)(x), \quad x = (y, z) \in \mathbf{R}^n. \tag{7}$$

Из теоремы 3.3.1/1 и замечания 3.3.1/1 следует, что $Ef \in W_1^1(\mathbf{R}^n)$, $Ef\big|_\Gamma = f$ и

$$\|Ef\|_{W_1^1(\mathbf{R}^n)} \le c\,\|f\|_{L_1(\Gamma)}.$$

Отсюда вытекает неравенство, противоположное (5).

Если $f = g + a,\ g \in L_1(\Gamma),\ a =$ const, то функция $v = a + Eg$ принадлежит пространству $L_1^1(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, $v|_\Gamma = f$ и верна оценка

$$\|\nabla v\|_{L_1(\mathbf{R}^n)} \le c\,\|g\|_{L_1(\Gamma)}.$$

Итак, верно неравенство, противоположное (6). Теорема доказана.

Перейдем к случаю $1 < p < n - 1$. Здесь имеет место такое утверждение.

Теорема 2. *Пусть $p \in (1, n-1)$. Тогда пространство $TL_p^1(\Omega^{(e)})$ совпадает с прямой суммой $W_p^{1-1/p}(\Gamma)\dot{+}\mathbf{R}^1$, и если $f = g + a$, где $g \in W_p^{1-1/p}(\Gamma),\ a \in \mathbf{R}^1$, то*

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega^{(e)})} \sim \|g\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}.$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \sim \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}.$$

Доказательство. Пусть $v \in L_p^1(\Omega^{(e)}),\ v\big|_\Gamma = f$. Применяя теорему 3.3.1/1 (см. также замечание 3.3.1/2) к цилиндру $(B_1^{(n-1)}\backslash\overline{\omega})\times\mathbf{R}^1$ и поверхности Γ, получим

$$|f|_{p,\Gamma} \le c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega^{(e)})}, \tag{8}$$

где $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма (3.3.1/5). Те же рассуждения, что и в теореме 1, приводят к существованию постоянной $a \in \mathbf{R}^1$, для которой

$$\|f - a\|_{L_p(\Gamma)} \le c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega^{(e)})}. \tag{9}$$

Объединяя (8), (9) и соотношение $\|\cdot\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)} \sim |\cdot|_{p,\Gamma} + \|\cdot\|_{L_p(\Gamma)}$ (напомним, что норма в $W_p^{1-1/p}(\Gamma)$ определена в (3.1.1/4)), приходим к неравенству

$$\|f-a\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)} \le c\,\|f\|_{TL^1_p(\Omega^{(e)})}. \tag{10}$$

Пусть $v \in W^1_p(\Omega^{(e)})$, $v\big|_\Gamma = f$. В силу следствия 3.4 при п.в. $z \in \mathbf{R}^1$ имеем

$$\|f(\cdot,z)\|^p_{L_p(\gamma)} \le c\,\|(\nabla v)(\cdot,z)\|^p_{L_p(\mathbf{R}^{n-1}\setminus\overline{\omega})}.$$

Интегрируя последнее неравенство по $z \in \mathbf{R}^1$, получим оценку (9) при $a=0$. Отсюда и из (8) вытекает, что

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)} \le c\,\|f\|_{TW^1_p(\Omega^{(e)},\varepsilon)}. \tag{11}$$

Неравенства, обратные к (10) и (11), обосновываются при помощи оператора (7) аналогично тому, как были установлены неравенства, обратные к (5), (6) в теореме 1. Следует только принять во внимание, что формула (7) определяет оператор продолжения

$$E : W_p^{1-1/p}(\Gamma) \to W^1_p(\mathbf{R}^n), \tag{12}$$

причем

$$\|Ef\|_{W^1_p(\mathbf{R}^n)} \le c\left(\|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma}\right). \tag{13}$$

Оценка (13) верна по теореме 3.3.1/1 (см. еще замечание 3.3.1/1). Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание 1. Формула (7) определяет линейный непрерывный оператор продолжения (12) при всех $p \in (1,\infty)$. При тех же p справедлива оценка (13).

Замечание 2. Пусть $f \in L_{p,loc}(\Gamma)$, $p \in [1,\infty)$. Обозначим через $\overline{f}_k$ среднее значение f на поверхности $\{x=(y,z) \in \Gamma : |z| < k\}$, $k = 1,2,\ldots$ Если существует такое $a \in \mathbf{R}^1$, что $f - a \in L_p(\Gamma)$, то, как легко проверить, $a = \lim \overline{f}_k$. Отсюда и из теорем 1, 2 получаем следующие утверждения.

Функция $f \in L_{1,loc}(\Gamma)$ принадлежит пространству $TL^1_1(\Omega^{(e)})$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $a = \lim \overline{f}_k$ и $f - a \in L_1(\Gamma)$. При этом

$$\|f\|_{TL^1_1(\Omega^{(e)})} \sim \|f-a\|_{L_1(\Gamma)}.$$

Функция $f \in L_{p,loc}(\Gamma),\ p \in (1, n-1)$, принадлежит пространству $TL_p^1(\Omega^{(e)})$ в том и только в том случае, если существует упомянутый выше конечный предел a и $f - a \in W_p^{1-1/p}(\Gamma)$. В этом случае

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega^{(e)})} \sim \|f - a\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}.$$

Положим $\Omega_\varepsilon^{(e)} = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, где $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$ – тонкий цилиндр. Мы сейчас выпишем норму, эквивалентную норме $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})}$ равномерно относительно малого параметра ε ($\varepsilon \in (0, 1/2)$).

Следующие соотношения получены из теорем 1 и 2 с помощью преобразования подобия:

$$\|f\|_{TW_1^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})} \sim \|f\|_{L_1(\Gamma_\varepsilon)},$$

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})} \sim \varepsilon^{(1-p)/p} \|f\|_{L_p(\Gamma_\varepsilon)} + |f|_{p,\Gamma_\varepsilon,\varepsilon}, \quad p \in (1, n-1).$$

Здесь $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$ и $|\cdot|_{p,\Gamma_\varepsilon,\varepsilon}$ – полунорма (3.3.1/19).

При $n > 2,\ p \in [1, n-1)$ пространство $TL_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})$ совпадает с прямой суммой $TW_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)}) \dot{+} \mathbf{R}^1$, а если $f = g + a,\ g \in TW_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})$, $a \in \mathbf{R}^1$, то

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})} \sim \|g\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})}.$$

3.6 Внешность цилиндра, случай $p > n-1$

В настоящем разделе рассматривается та же задача, что и в предыдущем, но в случае $p > n-1$. Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть* $g \in L_{p,loc}(\mathbf{R}^1),\ p \in (1, \infty)$, *и пусть* K *– такая функция из* $C_0^\infty(1,2)$, *что* $\int K(t)dt = 1$. *Положим*

$$D = \left\{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in \mathbf{R}^1,\ |y| > 1\right\}, \quad n \ge 3, \tag{1}$$

$$\big(\mathcal{K}g\big)(x) = \int_1^2 K(t) g\big(z + (|y| - 1)t\big) dt, \quad x \in D. \tag{2}$$

и

$$I(g) = \left(\int_0^\infty \|\Delta_t g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)}^p \frac{dt}{t^p (1+t)^{2-n}} \right)^{1/p},$$

где $(\Delta_t g)(z) = g(z+t) - g(z)$. *Если* $I(g) < \infty$, *то*

$$\|(\mathcal{K}g)(y,\cdot) - g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)} \to 0 \quad \text{при} \quad |y| \to 1+0$$

и верна оценка

$$\|\nabla \mathcal{K} g\|_{L_p(D)} \le c\,(n,p,K)\,I(g). \tag{3}$$

Доказательство. Обозначим $r = |y|$, $t = \tau(r-1)$, $v = \mathcal{K}g$ и заметим, что при $(y,z) \in D$

$$v(y,z) - g(z) = \frac{1}{r-1}\int_{r-1}^{2(r-1)} K\Big(\frac{t}{r-1}\Big)(\Delta_t g)(z)dt.$$

В силу неравенства Гёльдера

$$|v(y,z) - g(z)|^p \le c\,(r-1)^{p-1}\int_{r-1}^{2(r-1)} |(\Delta_t g)(z)|^p \frac{dt}{t^p}.$$

Интегрируя по $z \in \mathbf{R}^1$, приходим к первому утверждению леммы.

Обратимся к доказательству оценки (3). Так как

$$|\nabla v| \le \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le \frac{c}{r-1}\int_1^2 |\big(\Delta_t g\big)(z)|d\tau,$$

то

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(D)} \le c\int_1^\infty \frac{r^{n-2}dr}{(r-1)^p}\int_{\mathbf{R}^1} dz\left(\int_1^2 \big|\big(\Delta_t g\big)(z)\big|d\tau\right)^p.$$

Используя неравенство Минковского, найдем, что

$$\|\nabla v\|_{L_p(D)} \le c\int_1^2 d\tau\left(\int_{\mathbf{R}^1} dz\int_1^\infty \frac{|(\Delta_t g)(z)|^p}{(r-1)^p r^{2-n}}dr\right)^{1/p}.$$

После замены переменной $r = 1 + t/\tau$ в последнем интеграле получим (3), завершая тем самым доказательство леммы.

Ниже мы сохраняем обозначения, использованные в разд. 3.5. В следующей теореме дается явная норма, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{TW^1_p(\Omega^{(e)},\varepsilon)}$ равномерно относительно ε ($\varepsilon \in (0,1/2)$).

Теорема. *Пусть* $p \in (n-1,\infty)$, $n \ge 3$. *Тогда*

$$\|f\|_{TW^1_p(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \sim \varepsilon^{1+(1-n)/p}\|f\|_{L_p(\Gamma)} + [f]_{p,\Gamma} +$$

$$+\Big(\iint_{\{x,\xi\in\Gamma:|x-\xi|>1\}}|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{p+2-n}}\Big)^{1/p}, \qquad (4)$$

где ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности Γ и $[\cdot]_{p,\Gamma}$ – полунорма (3.1.1/3). Если левую часть в (4) заменить на $\|f\|_{TL_p^1(\Omega^{(e)})}$ а первое слагаемое в правой части опустить, то получившееся соотношение также верно.

Доказательство. Установим сначала соотношение

$$[f]_{p,\Gamma}^p+\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:|x-\xi|>1\}}|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{p+2-n}}\ \sim\ |f|_{p,\Gamma}^p+\{f\}_{p,\Gamma}^p\,, \qquad (5)$$

в котором $f\in L_{p,loc}(\Gamma)$, $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма (3.3.1/5),

$$\{f\}_{p,\Gamma}=\Big(\int_1^\infty\|\Delta_h f\|_{L_p(\Gamma)}^p h^{n-2-p}dh\Big)^{1/p} \qquad (6)$$

и $\big(\Delta_h f\big)(x)=f(y,z+h)-f(x),\ x=(y,z)$.

В самом деле, по лемме 3.4/2 правая часть (5) эквивалентна

$$|f|_{p,\Gamma}^p+\iint_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta-z|>1\}}|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|\zeta-z|^{p+2-n}}, \qquad (7)$$

где $x=(y,z),\ \xi=(\eta,\zeta)$. Так как $|x-\xi|\sim|\zeta-z|$ при $|\zeta-z|>1$, то выражение (7) эквивалентно левой части (5). Таким образом, соотношение (4) имеет место тогда и только тогда, когда верно соотношение

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}\sim|\!|\!|f|\!|\!|_{p,\Gamma},$$

в котором

$$|\!|\!|f|\!|\!|_{p,\Gamma}=\varepsilon^{1+(1-n)/p}\|f\|_{L_p(\Gamma)}+|f|_{p,\Gamma}+\{f\}_{p,\Gamma}. \qquad (8)$$

Пусть $v\in L_p^1(\Omega^{(e)}),\ v\big|_\Gamma=f$. Оценка (3.5/8) обосновывается точно так же, как и в теореме 3.5/2. Установим неравенство

$$\{f\}_{p,\Gamma}\le c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega^{(e)})}. \qquad (9)$$

В силу леммы 3.4/1 достаточно считать

$$\Omega^{(e)}=\{(y,z)\in\mathbf{R}^n: z\in\mathbf{R}^1,\ |y|>1\}$$

и $\Gamma = S^{n-2} \times \mathbf{R}^1$. Пусть $y = (r, \theta)$ – сферические координаты в $\mathbf{R}^{n-1}$. Тогда

$$c\left|\left(\Delta_h f\right)(x)\right|^p \le \left|\int_1^h \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,z+h)dr\right|^p +$$

$$+\left|\int_z^{z+h} \frac{\partial v}{\partial \zeta}(h,\theta,\zeta)d\zeta\right|^p + \left|\int_1^h \frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,z)dr\right|^p, \qquad (10)$$

следовательно,

$$\{f\}^p_{p,\Gamma} \le c\int_{S^{n-2}} d\theta \int_{\mathbf{R}^1} dz \left[\int_1^\infty \frac{dh}{h^{p+2-n}}\left(\int_z^{z+h}\left|\frac{\partial v}{\partial \zeta}(h,\theta,\zeta)\right|d\zeta\right)^p + \right.$$

$$\left. + \int_1^\infty \frac{dh}{h^{p+2-n}}\left(\int_1^h \left|\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,z)\right|dr\right)^p\right].$$

В интеграле по $(z, z+h)$ сделаем замену $\zeta = z + ht,\ t \in (0,1)$, и используем неравенство Гёльдера, а ко второму слагаемому в квадратных скобках применим неравенство Харди. В результате получим

$$c\{f\}^p_{p,\Gamma} \le \int_{\mathbf{R}^1} dz \int_{S^{n-2}} d\theta \int_1^\infty \left(\left|\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,z)\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial z}(r,\theta,z)\right|\right)^p r^{n-2}dr.$$

Отсюда вытекает оценка (9). Из (3.5/8) и (9) следует, что

$$|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma} \le c\,\|f\|_{TL^1_p(\Omega^{(e)})}. \qquad (11)$$

Пусть $v \in W^1_p(\Omega^{(e)}),\ v\big|_\Gamma = f$. По лемме 3.4/4 при п.в. $z \in \mathbf{R}^1$ имеем

$$c\,\varepsilon^{p+1-n}\|f(\cdot,z)\|^p_{L_p(\gamma)} \le \varepsilon^p\|v(\cdot,z)\|^p_{L_p(\omega^{(e)})} + \|\nabla v(\cdot,z)\|^p_{L_p(\omega^{(e)})}.$$

Интегрирование по $z \in \mathbf{R}^1$ дает

$$\varepsilon^{p+1-n}\|f\|^p_{L_p(\Gamma)} \le c\,\|v\|^p_{W^1_p(\Omega^{(e)},\varepsilon)}. \qquad (12)$$

Объединяя (3.5/8), (9) и (12), приходим к неравенству

$$|\!|\!| f |\!|\!|_{p,\Gamma} \le c\,\|f\|_{TW^1_p(\Omega^{(e)},\varepsilon)}, \qquad (13)$$

где $|\!|\!| \cdot |\!|\!|_{p,\Gamma}$ – норма (8).

Чтобы установить неравенства, обратные к (11), (13), построим такие продолжения $f \mapsto Lf \in L_p^1(\Omega^{(e)})$, $f \mapsto Wf \in W_p^1(\Omega^{(e)})$ функции f с поверхности Γ в $\Omega^{(e)}$, что

$$\|\nabla Lf\|_{L_p(\Omega^{(e)})} \leq c\left(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\right), \tag{14}$$

$$\|Wf\|_{W_p^1(\Omega^{(e)})} \leq c\,\|\!|f|\!\|_{p,\Gamma}. \tag{15}$$

Построение операторов продолжения L, W. Пусть

$$f \in L_{p,loc}(\Gamma), \quad |f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma} < \infty.$$

Положим $u(x) = \big(\mathcal{E}f\big)(x)$, где $x \in G$, $G = B_1^{(n-1)} \times \mathbf{R}^1$ и $\mathcal{E}$ – оператор, определенный в (3.3.1/11). Согласно теореме 3.3.1/1 (см. также замечание 3.3.1/1) имеем $u|_\Gamma = f$ и

$$\|\nabla u\|_{L_p(G)} \leq c\,|f|_{p,\Gamma}. \tag{16}$$

Кроме того, если $f \in L_p(\Gamma)$, то

$$c\,\|u\|_{W_p^1(G,\delta)} \leq \delta\,\|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma} \tag{17}$$

при $\delta = \varepsilon^{1+(1-n)/p}$. Применяя теорему 3.3.1/1 к цилиндру G, поверхности $S = \partial G$ и следу $g = u|_S$, получим

$$c\,|g|_{p,S} \leq \|\nabla u\|_{L_p(G)} \leq c\,|f|_{p,\Gamma},$$

$$c\,\delta\,\|g\|_{L_p(S)} \leq \|u\|_{W_p^1(G,\delta)} \leq c\,\|\!|f|\!\|_{p,\Gamma}.$$

Далее, из леммы 3.4/1 следует оценка

$$\{g\}_{p,S} \leq c\left(\|\nabla u\|_{L_p(G)} + \{f\}_{p,\Gamma}\right),$$

и значит, верны неравенства

$$|g|_{p,S} + \{g\}_{p,S} \leq c\left(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\right), \tag{18}$$

$$\|\!|g|\!\|_{p,S} \leq c\,\|\!|f|\!\|_{p,\Gamma}. \tag{19}$$

Здесь $\{\cdot\}_{p,S}$ и $\|\!|\cdot|\!\|_{p,S}$ означают соответственно полунорму (6) и норму (8) по отношению к функциям, определенным на S. Неравенства (16)–(19) показывают, что построение требуемых продолжений $f \mapsto Lf$ и $f \mapsto Wf$ с поверхности Γ в область $\Omega^{(e)}$ сводится к случаю

$$\Omega^{(e)} = \big\{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in \mathbf{R}^1,\ |y| > 1\big\}, \quad \Gamma = S^{n-2} \times \mathbf{R}^1. \tag{20}$$

Введем линейный оператор продолжения

$$E : W_p^{1-1/p}(\Gamma) \to W_p^1(\mathbf{R}^n),$$

для которого имеет место (3.5/13) (см. замечание 3.5/1). Пусть

$$\psi \in C^1([0,\infty)),\ \ \psi(t) = 1 \ \text{ при } \ t \le 1/2,\ \ \psi(t) = 0 \ \text{ при } \ t \ge 1.$$

Мы покажем, что при условии (20) операторы L и W могут быть заданы формулами

$$\big(Lf\big)(x) = \big(\mathcal{K}\overline{f}\big)(x) + \big(E(f - \overline{f})\big)\,(x),$$

$$\big(Wf\big)(x) = \psi(\varepsilon|y|)\big(\mathcal{K}\overline{f}\big)(x) + \big(E(f - \overline{f})\big)\,(x),$$

где $x = (y, z) \in \Omega^{(e)}$, $\overline{f}(z)$ – среднее значение функции $f(\cdot, z)$ на сфере S^{n-2} и $\mathcal{K}$ – оператор, определенный в (2).

Доказательство оценок (14) *и* (15). Ввиду (3.5/13) имеем

$$c\,\|E(f - \overline{f})\|^p_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le |f - \overline{f}|^p_{p,\Gamma} +$$

$$+ \iint\limits_{S^{n-2}\times S^{n-2}} \|f(\theta,\cdot) - f(\alpha,\cdot)\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} d\alpha d\theta.$$

Согласно лемме 3.4/2 (примененной к $\gamma = S^{n-2}$ и $\Gamma = S^{n-2} \times \mathbf{R}^1$) интеграл по $S^{n-2} \times S^{n-2}$ не превосходит $c\,|f|^p_{p,\Gamma}$. Кроме того, из леммы 3.4/3 следует, что $|\overline{f}|_{p,\Gamma} \le c\,|f|_{p,\Gamma}$. Таким образом,

$$\|E(f - \overline{f})\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le c\,|f|_{p,\Gamma}. \tag{21}$$

Далее, лемма, предшествующая теореме, дает

$$\|\nabla\mathcal{K}\overline{f}\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\int_0^\infty \|\Delta_h\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \frac{dh}{h^p(1+h)^{2-n}} \le$$

$$\le c\int_0^1 \|\Delta_h\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \frac{dh}{h^p} + c\int_1^\infty \|\Delta_h\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \frac{dh}{h^{p+2-n}}.$$

По лемме 3.4/3 первый интеграл в правой части последнего неравенства не больше $c\,|f|^p_{p,\Gamma}$. Второй интеграл не превосходит $c\,\{f\}^p_{p,\Gamma}$. Отсюда

$$\|\nabla\mathcal{K}\overline{f}\|_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\,\big(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\big). \tag{22}$$

Итак, формулы, определяющие операторы L и W, имеют смысл по крайней мере для таких $f \in L_{p,loc}(\Gamma)$, что $|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma} < \infty$. Равенства $Lf|_\Gamma = Wf|_\Gamma = f$ вытекают из определения L, W и леммы, сформулированной перед теоремой. Оценка (14) является следствием (21) и (22).

Обратимся к доказательству оценки (15). Положим

$$v(x) = \psi(\varepsilon|y|)\big(\mathcal{K}\overline{f}\big)(x).$$

Тогда

$$\|v\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\,\|\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \int_1^{1/\varepsilon} |\psi(\varepsilon r)|^p r^{n-2} dr,$$

откуда

$$\varepsilon^p \|v\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\,\varepsilon^{p+1-n} \|f\|^p_{L_p(\Gamma)}. \tag{23}$$

Верна также оценка

$$c\,\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le$$

$$\le \|\nabla \mathcal{K}\overline{f}\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} + \varepsilon^p\,\|\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \int_{1<|y|<1/\varepsilon} |\psi'(\varepsilon|y|)|^p dy,$$

второе слагаемое в правой части которой не больше правой части в (23). Отсюда и из (22), (23) выводится неравенство

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \le c\,\|f\|_{p,\Gamma}.$$

Объединяя последнее с (21), получим (15). Теорема доказана.

Пусть $\Omega_\varepsilon = \varepsilon\,\Omega$ – тонкий цилиндр и $\Omega_\varepsilon^{(e)} = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$ – его внешность. Формулируемый ниже результат для $\Omega_\varepsilon^{(e)}$ следует из только что доказанной теоремы с помощью преобразования подобия.

Следствие. *Пусть $p > n-1$, $n \ge 3$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$, и пусть $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$. Тогда*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})} \sim \varepsilon^{(2-n)/p} \|f\|_{L_p(\Gamma_\varepsilon)} + [f]_{p,\Gamma_\varepsilon} +$$

$$+ \left(\varepsilon^{2(2-n)} \iint_{\{x,\xi \in \Gamma_\varepsilon : |x-\xi| > \varepsilon\}} |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{p+2-n}} \right)^{1/p},$$

где $[\cdot]_{p,\Gamma_\varepsilon}$ – *полунорма* (3.1.1/3). *Это соотношение остается верным, если его левую часть заменить на* $\|f\|_{TL_p^1(\Omega_\varepsilon^{(e)})}$ *и убрать первое слагаемое в правой части.*

3.7 Норма в TW_p^1 для внешности цилиндра, $p = n-1$

В настоящем разделе мы рассматриваем ту же задачу, что и в двух предыдущих, но в случае $p = n-1$. Начнем с некоторых неравенств типа Харди.

Лемма 1. *Пусть* $0 < a < b \le \infty$, $p \in (1,\infty)$. *Если функция* v *абсолютно непрерывна на* (a,b) *и* $v(b) = 0$, *то*

$$\int_a^b |v(t)|^p \frac{dt}{t} \le c\,(p) \int_a^b |v'(t)|^p t^{p-1} \left(\log\left(\frac{t}{a}\right)\right)^p dt.$$

Если $v(a) = 0$, *то*

$$\int_a^b |v(t)|^p \frac{dt}{t\big(\log(t/a)\big)^p} \le c\,(p) \int_a^b |v'(t)|^p t^{p-1} dt.$$

Доказательство. Замена $\log(t/a) = x$ приводит к неравенству Харди (1.1.2/3).

В следующей лемме строится продолжение функции с границы кругового цилиндра $B_1^{(n-1)} \times \mathbf{R}^1$ в его внешность в случае, когда функция зависит только от одной переменной.

Лемма 2. *Пусть* $g \in L_{p,loc}(\mathbf{R}^1)$ *и* $(\Delta_t g)(z) = g(z+t) - g(z)$ *при* $t \in \mathbf{R}^1$. *Предположим, что* $p \in (1,\infty)$ *и полунорма*

$$I(g) = \left(\int_0^\infty \|\Delta_t g\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \frac{dt}{(1+t)\big(\log(1+t)\big)^p}\right)^{1/p} \tag{1}$$

конечна. Определим область $D \subset \mathbf{R}^n$ *как в* (3.6/1) *и положим*

$$\big(\mathcal{F}g\big)(x) = \frac{1}{2}\log|y| \int_{\mathbf{R}^1} \frac{g(z+t)dt}{(|y|+|t|)\big(\log(|y|+|t|)\big)^2} \tag{2}$$

при $x=(y,z)\in D$. *Тогда*

$$\|\big(\mathcal{F}g\big)(y,\cdot)-g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)}\to 0 \ \text{ при } \ |y|\to 1+0,$$

а если $p=n-1$, *то верна оценка*

$$\|\nabla\mathcal{F}g\|_{L_p(D)}\le c\,(p)\,I(g). \tag{3}$$

Доказательство. При $r>1,\ t\in\mathbf{R}^1$ положим

$$K(r,t)=\log r/\left(2(r+|t|)(\log(r+|t|))^2\right). \tag{4}$$

Поскольку $\int K(r,t)dt=1$, то

$$\big(\mathcal{F}g\big)(x)-g(z)=\int_{\mathbf{R}^1}K(|y|,t)(\Delta_t g)(z)dt,\ \ x=(y,z)\in D. \tag{5}$$

Пусть $r=|y|,\ \ v=\mathcal{F}g$. Применяя неравенство Минковского и неравенство Гёльдера, получим

$$\|v(y,\cdot)-g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)}\le\int_{\mathbf{R}^1}K(r,t)\|\Delta_t g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)}dt\le$$

$$\le c\ \log r\left(\int_{\mathbf{R}^1}\|\Delta_t g\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)}\frac{dt}{(1+|t|)(\log(1+|t|))^p}\right)^{1/p}\times$$

$$\times\left(\int_0^\infty\frac{dt}{(r+t)(\log(r+t))^{p'}}\right)^{1/p'},$$

где $p'=p/(p-1)$, $r\in(1,\infty)$. Так как $\|\Delta_{(-t)}g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)}=\|\Delta_t g\|_{L_p(\mathbf{R}^1)}$, то правая часть последнего неравенства мажорируется величиной $c\left(\log r\right)^{1/p'}I(g)$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Обратимся к доказательству неравенства (3) при $p=n-1$. Заметим, что

$$\|\nabla v\|_{L_p(D)}\le\|\partial v/\partial z\|_{L_p(D)}+\|\partial v/\partial r\|_{L_p(D)}$$

и оценим каждое слагаемое в правой части. Из (2) следует, что

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^p_{L_p(D)}\le c\int_{\mathbf{R}^1}dz\int_1^\infty r^{n-2}dr\left|\int_{\mathbf{R}^1}\frac{\partial K}{\partial r}\,(r,t)\,(\Delta_t g)(z)dt\right|^p.$$

Отсюда

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial r}\right\|^p_{L_p(D)} \le c\int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty \frac{dr}{r}\left(\int_0^\infty \frac{|\Delta_t g(z)| + |\Delta_{(-t)} g(z)|}{(r+t)(\log(r+t))^2}dt\right)^p +$$

$$+ c\int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty r^{p-1} dr \left(\int_0^\infty \frac{|\Delta_t g(z)| + |\Delta_{(-t)} g(z)|}{(r+t)^2 \log(r+t)}dt\right)^p. \qquad (6)$$

Проверим оценки

$$\int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty \frac{dr}{r}\left(\int_0^\infty \frac{|\Delta_t g(z)| dt}{(r+t)(\log(r+t))^2}\right)^p \le c\, I(g)^p, \qquad (7)$$

$$\int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty r^{p-1} dr \left(\int_0^\infty \frac{|\Delta_t g(z)| dt}{(r+t)^2 \log(r+t)}\right)^p \le c\, I(g)^p. \qquad (8)$$

В самом деле, левая часть неравенства (7) не больше

$$c\int_{\mathbf{R}^1} dz \Bigg[\int_1^\infty \frac{dr}{r(\log r)^p}\left(\int_0^{r-1} \frac{|\Delta_t g(z)| dt}{(1+t)\log(1+t)}\right)^p +$$

$$+ \int_1^\infty \frac{dr}{r}\left(\int_{r-1}^\infty \frac{|\Delta_t g(z)| dt}{(1+t)(\log(1+t))^2}\right)^p\Bigg].$$

Применяя лемму 1 к каждому слагаемому в квадратных скобках, получим (7). Для проверки (8) обозначим левую часть (8) через J. Ясно, что

$$J \le c\int_{\mathbf{R}^1} dz \Bigg\{\int_1^\infty \frac{dr}{r^{p+1}}\left(\int_0^r \frac{|\Delta_t g(z)| dt}{\log(1+t)}\right)^p +$$

$$+ \int_1^\infty r^{p-1} dr \left(\int_r^\infty \frac{|\Delta_t g(z)| dt}{(1+t)^2 \log(1+t)}\right)^p\Bigg\}.$$

Применим неравенство Гёльдера к интегралу по промежутку $(0, r)$ и используем неравенство Харди (1.1.2/3) для оценки второго члена в фигурных скобках. В результате найдем, что

$$J \le c\int_{\mathbf{R}^1} dz \Bigg\{\int_1^\infty \frac{dr}{r^2}\int_0^r \frac{|\Delta_t g(z)|^p dt}{(\log(1+t))^p} + \int_1^\infty \frac{|\Delta_t g(z)|^p dt}{t(\log(1+t))^p}\Bigg\}.$$

Меняя порядок интегрирования в первом слагаемом в фигурных скобках, мажорируем правую часть последнего неравенства величиной $c\,I(g)^p$ и тем самым устанавливаем (8). Те же рассуждения показывают, что оценки, полученные из (7), (8) заменой $\Delta_t g(z)$ на $\Delta_{(-t)}g(z)$ тоже верны. Итак, правая часть (6) не превосходит $c\,I(g)^p$, поэтому $\|\partial v/\partial r\|_{L_p(D)} \le c\,I(g)$.

Докажем аналогичную оценку для $\|\partial v/\partial z\|_{L_p(D)}$. Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\int_{\mathbf{R}^1} \frac{\partial}{\partial t} K(r,t)\big(\Delta_t g\big)(z)dt,$$

где ядро K определено в (4). Отсюда

$$c\left\|\frac{\partial v}{\partial z}\right\|^p_{L_p(D)} \le \int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty r^{p-1}dr \left|\int_{\mathbf{R}^1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}K(r,t)\Big)(\Delta_t g)(z)dt\right|^p \le$$

$$\le \int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty r^{p-1}(\log r)^p dr \left(\int_{\mathbf{R}^1} \frac{(1+\log(r+|t|))|\Delta_t g(z)|}{(r+|t|)^2(\log(r+|t|))^3}dt\right)^p.$$

Легко проверить, что правая часть последнего неравенства не больше правой части (6). Таким образом, $\|\partial v/\partial z\|_{L_p(D)} \le c\,I(g)$. Доказательство леммы 2 закончено.

Ниже мы сохраняем обозначения, введенные в предыдущих разделах. В следующей теореме дается явная норма, эквивалентная норме $\|\cdot\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}$ равномерно относительно ε при $p = n-1$.

Теорема. *Пусть $p = n-1 \ge 2$ и пусть $\varepsilon \in (0,1/2)$. Тогда*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \sim |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\|f\|_{L_p(\Gamma)} +$$

$$+\left(\iint_{\Gamma\times\Gamma} |f(x)-f(\xi)|^p F(\varrho)\frac{ds_x ds_\xi}{\varrho^{2p-1}}\right)^{1/p}, \tag{9}$$

где $\varrho = |x-\xi|$, $F(\varrho) = 1+\varrho^{2p-2}(\log(1+\varrho))^{-p}$ и ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности Γ. Если опустить первое слагаемое в правой части (9) и заменить левую часть на $\|f\|_{TL_p^1(\Omega^{(e)})}$, то получившееся соотношение также верно.

Доказательство. Отметим, что если $f \in L_{p,loc}(\Gamma)$, то

$$\iint_{\Gamma\times\Gamma} |f(x)-f(\xi)|^p F(\varrho)\frac{ds_x ds_\xi}{\varrho^{2p-1}} \sim |f|^p_{p,\Gamma} + \langle f\rangle^p_{p,\Gamma}, \tag{10}$$

где $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма (3.3.1/5),

$$\langle f\rangle_{p,\Gamma} = \left(\int_1^\infty \|\Delta_h f\|^p_{L_p(\Gamma)} \frac{dh}{h(\log(1+h))^p}\right)^{1/p},$$

$\big(\Delta_h f\big)(x) = f(y, z+h) - f(x),\ x = (y,z)$. Соотношение (10) доказывается с помощью леммы 3.4/2 аналогично тому, как было установлено соотношение (3.6/5) в теореме 3.6. В частности, из (10) следует, что норма в правой части (9) эквивалентна норме

$$|\!|\!| f |\!|\!|_{p,\Gamma} = |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}\|f\|_{L_p(\Gamma)} + |f|_{p,\Gamma} + \langle f\rangle_{p,\Gamma} \tag{11}$$

равномерно относительно ε.

Пусть $v \in L_p^1(\Omega^{(e)}),\ v|_\Gamma = f$. Оценка (3.5/8) выводится точно так же, как и в теореме 3.5/2. Докажем оценку

$$\langle f\rangle_{p,\Gamma} \le c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega^{(e)})}. \tag{12}$$

Согласно лемме 3.4/1 достаточно рассмотреть случай (3.6/20). Переходя к сферическим координатам $y = (r,\theta)$ в $\mathbf{R}^{n-1}$ и принимая во внимание (3.6/10), получим

$$c\,\langle f\rangle^p_{p,\Gamma} \le \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{\mathbf{R}^1} dz \bigg\{ \int_1^\infty \frac{dh}{h}\left| \int_z^{z+h} \frac{\partial v}{\partial\zeta}(h,\theta,\zeta)d\zeta\right|^p +$$

$$+ \int_1^\infty \frac{dh}{h(\log h)^p}\left(\int_1^h \left|\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,z)\right| dr\right)^p\bigg\}. \tag{13}$$

Для оценки правой части (13) сделаем замену $\zeta = z + ht,\ t \in (0,1)$ в интеграле по промежутку $(z, z+h)$ и используем неравенство Гёльдера. Затем применим лемму 1 ко второму слагаемому в фигурных скобках. Тогда

$$c\,\langle f\rangle^p_{p,\Gamma} \le$$

$$\le \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^\infty \left(\left|\frac{\partial v}{\partial r}(r,\theta,z)\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial z}(r,\theta,z)\right|\right)^p r^{n-2} dr.$$

Отсюда вытекает (12). Оценки (12) и (3.5/8) означают, что

$$|f|_{p,\Gamma} + \langle f\rangle_{p,\Gamma} \le c\,\|f\|_{TL_p^1(\Omega^{(e)})}. \tag{14}$$

Если $v \in W_p^1(\Omega^{(e)})$, $v|_\Gamma = f$, то неравенство

$$|\log\varepsilon|^{(1-p/p)}\|f\|_{L_p(\Gamma)} \le c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \tag{15}$$

доказывается с помощью леммы 3.4/4 точно так же, как и (3.6/12) в теореме 3.6. Объединяя (12), (15), (3.5/8) и (11), получим

$$|\!|\!| f|\!|\!|_{p,\Gamma} \le c\,\|f\|_{TW_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)}. \tag{16}$$

Для доказательства неравенств, обратных к (14), (16) построим продолжения

$$f \mapsto Lf \in L_p^1(\Omega^{(e)}), \quad f \mapsto Wf \in W_p^1(\Omega^{(e)})$$

функции f с поверхности Γ в $\Omega^{(e)}$, такие, что

$$\|\nabla Lf\|_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\left(|f|_{p,\Gamma} + \langle f\rangle_{p,\Gamma}\right), \tag{17}$$

$$\|Wf\|_{W_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \le c\,|\!|\!| f|\!|\!|_{p,\Gamma}. \tag{18}$$

Повторяя доказательство оценок (3.6/16–19), придем к аналогичным оценкам в рассматриваемом случае. Именно, если мы положим $\delta = |\log\varepsilon|^{(1-p)/p}$ в (3.6/17), заменим $\{\cdot\}_{p,\Gamma}$, $\{\cdot\}_{p,S}$ на $\langle\cdot\rangle_{p,\Gamma}$, $\langle\cdot\rangle_{p,S}$ в (3.6/18) и определим нормы $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{p,\Gamma}$, $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_{p,S}$ правой частью (11) в (3.6/19), то полученные неравенства верны. Это означает, что построение требуемых продолжений Lf, Wf сводится (как и в теореме 3.6) к случаю круговой цилиндрической поверхности, т.е. к (3.6/20).

Пусть $E : W_p^{1-1/p}(\Gamma) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$ – линейный оператор продолжения, для которого справедлива оценка (3.5/13). Положим

$$\psi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \log(\varepsilon t)/\log\varepsilon & \text{при } t \in (1, \varepsilon^{-1}], \\ 0 & \text{при } t > \varepsilon^{-1}. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что при условии (3.6/20) требуемые операторы продолжения L, W могут быть определены следующим образом:

$$\big(Lf\big)(x) = \big(\mathcal{F}\overline{f}\big)(x) + \big(E(f - \overline{f})\big)(x), \tag{19}$$

$$\bigl(Wf\bigr)(x) = \psi_\varepsilon(|y|)\bigl(\mathcal{F}\overline{f}\bigr)(x) + \bigl(E(f-\overline{f})\bigr)(x), \tag{20}$$

где $x = (y,z) \in \Omega^{(e)}$, $\overline{f}(z)$ – среднее значение $f(\cdot, z)$ на сфере S^{n-2} и $\mathcal{F}$ – оператор, определенный в (2).

Доказательство неравенств (17), (18). Пусть $I(\cdot)$ – полунорма (1). Тогда

$$c\,\bigl(I(\overline{f})\bigr)^p \le \int_0^1 \|\Delta_h \overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \frac{dh}{h^p} + \int_1^\infty \frac{\|\Delta_h \overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1}}{h(\log(1+h))^p}\,dh.$$

Первый интеграл в правой части оценивается по лемме 3.4/3, а второй не превосходит $c\,\langle f\rangle^p_{p,\Gamma}$. Отсюда

$$I(\overline{f}) \le c\,(|f|_{p,\Gamma} + \langle f\rangle_{p,\Gamma})\,. \tag{21}$$

Из леммы 2 и оценки (3.6/21) следует, что определения (19), (20) имеют смысл по крайней мере для тех $f \in L_{p,loc}(\Gamma)$, которые имеют конечную полунорму $|f|_{p,\Gamma} + \langle f\rangle_{p,\Gamma}$, и, кроме того, $Lf = Wf = f$ на Γ. Объединяя лемму 2 и (21), получим оценку

$$\|\nabla(\mathcal{F}\overline{f})\|_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\,(|f|_{p,\Gamma} + \langle f\rangle_{p,\Gamma})\,. \tag{22}$$

Последняя вместе с (3.6/21) приводят к (17).

Пусть $|\!|\!|f|\!|\!|_{p,\Gamma} < \infty$. Для доказательства (18) проверим сначала оценку

$$\|v\|_{W_p^1(\Omega^{(e)},\varepsilon)} \le c\,|\!|\!|f|\!|\!|_{p,\Gamma}, \tag{23}$$

где

$$v(x) = \psi_\varepsilon(|y|)\bigl(\mathcal{F}\overline{f}\bigr)(x).$$

Пусть K – ядро, определенное в (4). Согласно (5) имеем

$$c\,\|v\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le\ \|\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \int_1^{1/\varepsilon} \psi_\varepsilon(r)^p r^{n-2} dr +$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^{1/\varepsilon} r^{n-2}\psi_\varepsilon(r)^p dr \left(\int_{\mathbf{R}^1} K(r,h)|\Delta_h \overline{f}(z)|dh\right)^p.$$

Применяя неравенство Гёльдера к последнему интегралу, найдем, что

$$c\,\bigl(\varepsilon|\log\varepsilon|\bigr)^p \|v\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le \|\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} +$$

$$+\varepsilon^p \int_1^{1/\varepsilon} \big(r\log r\big)^{p-1} |\log(\varepsilon r)|^p dr \int_{\mathbf{R}^1} \frac{\|\Delta_h \overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} dh}{(r+|h|)(\log(r+|h|))^p} \le$$

$$\le c\left(\|f\|^p_{L_p(\Gamma)} + |\log\varepsilon|^{p-1} I(\overline{f})^p\right).$$

Отсюда и из (21) выводим неравенство

$$\varepsilon\, \|v\|_{L_p(\Omega^{(e)})} \le c\, |\!|\!| f |\!|\!|_{p,\Gamma}. \tag{24}$$

Перейдем к оценке L_p-нормы градиента функции v. Заметим прежде всего, что упомянутый градиент существует и принадлежит $L_{p,loc}(\Omega^{(e)})$, поскольку

$$\psi_\varepsilon \in W^1_\infty(1,\infty), \ \ 0 \le \psi_\varepsilon \le 1, \ \ \mathcal{F}\overline{f} \in L^1_p(\Omega^{(e)})$$

(последнее включение верно по лемме 2). Таким образом, при п.в. $x \in \Omega^{(e)}$

$$|\nabla v(x)| \le |\psi'_\varepsilon(|y|)|\, \big|\big(\mathcal{F}\overline{f}\big)(x) - \overline{f}(z)\big| +$$

$$+|\psi'_\varepsilon(|y|)\overline{f}(z)| + |\nabla(\mathcal{F}\overline{f})(x)|,$$

и, значит,

$$c\,\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})} \le$$

$$\le \int_{1<|y|<1/\varepsilon} |\psi'_\varepsilon(|y|)|^p dy \int_{\mathbf{R}^1} \big|\big(\mathcal{F}\overline{f}\big)(x) - \overline{f}(z)\big|^p dz +$$

$$+\,\|\overline{f}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^1)} \int_1^{1/\varepsilon} |\psi'_\varepsilon(r)|^p r^{p-1} dr + \|\nabla\mathcal{F}\overline{f}\|^p_{L_p(\Omega^{(e)})}. \tag{25}$$

Последнее слагаемое оценивается с помощью (22), а предпоследнее не больше $c\,|\log\varepsilon|^{1-p}\|f\|^p_{L_p(\Gamma)}$. Ввиду (5) первый член в правой части (25) не превосходит

$$c\int_{\mathbf{R}^1} dz \int_1^{1/\varepsilon} |\psi'_\varepsilon(r)|^p r^{p-1} dr \left|\int_{\mathbf{R}^1} K(r,h)(\Delta_h\overline{f})(z)dh\right|^p. \tag{26}$$

В свою очередь, величина (26) мажорируется первым слагаемым в правой части (6) при $g = \overline{f}$ и, следовательно, не превосходит $c\left(I(\overline{f})\right)^p$ (см. неравенство (7) в лемме 2). Принимая во внимание (21), приходим к оценке

$$\|\nabla v\|_{L_p(\Omega^{(e)})} \leq c\, |\!|\!| f |\!|\!|_{p,\Gamma}.$$

Последняя вместе с (24) приводят к (23). Остается заметить, что неравенство (18) вытекает из (23) и (3.6/21). Доказательство теоремы закончено.

Сформулируем соответствующий результат для внешности тонкого цилиндра. Он получается из теоремы с помощью преобразования $\Omega^{(e)} \ni x \mapsto \varepsilon\, x$.

Следствие. *При $p = n - 1 \geq 2$ справедливо соотношение*

$$\|f\|^p_{TW^1_p(\Omega^{(e)}_\varepsilon)} \sim (\varepsilon |\log \varepsilon|)^{1-p} \|f\|^p_{L_p(\Gamma_\varepsilon)} +$$

$$+ \iint_{\Gamma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon} |f(x) - f(\xi)|^p F\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) \frac{ds_x ds_\xi}{\varrho^{2p-1}},$$

где $\varrho = |x - \xi|$, F – функция из предыдущей теоремы, а остальные обозначения те же, что и в следствии 3.6. *Это соотношение останется верным, если заменить его левую часть на $\|f\|^p_{TL^1_p(\Omega^{(e)}_\varepsilon)}$ и опустить первое слагаемое справа.*

3.8 Комментарии к главе 3

Теорема 3.1.1 при $p = 2$ имеет длинную историю. В 1871 г. Ф. Прим [133] показал, что функцию, непрерывную на границе круга, вообще говоря, нельзя продолжить до гармонической функции на всем круге с конечным интегралом Дирихле. Работа Прима не была замечена современниками, и 35 лет спустя Ж. Адамар опубликовал то же наблюдение в своей статье [104]. Контрпример Адамара (отличный от примера Прима) имел более счастливую судьбу: ныне он включен во многие учебники по вариационному исчислению и дифференциальным уравнениям в частных производных.

В 1931 г. Дж. Дуглас в работе о задаче Плато и минимальных поверхностях [98] привел формулу

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\theta) - f(\varphi)|^2}{\left(\sin[(\theta - \varphi)/2]\right)^2} d\theta d\varphi$$

для интеграла Дирихле гармонической в единичном круге функции, совпадающей на границе с функцией f. Позднее А. Бёрлинг [87] использовал эту формулу при изучении так называемых исключительных подмножеств круга. Указанная формула послужила отправным пунктом для развития теории функций с “дробными производными” в 1950-х гг. В работах Н. Ароншайна [85], В. М. Бабича и Л. Н. Слободецкого [3] граничные значения функций из пространств Соболева были описаны для областей с гладкой границей. Теорема 3.1.1 для $p \in [1, \infty)$ доказана Э. Гальярдо [101].

Содержание разд. 3.1.2 и 3.2 соответствует работе авторов [48]. Основные результаты разд. 3.3 – 3.7 могут быть найдены в статье авторов [50] и в работе С. В. Поборчего [57].

Лемма 3.5 является частным случаем более общего результата С. Л. Соболева [70] (см. также С. В. Успенский [73]).

Глава 4

Продолжение функций во внешность области с вершиной пика на границе

Настоящая глава посвящена продолжению функций из пространств Соболева во внешность области с вершиной изолированного пика на границе в тех случаях, когда продолжение с сохранением класса невозможно. Мы показываем, что существует линейный оператор продолжения, переводящий функции из пространства Соболева в названной области в функции, определенные на всем евклидовом пространстве и принадлежащие некоторому весовому классу Соболева с теми же показателями гладкости и суммируемости. В разделе 4.1 дается определение вершины внешнего пика на границе области и доказываются весовые неравенства Харди для функций в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, с внешним пиком. В разд. 4.2 вводится весовое пространство Соболева $V^l_{p,\sigma}(\mathbf{R}^n)$ и строится линейный непрерывный оператор продолжения: $V^l_p(\Omega) \to V^l_{p,\sigma}(\mathbf{R}^n)$ с оптимальным весом в случае $lp < n-1$. Такой оператор продолжения в случаях $lp = n-1$ и $lp > n-1$ построен в разд. 4.3 и 4.4 соответственно. Задача продолжения функций из плоской области с внутренним пиком рассмотрена в разд. 4.5. В разд. 4.6 получены точные условия на показатель q, $(q < p)$, обеспечивающие существование линейного непрерывного оператора продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$ для ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с внешним пиком при $n \geq 2$ и с внутренним пиком при $n = 2$.

Сформулируем подробнее некоторые результаты главы 4. Типичной областью с вершиной внешнего пика на границе является область

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1), |y| < \varphi(z)\}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где φ – функция из $C^1([0,1])$, такая, что [1] $\varphi(z) > 0$ при $z \in (0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, функция $(0, 1] \ni z \mapsto \varphi(z)/z$ не убывает и дополнительно $\varphi(2z) \leq \mathrm{const}\, \varphi(z)$ при $z \in (0, 1/2]$.

Простые примеры показывают, что $\Omega \notin EV_p^l$ при $p < \infty$, $n \geq 2$, а также $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \notin EV_p^l$ в плоском случае при $p > 1$. С другой стороны, по теореме продолжения П. Джонса [112] имеем $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \in EV_p^l$, если $n > 2$, $1 \leq p \leq \infty$ и $l = 1, 2, \dots$.

Пусть σ – ограниченная неотрицательная измеримая функция на $\mathbf{R}^n$, которая отделена от нуля во внешности любого шара с центром в начале координат. Обозначим через $V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ весовое пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)} = \sum_{k=0}^{l} \|\sigma \nabla_k u\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}.$$

Это пространство, очевидно, шире, чем $V_p^l(\mathbf{R}^n)$. Оказывается, что при подходящем выборе веса σ существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$. Именно, для существования указанного оператора продолжения достаточно, а если $\sigma(x)$ зависит только от $|x|$ и не убывает вблизи $|x| = 0$, то и необходимо, чтобы неравенство

$$\sigma(x) \leq \mathrm{const}\, (\varphi(|x|)/|x|)^{\min\{l, (n-1)/p\}}, \quad lp \neq n - 1,$$

выполнялось в окрестности начала координат с постоянной, не зависящей от x. В случае $lp = n - 1$ некоторые дополнительные ограничения (не исключающие, впрочем, степенные пики) накладываются на функцию φ. В этом случае указанное неравенство заменяется неравенством

$$\sigma(x) \leq \mathrm{const}\, \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^l \big|\log(\varphi(|x|)/|x|)\big|^{(1-p)/p}.$$

[1] перечисленные требования на функцию φ выбраны здесь для простоты формулировок. На самом деле их можно ослабить.

В четвертой главе также найдены точные условия на параметры p, q, l, n и функцию φ, обеспечивающие существование линейного непрерывного оператора продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$ при $q < p$. Если $lq \neq n-1$, то существование такого оператора оказывается равносильным неравенству

$$I_n(\beta) = \int_0^1 \left(\frac{z^\beta}{\varphi(z)}\right)^{n/(\beta-1)} \frac{dz}{z} < \infty, \tag{2}$$

где

$$1/q - 1/p = l(\beta-1)/\bigl(\beta(n-1)+1\bigr) \ \text{ при } \ lq < n-1$$

и

$$1/q - 1/p = (n-1)(\beta-1)/np \ \text{ при } \ lq > n-1.$$

В случае $lq = n-1$ в подынтегральную функцию $I_n(\beta)$ следует добавить множитель $|\log(\varphi(z)/z)|^\gamma$, где

$$\gamma = (1-1/q)/(1/p-1/q), \quad \beta = (np-q)/(q(n-1)).$$

Пусть Ω – плоская область, определенная в (1). Если σ – такая весовая функция, что $\sigma|_{\mathbf{R}^2\setminus\Omega} = 1$ и $\sigma(x) \le \mathrm{const}\bigl(\varphi(z)/z\bigr)^{l-1/p}$ при $x = (y,z) \in \Omega$ и всех достаточно малых z, то существует линейный непрерывный оператор продолжения:

$$V_p^l(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2).$$

Последнее неравенство необходимо для существования указанного оператора продолжения, если $\sigma(x)$ зависит только от z при $x \in \Omega$ и не убывает. В частности, $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \in EV_1^1$.

Предположим для определенности, что замыкание области Ω при $n=2$ содержится в круге $\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 2\}$ и рассмотрим плоскую область $D = \{x : x \in \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, |x| < 2\}$. Тогда существование ограниченного линейного оператора продолжения: $V_p^l(D) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$ при $1 \le q < p \le \infty$ равносильно неравенству (2), где

$$n = 2, \ \ 1/q - 1/p = (l-1/p)(\beta-1)/(\beta+1).$$

4.1 Интегральные оценки для функций в области с пиком

В этом разделе доказываются некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся функций в области с внешним пиком. В частности, устанавливается неравенство Фридрихса для функций с носителями в окрестности вершины пика. Отсюда вытекает, что пространства $L^l_p(\Omega)$, $W^l_p(\Omega)$, $V^l_p(\Omega)$ для области с внешним пиком совпадают. Для функций в такой области выводятся также неравенства типа Харди, используемые далее.

Для краткости мы пишем $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ вместо $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{p,l,\Omega}$ вместо $\|\cdot\|_{V^l_p(\Omega)}$. В настоящей главе через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от n, p, q, l, Ω. Символ $a \sim b$ означает, что $c^{-1} \le a/b \le c$. Если $a \sim b$, то величины a, b называются эквивалентными или сравнимыми.

4.1.1 Неравенство Фридрихса для функций в области с внешним пиком

Начнем с описания вершины внешнего пика. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ $(n \ge 2)$ с компактной границей $\partial\Omega$. Предположим, что точка O принадлежит $\partial\Omega$ и поверхность $\partial\Omega \setminus \{O\}$ может быть локально представлена графиком липшицевой функции в некоторой декартовой системе координат. В точке O расположим начало декартовых координат $x = (y, z)$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $z \in \mathbf{R}^1$. Пусть φ – возрастающая функция из $C^{0,1}([0,1])$, такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(t) \to 0$ при $t \to +0$, и пусть ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^{n-1}$ класса $C^{0,1}$. Рис. 5 иллюстрирует следующее определение.

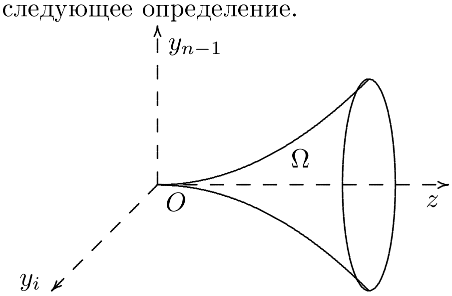

Рис. 5

Определение. Точка O называется *вершиной пика, направленного во внешность* Ω, если существует окрестность U этой точки, для которой

$$U \cap \Omega = \{x = (y, z) : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \omega\}.$$

Для простоты изложения будем далее дополнительно предполагать, что $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$, а также $\varphi(t) < t$ при $t \in (0, 1]$.

Лемма. *Пусть O является вершиной пика, направленного во внешность области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $v \in L_p^l(\Omega \cap U)$ и $v(y,z) = 0$ в окрестности $z = 1$. Тогда верна оценка*

$$\|v\|_{p,\Omega\cap U} \leq c\,\|\nabla_l v\|_{p,\Omega\cap U}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad l = 1, 2, \dots .$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Имеем

$$v\big(\varphi(z)Y, z\big) = -\int_z^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(v(\varphi(t)Y, t\big)dt$$

при п.в. $Y \in \omega$ и п.в. $z \in (0,1)$. Отсюда следует требуемое неравенство при $p = \infty$. Пусть $p < \infty$. Тогда

$$\big|v\big(\varphi(z)Y, z\big)\big|^p \leq c \int_z^1 \big|(\nabla v)\big(\varphi(t)Y, t\big)\big|^p dt,$$

откуда

$$\|v\|^p_{p,\Omega\cap U} = \int_0^1 \varphi(z)^{n-1} dz \int_\omega |v\big(\varphi(z)Y, z\big)|^p dY \leq$$

$$\leq c \int_0^1 \varphi(z)^{n-1} dz \int_z^1 dt \int_\omega \big|(\nabla v)\big(\varphi(t)Y, t\big)\big|^p dY.$$

Правая часть последнего неравенства не превосходит

$$c \int_0^1 \varphi(t)^{n-1} dt \int_\omega \big|(\nabla v)\big(\varphi(t)Y, t\big)\big|^p dY = c\,\|\nabla v\|^p_{p,\Omega\cap U},$$

чем и заканчивается доказательство леммы.

Формулируемое ниже утверждение вытекает из только что доказанной леммы (ср. следствие 1.5.1).

Следствие. *Если Ω – ограниченная область с внешним пиком, то $L_p^l(\Omega) = W_p^l(\Omega) = V_p^l(\Omega)$ при всех $l = 1, 2, \dots$ и $1 \leq p \leq \infty$. В частности, справедлива теорема* 1.5.2.

4.1.2 Неравенства Харди в области с внешним пиком

Напомним сначала известные весовые неравенства Харди для функций, определенных в интервалах на числовой оси.

Лемма 1. *Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, $1 \le p \le q \le \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Для того, чтобы существовала такая постоянная C, не зависящая от f, что*

$$\left(\int_a^b \left|w(x)\int_x^b f(t)dt\right|^q dx\right)^{1/q} \le C\left(\int_a^b \left|v(x)f(x)\right|^p dx\right)^{1/p}, \qquad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы величина

$$B = \sup_{r\in(a,b)} \left(\int_a^r |w(x)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_r^b |v(x)|^{-p'} dx\right)^{1/p'}$$

была конечной. Более того, если C – наилучшая постоянная в (1), то

$$B \le C \le B(q/(q-1))^{1/p'} q^{1/q}.$$

Лемма 2. *Пусть a, b, p, p', q – те же, что и в лемме 1. Не зависящая от f постоянная C, такая, что*

$$\left(\int_a^b \left|w(x)\int_a^x f(t)dt\right|^p dx\right)^{1/p} \le C\left(\int_a^b |v(x)f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \qquad (2)$$

существует тогда и только тогда, когда

$$B = \sup_{r\in(a,b)} \left(\int_r^b |w(x)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_a^r |v(x)|^{-p'} dx\right)^{1/p'} < \infty.$$

Наилучшая константа C в (2) удовлетворяет тем же неравенствам, что и в лемме 1.

Доказательство этих утверждений можно найти, например, в книге В. Г. Мазья [40, 1.3.1].[2]

Пусть O – вершина внешнего пика на границе области Ω. Установим некоторые неравенства типа Харди для функций, определенных в $U \cap \Omega$.

---

[2] В данной главе леммы 1 и 2 применяются только при $p = q$. Случай $q \ge p$, а также некоторые обобщения этих утверждений будут использованы далее в главе 5.

Лемма 3. *Пусть O – вершина пика, направленного во внешность области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Пусть U и φ – окрестность и функция из определения 4.1.1. Предположим, что функция $(0,1) \ni z \mapsto \varphi(z)/z$ не убывает. Если $G = U \cap \Omega$, $u \in L_p^l(G)$, $p \geq 1$, и $u(x) = 0$ в окрестности $z = 1$, то верны неравенства*

$$\|z^{-l} u\|_{p,G} \leq c \, \|\nabla_l u\|_{p,G}, \quad lp < n, \tag{3}$$

$$\|z^{-l} \sigma_1 u\|_{p,G} \leq c \, \|\sigma_1 \nabla_l u\|_{p,G}, \quad lp \leq n-1, \tag{4}$$

$$\|z^{-l} \sigma_2 u\|_{p,G} \leq c \, \|\sigma_2 \nabla_l u\|_{p,G}, \quad lp = n-1, \tag{5}$$

где

$$\sigma_1(x) = (z/\varphi(z))^l, \quad \sigma_2(x) = \sigma_1(x) \big[\log(z/\varphi(z)) \big]^{(1-p)/p}.$$

Доказательство. Достаточно проверить оценку

$$\|z^{-i} \sigma u\|_{p,G} \leq c \, \|z^{1-i} \sigma \nabla u\|_{p,G}, \quad i = 1, \dots, l, \tag{6}$$

в следующих случаях:
1^o $lp < n,\ \sigma(x) = 1$;
2^o $lp \leq n-1,\ \sigma(x) = \sigma_1(x)$;
3^o $lp = n-1,\ \sigma(x) = \sigma_2(x)$.
Тогда (3)–(5) выводятся итерированием неравенства (6).

Положим $X = (s,t)$, где $s \in \mathbf{R}^{n-1},\ t \in \mathbf{R}^1$,

$$s = y/\varphi(z), \quad t = \int_z^1 \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}.$$

Преобразование $x \mapsto X$ отображает G на цилиндр $s \in \omega,\ t \in (0,\infty)$. Пусть $v(X) = u(x)$. Так как

$$|\nabla_x u| \sim |\nabla_X v|/\varphi(z(t)) \quad \text{и} \quad \big| D(y,z)/D(s,t) \big| = \varphi(z(t))^n,$$

то неравенство (6) принимает вид

$$\int_\omega ds \int_0^\infty \big| v(s,t) \big|^p z(t)^{-ip} \varphi(z(t))^n \sigma(z(t))^p dt \leq$$

$$\leq c \int_\omega ds \int_0^\infty \big| \nabla_X v \big|^p z(t)^{-(i-1)p} \varphi(z(t))^{n-p} \sigma(z(t))^p dt.$$

Здесь $v(s,t)=0$ в окрестности $t=0$ (мы иногда пишем $\sigma(z)$ или $\sigma(z(t))$ вместо $\sigma(x)$, чтобы подчеркнуть зависимость σ только от переменной z,t и т.п.). Последнее неравенство вытекает из одномерного неравенства

$$\int_0^\infty \left|W(t)\int_0^t f(\tau)d\tau\right|^p dt \le \int_0^\infty \left|V(t)\int_0^t f(\tau)d\tau\right|^p dt, \tag{7}$$

где

$$W(t)=z(t)^{-i}\varphi(z(t))^{n/p}\sigma(z(t)),$$
$$V(t)=z(t)^{(1-i)}\varphi(z(t))^{(n-p)/p}\sigma(z(t)).$$

По лемме 2 оценка (7) верна с константой $c=p^p(p-1)^{1-p}c_0$,

$$c_0=\sup_{r>0}\left\{\int_r^\infty W(t)^p dt\left(\int_0^r V(t)^{-p'}dt\right)^{p-1}\right\}.$$

Замена $t\to z$ дает $c_0=\sup\{A(\varrho):\varrho\in(0,1)\}$,

$$A(\varrho)=\left(\int_0^\varrho \sigma(z)^p\varphi(z)^{n-1}\frac{dz}{z^{ip}}\right)\times$$

$$\times\left(\int_\varrho^1 \left(z^{(i-1)p}\varphi(z)^{1-n}\sigma(z)^{-p}\right)^{1/(p-1)}dz\right)^{p-1}.$$

При $p=1$ второй сомножитель следует заменить на

$$\operatorname{ess\,sup}\{\varphi(z)^{1-n}(\sigma(z))^{-1}z^{i-1}:\ z\in(\varrho,1)\}.$$

Рассмотрим, например, случай 1^o $lp<n,\ \sigma=1$. Поскольку $\varphi(z)/z$ не убывает, то

$$A(\varrho)\le\left(\int_0^\varrho z^{n-1-ip}dz\right)\times$$

$$\times\left(\int_\varrho^1 z^{\frac{p(i-1)}{p-1}}\varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}}\left(\varphi(z)z^{-1}\right)^{\frac{n-1}{p-1}}dz\right)^{p-1}\le \mathrm{const}.$$

Аналогично выводится оценка $A(\varrho) \leq \text{const}$ и в случаях 2^o, 3^o. Доказательство леммы закончено.

Если $lp \geq n$, неравенство (3), вообще говоря, неверно. Однако оно может выполняться в некоторых частных случаях.

Пример. *Степенной пик.* Пусть $\varphi(z) = cz^\lambda,\ \lambda > 1$ и

$$G = \big\{(y, z) \in \mathbf{R}^n :\ z \in (0, 1),\ y/\varphi(z) \in \omega\big\}.$$

Те же рассуждения, что и в лемме 3, приводят к неравенству (6), где $\sigma = 1$ и

$$c \sim \sup_{\delta \in (0,1)} \left\{ \left(\int_0^\delta z^{\lambda(n-1)-ip} dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\delta^1 z^{\frac{ip-1-\lambda(n-1)}{p-1}} \frac{dz}{z} \right)^{1-\frac{1}{p}} \right\}.$$

Последний супремум конечен при всех $i = 1, \ldots, l$ тогда и только тогда, когда $lp < \lambda(n-1) + 1$. В этом же случае выполняется неравенство (3).

4.2 Внешний пик, оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n),\ lp < n - 1$

Начнем с описания весового пространства Соболева $V_{p,\sigma}^l(G)$.

Определение. Пусть G – область в $\mathbf{R}^n$ и $O \in \overline{G}$. Пусть σ – неотрицательная измеримая по Лебегу функция в G. Предположим, что σ ограничена и отделена от нуля во внешности любой окрестности точки O. Говорят, что функция u принадлежит пространству $V_{p,\sigma}^l(G)$, $p \geq 1$, $l = 1, 2, \ldots$, если $D^\alpha u \in L_{p,loc}(G \setminus \{O\})$ при $|\alpha| \leq l$ и конечна норма

$$\|u\|_{V_{p,\sigma}^l(G)} = \sum\nolimits_{k=0}^{l} \|\sigma \nabla_k u\|_{p,G}.$$

Сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема. *Пусть O – вершина внешнего пика на границе области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и пусть $lp < n - 1$, $p \in [1, \infty)$ или $l = n - 1$, $p = 1$.*
(i) *Предположим, что функция $(0, 1] \ni z \mapsto \varphi(z)/z$ не убывает и определим*

$$\sigma(x) = \begin{cases} \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^l & \text{\textit{при} } x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega},\ |x| < 1, \\ 1 \text{ \textit{в остальных точках} } x \in \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$.
(ii) *Пусть*

$$\varphi(2t) \le c\,\varphi(t), \quad t \in (0, 1/2]. \tag{1}$$

Предположим, что σ *– такая весовая функция в* $\mathbf{R}^n$, *что ее сужение* $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \ni x \mapsto \sigma(x)$ *зависит только от* $|x|$ *при малых* $|x|$ *и не убывает. Если существует ограниченный оператор продолжения:*

$$V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n),$$

то

$$\sigma(x) \le c\,\big(\varphi(|x|)/|x|\big)^l$$

при всех $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, *достаточно близких к вершине пика.*

Доказательство. (i) Сначала построим требуемое продолжение функции $u \in V_p^l(\Omega)$ в следующем частном случае. Пусть

$$\Omega = \big\{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : \ z \in (0,1), \ y/\varphi(z) \in \omega\big\} \tag{2}$$

(ср. определение 4.1.1) и носитель u содержится в достаточно малой окрестности вершины O пика.

Определим последовательность $\{z_i\}_{i \ge 0}$ соотношениями

$$z_0 \in (0,1), \quad z_{i+1} + \varphi(z_{i+1}) = z_i, \quad i = 0, 1, \dots \tag{3}$$

Легко убедиться, что $z_i \searrow 0$ и $z_{i+1} z_i^{-1} \to 1$. Кроме того, имеем $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1} \to 1$, где $\varphi_i = \varphi(z_i)$. В самом деле,

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i+1}} - 1 = \frac{1}{\varphi_{i+1}} \int_{z_{i+1}}^{z_i} \varphi'(t)dt \to 0,$$

так как $\varphi'(t) \to 0$ при $t \to +0$. Выбирая z_0 достаточно малым, можно добиться выполнения неравенства $z_0 < 2z_2$. Положим

$$\Omega_i = \big\{x = (y, z) : \ z \in (z_{i+1}, z_{i-1}), \ y/\varphi(z) \in \omega\big\}, \quad i \ge 1. \tag{4}$$

Заметим, что оператор продолжения Стейна: $V_p^l(\varphi_i^{-1}\Omega_i) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$ имеет норму, ограниченную равномерно относительно i (см. теорему 1.6/2). По лемме 3.1.2/1 каждому $i = 1, 2, \dots$ соответствует линейный оператор продолжения

$$E_i : V_p^l(\Omega_i) \to V_p^l(\mathbf{R}^n),$$

для которого

$$\|\nabla_s E_i v\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c \sum\nolimits_{i=0}^{l} \varphi_i^{i-s} \|\nabla_i v\|_{p,\Omega_i} \tag{5}$$

при всех $v \in V_p^l(\Omega_i)$, $s = 0, \dots, l$.

Пусть $\{\mu_i\}_{i\ge1}$ – разбиение единицы на промежутке $(0, z_1]$ со следующими свойствами:

$$\mu_i \in C_0^\infty(z_{i+1}, z_{i-1}),\ |\mu_i^{(s)}(z)| \le c\,\varphi_i^{-s},\ i = 1, 2, \dots,\ 0 \le s \le l, \tag{6}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \mu_i(z) = 1, \quad z \in (0, z_1]. \tag{7}$$

Введем срезающие функции $\xi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, такие, что для $i \ge 1$

$$\xi_i(y) = 0 \ \text{ при } \ |y| \ge 2\varphi_{i-1}, \quad \xi_i(y) = 1 \ \text{ при } \ |y| \le \varphi_{i-1}, \tag{8}$$

а также $|\nabla_s \xi_i| \le c\,\varphi_i^{-s}$, $s = 0, \dots, l$.

Пусть $u \in V_p^l(\Omega)$ и $u(y,z) = 0$ при $z > z_0/2$. Проверим, что в этом случае требуемое продолжение $\mathcal{E}^{(0)}u \in V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ функции u задается формулой

$$\big(\mathcal{E}^{(0)}u\big)(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \xi_i(y)\mu_i(z)\big(E_i u_i\big)(x), \ \ x = (y,z) \in \mathbf{R}^n, \tag{9}$$

где $u_i = u|_{\Omega_i}$. В самом деле, ясно, что $\mathcal{E}^{(0)}u|_\Omega = u$. Так как внешность любой окрестности начала координат имеет непустое пересечение лишь с конечным числом носителей функций $\xi_i\mu_i$, то производные $D^\alpha \mathcal{E}^{(0)}u \in L_{p,loc}\big(\mathbf{R}^n \setminus \{O\}\big)$ существуют при всех $|\alpha| \le l$. Установим оценку

$$\|\sigma \nabla_j (\mathcal{E}^{(0)}u)\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0, \dots, l. \tag{10}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\sigma(x) = \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^l$ при всех $x \in B_1$. Пусть

$$G_i = \big\{(y,z) : z \in (z_{i+1}, z_i),\ |y| < 2\varphi_{i-1}\big\}, \ \ i \ge 1.$$

Тогда $\operatorname{supp} \mathcal{E}^{(0)}u \subset \overline{\cup_{i=1}^\infty G_i}$ и $\sigma|_{G_i} \sim \sigma_i = (\varphi_i/z_i)^l$. Отсюда

$$\|\sigma \nabla_j (\mathcal{E}^{(0)}u)\|_p^p \sim \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p\, \|\nabla_j (\mathcal{E}^{(0)}u)\|_{p,G_i}^p. \tag{11}$$

Оценим общий член последней суммы. Имеем

$$\|\nabla_j\big(\mathcal{E}^{(0)}u\big)\|_{p,G_i} \le \sum\nolimits_{k=i}^{i+1} \|\nabla_j\big(\xi_i\mu_k E_k u_k\big)\|_{p,\mathbf{R}^n}$$

$$\le c\sum\nolimits_{k=i}^{i+1}\ \sum\nolimits_{s=0}^{j} \varphi_i^{s-j}\|\nabla_s\big(\mathcal{E}_k u_k\big)\|_{p,\mathbf{R}^n}\,. \tag{12}$$

Принимая во внимание (5), мажорируем правую часть в (12) выражением

$$c\sum\nolimits_{k=i}^{i+1}\ \sum\nolimits_{s=0}^{l} \varphi_i^{s-j}\|\nabla_s u\|_{p,\Omega_k},$$

и, значит,

$$\sigma_i^p\|\nabla_j\big(\mathcal{E}^{(0)}u\big)\|_{p,G_i}^p \le c\sum\nolimits_{s=0}^{l} z_i^{(s-l)p}\|\nabla_s u\|_{p,\Omega_i\cup\Omega_{i+1}}^p. \tag{13}$$

Суммирование по $i \ge 1$ и соотношение (11) приводят к неравенству

$$\|\sigma\nabla_j\big(\mathcal{E}^{(0)}u\big)\|_{p,\mathbf{R}^n}^p \le c\sum\nolimits_{s=0}^{l} \|z^{s-l}\nabla_s u\|_{p,\Omega}^p.$$

Ссылка на лемму 4.1.2/3 заканчивает доказательство оценки (10).

Обратимся к общему случаю. Пусть Ω – область общего вида с вершиной внешнего пика на границе и пусть U – окрестность из определения 4.1.1. Выберем число $\delta \in (0, z_0/4]$ (число z_0 было определено выше) так, чтобы выполнялось включение $\overline{B}_{2\delta} \subset U$ и введем срезающие функции $\psi \in C_0^\infty(B_{2\delta})$, $\tau \in C_0^\infty(U)$, удовлетворяющие условиям $\psi|_{B_\delta} = 1,\ \ \tau\psi = \psi$. По теореме 1.6/2 существует линейный непрерывный оператор продолжения

$$E : V_p^l\big(\Omega \cup B_{\delta/2}\big) \to V_p^l(\mathbf{R}^n).$$

Для произвольной функции $u \in V_p^l(\Omega)$ положим $v = (1-\psi)u$ и доопределим v нулем на множестве $B_{\delta/2} \setminus \Omega$. Тогда требуемый оператор продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ задается формулой $\mathcal{E}u = \tau\mathcal{E}^{(0)}(\psi u) + Ev$. Доказательство утверждения (i) закончено.

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(0,3),\ f(t) = 1$ для $t \in (1,2)$. При малом $\delta > 0$ положим

$$u_\delta\big|_{\Omega\setminus U} = 0,\ \ u_\delta(x) = f(z/\delta),\ \ x = (y,z) \in U \cap \Omega.$$

Здесь, как и выше, U – окрестность из определения 4.1.1. Ясно, что $u_\delta \in V_p^l(\Omega)$ и

$$\|u_\delta\|_{p,l,\Omega}^p \le c\,\delta^{1-lp}\varphi(3\delta)^{n-1}. \tag{14}$$

Пусть $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ – ограниченный оператор продолжения. Ввиду монотонности σ имеем

$$\|u_\delta\|_{p,l,\Omega}^p \geq c\,\sigma(\delta)^p \int_\delta^{2\delta} \|\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(\cdot,z)\|_{p,l,\mathbf{R}^{n-1}}^p dz.$$

По теореме Соболева пространство $V_p^l(\mathbf{R}^{n-1})$ вложено в $L_q(\mathbf{R}^{n-1})$ при $q = (n-1)p/(n-1-lp)$, и последний интеграл не меньше

$$c\int_\delta^{2\delta} \|u_\delta(\cdot,z)\|_{q,\Omega_z}^p dz, \tag{15}$$

где Ω_z означает сечение множества $U \cap \Omega$ гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$. Величина (15) сравнима с $\delta\varphi(\delta)^{n-1-lp}$, так что

$$c_1\delta^{1-lp}\varphi(3\delta)^{n-1} \geq \|u_\delta\|_{p,l,\Omega}^p \geq c_2\sigma(\delta)^p\delta\varphi(\delta)^{n-1-lp},$$

и требуемый результат вытекает из соотношения $\varphi(3\delta) \sim \varphi(\delta)$.

4.3 Лемма о дифференцировании срезки

В этом разделе мы докажем одно вспомогательное утверждение, используемое при построении оператора продолжения в весовое пространство Соболева в следующем разделе.

Пусть φ – функция из определения 4.1.1, описывающая заострение пика, и пусть $\{z_i\}_{i\geq 0}$ – последовательность, определенная в (4.2/3). Зафиксируем $\theta \in (0,1)$ и положим

$$\zeta_i(y) = 1 + \frac{\log(|y|/\varphi_i)}{\theta\log(\varphi_i/z_i)}, \quad y \in \mathbf{R}^{n-1}\setminus\{0\}, \tag{1}$$

где $\varphi_i = \varphi(z_i),\ i = 0, 1, \dots$

Лемма. *Если $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ и η имеет ограниченные производные всех порядков, то при любом $i = 0, 1\dots$ верны оценки*

$$|\big(\nabla_s(\eta\circ\zeta_i)\big)(y)| \leq c\,|\log(\varphi_i z_i^{-1})|^{-1}|y|^{-s}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad y \neq 0, \tag{2}$$

а если $\varphi_i < |y| < \varphi_i^{1-\theta}z_i^\theta$ и $s = 0, 1\dots$, то

$$|\big(\nabla_s(\eta\circ\zeta_i)\big)(y) - \big(\nabla_s(\eta\circ\zeta_{i+1})\big)(y)| \leq$$

$$\leq c\,|y|^{-s}\big((\varphi_i - \varphi_{i+1})\varphi_i^{-1} + \varphi_i z_i^{-1}\big). \tag{3}$$

В этих оценках $c = c\,(z_0, s, \theta, \eta, \varphi)$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$ и $e_k \in \mathbf{R}^{n-1}$ – единичный базисный вектор вдоль оси y_k, $k = 1, \dots, n-1$. Имеем

$$D^{\alpha+e_k}(\eta \circ \zeta_i)(y) = D_y^\alpha\Big(\eta'\big(\zeta_i(y)\big)\partial\zeta_i/\partial y_k\Big) =$$

$$= \lambda_i \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D_y^\beta \eta'\big(\zeta_i(y)\big) D_y^{\alpha-\beta+e_k} \log|y|, \tag{4}$$

где $\lambda_i = \big(\theta \log(\varphi_i z_i^{-1})\big)^{-1}$. Если $|\alpha| = s$ в (4), то

$$|\nabla_{s+1}(\eta \circ \zeta_i)(y)| \leq c\,|\lambda_i| \sum\nolimits_{r=0}^{s} |\nabla_r(\eta' \circ \zeta_i)(y)|\,|y|^{r-s-1}, \quad y \neq 0.$$

Теперь (2) следует из последней оценки и (4) индукцией по s.

Обращаясь к доказательству (3), положим сначала $s = 0$. Здесь

$$|(\eta \circ \zeta_i)(y) - (\eta \circ \zeta_{i+1})(y)| \leq c\,|\zeta_i(y) - \zeta_{i+1}(y)| =$$

$$= c\,|\lambda_i \log(|y|\varphi_i^{-1}) - \lambda_{i+1}\log(|y|\varphi_{i+1}^{-1})| \leq$$

$$\leq c\,\big(|(\lambda_i - \lambda_{i+1})\log(|y|\varphi_i^{-1})| + |\lambda_{i+1}\log(\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1})|\big).$$

Если $\varphi_i < |y| < \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta$, то

$$|(\lambda_i - \lambda_{i+1})\log(|y|\varphi_i^{-1})| \leq |\lambda_i - \lambda_{i+1}|\log(z_i\varphi_i^{-1}) \leq$$

$$\leq c\,|\log(\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1} z_i z_{i+1}^{-1})| \leq c_1|\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1} z_i z_{i+1}^{-1} - 1| \leq$$

$$\leq c_2\big((\varphi_i - \varphi_{i+1})\varphi_i^{-1} + \varphi_i z_i^{-1}\big).$$

Кроме того,

$$|\lambda_{i+1}\log(\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1})| \leq c\,(\varphi_i - \varphi_{i+1})\varphi_i^{-1}.$$

Таким образом, (3) имеет место при $s = 0$.

Пусть $s \geq 1$. Предположим, что

$$|\nabla_j\big((\eta \circ \zeta_i)(y) - (\eta \circ \zeta_{i+1})(y)\big)| \leq c\,|y|^{-j}((\varphi_i - \varphi_{i+1})\varphi_i^{-1} + \varphi_i z_i^{-1}) \tag{5}$$

при $j \leq s-1$ и $\varphi_i < |y| < \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta$. Зафиксируем $\gamma \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\gamma| = s$. Тогда $\gamma = \alpha + e_k$ при некоторых $1 \leq k \leq n-1$ и $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$. Используя (4), получим

$$|D_y^\gamma\big((\eta \circ \zeta_i)(y) - (\eta \circ \zeta_{i+1})(y)\big)| \leq$$

$$\leq c\sum_{\beta\leq\alpha}|y|^{|\beta|-s}|(\lambda_i-\lambda_{i+1})D^\beta(\eta'\circ\zeta_i)(y)|+$$

$$+\,c\,|\lambda_{i+1}|\sum_{\beta\leq\alpha}|y|^{|\beta|-s}|D^\beta(\eta'\circ\zeta_i)(y)-D^\beta(\eta'\circ\zeta_{i+1})(y)|. \qquad (6)$$

Из (2) (с заменой η на η') следует, что

$$|(\lambda_i-\lambda_{i+1})D^\beta(\eta'\circ\zeta_i)(y)|\leq c\,|y|^{-|\beta|}|\lambda_i-\lambda_{i+1}|\leq$$

$$\leq c\,|y|^{-|\beta|}\big((\varphi_i-\varphi_{i+1})\varphi_i^{-1}+\varphi_i z_i^{-1}\big),\quad \beta\leq\alpha,$$

и первая сумма в правой части (6) мажорируется правой частью (3). Для оценки общего члена второй суммы используем индукционное предположение (5) (с заменой η на η' и j на $|\beta|$). Тогда вторая сумма в правой части (6) также мажорируется правой частью (3). Лемма доказана.

4.4 Внешний пик. Продолжение в случае $lp = n-1$

В этом разделе мы установим точные условия на весовую функцию, обеспечивающие существование линейного непрерывного оператора продолжения: $V_p^l(\Omega)\to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ для области с внешним пиком в случае $lp=n-1$. Основной результат формулируется в 4.4.2.

4.4.1 Положительно однородные функции нулевой степени как мультипликаторы в пространстве $V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$

Следующая лемма описывает некоторый класс мультипликаторов в весовом пространстве $V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$. Эта лемма будет использована в разд. 4.4.2 при доказательстве основного результата.

Лемма. *Пусть σ – весовая функция в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что $\sigma(x)$ зависит только от $|x|$ в окрестности точки O и не убывает. Если $\zeta\in C^\infty\big(\mathbf{R}^n\setminus\{O\}\big)$ – положительно однородная функция нулевой степени, то эта функция является мультипликатором в $V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ при $lp<n$, и для всех $u\in V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ верна оценка*

$$\|\zeta u\|_{V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)}\leq c\,(n,l,p,\sigma,\zeta)\,\|u\|_{V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)}. \qquad (1)$$

Доказательство. Так как $|(\nabla_s\zeta)(x)| \le c\,|x|^{-s}$, достаточно проверить оценку

$$\||x|^{-s}\sigma\nabla_{l-s}u\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\,\|\sigma\nabla_l u\|_{p,\mathbf{R}^n}, \quad s=1,\dots,l, \tag{2}$$

для функций u, имеющих компактный носитель в малой окрестности начала координат. Пусть $\operatorname{supp} u \subset B_\varrho$, где ϱ настолько мало, что $\sigma(x)$ – неубывающая функция аргумента $|x|$ при $x\in B_\varrho$. Неравенство (2) является следствием оценки

$$\||x|^{-s}\sigma\nabla_{l-s}u\|_{p,B_\varrho} \le c\,\|\,|x|^{1-s}\sigma\nabla_{l-s+1}u\|_{p,B_\varrho}, \tag{3}$$

где $1\le s\le l$. Обозначим через v любую производную функции u порядка $l-s$. Тогда (3) вытекает из оценки

$$\int_{S^{n-1}} d\theta \int_0^\varrho |v(r,\theta)|^p\sigma(r)^p r^{n-1-sp}dr \le$$

$$\le c\int_{S^{n-1}} d\theta\int_0^\varrho |(\nabla v)(r,\theta)|^p r^{n-1-(s-1)p}\sigma(r)^p dr,$$

а последняя является следствием одномерного неравенства

$$\int_0^\varrho \left|\int_t^\varrho f(\tau)d\tau\right|^p t^\lambda\sigma(t)^p dt \le c\int_0^\varrho \bigl|f(t)\bigr|^p t^{\lambda+p}\sigma(t)^p dt \tag{4}$$

при $\lambda > -1$. Согласно лемме 4.1.2/1 неравенство (4) имеет место тогда и только тогда, когда $\sup\{A(\delta):\delta\in(0,\varrho)\}<\infty$, где

$$A(\delta)=\int_0^\delta t^\lambda\sigma(t)^p dt\left(\int_\delta^\varrho t^{-\frac{\lambda+p}{p-1}}\sigma(t)^{-\frac{p}{p-1}}dt\right)^{p-1}$$

(при $p=1$ второй сомножитель заменяется на $\operatorname{ess\,sup}\{(t^{\lambda+1}\sigma(t))^{-1} : t\in(\delta,\varrho)\}$). Ввиду монотонности σ получаем

$$A(\delta)\le\int_0^\delta t^\lambda dt\left(\int_\delta^\infty t^{\frac{\lambda+1}{1-p}}\frac{dt}{t}\right)^{p-1} \le c<\infty.$$

Таким образом, верна оценка (4) и вместе с ней (1). Доказательство леммы закончено.

4.4.2 Оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$, $lp = n-1$

Сформулируем основной результат раздела 4.4.

Теорема. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика на границе и пусть $lp = n-1$, $p \in (1,\infty)$.*
(i) *Предположим, что функция $(0,1] \ni t \mapsto \varphi(t)/t$ не убывает и для некоторого $\delta > 0$*

$$\varphi\big(t+\varphi(t)\big) = \varphi(t)\big[1 + O\big((\varphi(t)/t)^\delta\big)\big] \ \text{ при } \ t \to +0. \tag{1}$$

Определим весовую функцию σ на $\mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$\sigma(x) = \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^l |\log\big(\varphi(|x|)/|x|\big)|^{1-1/p} \tag{2}$$

при $x \in B_1 \setminus \overline{\Omega}$ и $\sigma(x) = 1$ в противном случае. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$.
(ii) *Пусть φ удовлетворяет условию (4.2/1) и σ – такая весовая функция в $\mathbf{R}^n$, что сужение $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \ni x \mapsto \sigma(x)$ зависит только от $|x|$ при малых $|x|$ и не убывает. Если существует ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$, то*

$$\sigma(x) \le c\,\big(\varphi(|x|)/|x|\big)^l |\log\big(\varphi(|x|)/|x|\big)|^{1-1/p}$$

для всех $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, достаточно близких к вершине пика.

Доказательство. Введем функцию $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ со свойствами $\eta(t) = 0$ при $t \le 1/3$, $\eta(t) = 1$ при $t \ge 2/3$. Пусть $\{z_i\}_{i\ge 0}$ – последовательность, описанная в (4.2/3). Напомним, что

$$z_i \searrow 0, \quad z_{i+1}z_i^{-1} \to 1, \quad \varphi_{i+1}\varphi_i^{-1} \to 1, \quad \varphi_i z_i^{-1} \to 0,$$

где $\varphi_i = \varphi(z_i)$. Зафиксируем

$$\theta \in (0, \min\{1/2,\ \delta/l,\ 1/l\}),$$

определим при $i = 0, 1, \dots$ функции ζ_i по формуле (4.3/1) и положим $\chi_i = \eta \circ \zeta_i$. Тогда $\chi_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, $i \ge 0$. Легко устанавливаются следующие неравенства:

$$\zeta_i(y) < 0 \ \text{ при } \ |y| > \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta,$$

$$\zeta_i(y) > 1 + \log(\varphi_{i-1}/\varphi_i)/\big(\theta \log(\varphi_i/z_i)\big) \ \text{ при } \ |y| < \varphi_{i-1}.$$

Выбирая $z_0 \in (0,1)$ достаточно малым, можно добиться выполнения условий

$$\chi_i(y) = 1 \text{ при } |y| < \varphi_{i-1}, \quad \chi_i(y) = 0 \text{ при } |y| > \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta, \ \ i = 1, 2, \ldots$$

Можно также считать, что $z_0 < 2z_2$ и $2\varphi_{i-1} < \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta$ при $i \geq 1$.

Обратимся к построению требуемого оператора продолжения

$$V_p^l(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{E}u \in V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n).$$

Общий случай сводится к случаю, когда Ω имеет вид (4.2/2) и $u(y,z) = 0$ при $z > z_0/2$ (см. конец доказательства теоремы 4.2 (i)). Пусть $\{\mu_i\}_{i\geq 1}$ – разбиение единицы со свойствами (4.2/6–7) и $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ – последовательность функций из $C_0^\infty(\mathbf{R}^{n-1})$, удовлетворяющих условиям (4.2/8) и условию $|\nabla_s \xi_i| \leq c\,\varphi_i^{-s}$, $s = 0, \ldots, l$.

При $i \geq 1$ введем ячейки Ω_i по формуле (4.2/4) и линейные операторы продолжения $E_i : V_p^l(\Omega_i) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$, подчиненные требованию (4.2/5). Пусть $\overline{u}_i$ – среднее значение функции u на Ω_i. Положим

$$\mathcal{E}u = v + w, \tag{3}$$

где

$$v(x) = \sum\nolimits_{i=1}^\infty \overline{u}_i \mu_i(z) \chi_i(y), \tag{4}$$

$$w(x) = \sum\nolimits_{i=1}^\infty \mu_i(z)\xi_i(y)\big(E_i(u_i - \overline{u}_i)\big)(x), \tag{5}$$

$x = (y,z) \in \mathbf{R}^n$ и $u_i = u|_{\Omega_i}$. Из (3)–(5) следует, что $\mathcal{E}u|_\Omega = u$ и существуют производные $D^\alpha \mathcal{E}u \in L_{p,loc}\big(\mathbf{R}^n \setminus \{O\}\big)$ при $|\alpha| \leq l$. Проверим оценки

$$\|\sigma \nabla_j v\|_{p,\mathbf{R}^n} \leq c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0, \ldots, l, \tag{6}$$

$$\|\sigma \nabla_j w\|_{p,\mathbf{R}^n} \leq c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0, \ldots, l. \tag{7}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\sigma(x)$ определяется формулой (2) при $x \in B_1$ и $\sigma(x) = 1$ при $|x| \geq 1$. Положим

$$G_i = \big\{x = (y,z) : z \in (z_{i+1}, z_i), \ y \in \mathbf{R}^{n-1}, \ |y| < \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta\big\}, \ \ i \geq 1.$$

Если $x \in G_i$, то

$$\big||x| - z_i\big| = \big||y|^2 + z^2 - z_i^2\big|(|x| + z_i)^{-1} \leq$$

$$\leq \big(|y|^2 + z_i^2 - z_{i+1}^2\big) z_i^{-1} \leq \varphi_i(\varphi_i z_i^{-1})^{1-2\theta} + 2\varphi_i \leq 3\varphi_i.$$

Отсюда $\varphi(|x|) \sim \varphi_i + o(\varphi_i)$ и

$$\sigma(x) \sim \sigma_i = (\varphi_i z_i^{-1})^l \big| \log(\varphi_i/z_i)\big|^{1-1/p}, \quad x \in G_i. \tag{8}$$

Доказательство оценки (6). При $x \in G_i$ имеем

$$v(x) = \sum\nolimits_{i=i}^{i+1} \overline{u}_i \mu_i(z)\chi_i(y) = \overline{u}_{i+1}\chi_{i+1}(y) +$$

$$+\mu_i(z)\big(\overline{u}_i - \overline{u}_{i+1}\big)\chi_i(y) + \overline{u}_{i+1}\mu_i(z)\big(\chi_i(y) - \chi_{i+1}(y)\big). \tag{9}$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \quad |\alpha| = j$. Мы будем различать два случая

$$1)\ \alpha_n = 0 \quad \text{и} \quad 2)\ \alpha_n > 0.$$

1) Предположим сначала, что $j = 0$. Тогда из (8) и (9) выводим

$$\|\sigma v\|_{p,G_i}^p \le c\,\sigma_i^p \big(|\overline{u}_i|^p + |\overline{u}_{i+1}|^p\big) \operatorname{mes}_n(G_i) \le$$

$$\le c\,\psi_i^{(n-1)(1-\theta)} |\log \psi_i|^{p-1} \big(|\overline{u}_i|^p + |\overline{u}_{i+1}|^p\big)\varphi_i^n,$$

где $\psi_i = \varphi_i/z_i$. Так как

$$|\overline{u}_i|^p \varphi_i^n \le c\,\|u\|_{p,\Omega_i}^p, \tag{10}$$

то

$$\|\sigma v\|_{p,G_i}^p \le c\,\|u\|_{p,\Omega_i \cup \Omega_{i+1}}^p, \quad i \ge 1. \tag{11}$$

Пусть $0 < j = |\alpha| \le l,\ \alpha_n = 0$. В этом случае

$$\|\sigma D^\alpha v\|_{p,G_i}^p \le c\,\sigma_i^p \sum\nolimits_{k=i}^{i+1} |\overline{u}_k|^p \|\nabla_j \chi_k\|_{p,G_i}^p. \tag{12}$$

Принимая во внимание лемму 4.3 и равенство $\chi_i(y) = \chi_{i+1}(y) = 1$ при $|y| < \varphi_i$, получим

$$\|\nabla_j \chi_k\|_{p,G_i}^p \le \frac{c\,\varphi_i}{|\log \psi_i|^p} \int_{\varphi_i < |y| < \varphi_i^{1-\theta} z_i^\theta} |y|^{-pj} dy \le$$

$$\le c\,\varphi_i |\log \psi_i|^{1-p}, \quad k = i, i+1.$$

Таким образом, правая часть (12) мажорируется величиной

$$c\,\varphi_i^n z_i^{1-n} \big(|\overline{u}_i|^p + |\overline{u}_{i+1}|^p\big).$$

Используя (10), приходим к оценке

$$\|\sigma D^\alpha v\|^p_{p,G_i} \le c\,\|z^{-l}u\|^p_{p,\Omega_i\cup\Omega_{i+1}}, \quad i\ge 1. \tag{13}$$

Ввиду (11) оценка (13) верна также и при $\alpha=0$.

2) Пусть $\alpha=(\beta, j-s)$, где $\beta\in \mathbf{Z}^{n-1}_+$, $|\beta|=s<j\le l$. Из (9) следует, что

$$c\,\varphi_i^{j-s}|D^\alpha v| \le |\overline{u}_i-\overline{u}_{i+1}|\,|D^\beta\chi_i| + |\overline{u}_{i+1}||D^\beta(\chi_i-\chi_{i+1})| \tag{14}$$

на множестве G_i, $i\ge 1$. Применяя лемму 4.3, найдем

$$\varphi_i^{sp-jp}\|\sigma D^\beta\chi_i\|^p_{p,G_i} \le c\,\varphi_i^{sp-n+2}\sigma_i^p\int_{|y|<\varphi_i^{1-\theta}z_i^\theta}|y|^{-sp}dy \le$$

$$\le c\,\psi_i^{p-\theta(n-1-sp)}|\log\psi_i|^{p-1}z_i^{-p(l-1)}\varphi_i^{n-p}, \quad \psi_i=\varphi_i z_i^{-1}.$$

Отсюда и из неравенства $p>\theta(n-1-sp)$ вытекает оценка

$$\varphi_i^{sp-jp}\|\sigma D^\beta\chi_i\|^p_{p,G_i} \le c\,z_i^{-p(l-1)}\varphi_i^{n-p}. \tag{15}$$

Поскольку

$$\|u-\overline{u}_i\|_{p,\Omega_i} \le c\,\varphi_i\|\nabla u\|_{p,\Omega_i}, \quad i\ge 1, \tag{16}$$

то

$$\varphi_i^{n-p}|\overline{u}_i-\overline{u}_{i+1}|^p \le c\,\|\nabla u\|^p_{p,\hat\Omega_i}, \quad \hat\Omega_i=\Omega_i\cup\Omega_{i+1}.$$

Последнее вместе с (15) приводят к оценке

$$\varphi_i^{sp-jp}|\overline{u}_i-\overline{u}_{i+1}|^p\|\sigma D^\beta\chi_i\|^p_{p,G_i} \le c\,\|z^{1-l}\nabla u\|^p_{p,\hat\Omega_i}, \quad i\ge 1. \tag{17}$$

Обратимся к оценке величины

$$\varphi_i^{s-j}|\overline{u}_{i+1}|\,\|\sigma D^\beta(\chi_i-\chi_{i+1})\|_{p,G_i}.$$

Если $|y|<\varphi_i$, то $\chi_i(y)=\chi_{i+1}(y)=1$, а если $\varphi_i<|y|<\varphi_i^{1-\theta}z_i^\theta$, то имеет место (4.3/3). Поэтому

$$\varphi_i^{(s-j)p}\|\sigma D^\beta\big(\chi_i-\chi_{i+1}\big)\|^p_{p,G_i} \le$$

$$\le c\,\varphi_i^{sp-n+2}\sigma_i^p\big(|(\varphi_i-\varphi_{i+1})\varphi_i^{-1}|^p+\psi_i^p\big)\int_{|y|<\varphi_i^{1-\theta}z_i^\theta}|y|^{-sp}dy \le$$

$\le c\,|\log\psi_i|^{p-1}\big(\psi_i^{p\delta}+\psi_i^p\big)\psi_i^{-\theta(n-1-sp)}\varphi_i^n z_i^{-lp} \le c\,\varphi_i^n z_i^{-lp}, \quad \psi_i = \varphi_i/z_i.$

Здесь мы использовали оценку $\varphi_i - \varphi_{i+1} \le c\,\varphi_i\psi_i^\delta$, вытекающую из (1), а также неравенство $\min\{p,\delta p\} > \theta(n-1-sp)$. Принимая во внимание (10), получим

$$\varphi_i^{sp-jp}|\overline{u}_{i+1}|^p\|\sigma D^\beta(\chi_i-\chi_{i+1})\|_{p,G_i}^p \le c\,\|z^{-l}u\|_{p,\Omega_{i+1}}^p. \tag{18}$$

Из оценок (14), (17), (18) следует, что в случае 2) неравенство

$$c\,\|\sigma D^\alpha v\|_{p,G_i}^p \le \|z^{-l}u\|_{p,\hat{\Omega}_i}^p + \|z^{1-l}\nabla u\|_{p,\hat{\Omega}_i}^p \tag{19}$$

справедливо при $i\ge 1$ и $\hat{\Omega}_i = \Omega_i \cup \Omega_{i+1}$. В силу (13) то же неравенство верно и в случае 1). Суммируя (19) по $i \ge 1$, приходим к оценке

$$c\,\|\sigma D^\alpha v\|_{p,G}^p \le \|z^{-l}u\|_{p,\Omega}^p + \|z^{1-l}\nabla u\|_{p,\Omega}^p,$$

где $G = \cup_{i=1}^\infty G_i,\ \alpha \in Z_+^n,\ |\alpha| = j \le l$. Теперь (6) вытекает из леммы 4.1.2/3 и включения $\operatorname{supp} v \subset \overline{G}$.

Доказательство оценки (7). Из определения (5) следует, что $\operatorname{supp} w \subset \overline{G}$ а также

$$\|\sigma\nabla_j w\|_p^p \sim \sum\nolimits_{i=1}^\infty \sigma_i^p\|\nabla_j w\|_{p,G_i}^p, \quad j = 0,\dots,l. \tag{20}$$

Кроме того,

$$\|\nabla_j w\|_{p,G_i} \le c\sum\nolimits_{k=i}^{i+1}\ \sum\nolimits_{s=0}^{j}\varphi_k^{s-j}\|\nabla_s\mathcal{E}_k(u_k-\overline{u}_k)\|_p.$$

С помощью (4.2/5) и (16) мажорируем правую часть последнего неравенства выражением

$$c\sum\nolimits_{k=i}^{i+1}\ \sum\nolimits_{s=1}^{l}\varphi_i^{s-j}\|\nabla_s u\|_{p,\Omega_k}.$$

Отсюда

$$\sigma_i\|\nabla_j w\|_{p,G_i} \le c\sum\nolimits_{s=1}^{l}\|z^{s-l}\nabla_s u\|_{p,\hat{\Omega}_i}, \quad j = 0,\dots,l. \tag{21}$$

Из соотношения (20) и оценки (21) выводим

$$\|\sigma\nabla_j w\|_p \le c\sum\nolimits_{s=1}^{l}\|z^{s-l}\nabla_s u\|_{p,\Omega}.$$

Ссылка на лемму 4.1.2/3 завершает доказательство неравенства (7) и утверждения (i) теоремы.

(ii) Пусть $\{u_\delta\}$ – семейство функций, введенное в доказательстве утверждения (ii) теоремы 4.2. Напомним, что для любого малого $\delta > 0$

$$u_\delta \in C^\infty(\Omega), \quad u_\delta(x) = 1 \ \text{ при } \ x = (y, z) \in \Omega \cap U, \quad z \in (\delta, 2\delta),$$

и верна оценка (4.2/14) (как и выше, U означает окрестность из определения 4.1.1).

Пусть $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ – ограниченный оператор продолжения, где $\sigma(x)$ – неубывающая функция аргумента $|x|$ при малых $|x|$. Пусть еще $\zeta \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{O\})$ – положительно однородная функция нулевой степени, равная единице в конусе $2|y| < z$ и нулю во внешности конуса $|y| < z$ (такую функцию легко построить, рассматривая функции числового аргумента $|y|/z$). Положим $v_\delta = \zeta \mathcal{E} u_\delta$. Согласно лемме 4.4.1 справедливо неравенство

$$c_1 \|v_\delta\|^p_{V^l_{p,\sigma}(\mathbf{R}^n)} \le \|\mathcal{E} u_\delta\|^p_{V^l_{p,\sigma}(\mathbf{R}^n)} \le c_2 \|u_\delta\|^p_{p,l,\Omega}.$$

В силу (4.2/14) и монотонности σ имеем

$$\sigma(\delta)^p \int_\delta^{2\delta} \|v_\delta(\cdot, z)\|^p_{p,l,\mathbf{R}^{n-1}} dz \le c\, \delta^{1-lp} \varphi(3\delta)^{n-1}. \tag{22}$$

Зафиксируем $z \in (\delta, 2\delta)$ и заметим, что $v_\delta(y, z) = 1$ при $y \in \varphi(z)\,\omega$. Применяя лемму 3.1.4 к функции $B_z^{(n-1)} \ni y \mapsto v_\delta(y, z)$, получим

$$\big(\log(z/\varphi(z))\big)^{p-1} \|\nabla_l' v_\delta(\cdot, z)\|^p_{p,B_z} + z^{1-n} \|v_\delta(\cdot, z)\|^p_{p,B_z} \ge c, \tag{23}$$

где ∇_l' означает градиент порядка l по переменным $y_1, \dots, y_{n-1}$. Так как $v_\delta(y, z) = 0$ при $|y| > z$, то

$$\|v_\delta(\cdot, z)\|_{p,B_z} \le c\, z^l \|\nabla_l' v_\delta(\cdot, z)\|_{p,B_z}.$$

Объединяя последнее с (23), найдем

$$\|\nabla_l' v_\delta(\cdot, z)\|^p_{p,B_z} \ge c \left[\log\big(z/\varphi(z)\big)\right]^{1-p}. \tag{24}$$

Из этой оценки и (22) следует, что

$$\sigma(\delta)^p |\log\big(\varphi(\delta)/\delta\big)|^{1-p} \le c\, \delta^{-lp} \varphi(3\delta)^{n-1}$$

при всех достаточно малых $\delta > 0$. Требуемый результат вытекает теперь из соотношения $\varphi(3\delta) \sim \varphi(\delta)$.

4.5 Продолжение из пика в круговой пик и в конус

В настоящем разделе строится продолжение функций из класса Соболева с носителем в окрестности вершины внешнего пика в круговой пик с сохранением класса. Кроме того, определяется оператор продолжения для указанных функций в весовое пространство Соболева на липшицевом конусе. Полученные результаты используются в следующем разделе и в главе 5.

Лемма 1. *Пусть Ω – область, определенная в (4.2/2), где ω и φ – те же, что в определении 4.1.1, $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$. Зафиксируем $M \geq 1$ и положим*

$$G = \big\{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : |y| < M\varphi(z),\ z \in (0,1)\big\}.$$

Для всех $1 \leq p \leq \infty$ и $l = 1, 2, \ldots$ существует линейный непрерывный оператор продолжения $F : V_p^l(\Omega) \to V_p^l(G)$ со следующим свойством. Если $u \in V_p^l(\Omega)$, $u(x) = 0$ при $x = (y, z) \in \Omega$ и $z > \varepsilon$, то $\big(Fu\big)(x) = 0$ при $x \in G$ и $z > 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число.

Доказательство. Фигурирующие далее положительные константы c зависят только от n, p, l, M, Ω. Положим

$$z_0 = 1, \quad z_{i+1} + \varphi(z_{i+1}) = z_i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Легко проверить, что $z_i \searrow 0$, $z_{i+1} z_i^{-1} \to 1$ и $\varphi_{i+1}\varphi_i^{-1} \to 1$, где $\varphi_i = \varphi(z_i)$. При $i \geq 1$ определим ячейки Ω_i равенством (4.2/4) и положим еще

$$\Omega_0 = \big\{(y, z) \in \Omega : z \in (z_1, z_0)\big\}.$$

При $i \geq 0$ рассмотрим линейные непрерывные операторы продолжения $E_i : V_p^l(\Omega_i) \to V_p^l(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющие условию (4.2/5). Пусть $\{\mu_i\}$ – разбиение единицы на $(0, z_1]$, подчиненное требованиям (4.2/6–7). Полагая $\mu_0(z) = 1 - \mu_1(z)$ при $z \in [z_1, 1]$ и $\mu_0(z) = 0$ при $z \in [0, z_1)$, получим

$$\mu_0 \in C^\infty([0,1]), \quad \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu_k(z) = 1, \quad z \in (0,1].$$

Продолжим функцию $u \in V_p^l(\Omega)$ в круговой пик G. По теореме 1.5.1 (см. также замечание 1.5.1) существует такое линейное отображение $u \mapsto P_k \in \mathcal{P}_{l-1}$, что

$$\|\nabla_s(u - P_k)\|_{p,\Omega_k} \leq c\,\varphi_k^{l-s} \|\nabla_l u\|_{p,\Omega_k}, \quad k = 0, 1, \ldots,\ s = 0, \ldots, l. \quad (1)$$

Положим

$$\bigl(Fu\bigr)(x)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\mu_k(z)P_k(x)+$$
$$+\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\mu_k(z)\bigl(E_k(u_k-P_k)\bigr)(x), \qquad (2)$$

где $u_k=u|_{\Omega_k}$, $x=(y,z)\in G$. Мы утверждаем, что $u\mapsto Fu$ есть требуемый оператор продолжения. В самом деле, из (2) следует равенство $Fu|_{\Omega}=u$. Проверим оценку

$$\|\nabla_j Fu\|_{p,G}\le c\left(\|\nabla_j u\|_{p,\Omega}+\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}\right),\quad j=0,\dots,l. \qquad (3)$$

Пусть

$$G_k=\bigl\{(y,z)\in G:\ z\in(z_{k+1},z_k)\bigr\},\quad k\ge 0.$$

Заметим, что $Fu|_{G_k}=v_k+w_k$, где

$$v_k=P_k+\mu_{k+1}\bigl(P_{k+1}-P_k\bigr),\quad w_k=\sum\nolimits_{i=k}^{k+1}\mu_i E_i\bigl(u_i-P_i\bigr).$$

Согласно (4.2/6) имеем

$$\|\nabla_j w_k\|_{p,G_k}\le c\sum\nolimits_{i=k}^{k+1}\ \sum\nolimits_{s=0}^{j}\varphi_i^{s-j}\|\nabla_s\mathcal{E}_i\bigl(u_i-P_i\bigr)\|_p.$$

Последнее в сочетании с (4.2/5) и (1) дает

$$\|\nabla_j w_k\|_{p,G_k}\le c\,\|\nabla_l u\|_{p,\hat\Omega_k},\quad \hat\Omega_k=\Omega_k\cup\Omega_{k+1},\quad k\ge 0. \qquad (4)$$

Обратимся к оценке $\|\nabla_j v_k\|_{p,G_k}$. Ясно, что

$$\|\nabla_j v_k\|_{p,G_k}\le\|\nabla_j P_k\|_{p,G_k}+$$
$$+c\sum\nolimits_{s=0}^{j}\varphi_k^{s-j}\|\nabla_s\bigl(P_{k+1}-P_k\bigr)\|_{p,G_k}.$$

Так как $\|Q\|_{p,G_k}\le c\,\|Q\|_{p,G_k\cap\Omega}$ для любого полинома $Q\in\mathcal{P}_{l-1}$, то

$$c\,\|\nabla_j v_k\|_{p,G_k}\le\|\nabla_j P_k\|_{p,G_k\cap\Omega}+$$
$$+\sum\nolimits_{s=0}^{j}\varphi_k^{s-j}\|\nabla_s\bigl(P_{k+1}-P_k\bigr)\|_{p,G_k\cap\Omega}.$$

Правая часть последнего неравенства мажорируется величиной

$$\|\nabla_j u\|_{p,\Omega_k}+c\sum\nolimits_{s=0}^{j}\ \sum\nolimits_{i=k}^{k+1}\varphi_i^{s-j}\|\nabla_s\bigl(u-P_i\bigr)\|_{p,\Omega_i}.$$

Отсюда и из (1) следует оценка

$$\|\nabla_j v_k\|_{p,G_k} \le c\left(\|\nabla_j u\|_{p,\Omega_k} + \|\nabla_l u\|_{p,\hat{\Omega}_k}\right), \quad k \ge 0. \tag{5}$$

Поскольку каждая точка Ω принадлежит не более чем трем множествам семейства $\{\hat{\Omega}_k\}_{k\ge 0}$, то из (4) и (5) выводится (3).

Для окончания доказательства леммы 1 заметим, что оператор (2) имеет такое свойство: если $u(y,z) = 0$ при $z > z_k$ для некоторого $k \ge 2$, то $\big(Fu\big)(y,z) = 0$ при $z > z_{k-1}$.

В следующей лемме функции, определенные в области Ω из леммы 1, продолжаются до функций, определенных в некотором конусе, содержащем Ω.

Лемма 2. *Пусть* Ω *– та же область, что и в лемме* 1, *и пусть выполнено условие* (4.2/1). *Положим*

$$H = \left\{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : \ z \in (0,1), \ |y| < z\right\}$$

и

$$\sigma(x) = \varphi(|x|)/|x|)^{(n-1)/p} \ \text{ при } \ x \in H.$$

Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(H)$, *где* $1 \le p < \infty$, $l = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Положим

$$M = \sup\left\{\varphi(4t)/\varphi(t) : \ t \in (0, 1/4]\right\}.$$

Это значение M определяет круговой пик G, введенный в лемме 1. Пусть $F : V_p^l(\Omega) \to V_p^l(G)$ – оператор продолжения, построенный в лемме 1. Определим последовательность $\delta_i = 2^{-i}\delta_0$, $i = 0, 1, \ldots$, где число $\delta_0 \in (0,1)$ выбрано столь малым, что выполнены условия

$$\sup\left\{\varphi(z)/z : \ z \in (0, \delta_0]\right\} \le \min\left\{1/4, M^{-1}\right\}$$

и $\big(Fu\big)(y,z) = 0$ при $z > \delta_2$, если $u(y,z) = 0$ при $z > \delta_3$. Тогда

$$\left\{x \in G : z \le \delta_0\right\} \subset H \ \text{ и } \ \delta_{i-1} - \delta_{i+1} > 2\varphi(\delta_{i-1}), \quad i \ge 1.$$

Рассмотрим еще цилиндры

$$D_i = \left\{(y,z) \in \mathbf{R}^n : \ z \in (\delta_{i+1}, \delta_{i-1}), \ |y| < \varphi(\delta_{i-1})\right\}, \quad i \ge 1,$$

и заметим, что

$$\left\{(y,z) \in \Omega : z \in (\delta_{i+1}, \delta_{i-1})\right\} \subset D_i \subset G;$$

первое включение верно, так как $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$ (ср. (4.2/2)), а второе – в силу определения M.

Построение оператора продолжения: $V_p^l(\Omega) \ni u \mapsto Eu \in V_{p,\sigma}^l(H)$. Достаточно ограничиться случаем $u(y,z) = 0$ при $z > \delta_3$. Общий случай тогда сводится к указанному с помощью гладкой срезки и теоремы 1.6/2.

Пусть $u \in V_p^l(\Omega)$, $u(y,z) = 0$ при $z > \delta_3$. Положим $u_i = Fu|_{D_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ В силу леммы 2.8/1 существует линейное отображение $u_i \mapsto P_i \in \mathcal{P}_{l-1}$, для которого

$$\|\nabla_s\big(u_i - P_i\big)\|_{p,D_i} \le c\,\delta_i^{l-s}\|\nabla_l u_i\|_{p,D_i}, \quad i \ge 1, \quad s \le l. \tag{6}$$

По лемме 2.8/3 каждому $i = 1, 2, \ldots$ соответствует линейный оператор продолжения

$$V_p^l(D_i) \ni f \mapsto E_i f \in V_p^l(\mathbf{R}^n),$$

такой, что

$$\|\nabla_s E_i f\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\left(\frac{\delta_i}{\varphi_i}\right)^{(n-1)/p}\sum_{k=0}^{l}\delta_i^{k-s}\|\nabla_k f\|_{p,D_i}, \quad s = 0, \ldots, l, \tag{7}$$

где $\varphi_i = \varphi(\delta_i)$. Пусть $\{\eta_i\}_{i\ge1}$ – гладкое разбиение единицы на промежутке $(0, \delta_1]$, подчиненное следующим требованиям:

$$\eta_i \in C_0^\infty(\delta_{i+1}, \delta_{i-1}), \quad |\eta_i^{(s)}(t)| \le c\,\delta_i^{-s}, \quad t \in \mathbf{R}^1, \quad s = 0, \ldots, l, \tag{8}$$

$$\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\eta_i(t) = 1, \quad t \in (0, \delta_1]. \tag{9}$$

Положим

$$\big(Eu\big)(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\eta_i(z)P_i(x) + \sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\eta_i(z)\big(E_i(u_i - P_i)\big)(x) \tag{10}$$

при $x = (y,z) \in H$ и проверим, что Eu есть требуемое продолжение функции u.

Равенство $Eu|_\Omega = u$ и включение $Eu \in V_p^l(H \setminus \overline{B}_\varepsilon)$ для любого малого $\varepsilon > 0$ вытекают из определения (10). Обратимся к доказательству оценки

$$\|\sigma\nabla_j Eu\|_{p,H} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0, \ldots, l. \tag{11}$$

Обозначим через $v(x)$ первую сумму в правой части (10) и положим

$$H_i = \big\{x \in H : z \in (\delta_{i+1}, \delta_i)\big\}, \quad \sigma_i = (\varphi(\delta_i)/\delta_i)^{(n-1)/p}, \quad i \ge 1.$$

Тогда

$$\|\sigma\nabla_j v\|^p_{p,H} \sim \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \sigma_i^p \|\nabla_j v\|^p_{p,H_i}. \tag{12}$$

Так как

$$v\big|_{H_i} = P_{i+1} + \eta_i\big(P_i - P_{i+1}\big),$$

то

$$\|\nabla_j v\|_{p,H_i} \le \|\nabla_j P_{i+1}\|_{p,H_i} + c\sum\nolimits_{k=0}^{j} \delta_i^{k-j}\|\nabla_k\big(P_i - P_{i+1}\big)\|_{p,H_i}.$$

Применяя лемму 2.8/2, получим

$$\|\nabla_j v\|_{p,H_i} \le c\,\sigma_i^{-1}\sum\nolimits_{k=0}^{l-1-j} \delta_i^k \|\nabla_{k+j} P_{i+1}\|_{p,H_i\cap D_{i+1}} +$$

$$+\, c\,\sigma_i^{-1}\sum\nolimits_{k=0}^{j}\ \sum\nolimits_{s=0}^{l-1-k} \delta_i^{k+s-j}\|\nabla_{k+s}\big(P_i - P_{i+1}\big)\|_{p,H_i\cap D_{i+1}}. \tag{13}$$

Правая часть последнего неравенства может быть оценена сверху с помощью (6):

$$\|\nabla_{k+j} P_{i+1}\|_{p,H_i\cap D_{i+1}} \le$$

$$\le \|\nabla_{k+j} u_{i+1}\|_{p,D_{i+1}} + c\,\delta_i^{l-k-j}\|\nabla_l u_{i+1}\|_{p,D_{i+1}};$$

$$\|\nabla_{k+s}\big(P_i - P_{i+1}\big)\|_{p,H_i\cap D_{i+1}} \le$$

$$\le \sum\nolimits_{\nu=i}^{i+1} \|\nabla_{k+s}\big(u_\nu - P_\nu\big)\|_{p,D_\nu} \le c\sum\nolimits_{\nu=i}^{i+1} \delta_\nu^{l-k-s}\|\nabla_l u_\nu\|_{p,D_\nu}.$$

Отсюда и из (13) следует оценка

$$\sigma_i\|\nabla_j v\|_{p,H_i} \le c\,\|Fu\|_{p,l,D_i\cup D_{i+1}}, \tag{14}$$

где $i \ge 1$. Объединяя (14) и (12), приходим к неравенству

$$\|\sigma\nabla_j v\|_{p,H} \le c\,\|Fu\|_{p,l,G},$$

откуда с помощью леммы 1 и леммы 4.1.1 получаем

$$\|\sigma\nabla_j v\|_{p,H} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0,\dots,l. \tag{15}$$

Обозначим через $w(x)$ вторую сумму в правой части (10). Если $j = 0,\dots,l$, то

$$\|\nabla_j w\|_{p,H_i} \le c\sum\nolimits_{s=i}^{i+1}\ \sum\nolimits_{k=0}^{j} \delta_s^{k-j}\|\nabla_k E_s\big(u_s - P_s\big)\|_p. \tag{16}$$

Ввиду оценки (7) правая часть последнего неравенства не больше

$$c\,\sigma_i^{-1} \sum\nolimits_{s=i}^{i+1} \sum\nolimits_{r=0}^{l} \delta_s^{r-j} \|\nabla_r \big(u_s - P_s\big)\|_{p,D_s}, \tag{17}$$

что мажорируется величиной $c\,\sigma_i^{-1}\delta_i^{l-j}\|\nabla_l Fu\|_{p,D_i \cup D_{i+1}}$ с помощью (6). Отсюда следует, что верна оценка, полученная заменой v на w в (14). Заметим, что в соотношении (12) также можно заменить v на w. Теперь неравенство

$$\|\sigma \nabla_j w\|_{p,H} \le c\,\|\nabla_l u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0, \dots, l,$$

выводится точно так же, как (15) было получено из (12), (14). Итак, оценка (11) установлена, и доказательство леммы 2 закончено.

4.6 Внешний пик. Продолжение с весом при $lp > n - 1$

В данном разделе строится оптимальная весовая функция σ, такая, что существует линейный ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ для области с внешним пиком.

Теорема. *Пусть $lp > n - 1$, $1 \le p < \infty$ и Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика на границе. Предположим, что выполнено условие* (4.2/1).
(i) *Положим*

$$\sigma(x) = \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^{(n-1)/p} \ \textit{ при } \ x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \ \ |x| < 1$$

и $\sigma(x) = 1$ в остальных точках $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$.
(ii) *Пусть σ – весовая функция в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющая следующему условию: сужение $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \ni x \mapsto \sigma(x)$ при малых $|x|$ является неубывающей функцией аргумента $|x|$. Если существует ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$, а область ω из определения* 4.1.1 *содержит точку $y = 0$, то*

$$\sigma(x) \le c\,\big(\varphi(|x|)/|x|\big)^{(n-1)/p}$$

при всех $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, достаточно близких к вершине пика.

Доказательство. (i) Случай области общего вида с внешним пиком на границе сводится к случаю, когда Ω имеет вид (4.2/2) (см.

конец доказательства теоремы 4.2 (i)). По лемме 4.5/2 достаточно построить линейный непрерывный оператор продолжения

$$\mathcal{E} : V^l_{p,\sigma}(H) \to V^l_{p,\sigma}(\mathbf{R}^n),$$

где H – конус, введенный в той же лемме и $\sigma(x) = \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^{(n-1)/p}$ при $|x| < 1$, $\sigma(x) = 1$ при $|x| \geq 1$.

Для построения продолжения $V^l_{p,\sigma}(H) \ni u \mapsto \mathcal{E}u \in V^l_{p,\sigma}(\mathbf{R}^n)$ можно считать, что функция u имеет носитель в малой окрестности начала координат, не зависящей от u. Требуемый результат в общем случае выводится с помощью гладкой срезки и теоремы 1.6/2.

Пусть $\delta_i = 2^{-i}$, $i = 0, 1, \ldots$, и пусть $u \in V^l_{p,\sigma}(H)$, $u(x) = 0$ при $|x| > \delta_2$. Положим

$$H^{(i)} = \big\{x \in H : \delta_{i+1} < |x| < \delta_{i-1}\big\}, \quad i \geq 1.$$

По теореме 1.5.1 при $i = 1, 2, \ldots$ существует такое линейное отображение $u \mapsto P_i \in \mathcal{P}_{l-1}$, что

$$\|\nabla_s\big(u - P_i\big)\|_{p,H^{(i)}} \leq c\,\delta_i^{l-s}\|\nabla_l u\|_{p,H^{(i)}}, \quad s = 0, \ldots, l. \tag{1}$$

Согласно лемме 2.1.2/1 каждому $i \geq 1$ соответствует линейный оператор продолжения

$$V^l_p(H^{(i)}) \ni f \mapsto \mathcal{E}_i f \in V^l_p(\mathbf{R}^n),$$

удовлетворяющий условию

$$\|\nabla_s\big(\mathcal{E}_i f\big)\|_{p,\mathbf{R}^n} \leq c \sum\nolimits_{k=0}^{l} \delta_i^{k-s}\|\nabla_k f\|_{p,H^{(i)}}, \quad s = 0, \ldots, l. \tag{2}$$

Пусть $\{\eta_i\}_{i\geq 1}$ – последовательность со свойствами (4.5/8–9). Положим $u_i = u|_{H^{(i)}}$,

$$v(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \eta_i(|x|)P_i(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{3}$$

$$w(x) = \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \eta_i(|x|)\big(\mathcal{E}_i(u_i - P_i)\big)(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{4}$$

$$\mathcal{E}u = v + w. \tag{5}$$

Из (3)–(5) вытекает, что $\mathcal{E}u|_H = u$ и $\mathcal{E}u \in V^l_p\big(\mathbf{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon\big)$ для любого $\varepsilon > 0$. Проверим оценку

$$\|\sigma\nabla_j\big(\mathcal{E}u\big)\|_{p,\mathbf{R}^n} \leq c\,\|u\|_{V^l_{p,\sigma}(H)}, \quad j = 0, \ldots, l. \tag{6}$$

Доказательство неравенства (6). Рассмотрим кольца

$$A_i = \{x \in \mathbf{R}^n : \delta_{i+1} < |x| < \delta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

и заметим, что

$$v(x) = P_i(x) + \eta_{i+1}(|x|)\big(P_{i+1}(x) - P_i(x)\big), \quad x \in A_i.$$

Отсюда

$$\|\sigma\nabla_j v\|_{p,A_i} \le c\,\sigma_i \|\nabla_j P_i\|_{p,A_i} +$$

$$+ c\,\sigma_i \sum\nolimits_{s=0}^{j} \delta_i^{s-j} \|\nabla_s\big(P_{i+1} - P_i\big)\|_{p,A_i}, \qquad (7)$$

где $i = 1, 2, \dots$ и $\sigma_i = \big(\varphi(\delta_i)/\delta_i\big)^{(n-1)/p}$. Поскольку

$$\|Q\|_{p,A_i} \le c\,\|Q\|_{p,H^{(i)}} \quad \text{при} \quad Q \in \mathcal{P}_{l-1},$$

то

$$c\,\|\nabla_j P_i\|_{p,A_i} \le \|\nabla_j u\|_{p,H^{(i)}} + \|\nabla_j\big(u - P_i\big)\|_{p,H^{(i)}}, \quad j \le l-1,$$

$$c\,\|\nabla_s\big(P_{i+1} - P_i\big)\|_{p,A_i} \le \sum\nolimits_{k=i}^{i+1} \|\nabla_s\big(u - P_i\big)\|_{p,H^{(k)}}, \quad s \le l-1.$$

Объединяя эти неравенства с (1) и (7), получим

$$c\,\|\sigma\nabla_j v\|_{p,A_i} \le \|\sigma\nabla_j u\|_{p,H^{(i)}} +$$

$$+ \sum\nolimits_{k=i}^{i+1} \|\sigma\nabla_l u\|_{p,H^{(k)}}, \quad i = 1, 2, \dots \qquad (8)$$

Принимая во внимание включение $\operatorname{supp} v \subset B_{\delta_1}$, выводим из (8) неравенство

$$\|\sigma\nabla_j v\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\,\|u\|_{V^l_{p,\sigma}(H)}, \quad j = 0, \dots, l. \qquad (9)$$

Аналогичная оценка верна и для функции, определенной в (4). В самом деле, если $i \ge 1$ и $0 \le j \le l$, то

$$\|\sigma\nabla_j w\|_{p,A_i} \le c\,\sigma_i \sum\nolimits_{k=i}^{i+1} \sum\nolimits_{s=0}^{j} \delta_k^{s-j} \|\nabla_s \mathcal{E}_k\big(u_k - P_k\big)\|_p.$$

Используя (1) и (2), приходим к неравенству

$$\|\sigma\nabla_j w\|_{p,A_i} \le c \sum\nolimits_{k=i}^{i+1} \|\sigma\nabla_l u\|_{p,H^{(k)}}.$$

Так как $\operatorname{supp} w \subset B_{\delta_1}$, из последнего неравенства следует, что

$$\|\sigma \nabla_j w\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\, \|\sigma \nabla_l u\|_{p,H}.$$

Эта оценка и (9) приводят к (6). Таким образом, $\mathcal{E}u$ есть требуемое продолжение функции u. Доказательство утверждения (i) теоремы закончено.

(ii) Пусть

$$g \in C_0^\infty(1,2), \quad g \ge 0, \quad g\big|_{(4/3,5/3)} = 1.$$

Для произвольного малого $\delta > 0$ положим

$$u_\delta\big|_{\Omega \setminus U} = 0, \quad u_\delta(x) = g(z/\delta), \;\; x = (y,z) \in U \cap \Omega,$$

где U – окрестность из определения 4.1.1. Тогда $u_\delta \in C^\infty(\Omega) \cap V_p^l(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$ – ограниченный оператор продолжения, действующий в весовое пространство Соболева с весовой функцией σ, являющейся радиальной неубывающей в малой окрестности вершины пика. Мы утверждаем, что верна оценка

$$\|\nabla_l \mathcal{E} u_\delta\|_{p,\Pi_\delta} \ge c\, \delta^{-l+n/p}, \tag{10}$$

в которой

$$\Pi_\delta = \big\{(y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (\delta/2, 2\delta), \; y \in \mathbf{R}^{n-1}\big\}.$$

Доказательство этой оценки дается ниже, а сейчас выведем из (10) утверждение (ii) теоремы. В самом деле, из (10) и монотонности σ следует, что

$$\|\sigma \nabla_l \mathcal{E} u_\delta\|_{p,\Pi_\delta} \ge c\, \delta^{-l+n/p} \sigma(\delta/2)$$

при всех достаточно малых $\delta > 0$. В то же время имеем

$$\|\sigma \nabla_l \mathcal{E} u_\delta\|_{p,\mathbf{R}^n} \le c\, \|u_\delta\|_{p,l,\Omega} \le c_1 \delta^{1/p-l} \varphi(2\delta)^{(n-1)/p}.$$

Поскольку $\varphi(2\delta) \sim \varphi(\delta)$, то получаем требуемую оценку

$$\sigma(\delta) \le c\, \big(\varphi(\delta)/\delta\big)^{(n-1)/p}.$$

Итак, дело сводится к проверке неравенства (10), чему и посвящена оставшаяся часть доказательства теоремы. Заметим, что функция $\big(\mathcal{E} u_\delta\big)(y,\cdot)$ принадлежит $V_p^l(\mathbf{R}^1)$ при почти всех $y \in \mathbf{R}^{n-1}$. По теореме 1.5.1 (см. также замечание 1.5.1) при тех же y существует полином $P(y,\cdot)\in\mathcal{P}^{(1)}_{l-1}$, удовлетворяющий условию

$$\|\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(y,\cdot)-P(y,\cdot)\|^p_{L_p(\delta/2,2\delta)}\le c\,\delta^{lp}\int_{\delta/2}^{2\delta}\left|\frac{\partial^l\big(\mathcal{E}u_\delta\big)}{\partial z^l}\,(y,z)\right|^p dz. \quad (11)$$

При этом можно считать, что

$$P(y,z)=\sum\nolimits_{i=0}^{l-1}a_i(y)z^i, \quad (12)$$

где

$$a_i(y)=\delta^{-1-i}\int_{\delta/2}^{\delta}\psi_i(t/\delta)\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(y,t)dt, \quad (13)$$

а $\{\psi_i\}_{i=0}^{l-1}$ – набор стандартных функций из $C_0^\infty(1/2,1)$. Положим

$$v_\delta(y)=\delta^{-1}\int_\delta^{2\delta}\big((\mathcal{E}u_\delta)(y,z)-P(y,z)\big)dz,\quad y\in\mathbf{R}^{n-1}. \quad (14)$$

Так как

$$\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(0,z)=u_\delta(0,z),\ \ z\in(\delta/2,2\delta),$$

и при $y=0$ все коэффициенты (13) равны нулю, то

$$v_\delta(0)=\delta^{-1}\int_\delta^{2\delta}u_\delta(0,z)dz=\int_1^2 g(z)dz>0.$$

В силу соболевского вложения

$$V_p^l\big(B_\delta^{(n-1)}\big)\subset C\big(B_\delta^{(n-1)}\big)\cap L_\infty\big(B_\delta^{(n-1)}\big)$$

имеем

$$c\,\delta^{(n-1)/p}\|v_\delta\|_{\infty,B_\delta}\le\|v_\delta\|_{p,B_\delta}+\delta^l\|\nabla_l v_\delta\|_{p,B_\delta},$$

и, значит,

$$c\le\delta^{(1-n)/p}\|v_\delta\|_{p,\mathbf{R}^{n-1}}+\delta^{l-(n-1)/p}\|\nabla_l v_\delta\|_{p,\mathbf{R}^{n-1}}. \quad (15)$$

Оценим сверху правую часть в (15). Если $|\alpha|=l$, то

$$D^\alpha v_\delta(y)=\delta^{-1}\int_\delta^{2\delta}D_y^\alpha\Big(\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(y,z)-P(y,z)\Big)dz. \quad (16)$$

Из (13) следует, что

$$|D^\alpha a_i(y)| \leq c\,\delta^{-i-1/p} \|D^\alpha_y\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(y,\cdot)\|_{L_p(\delta/2,\delta)},$$

откуда

$$|D^\alpha_y P(y,z)| \leq c\,\delta^{-1/p} \|D^\alpha_y\big(\mathcal{E}u_\delta\big)(y,\cdot)\|_{L_p(\delta/2,\delta)}, \quad z \in (\delta/2, 2\delta).$$

Последняя оценка и (16) приводят к неравенству

$$\|\nabla_l v_\delta\|_{p,\mathbf{R}^{n-1}} \leq c\,\delta^{-1/p} \|\nabla_l \mathcal{E}u_\delta\|_{p,\Pi_\delta}. \tag{17}$$

Для оценки $\|v_\delta\|_{p,\mathbf{R}^{n-1}}$ применим неравенство Гёльдера к интегралу в (14), а затем используем (11). В результате получим

$$\|v_\delta\|_{p,\mathbf{R}^{n-1}} \leq c\,\delta^{l-1/p} \|\nabla_l \mathcal{E}u_\delta\|_{p,\Pi_\delta}. \tag{18}$$

Из (15), (17) и (18) выводим (10) и завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Доказательства леммы 4.5/2 и теоремы настоящего раздела остаются в силе и в случае $p = \infty$. Таким образом, область, удовлетворяющая условию теоремы, принадлежит классу EV^l_∞ для всех $l = 1, 2, \ldots$ Однако этот результат известен и для более широкого класса областей, см. Х. Уитни [142, 143] и комментарии к главе 4.

4.7 Внутренние пики

4.7.1 Многомерная область

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ $(n > 2)$ с компактной границей $\partial\Omega$. Предположим, что $O \in \partial\Omega$ а часть границы $\partial\Omega\backslash\{O\}$ локально представима в виде графика липшицевой функции. Расположим в точке O начало декартовых координат $x = (y, z)$, $y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $z \in \mathbf{R}^1$. Пусть φ и ω имеют тот же смысл, что и в определении .1.1. Кроме того, предположим, что область ω односвязна.

Определение. Говорят, что точка O является ***вершиной пика, направленного внутрь*** Ω, если эта точка является вершиной пика, направленного во внешность области $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, т.е. точка O имеет окрестность U, для которой $U \setminus \overline{\Omega} = \big\{x : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \omega\big\}$.

Отметим, что многомерная область с внутренним пиком удовлетворяет условию теоремы 1.6/3, поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Область в* $\mathbf{R}^n$, $n > 2$, *имеющая вершину внутреннего пика на границе, принадлежит классу* EV_p^l *для всех* $1 \le p \le \infty$ *и* $l = 1, 2, \ldots$

4.7.2 Плоская область с внутренним пиком

Дадим описание вершины внутреннего пика на границе плоской области. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^2$ с компактной границей. Предположим, что $O \in \partial\Omega$, а кривая $\partial\Omega \setminus \{O\}$ локально представима в виде графика липшицевой функции. В точке O поместим начало декартовых координат (x, y). Пусть функции φ_-, φ_+ принадлежат $C^{0,1}\big([0,1]\big)$ и удовлетворяют условиям $\varphi_\pm(0) = 0$, $\varphi'_\pm(t) \to 0$ при $t \to +0$ и $\varphi_-(t) < \varphi_+(t)$ при $t \in (0, 1]$ (см. Рис. 6).

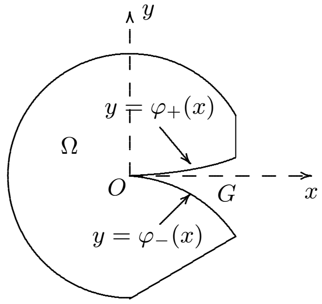

Рис. 6

Определение. Точка O называется *вершиной пика, направленного внутрь* Ω, если существует окрестность U этой точки, такая, что
$$U \setminus \overline{\Omega} = \{(x, y) : x \in (0, 1),\ \varphi_-(x) < y < \varphi_+(x)\}.$$

Для доказательства основного результата нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть* O *– вершина внутреннего пика на границе плоской области* Ω. *Положим*

$$G = \big\{(x, y) : x \in (0, 1),\ \varphi_-(x) < y < \varphi_+(x)\big\},$$

$$S = \big\{(x, y) : x \in (0, 1),\ \ y \in \mathbf{R}^1\big\}.$$

Для любого $l = 1, 2, \ldots$ *существует такая функция*

$$\Lambda \in C^{(l-1)}(S) \cap C^\infty(G),$$

что $\Lambda(x,y) = 1$ *при* $y > \varphi_+(x)$, $\Lambda(x,y) = 0$ *при* $y < \varphi_-(x)$ *и верна оценка*

$$|(\nabla_s \Lambda)(x,y)| \le c\left(\varphi_+(x) - \varphi_-(x)\right)^{-s}, \ (x,y) \in G, \quad s = 0, \dots, l,$$

с постоянной, не зависящей от точки (x,y).

Доказательство. Пусть $\varrho_+(x,y)$, $\varrho_-(x,y)$ означают регуляризованные расстояния (см., например, И. Стейн [71], гл. VI, § 2) от точки (x,y) до множеств

$$F_+ = \{(x,y) : x \in [0,1], \quad y \ge \varphi_+(x)\},$$

$$F_- = \{(x,y) : x \in [0,1], \quad y \le \varphi_-(x)\}$$

соответственно. Покажем, что требуемая функция может быть определена формулой

$$\Lambda = \varrho_-^l / \big(\varrho_+^l + \varrho_-^l\big). \tag{1}$$

В самом деле, так как $\varrho_-|_{F_-} = \varrho_+|_{F_+} = 0$ и $\varrho_\pm \in C^\infty(G)$, то $\Lambda|_{F_- \setminus \{O\}} = 0$, $\Lambda|_{F_+ \setminus \{O\}} = 1$ и $\Lambda \in C^\infty(G)$. Используя известные оценки

$$|\nabla_k \varrho_-|\big|_G \le c\,\varrho_-^{1-k}, \quad |\nabla_k \varrho_+|\big|_G \le c\,\varrho_+^{1-k}, \ \ k = 0, 1, \dots$$

(см. И. Стейн [71]), выводим индукцией по $l = 1, 2, \dots$ неравенства

$$|\nabla_k \varrho_-^l|\big|_G \le c\,\varrho_-^{l-k}, \ \ |\nabla_k \varrho_+^l|\big|_G \le c\,\varrho_+^{l-k}, \ \ k = 0, 1, \dots$$

Применяя индукцию по $k = 1, 2, \dots$, с помощью этих неравенств получим оценку

$$|\nabla_k \big(\varrho_+^l + \varrho_-^l\big)^{-1}|\big|_G \le c\,\varrho^{-l-k}, \ \ l = k, k+1, \dots,$$

где $\varrho = \varrho_+ + \varrho_-$. Таким образом, $\Lambda \in C^{l-1}(S)$ и

$$|\nabla_s \Lambda|\big|_G \le c \sum\nolimits_{k=0}^{s} \varrho_-^{l+k-s} \varrho^{-l-k} \le c\varrho^{-s}, \ \ s = 0, \dots, l.$$

Кроме того, при $(x,y) \in G$ имеем

$$\varrho_-(x,y) \sim y - \varphi_-(x), \quad \varrho_+(x,y) \sim \varphi_+(x) - y,$$

и значит, $\varrho(x,y) \sim \varphi_+(x) - \varphi_-(x)$ на G. Лемма 1 доказана.

В лемме 2 даются необходимые условия на вес σ для существования ограниченного оператора продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$.

Лемма 2. *Пусть G – область из леммы 1. Предположим, что функция $G \ni (x,y) \mapsto \sigma(x,y)$ положительна, ограничена, отделена от нуля во внешности любой окрестности начала координат и зависит только от x. Если $v \in V_{p,\sigma}^l(G)$, $\partial^k v/\partial y^k|_{y=\varphi_-(x)} = 0$ при $k \le l-1$ и почти всех $x \in (0,1)$, то*

$$\|g\sigma(\varphi_+ - \varphi_-)^{1/p-l}\|_{p,(0,1)} \le c\,\|\sigma\nabla_l v\|_{p,G}, \tag{2}$$

где $g(x) = v(x,\varphi_+(x))$.

Доказательство. Верно включение $v(x,\cdot) \in V_p^l\big(\varphi_-(x),\varphi_+(x)\big)$ при п.в. $x \in (0,1)$. При тех же x применим формулу Тейлора к функции $v(x,\cdot)$ на промежутке $[\varphi_-(x),\varphi_+(x)]$. Тогда получим

$$v\big(x,\varphi_+(x)\big) = \frac{1}{(l-1)!}\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial^l v}{\partial y^l}(x,y)\big(\varphi_+(x)-y\big)^{l-1}dy.$$

Используя неравенство Гёльдера, придем к оценке

$$|g(x)|\big(\varphi_+(x)-\varphi_-(x)\big)^{1/p-l} \le \frac{1}{(l-1)!}\left(\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)}\Big|\frac{\partial^l v}{\partial y^l}(x,y)\Big|^p dy\right)^{1/p}.$$

Из этой оценки следует (2) с константой $c = 1/(l-1)!$. Лемма доказана.

В формулируемой ниже теореме даются точные условия на вес σ, при которых существует линейный ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$ для области Ω с внутренним пиком.

Теорема. *Пусть Ω – плоская область с вершиной внутреннего пика на границе, и пусть G – та же область, что и в лемме 1.*
(i) *Положим $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. Если*

$$\sigma(x,y) = \big(\varphi(x)/x\big)^{l-1/p} \ \text{ при } \ (x,y) \in G$$

и $\sigma = 1$ в $\mathbf{R}^2 \setminus G$, то существует линейный ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$, где $1 \le p \le \infty$, $l = 1,2,\dots$
(ii) *Пусть $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ является неубывающей функцией и выполнено условие (4.2/1). Предположим, что весовая функция σ определена в $\mathbf{R}^2$, а сужение $G \ni (x,y) \mapsto \sigma(x,y)$ зависит только от x и*

не убывает. Если существует ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$, *то*

$$\sigma(x,y) \le c\,(\varphi(x)/x)^{l-1/p}$$

для всех $(x,y) \in G$, *достаточно близких к вершине пика.*

Доказательство. (i) Пусть $a \in (0,1]$ – такое число, что $\varphi_+(x) < x$ при $x \in (0,a]$ и множество

$$U_+ = \big\{(x,y) : 0 < x < a,\ \varphi_+(x) < y < x\big\}$$

содержится в окрестности U из определения вершины внутреннего пика. Без потери общности мы далее предполагаем, что $a = 1$. Для построения продолжения заданной функции $u \in V_p^l(\Omega)$ рассмотрим несколько этапов.

1^o. Пусть $u \in V_p^l(\Omega)$, $u = 0$ во внешности U_+. Доопределяя u нулем на множестве $\mathbf{R}^2 \setminus \big(\Omega \cup U\big)$, получим, что $u \in V_p^l(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{G})$. Положим

$$D_+ = \mathbf{R}^2 \setminus \big\{(x,y) : x \in [0,1],\ \ y \le \varphi_+(x)\big\}.$$

По теореме 1.6/2 существует линейный непрерывный оператор продолжения $E_+ : V_p^l(D_+) \to V_p^l(\mathbf{R}^2)$. Обозначим $u_+ = E_+\big(u|_{D_+}\big)$ и положим

$$E_1 u = \begin{cases} u & \text{вне } G, \\ \Lambda u_+ & \text{на } G, \end{cases} \tag{3}$$

где Λ – функция, определенная равенством (1). Проверим, что $E_1 u \in V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$ и верна оценка

$$\|\sigma \nabla_i \big(E_1 u\big)\|_{p,G} \le c\,\|u\|_{p,l,\Omega}, \quad i = 0,\dots,l. \tag{4}$$

Пусть S – полоса из леммы 1 и $\varepsilon \in (0,1/2)$. Так как $\Lambda \in V_\infty^l\big(S \setminus \overline{B}_\varepsilon\big)$, то $\Lambda u_+ \in V_p^l\big(S \setminus \overline{B}_\varepsilon\big)$. Кроме того, $\Lambda u_+ = u$ на $S \setminus \overline{G}$, и, значит, $E_1 u \in V_p^l\big(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}_\varepsilon\big)$.

Обратимся к оценке (4). В доказательстве нуждается только случай $i > 0$. По лемме 1

$$\|\sigma \nabla_i \big(E_1 u\big)\|_{p,G} \le c \sum\nolimits_{s=0}^{i} \|\sigma \varphi^{s-i} \nabla_s u_+\|_{p,G}. \tag{5}$$

Обозначим через v любую производную функции u_+ порядка s, $s < i$. Тогда $v(x,\cdot) \in V_p^{l-s}(\mathbf{R}^1)$ при почти всех $x \in (0,1)$. Поскольку $v(x,t) = 0$ при $t > x$, то

$$v(x,y) = \frac{(-1)^{l-s}}{(l-s-1)!} \int_y^x \frac{\partial^{l-s} v}{\partial t^{l-s}}(x,t)(t-y)^{l-s-1} dt, \quad (x,y) \in G. \qquad (6)$$

Неравенство Гёльдера приводит к оценке

$$|v(x,y)| \le c\, x^{l-s-1/p} \left(\int_{\varphi_-(x)}^x \big|(\nabla_l u_+)(x,t)\big|^p dt \right)^{1/p}. \qquad (7)$$

Ввиду того, что

$$\sigma(x,y)\varphi(x)^{s-i} \le c\, \varphi(x)^{-1/p} x^{s-l+1/p}, \quad (x,y) \in G,$$

из (7) следует оценка

$$\|\sigma \varphi^{s-i} \nabla_s u_+\|_{p,G} \le c\, \|u_+\|_{p,l,\mathbf{R}^2}. \qquad (8)$$

Последняя очевидно верна и при $s = i$. Неравенства (5) и (8) приводят к (4). Итак, требуемый оператор продолжения в случае 1^o может быть определен формулой (3).

2^o. Пусть $u \in V_p^l(\Omega)$, $u|_{\Omega \setminus U} = 0$. Продолжая функцию u нулем во внешность U, получим $u \in V_p^l(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{G})$. Положим

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [\varphi_-(x), x]\}$$

и $w = u|_D$. По теореме 1.6/2 существует линейный непрерывный оператор продолжения $F : V_p^l(D) \to V_p^l(\mathbf{R}^2)$. Так как функция $u - Fw$ удовлетворяет условиям п. 1^o, то требуемое продолжение $u \mapsto E_2 u$ дается формулой

$$E_2 u = Fw + E_1(u - Fw).$$

3^o. Общий случай. Пусть $\overline{B}_{2r} \subset U$ и η – такая функция из $C_0^\infty(B_{2r})$, что $\eta|_{B_r} = 1$. Если $u \in V_p^l(\Omega)$, то функция ηu удовлетворяет условиям п. 2^o, а функция $(1-\eta)u$ (продолженная нулем на $B_r \setminus \Omega$) принадлежит пространству $V_p^l(\Omega \cup B_r)$. Требуемый оператор продолжения $u \mapsto Eu$ может быть определен формулой

$$Eu = E_2(\eta u) + E^{(r)}\big((1-\eta)u\big),$$

где $E^{(r)} : V_p^l(\Omega \cup B_r) \to V_p^l(\mathbf{R}^2)$ – линейный непрерывный оператор продолжения (который существует по теореме 1.6/2). Доказательство утверждения (i) теоремы закончено.

(ii) Пусть f, h – такие функции класса $C^\infty(\mathbf{R}^1)$, что

$$\operatorname{supp} f \subset (0,3), \quad f\big|_{(1,2)} = 1, \quad h\big|_{(-\infty,2)} = 1, \quad h\big|_{(3,\infty)} = 0.$$

Для произвольного малого $\delta > 0$ положим

$$v_\delta(x,y) = \begin{cases} f(x/\delta)h(y/\delta) \ \text{ при } \ x \in (0,3\delta), \ y \in \big(\varphi_+(x), 3\delta\big), \\ 0 \quad \text{в остальных точках } \Omega. \end{cases}$$

Ясно, что $v_\delta \in C^\infty(\Omega)$, $\|v_\delta\|_{p,l,\Omega} \le c\,\delta^{-l+2/p}$. Пусть существует ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$. Положим $g_\delta(x) = v_\delta\big(x, \varphi_+(x)\big)$, $x \in (0,1)$ и применим лемму 2. Тогда получим

$$\|\sigma\varphi^{-l+1/p} g_\delta\|_{p,(0,1)} \le c\,\|v_\delta\|_{p,l,\Omega} \le c\,\delta^{-l+2/p}. \tag{9}$$

Принимая во внимание монотонность σ и φ а также равенство $g_\delta|_{(\delta,2\delta)} = 1$, приходим к оценке

$$\|\sigma\varphi^{-l+1/p} g_\delta\|_{p,(0,1)} \ge c\,\sigma(\delta)\ \varphi(2\delta)^{-l+1/p}\delta^{1/p}. \tag{10}$$

Неравенства (9), (10) и соотношение $\varphi(2\delta) \sim \varphi(\delta)$ приводят к требуемой оценке веса σ. Теорема доказана.

Теорема 1.2.4 и теорема настоящего раздела позволяют сформулировать следующее утверждение.

Следствие. *Плоская область с внутренним пиком принадлежит классу* EV_1^1.

4.8 Продолжение с уменьшением показателя суммируемости

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика на $\partial\Omega$. В этом разделе мы исследуем существование линейного непрерывного оператора продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$ при $q < p$. Различаются случаи $lq < n-1$, $lq = n-1$, которым посвящены отдельные теоремы. Положительные константы c, фигурирующие в данном разделе, зависят лишь от p, q, l, n, Ω.

4.8.1 Внешний пик, случай $lq < n-1$

Здесь доказывается следующее утверждение.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной пика, направленного во внешность ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Предположим, что $1 < p < \infty$ и либо $lq < n-1$, $q \in [1,p)$, либо $l = n-1$, $q = 1$.*
(i) *Пусть функция $(0,1] \ni t \mapsto \varphi(t)/t$ не убывает. Если*

$$1/q - 1/p = l(\beta-1)/\big((n-1)\beta+1\big) \tag{1}$$

и

$$\int_0^1 \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)}\right)^{n/(\beta-1)} \frac{dt}{t} < \infty, \tag{2}$$

то существует линейный ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$.
(ii) *Если существует ограниченный оператор продолжения*

$$\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n) \tag{3}$$

и функция φ удовлетворяет условию (4.2/1), то верно неравенство (2), где β определяется уравнением (1).

Доказательство. (i) Сначала установим, что пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в весовое пространство $V_{q,\tau}^l(\Omega)$, где

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \qquad x \in \Omega \setminus U, \\ \big(z/\varphi(z)\big)^l & \text{при} \quad x = (y,z) \in \Omega \cap U \end{cases}$$

и U – окрестность из определения 4.1.1. В самом деле, пусть u – произвольная функция из $V_p^l(\Omega)$ и v – любая производная u порядка j, $j = 0, \dots, l$. Полагая $D = U \cap \Omega$ и применяя неравенство Гёльдера, придем к оценке

$$\|\tau v\|_{q,D} \le \left(\int_D \tau(x)^{pq/(p-q)} dx\right)^{1/q-1/p} \|v\|_{p,D} \le$$

$$\le c \left(\int_0^1 \big(t/\varphi(t)\big)^{lpq/(p-q)} \varphi(t)^{n-1} dt\right)^{1/q-1/p} \|v\|_{p,D}.$$

Последний интеграл совпадает с интегралом в (2), так что

$$\|\tau \nabla_j u\|_{q,\Omega} \le c\, \|\nabla_j u\|_{p,\Omega}, \quad j = 0, \dots, l,$$

и тем самым пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $V_{q,\tau}^l(\Omega)$. Таким образом, доказательство утверждения (i) теоремы сводится к построению линейного непрерывного оператора продолжения: $V_{q,\tau}^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$.

Рассмотрим последовательность $\{z_k\}$, определенную в (4.2/3). Если Ω имеет вид (4.2/2), $u \in V_{q,\tau}^l(\Omega)$ и $u(y,z) = 0$ для $z > z_0/2$, определим продолжение $\mathcal{E}^{(0)}u$ функции u формулой (4.2/9). Рассуждая как в доказательстве теоремы 4.2 (i), установим неравенство, которое получается, если заменить p на q в (4.2/13). Из этого неравенства следует, что (мы сохраняем обозначения, введенные в теореме 4.2)

$$\|\nabla_j \mathcal{E}^{(0)}u\|_{q,G_i}^q \le c\,\sigma_i^{-q} \sum\nolimits_{s=0}^{l} z_i^{(s-l)q} \|\nabla_s u\|_{q,\hat{\Omega}_i}^q \le$$

$$\le c \sum\nolimits_{s=0}^{l} \|z^{s-l}\tau\nabla_s u\|_{q,\hat{\Omega}_i}^q, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Здесь было использовано соотношение $\tau|_{\hat{\Omega}_i} \sim \sigma_i^{-1} = \big(z_i/\varphi(z_i)\big)^l$. Суммируя по $i \ge 1$ и замечая, что $\operatorname{supp} \mathcal{E}^{(0)}u$ содержится в замыкании множества $\cup_{\ge 1} G_i$, выводим оценку

$$\|\nabla_j \mathcal{E}^{(0)}u\|_{q,\mathbf{R}^n}^q \le c \sum\nolimits_{s=0}^{l} \|z^{s-l}\tau\nabla_s u\|_{q,\Omega}^q, \quad j = 0, \ldots, l.$$

Ввиду леммы 4.1.2/3 и теоремы 1.2.4 имеем $\mathcal{E}^{(0)}u \in V_q^l(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\|\mathcal{E}^{(0)}u\|_{q,l,\mathbf{R}^n} \le c\,\|\tau\nabla_l u\|_{q,\Omega}.$$

Итак, $V_{q,\tau}^l(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{E}^{(0)}u \in V_q^l(\mathbf{R}^n)$ есть требуемое продолжение.

В общем случае оператор продолжения: $V_{q,\tau}^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$ строится так же, как и в окончании доказательства теоремы 4.2 (i).

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(1,2)$, $f(z) = 1$ при $z \in (4/3, 5/3)$. Положим $\delta_k = 2^{-k}$, $k = 0, 1, \ldots$, и зафиксируем целое число $N \ge 0$. Определим функцию v_N на Ω следующим образом:

$$v_N\big|_{\Omega\setminus U} = 0, \quad v_N(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{N} \beta_k f(z/\delta_{k+1}), \quad x = (y,z) \in \Omega \cap U. \quad (4)$$

Здесь $\{\beta_k\}_{k\ge 0}$ – некоторая последовательность положительных чисел, описываемая ниже. Имеем

$$c\,\|v_N\|_{p,l,\Omega}^q \ge \|\mathcal{E}v_N\|_{q,l,\mathbf{R}^n}^q \ge$$

$$\geq c \sum_{k=0}^{N} \int_{4\delta_{k+1}/3}^{5\delta_{k+1}/3} \|\big(\mathcal{E}v_N\big)(\cdot, z)\|^q_{q,l,\mathbf{R}^{n-1}} dz. \tag{5}$$

В силу соболевского вложения

$$V^l_q(\mathbf{R}^{n-1}) \subset L_r(\mathbf{R}^{n-1}), \ \ r = (n-1)q/(n-1-lq),$$

общий член суммы в (5) не меньше

$$c \int_{4\delta_{k+1}/3}^{5\delta_{k+1}/3} \|v_N(\cdot, z)\|^q_{L_r(\Omega_z)} dz,$$

где Ω_z означает сечение $\Omega \cap U$ гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$. Последний интеграл эквивалентен величине $\beta^q_k \delta_k \varphi(\delta_k)^{n-1-lq}$, поэтому из (5) следует, что

$$c \Big(\sum_{k=0}^{N} \beta^p_k \delta^{1-lp}_k \varphi(\delta_k)^{n-1} \Big)^{q/p} \geq \sum_{k=0}^{N} \beta^q_k \delta_k \varphi(\delta_k)^{n-1-lq}.$$

Пусть

$$\beta^p_k \delta^{1-lp}_k \varphi(\delta_k)^{n-1} = \beta^q_k \delta_k \varphi(\delta_k)^{n-1-lq}, \ \ k \geq 0.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{N} \varphi(\delta_k)^{n-1-lpq/(p-q)} \delta_k^{1+lpq/(p-q)} \leq c.$$

Общий член последней суммы эквивалентен интегралу

$$\int_{\delta_{k+1}}^{\delta_k} \big(t/\varphi(t)\big)^{lpq/(p-q)} \varphi(t)^{n-1} dt,$$

откуда

$$\int_{\delta_{N+1}}^{1} \big(t/\varphi(t)\big)^{lpq/(p-q)} \varphi(t)^{n-1} dt \leq c.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем (2). Теорема доказана.

В ходе доказательства теоремы установлено такое утверждение.

Следствие. *Пусть Ω – та же область, что и в теореме* (i). *Пусть $lq < n-1$, $q \geq 1$ или $l = n-1$, $q = 1$. Определим на Ω весовую функцию τ: $\tau(x) = 1$ при $x \in \Omega \setminus B_1$ и $\tau(x) = \big(|x|/\varphi(|x|)\big)^l$ при $x \in \Omega \cap B_1$. Тогда существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V^l_{q,\tau}(\Omega) \to V^l_q(\mathbf{R}^n)$.*

Пример. *Степенной пик.* Пусть

$$\Omega = \{x : z \in (0,1), |y| < cz^\lambda\},\ \ \lambda > 1. \tag{6}$$

Если $p > 1$ и либо $lq < n-1$, $1 \le q < p$, либо $l = n-1$, $q = 1$, то, как следует из теоремы, существование ограниченного оператора продолжения (3) равносильно неравенству

$$q^{-1} > p^{-1} + l(\lambda-1)/\big(1+\lambda(n-1)\big).$$

4.8.2 Внешний пик. Оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$, $lq = n-1$

Здесь мы установим следующий критерий существования требуемого оператора продолжения.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной пика, направленного во внешность ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Предположим, что $lq = n-1,\ q > 1,\ p \in (q, \infty)$.*
(i) *Пусть выполнено условие* (4.4.2/1) *и функция* $(0,1] \ni t \mapsto \varphi(t)/t$ *не убывает. Если β определяется уравнением* (4.8.1/1),

$$\gamma = (1-1/q)/(1/p-1/q) \tag{1}$$

и

$$\int_0^1 \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)}\right)^{n/(\beta-1)} \left|\log\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)\right|^\gamma \frac{dt}{t} < \infty, \tag{2}$$

то существует линейный непрерывный оператор продолжения вида (4.8.1/3).
(ii) *Пусть функция φ удовлетворяет условию* (4.2/1). *Если существует ограниченный оператор продолжения* (4.8.1/3), *то верно неравенство* (2), *где γ и β определяются в* (1) *и в* (4.8.1/1) *соответственно.*

Доказательство. (i) Пусть, как обычно, U означает окрестность из определения 4.1.1. Положим

$$\tau(x) = \big(z/\varphi(z)\big)^l \big[\log\big(z/\varphi(z)\big)\big]^{-1+1/q}, \quad x = (y,z) \in \Omega \cap U. \tag{3}$$

Если $f \in L_p(\Omega \cap U)$, то в силу неравенства Гёльдера

$$\|\tau f\|_{q,\Omega\cap U} \le c\,\|f\|_{p,\Omega\cap U}, \tag{4}$$

где

$$c=\left(\int_0^1 \big(t/\varphi(t)\big)^{\frac{lpq}{p-q}}\big|\log\big(\varphi(t)/t\big)\big|^{\frac{p(q-1)}{q-p}}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}. \qquad (5)$$

Из (1)–(5) и (4.8.1/1) вытекает, что $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в весовое пространство $V_{q,\tau}^l(\Omega)$ с весом τ, заданным формулой (3) в $\Omega\cap U$ и $\tau\big|_{\Omega\setminus U}=1$. Таким образом, утверждение (i) будет доказано, если мы построим линейный непрерывный оператор продолжения: $V_{q,\tau}^l(\Omega)\to V_q^l(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $\{z_i\}_{i\geq 0}$ – последовательность, определенная в (4.2/3), и Ω имеет вид (4.2/2). Предположим, что $u\in V_{q,\tau}^l(\Omega)$ и $u(y,z)=0$ при $z>z_0/2$. Определим оператор продолжения $u\mapsto\mathcal{E}u$ формулами (4.4.2/3–5). Рассуждая как в доказательстве теоремы 4.4.2, придем к неравенствам, которые получаются, если заменить p на q в (4.4.2/19), (4.4.2/21). Поскольку $\sigma_i\sim\tau(x)^{-1}$ при $x\in\hat{\Omega}_i$ и $\sigma_i\sim\sigma(x)$ при $x\in G_i$ (в обозначениях, принятых в теореме 4.4.2), то из этих неравенств следуют оценки

$$\|\nabla_j v\|_{q,G_i}^q\leq c\left(\|\tau z^{-l}u\|_{q,\hat{\Omega}_i}^q+\|\tau z^{1-l}\nabla u\|_{q,\hat{\Omega}_i}^q\right), \qquad (6)$$

$$\|\nabla_j w\|_{q,G_i}^q\leq c\sum\nolimits_{s=1}^{l}\|\tau z^{s-l}\nabla_s u\|_{q,\hat{\Omega}_i}^q,\quad i\geq 1,\quad 0\leq j\leq l. \qquad (7)$$

Кроме того, носители функций v и w содержатся в замыкании множества $\cup_{i\geq 1}G_i$. Суммируя (6) и (7) по $i\geq 1$, приходим к оценкам

$$\|\nabla_j v\|_q^q\leq c\left(\|\tau z^{-l}u\|_{q,\Omega}^q+\|\tau z^{1-l}\nabla u\|_{q,\Omega}^q\right),$$

$$\|\nabla_j w\|_q^q\leq c\sum\nolimits_{s=1}^{l}\|\tau z^{s-l}\nabla_s u\|_{q,\Omega}^q.$$

Ввиду леммы 4.1.2/3 и теоремы 1.2.4 имеем $\mathcal{E}u\in V_q^l(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\|\mathcal{E}u\|_{q,l,\mathbf{R}^n}\leq c\,\|\tau\nabla_l u\|_{q,\Omega}.$$

Итак, $u\mapsto\mathcal{E}u$ есть требуемый оператор продолжения в случае когда Ω имеет вид (4.2/2) и носитель функции u содержится в малой окрестности вершины пика. Общий случай рассматривается так же, как и в теореме 4.2 (i).

(ii) Пусть $\{v_N\}_{N\geq 0}$ – последовательность (4.8.1/4). Предположим, что $\zeta\in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{O\})$ – положительно однородная функция нулевой степени, для которой $\zeta(y,z)=1$ при $|y|<z$ и $\zeta(y,z)=0$ вне конуса $|y|<2z$. Согласно лемме 4.4.1 функция $w_N=\zeta\mathcal{E}v_N$ принадлежит $V_q^l(\mathbf{R}^n)$ и

$$\|w_N\|_{q,l,\mathbf{R}^n}\le c\,\|\mathcal{E}v_N\|_{q,l,\mathbf{R}^n},\quad N=0,1,\dots$$

Поэтому

$$\|v_N\|^q_{p,l,\Omega}\ge c\sum\nolimits_{i=0}^N\int_{4\delta_{i+1}/3}^{5\delta_{i+1}/3}\|w_N(\cdot,z)\|^q_{q,l,\mathbf{R}^{n-1}}dz. \tag{8}$$

Заметим, что

$$w_N(x)=\alpha_i,\quad\text{если}\quad x\in\Omega\cap U,\ z\in(4\delta_{i+1}/3,5\delta_{i+1}/3).$$

Применим лемму 2.2.1 к функции $B_{2z}^{(n-1)}\ni y\mapsto\alpha_i^{-1}w_N(y,z)$. Тогда получим

$$\big[\log\big(2z/\varphi(z)\big)\big]^{q-1}\|\nabla_l'w_N(\cdot,z)\|^q_{q,B_{2z}}+z^{1-n}\|w_N(\cdot,z)\|^q_{q,B_{2z}}\ge c\,\alpha_i^q,$$

где ∇_l' означает градиент порядка l по переменным $y_1,\dots,y_{n-1}$. Так как $w_N(y,z)=0$ при $|y|>2z$, то верно неравенство Фридрихса

$$\|w_N(\cdot,z)\|_{q,B_{2z}}\le c\,z^l\|\nabla_l'w_N(\cdot,z)\|_{q,B_{2z}},$$

и, значит,

$$\|\nabla_l'w_N(\cdot,z)\|^q_{q,B_{2z}}\ge c\,\alpha_i^q\big[\log\big(z/\varphi(z)\big)\big]^{1-q},\quad z\in(4\delta_{i+1}/3,5\delta_{i+1}/3).$$

Из (8) и последней оценки следует, что

$$c\Big(\sum\nolimits_{i=0}^N\alpha_i^p\delta_i^{1-lp}\varphi(\delta_i)^{n-1}\Big)^{q/p}\ge\|u_N\|^q_{p,l,\Omega}\ge$$

$$\ge c\sum\nolimits_{i=0}^N\alpha_i^q\left(\log\frac{\delta_i}{\varphi(\delta_i)}\right)^{1-q}\delta_i\,.$$

Выберем положительные коэффициенты α_i так, чтобы

$$\alpha_i^p\delta_i^{1-lp}\varphi(\delta_i)^{n-1}=\alpha_i^q\big(\log\big(\delta_i/\varphi(\delta_i)\big)\big)^{1-q}\delta_i,\quad i\ge 0.$$

Тогда

$$\sum\nolimits_{i=0}^N\delta_i\varphi(\delta_i)^{n-1}\big(\delta_i/\varphi(\delta_i)\big)^{\frac{p(n-1)}{p-q}}\left(\log\left(\delta_i/\varphi(\delta_i)\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{q-p}}\le c.$$

Общий член последней суммы эквивалентен интегралу

$$\int_{\delta_{i+1}}^{\delta_i} \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)}\right)^{n/(\beta-1)} \left|\log \frac{\varphi(t)}{t}\right|^\gamma \frac{dt}{t},$$

где γ и β определены в (1) и (4.8.1/1) соответственно. Отсюда

$$\int_{\delta_{N+1}}^{1} \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)}\right)^{n/(\beta-1)} \left|\log \frac{\varphi(t)}{t}\right|^\gamma \frac{dt}{t} \le c.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем (2). Теорема доказана.

В доказательстве теоремы попутно установлено следующее утверждение.

Следствие. *Пусть* Ω *та же область, что и в теореме* (i). *Пусть* $lq = n-1,\ q > 1$. *Определим в* Ω *весовую функцию* τ*:*

$$\tau(x) = \begin{cases} \big(|x|/\varphi(|x|)\big)^l \big[\log\big(|x|/\varphi(|x|)\big)\big]^{-1+1/q} & \text{при } x \in \Omega \cap B_1, \\ 1 & \text{при } x \in \Omega \setminus B_1. \end{cases}$$

Тогда существует линейный ограниченный оператор продолжения: $V^l_{q,\tau}(\Omega) \to V^l_q(\mathbf{R}^n)$.

Пример. *Степенной пик.* Пусть Ω – область, определенная в (4.8.1/6), и пусть $lq = n-1,\ 1 < q < p$. В силу доказанной выше теоремы линейный непрерывный оператор продолжения (4.8.1/3) существует тогда и только тогда, когда либо

$$q^{-1} > p^{-1} + l(\lambda-1)/(1+\lambda(n-1)),$$

либо

$$q^{-1} = p^{-1} + l(\lambda-1)/(1+\lambda(n-1)) \ \text{ и } \ 2q^{-1} < 1 + p^{-1}.$$

4.9 Внешний пик. Оператор продолжения: $V^l_p(\Omega) \to V^l_q(\mathbf{R}^n)$, $q < p$, $lq > n-1$

В следующей теореме формулируются точные условия существования ограниченного оператора продолжения: $V^l_p(\Omega) \to V^l_q(\mathbf{R}^n)$ для области с внешним пиком при $q < p$, $lq > n-1$. Мы сохраняем обозначения, использованные в предыдущем разделе.

Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с вершиной внешнего пика на границе. Пусть еще выполнено условие* (4.2/1). *Предположим, что $p \in (1, \infty)$, $q \in [1, p)$ и $lq > n-1$.*
(i) *Если*
$$np(1/q - 1/p) = (n-1)(\beta - 1) \tag{1}$$
и верно неравенство (4.8.1/2), *то существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$.*
(ii) *Если существует ограниченный оператор продолжения* (4.8.1/3) *и область ω из определения* 4.1.1 *содержит точку $y = 0$, то справедливо неравенство* (4.8.1/2), *где β определяется уравнением* (1).

Доказательство. (i) По теореме 4.6 существует линейный непрерывный оператор продолжения $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$, где
$$\sigma(x) = \big(\varphi(|x|)/|x|\big)^{(n-1)/p} \text{ при } |x| < 1 \text{ и } \sigma(x) = 1 \text{ при } |x| \geq 1.$$

Так как Ω ограничена, то можно считать, что для всех $v \in V_p^l(\Omega)$ носитель функции $\mathcal{E}v$ содержится в некотором шаре, не зависящем от v. Докажем непрерывность того же оператора как оператора: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$. Для этого достаточно проверить оценку (см. также теорему 1.2.4)
$$\|\nabla_j \mathcal{E}v\|_{q,B_1} \leq c\, \|\sigma \nabla_j \mathcal{E}v\|_{p,\Omega}, \quad v \in V_p^l(\Omega), \;\; j = 0, \ldots, l.$$

Зафиксируем мультииндекс β, $|\beta| \leq l$, и положим $w = D^\beta \mathcal{E}v$. Используя неравенство Гёльдера, получим
$$\|w\|_{q,B_1} \leq \|\sigma w\|_{p,B_1} \left(\int_{B_1} \sigma(x)^{pq/(q-p)} dx \right)^{1/q - 1/p}.$$

Последний интеграл с точностью до постоянного множителя совпадает с интегралом в (4.8.1/2), поэтому $\|w\|_{q,B_1} \leq c\, \|\sigma w\|_{p,B_1}$, и утверждение (i) теоремы установлено.

(ii) Пусть
$$f \in C_0^\infty(1,2), \quad f \geq 0, \quad f\big|_{(4/3,5/3)} = 1.$$

Положим $\delta_i = 4^{-i}$, $i \geq 0$, зафиксируем целое $N \geq 0$ и определим функцию u_N на Ω равенствами
$$u_N\big|_{\Omega \setminus U} = 0, \quad u_N(x) = \sum\nolimits_{i=0}^{N} \lambda_i f(2z/\delta_i), \;\; x = (y,z) \in \Omega \cap U,$$

где U – окрестность из определения 4.1.1 и $\{\lambda_i\}_{i\geq 0}$ – последовательность положительных чисел, описываемая далее. Для $0 \leq i \leq N$ проверим оценку

$$\|\nabla_l \mathcal{E} u_N\|_{q,S_i}^q \geq c\,\lambda_i^q \delta_i^{n-lq} \tag{2}$$

в полосе

$$S_i = \big\{(y,z) : y \in \mathbf{R}^{n-1},\ z \in (\delta_{i+1}, \delta_i)\big\}.$$

Приводимое ниже доказательство оценки (2) аналогично доказательству неравенства (4.6/10) в теореме 4.6 (ii).

При почти всех $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ имеем $(\mathcal{E}u_N)(y,\cdot) \in V_q^l(\mathbf{R}^1)$. Согласно теореме 1.5.1 каждому $N \geq 0$ соответствует такой набор функций $\{P_i\}_{i=0}^N$, что P_i определена в $\mathbf{R}^n$, при п.в. $y \in \mathbf{R}^{n-1}$ функция $P_i(y,\cdot)$ является полиномом степени $l-1$ в $\mathbf{R}^1$, а при тех же y для всех $i = 0,\ldots,N$ верны оценки

$$\big\|\big(\mathcal{E}u_N\big)(y,\cdot) - P_i(y,\cdot)\big\|_{L_q(\delta_{i+1},\delta_i)}^q \leq$$

$$\leq c\,(l,q)\,\delta_i^{lq} \int_{\delta_{i+1}}^{\delta_i} \left|\frac{\partial^l(\mathcal{E}u_N)}{\partial z^l}(y,z)\right|^q dz. \tag{3}$$

При этом можно считать, что

$$P_i(y,z) = \sum\nolimits_{k=0}^{l-1} a_k^{(i)}(y) z^k, \quad i = 0,\ldots,N,$$

где

$$a_k^{(i)}(y) = \delta_i^{-k-1} \int_{\delta_{i+1}}^{2\delta_{i+1}} \psi_k\big((2\delta_{i+1})^{-1} t\big)\big(\mathcal{E}u_N\big)(y,t)dt \tag{4}$$

и $\{\psi_k\}_{k=0}^{l-1}$ – некоторые стандартные функции класса $C_0^\infty(1/2,1)$. При $i = 0,\ldots,N$ положим

$$v_i(y) = \frac{1}{2\delta_{i+1}} \int_{2\delta_{i+1}}^{\delta_i} \Big(\big(\mathcal{E}u_N\big)(y,z) - P_i(y,z)\Big)dz, \quad y \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{5}$$

Так как $(0,z) \in \Omega$ при $z \in (0,1)$, то $\big(\mathcal{E}u_N\big)(0,z) = u_N(0,z)$ при п.в. $z \in (0,1)$. В частности, $\big(\mathcal{E}u_N\big)(0,z) = 0$, если $z \in (\delta_{i+1}, 2\delta_{i+1})$, и, значит, все коэффициенты (4) равны нулю при $y = 0$. Отсюда

$$v_i(0) = (2\delta_{i+1})^{-1} \int_{2\delta_{i+1}}^{\delta_i} u_N(0,z)dz = \lambda_i \int_1^2 f(z)dz.$$

Ввиду соболевского вложения

$$V_q^l\big(B_{\delta_i}^{(n-1)}\big) \subset C\big(B_{\delta_i}^{(n-1)}\big) \cap L_\infty\big(B_{\delta_i}^{(n-1)}\big)$$

имеем

$$c\,\delta_i^{(n-1)/q}\|v_i\|_{\infty,B_{\delta_i}} \le \|v_i\|_{q,B_{\delta_i}} + \delta_i^l\|\nabla_l v_i\|_{q,B_{\delta_i}},$$

откуда

$$\lambda_i \le c\,\delta_i^{(1-n)/q}\|v_i\|_{q,\mathbf{R}^{n-1}} + c\,\delta_i^{l-(n-1)/q}\|\nabla_l v_i\|_{q,\mathbf{R}^{n-1}}. \tag{6}$$

Оценим правую часть в (6). Зафиксируем мультииндекс $\gamma \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\gamma| = l$. Из (5) следует, что

$$|D^\gamma v_i(y)| \le c\,\delta_i^{-1}\int_{2\delta_{i+1}}^{\delta_i}\Big(|D_y^\gamma\big(\mathcal{E}u_N\big)(y,z)| + |D_y^\gamma P_i(y,z)|\Big)dz. \tag{7}$$

Применяя неравенство Гёльдера к интегралу в (4), получим

$$|D^\gamma a_k^{(i)}(y)| \le c\,\delta_i^{-k-1/q}\|D_y^\gamma\big(\mathcal{E}u_N\big)(y,\cdot)\|_{L_q(\delta_{i+1},2\delta_{i+1})}.$$

Следовательно,

$$|D_y^\gamma P_i(y,z)| \le c\,\delta_i^{-1/q}\|D_y^\gamma\big(\mathcal{E}u_N\big)(y,\cdot)\|_{L_q(\delta_{i+1},2\delta_{i+1})} \tag{8}$$

при $z \in (\delta_{i+1}, \delta_i)$. Из оценок (7), (8) вытекает, что

$$\|\nabla_l v_i\|_{q,\mathbf{R}^{n-1}} \le c\,\delta_i^{-1/q}\|\nabla_l \mathcal{E}u_N\|_{q,S_i}, \tag{9}$$

где S_i – полоса из неравенства (2).

Для оценки $\|v_i\|_{q,\mathbf{R}^{n-1}}$ применим сначала неравенство Гёльдера к интегралу в (5), а затем используем (3). В результате найдем

$$\|v_i\|_{q,\mathbf{R}^{n-1}} \le c\,\delta_i^{l-1/q}\|\nabla_l \mathcal{E}u_N\|_{q,S_i}. \tag{10}$$

Из (6), (9), (10) следует (2).

Выведем с помощью (2) неравенство (4.8.1/2). В силу оценки (2) и ограниченности оператора $\mathcal{E} : V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$c\sum\nolimits_{i=0}^N \lambda_i^q \delta_i^{n-lq} \le \|\nabla_l \mathcal{E}u_N\|_{q,\mathbf{R}^n}^q \le c\,\|u_N\|_{p,l,\Omega}^q.$$

Отсюда

$$c\sum\nolimits_{i=0}^N \lambda_i^q \delta_i^{n-lq} \le \|u_N\|_{p,l,\Omega}^q \le c\Big(\sum\nolimits_{i=0}^N \lambda_i^p \delta_i^{1-lp}\varphi(\delta_i)^{n-1}\Big)^{q/p}$$

для произвольных положительных коэффициентов $\{\lambda_i\}_{i\geq 0}$. Пусть

$$\lambda_i^q \delta_i^{n-lq} = \lambda_i^p \delta_i^{1-lp} \varphi(\delta_i)^{n-1}, \ \ i = 0, 1, \ldots$$

Тогда

$$\sum\nolimits_{i=0}^{N} \varphi(\delta_i)^{(n-1)q/(q-p)} \delta_i^{(np-q)/(p-q)} \leq c.$$

Общий член последней суммы эквивалентен интегралу

$$\int_{\delta_{i+1}}^{\delta_i} \big(t^\beta / \varphi(t)\big)^{n/(\beta-1)} \, \frac{dt}{t},$$

где β определяется уравнением (1). Таким образом,

$$\int_{\delta_{N+1}}^{1} \big(t^\beta / \varphi(t)\big)^{n/(\beta-1)} \, \frac{dt}{t} \leq c.$$

Переход к пределу при $N \to \infty$ дает (4.8.1/2). Доказательство теоремы закончено.

Пример. *Степенной пик.* Пусть Ω – область, определенная в (4.8.1/6). Предположим, что $p > q \geq 1$ и $lq > n - 1$. В соответствии с только что доказанной теоремой существование линейного непрерывного оператора продолжения вида (4.8.1/3) равносильно неравенству $q^{-1} > p^{-1}(1 + (\lambda - 1)(n - 1)/n)$.

4.10 Вутренний пик. Оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$, $q < p$

В следующем утверждении даются точные условия существования линейного непрерывного оператора продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$, $q < p$, для плоской области, описаннной в определении 4.7.2. В этом разделе положительные константы c зависят лишь от l, p, q, Ω.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной пика, направленного внутрь ограниченной плоской области Ω. Пусть еще $1 \leq q < p \leq \infty$. Положим $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$.*
(i) *Если*

$$1/q - 1/p = (l - 1/p)(\beta - 1)/(\beta + 1) \qquad (1)$$

и неравенство (4.8.1/2) выполнено при $n = 2$, то существует линейный непрерывный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$.

(ii) *Пусть* φ – *неубывающая функция, удовлетворяющая условию* (4.2/1). *Предположим, что существует ограниченный оператор продолжения* $E : V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$. *Тогда верно неравенство* (4.8.1/2), *где* $n = 2$ *и* β *определяется уравнением* (1).

Доказательство. (i) По теореме 4.7.2 существует линейный непрерывный оператор продолжения $E : V_p^l(\Omega) \to V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^2)$, где σ – весовая функция, определенная в утверждении (i) упомянутой теоремы. При этом можно считать, что для любой функции $v \in V_p^l(\Omega)$ носитель функции Ev содержится в круге, не зависящем от v. Пусть $w = D^\alpha Ev$, $|\alpha| \le l$. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\|w\|_{q,G} \le \|\sigma w\|_{p,G} \left(\iint_G \sigma(x,y)^{pq/(q-p)} dxdy \right)^{1/q-1/p}$$

(здесь G та же область, что и в теореме 4.7.2). Последний интеграл совпадает с интегралом в (4.8.1/2), поэтому

$$\|w\|_{q,\mathbf{R}^2} \le c \, \|\sigma w\|_{p,\mathbf{R}^2} \le c \, \|v\|_{p,l,\Omega}.$$

Отсюда следует непрерывность указанного выше оператора E как оператора: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$. Утверждение (i) доказано.

(ii) Введем функции f, g из $C^\infty(\mathbf{R}^1)$ со следующими свойствами:

$$\operatorname{supp} f \subset (1,2), \quad f\big|_{(4/3,5/3)} = 1, \quad g\big|_{(-\infty,1)} = 1, \quad g\big|_{(2,\infty)} = 0.$$

Зафиксируем такое число $\delta_0 \in (0,1)$, что $\varphi_+(x) < x/2$ при $x \in (0, \delta_0]$ и положим $\delta_{i+1} = \delta_i/2$, $i = 0, 1, \ldots$ Для любого целого $N \ge 0$ определим в Ω функцию

$$u_N(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_i f(x/\delta_{i+1}) g(y/\delta_{i+1}) & \text{при } x \in (0,1), \ y > \varphi_+(x), \\ 0 & \text{в остальных точках } (x,y) \in \Omega, \end{cases}$$

где $\{\lambda_i\}_{i \ge 0}$ – некоторая последовательность положительных чисел, описываемая ниже. В силу леммы 4.7.2/2 имеем

$$\int_0^1 |u_N(x, \varphi_+(x))|^q \varphi(x)^{1-lq} dx \le c \, \|Eu_N\|_{q,l,\mathbf{R}^2}^q.$$

Отсюда

$$c \sum\nolimits_{i=0}^{N} \lambda_i^q \varphi(\delta_i)^{1-lq} \delta_i \le$$

$$\leq \sum\nolimits_{i=0}^{N} \int_{\frac{4}{3}\delta_{i+1}}^{\frac{5}{3}\delta_{i+1}} |u_N(x, \varphi_+(x)|^q \varphi(x))^{1-lq} dx \leq c \, \|Eu_N\|^q_{q,l,\mathbf{R}^2}.$$

Так как

$$c \, \|Eu_N\|_{q,l,\mathbf{R}^2} \leq c \, \|u_N\|_{p,l,\Omega} \leq \Big(\sum\nolimits_{i=0}^{N} \lambda_i^p \delta_i^{2-lp} \Big)^{1/p}$$

(при $p = \infty$ правая часть последнего неравенства заменяется на $\max\{\lambda_i \delta_i^{-l} : i = 0, \ldots, N\}$), то

$$\Big(\sum\nolimits_{i=0}^{N} \lambda_i^q \varphi(\delta_i)^{1-lq} \delta_i \Big)^{1/q} \leq c \Big(\sum\nolimits_{i=0}^{N} \lambda_i^p \delta_i^{2-lp} \Big)^{1/p}.$$

Пусть

$$\lambda_i^q \delta_i \varphi(\delta_i)^{1-lq} = \lambda_i^p \delta_i^{2-lp}, \quad i = 0, 1, \ldots \ \text{ при } p < \infty$$

и $\lambda_i = \delta_i^l$ при $p = \infty$. Тогда

$$\sum\nolimits_{i=0}^{N} \varphi(\delta_i)^{p(lq-1)/(q-p)} \delta_i^{2+p(lq-1)/(p-q)} \leq c.$$

Общий член последней суммы эквивалентен интегралу

$$\int_{\delta_{i+1}}^{\delta_i} \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)} \right)^{2/(\beta-1)} \frac{dt}{t},$$

где β определяется уравнением (1). Поэтому

$$\int_{\delta_{N+1}}^{\delta_0} \left(\frac{t^\beta}{\varphi(t)} \right)^{2/(\beta-1)} \frac{dt}{t} \leq \mathrm{const},$$

и неравенство (4.8.1/2) с $n = 2$ выводится предельным переходом при $N \to \infty$. Доказательство теоремы закончено.

Пример. *Степенной пик.* Пусть

$$\Omega = B_2 \setminus \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq cx^\lambda\}, \quad \lambda > 1.$$

По только что доказанной теореме линейный ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_q^l(\mathbf{R}^2)$, $q \in [1, p)$, существует тогда и только тогда, когда $q < (\lambda + 1)/(l(\lambda - 1) + 2p^{-1})$.

4.11 Комментарии к главе 4

Основные результаты главы 4 были анонсированы в заметке авторов [44]. Их доказательства даны в статьях [45, 46].

Задача о продолжении функций из пространств Соболева во внешность области определения с ухудшением класса (когда продолжение с сохранением класса невозможно) изучалась в работах многих авторов. Укажем некоторые из них.

В. И. Буренков [13] построил линейный ограниченный оператор продолжения: $V_p^l(\Omega) \to V_p^{[\lambda l]}(\mathbf{R}^n)$ в случае $\Omega \in C^{0,\lambda},\ \lambda \in (0,1)$; здесь $[\cdot]$ означает целую часть числа.

В. М. Гольдштейн и В. Н. Ситников [22] рассмотрели плоскую область Ω с внешним или внутренним пиком, часть границы которой в окрестности вершины пика является графиком функции из $C^{0,\lambda},\ \lambda \in (0,1)$. В работе [22] был построен ограниченный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \to W_q^1(\mathbf{R}^2)$ с точным значением q, $q < p$.

Б. Л. Файн [75] описал класс областей $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с негладкими границами (включающий области из $C^{0,\lambda},\ \lambda \in (0,1)$) и построил ограниченный оператор продолжения, действующий из пространства $V_p^l(\Omega)$ либо в $V_q^l(\mathbf{R}^n)$ при $q < p$, либо в $V_{p,\sigma}^l(\mathbf{R}^n)$, где σ – неотрицательная весовая функция, равная нулю на $\partial\Omega$. Если Ω имеет вершину изолированного степенного пика на границе, то показатели q в [75] совпадают с показателями в примерах, приведенных в разд. 4.8 – 4.10.

Отметим еще один результат о продолжении из ограниченной области, принадлежащий В. И. Буренкову и У. Д. Эвансу [92].

Пусть Λ – множество всех функций λ, положительных, неубывающих на $(0,\infty)$ и таких, что $\lim_{t\to+0}\lambda(t) = 0$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $1 \le p \le \infty$. Обозначим через $H_p^{\lambda(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$ пространство измеримых по Лебегу функций f на $\mathbf{R}^n$ с конечной нормой

$$\|f\|_{H_p^{\lambda(\cdot)}(\mathbf{R}^n)} = \|f\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \sup_{0\ne h\in\mathbf{R}^n} \left\{ \frac{\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}}{\lambda(|h|)} \right\}.$$

Предположим, что $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченное открытое множество и $1 \le p, q < \infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:
(i) вложение $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ компактно;
(ii) существует такая функция $\lambda \in \Lambda$, что отображение

$$W_p^1(\Omega) \ni u \mapsto E_0 u \in H_q^{\lambda(\cdot)}(\mathbf{R}^n),$$

где $E_0 u = u$ на Ω и $E_0 u = 0$ на $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$, является ограниченным оператором;

(iii) существуют $\lambda \in \Lambda$ и ограниченный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \to H_q^{\lambda(\cdot)}(\mathbf{R}^n)$.

Заметим, что в силу теоремы 1.8/1 утверждения (i)–(iii) верны при $q < p$.

Леммы 4.1.2/1–2 при $p = q$ были доказаны Г. Таленти [137], Г. Томаселли [138] и Б. Макенхауптом [130]. Обобщения на случай $p \neq q$ (включая $q < p$) могут быть найдены в книге В. Г. Мазья [40, 1.3]. Более общие весовые неравенства были получены В. Д. Степановым [72]. Лемма 4.1.2/3 при $p = 2$ и $l = 1$ доказана в работе В. Г. Мазья [39].

В связи с замечанием 4.6 упомянем один результат X. Уитни. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область. X. Уитни [142] охарактеризовал сужения на Ω функций из $L^l_\infty(\mathbf{R}^n)$. Как следствие, он получил [143] простое достаточное условие для справедливости равенства

$$L^l_\infty(\Omega) = \{u\big|_\Omega : u \in L^l_\infty(\mathbf{R}^n)\}. \tag{1}$$

Это условие заключается в эквивалентности расстояния между любыми точками $x, y \in \Omega$ так называемому внутреннему расстоянию, определяемому как инфимум длин спрямляемых кривых, лежащих в Ω, соединяющих x и y. Область с внешним пиком очевидно удовлетворяет указанному условию. Н. Зобин [145] установил в случае плоской ограниченной конечно-связной области необходимость эквивалентности евклидовой и внутренней метрик для того, чтобы (1) имело место при любом фиксированном $l \geq 1$. Существуют, однако, области в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, для которых (1) верно и без упомянутой эквивалентности [145].

Глава 5

Теоремы вложения для пространств Соболева в областях с пиками и гёльдеровых областях

В данной главе изучается непрерывность и компактность операторов вложения пространств Соболева в пространство L_q или $C \cap L_\infty$ для некоторых нелипшицевых областей. В разд. 5.1, 5.2 необходимые и достаточные условия справедливости упомянутых вложений получены для области с внешним пиком.

В разд. 5.3 рассмотрены два примера малых сингулярных возмущений пиков вблизи вершины и показано, в частности, что нормы операторов вложения пространств Соболева в пространство L_q с предельным показателем q имеют, вообще говоря, разный порядок роста при стремлении к нулю малого параметра.

В разд. 5.4 исследуется непрерывность оператора граничного следа $W_p^1(\Omega) \ni u \mapsto u|\partial\Omega \in L_q(\partial\Omega)$ для области с внешним пиком.

Разд. 5.5 посвящен теореме вложения пространств Соболева в пространства L_q и C на гёльдеровой области.

Опишем некоторые результаты, полученные в главе 5. Рассмотрим типичную область с внешним пиком вида

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1), |y| < \varphi(z)\}, \quad n \geq 2,$$

где φ – возрастающая функция из $C^{0,1}([0,1])$, такая, что $\varphi(0) = \lim_{z\to 0}\varphi'(z) = 0$. Нетрудно убедиться, что для таких областей теорема вложения Соболева неверна.

Мы показываем, что при $p \le q < \infty$ неравенство

$$\sup\{A(z) : z \in (0,1)\} < \infty,$$

где

$$A(z) = \max_{i=0;1}\left\{ \left(\int\limits_0^z \varphi(t)^{n-1}(z-t)^{q(l-1)(1-i)}dt\right)^{\frac{1}{q}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}}(t-z)^{\frac{p(l-1)i}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\},$$

необходимо и достаточно для того, чтобы оператор вложения:

$$V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$$

был непрерывным при $l \ge 1$, $1 < p \le q < \infty$, а условие

$$\lim_{z\to +0} A(z) = 0$$

необходимо и достаточно для его полной непрерывности. В случае выполнения требования $\varphi(2z) \le \mathrm{const}\cdot\varphi(z)$ можно положить

$$A(z) = \varphi(z)^{(n-1)(q^{-1}-p^{-1})}z^{l-p^{-1}+q^{-1}}.$$

В соответствии с теоремой 5.2 непрерывность оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to C(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$, $p > 1$, равносильна его полной непрерывности, и это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 z^{(l-1)p/(p-1)}\varphi(z)^{(1-n)/(p-1)}dz < \infty.$$

В гл. 5 рассматриваются также примеры малых возмущений пиков вблизи вершины. “Улучшим” представленный выше пик Ω двумя способами, положив

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \{x = (y,z) \in \Omega : z \in (\varepsilon,1)\} \quad \text{и} \quad \Omega_{(\varepsilon)} = \Omega \cup \{x : |x| < \varepsilon\}.$$

Выясняется, что операторы вложений

$$V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)}) \quad \text{и} \quad V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega_{(\varepsilon)})$$

для предельного соболевского показателя $q = np/(n - lp)$, $lp < n$, вырождаются, вообще говоря, с разной скоростью. Например, в случае $\varphi(z) = c\, z^\lambda$, $\lambda \in (1, (2n-1)(n-1)^{-1})$, норма первого оператора эквивалентна величине $\varepsilon^{-l(\lambda-1)(n-1)/n}$, а норма второго – величине $\varepsilon^{-\min\{l,(\lambda-1)(n-1)/p\}}$ и растет при $\varepsilon \to 0$ быстрее, чем норма первого оператора.

5.1 О вложении пространства Соболева в пространство L_q для области с внешним пиком

5.1.1 Оценки производных функции, усредненной по части переменных

Здесь мы докажем одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано в 5.1.3 при доказательстве основного результата разд. 5.1.

Пусть l – натуральное число. Предположим, что f – возрастающая функция класса $C^{0,1}([0,1]) \cap C^l(0,1)$, такая, что $f(0) = 0$ и

$$|f^{(k)}(z)| \le \operatorname{const} f(z)^{1-k}, \quad k = 1, \dots, l, \;\; z \in (0,1).$$

Введем функцию $K \in C_0^\infty(B_1^{(n-1)})$, для которой

$$\int K(y) y^\alpha dy = 0, \;\; \alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}, \;\; 1 \le |\alpha| \le l-1. \tag{1}$$

Рассмотрим область

$$G = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : \; z \in (0,1), \; |y| < f(z)\}, \;\; n \ge 2,$$

и положим для $v \in L_p(G)$

$$\big(\mathcal{M}v\big)(z) = \int_{|t|<1} K(t) v(f(z)t, z) dt, \quad z \in (0,1). \tag{2}$$

Ниже через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от n, l, p, K, f.

Лемма. *Пусть $u \in V_p^l(G)$, $1 \le p \le \infty$. Предположим, что α – мультииндекс из $\mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$. Пусть $D^\alpha u$ означает производную функции u по переменным $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Тогда функция*

$$(0,1) \ni z \mapsto u_\alpha(z) = \big(\mathcal{M}\big(D^\alpha u\big)\big)(z)$$

имеет производные $u_\alpha^{(s)} \in L_{p,loc}(0,1)$ для всех $s = 0, \dots, l$, а при $l - |\alpha| \le s \le l$ и почти всех $z \in (0,1)$ верна оценка

$$|u_\alpha^{(s)}(z)| \le c\, f(z)^{l-|\alpha|-s-(n-1)/p} U(z), \tag{3}$$

где

$$U(z) = \bigg(\int_{|y|<f(z)} |(\nabla_l u)(y,z)|^p dy\bigg)^{1/p}.$$

Доказательство. Положим

$$v_\alpha(z) = \int_{|t|<1} \big(D^\alpha K\big)(t) u\big(f(z)t, z\big) dt. \tag{4}$$

Тогда $u_\alpha(z) = \big(-f(z)\big)^{-|\alpha|} v_\alpha(z)$. Поскольку каждая производная $v_\alpha^{(s)}$, $0 \le s \le l$, может быть найдена дифференцированием подынтегральной функции в (4), то $u_\alpha \in V_p^l(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Доказательство оценки (3) начнем со случая $\alpha = 0$, $s = l$. Из (2) выводим

$$\big(\mathcal{M}u\big)^{(l)}(z) = \int_{|t|<1} K(t) \frac{\partial^l}{\partial z^l}\big[u\big(f(z)t, z\big)\big] dt.$$

Принимая во внимание известные формулы дифференцирования суперпозиции (см. Л. Е. Френкель [99], В. Г. Мазья [40, с. 21]), получим

$$\frac{\partial^l}{\partial z^l}\big[u\big(f(z)t, z\big)\big] = \frac{\partial^l u}{\partial z^l}\big(y, z\big)\big|_{y=f(z)t} +$$
$$+ \sum_{1\le|\beta|\le l} \big(D^\beta u\big)\big(f(z)t, z\big) t^{\overline{\beta}} \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa,\lambda} \big(f^{(\varkappa_1)}(z)\big)^{\lambda_1} \dots \big(f^{(\varkappa_m)}(z)\big)^{\lambda_m},$$

где суммирование производится по всем $\beta = (\overline{\beta}, \beta_n) \in \mathbf{Z}_+^n$ и $\varkappa, \lambda \in \mathbf{Z}_+^m$, таким, что $1 \le |\beta| \le l$, $1 \le m \le |\overline{\beta}|$,

$$\textstyle\sum_{i=1}^m \lambda_i = |\overline{\beta}|, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \varkappa_i = l - \beta_n; \quad \lambda_i, \varkappa_i \ge 1, \ \ i = 1, \dots, m,$$

а $c_{\varkappa,\lambda}$ – числовые коэффициенты. Поскольку $|f^{(\varkappa_i)}(z)| \le c\, f(z)^{1-\varkappa_i}$, то модуль общего члена в сумме по $\varkappa, \lambda$ не превосходит $c\, f(z)^{|\beta|-l}$. Таким образом, мы приходим к представлению

$$\big(\mathcal{M}u\big)^{(l)}(z) = \sum\nolimits_{1\le|\beta|\le l} \psi_\beta(z) I_\beta(z), \quad z\in(0,1), \tag{5}$$

в котором $\beta = (\overline{\beta}, \beta_n) \in \mathbf{Z}^n_+,\ |\overline{\beta}| > 0$ при $|\beta| < l$,

$$I_\beta(z) = \int_{|t|<1} K(t) t^{\overline{\beta}} \big(D^\beta u\big)\big(f(z)t, z\big) dt \tag{6}$$

и ψ_β – измеримые функции на $(0,1)$, удовлетворяющие условию

$$|\psi_\beta(z)| \le c\, f(z)^{|\beta|-l}, \quad 1\le|\beta|\le l. \tag{7}$$

Допустим, что $|\beta| < l$ и положим $v(t,z) = \big(D^\beta u\big)\big(f(z)t, z\big)$. Зафиксируем $z\in(0,1)$ и обозначим через Q произвольный полином из $\mathcal{P}^{(n-1)}_{l-|\beta|-1}$. Принимая во внимание (1), получаем

$$\begin{aligned} |I_\beta(z)| = \Big| \int_{|t|<1} K(t) t^{\overline{\beta}} \big(v(t,z) - Q(t)\big) dt \Big| \le \\ \le c\, \inf_Q \|v(\cdot,z) - Q\|_{p,B_1}. \end{aligned} \tag{8}$$

По теореме 1.5.1 правая часть в (8) не больше

$$c\, \|\big(\nabla'_{l-|\beta|} v\big)(\cdot, z)\|_{p,B_1},$$

где $\big(\nabla'_{l-|\beta|} v\big)(t,z)$ есть градиент порядка $l-|\beta|$ по переменным $t_1,\dots,t_{n-1}$. Замена $t = y/f(z)$ дает

$$|I_\beta(z)| \le c\, f(z)^{(1-n)/p + l - |\beta|} U(z). \tag{9}$$

Оценка (9) верна и при $|\beta| = l$. Здесь (9) следует из (6) с помощью неравенства Гёльдера. Объединяя (5), (7) и (9), приходим к оценке

$$\big|\big(\mathcal{M}u\big)^{(l)}(z)\big| \le c\, f(z)^{(1-n)/p} U(z). \tag{10}$$

Таким образом, неравенство (3) установлено при $s = l$ и $\alpha = 0$. Заменяя u на $D^\alpha u$ и l на $l - |\alpha|$ в (10), мы получим (3) также в случае $0 \le |\alpha| < l$ и $s = l - |\alpha|$.

Случай $l \geq s > l - |\alpha|$, $|\alpha| > 0$. Следующее представление выводится аналогично (5):

$$u_\alpha^{(s)}(z) = \sum_{1 \leq |\beta| \leq l - |\alpha|} \varphi_\beta(z) \int_{|t|<1} K(t) t^{\overline{\beta}} (D^\mu u)\big(f(z)t, z\big) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s+|\alpha|-l} \sum_{|\gamma| = l - |\alpha|} \sigma_{i,\gamma}(z) \, \frac{d^i}{dz^i} \int_{|t|<1} K_\gamma(t) (D^\nu u)\big(f(z)t, z\big) dt. \tag{11}$$

Здесь

$$\beta = (\overline{\beta}, \beta_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \quad \mu = (\alpha + \overline{\beta}, \beta_n),$$

$$\gamma = (\overline{\gamma}, \gamma_n) \in \mathbf{Z}_+^n, \quad \nu = (\alpha + \overline{\gamma}, \gamma_n),$$

а функции $\varphi_\beta, \sigma_{i,\gamma}$ определены на $(0,1)$, измеримы и удовлетворяют условиям

$$|\varphi_\beta(z)| \leq c \, f(z)^{|\beta| - s}, \quad |\sigma_{i,\gamma}(z)| \leq c \, f(z)^{i + |\gamma| - s}.$$

Кроме того, $|\overline{\beta}| > 0$, если $|\beta| < l - |\alpha|$, а $K_\gamma \in C_0^\infty\big(B_1^{(n-1)}\big)$ – некоторые стандартные функции. В силу (1) имеем

$$\int K(t) t^{\overline{\beta}} Q(t) dt = 0, \ \text{ если } \quad |\beta| < l - |\alpha|, \ \ Q \in \mathcal{P}_{l-|\mu|-1}^{(n-1)},$$

и модуль интеграла в сумме по β в (11) мажорируется с помощью обобщенного неравенства Пуанкаре так же, как оценка (9) была выведена из (8). Таким образом, модуль общего члена в этой сумме не превосходит правой части (3).

Обратимся к оценке двойной суммы в (11). Обозначим через $I_{\alpha,\gamma}(z)$ последний интеграл в (11). Запишем его в виде

$$I_{\alpha,\gamma}(z) = \big(- f(z)\big)^{-|\alpha|} S_{\alpha,\gamma}(z),$$

где

$$S_{\alpha,\gamma}(z) = \int_{|t|<1} K_{\alpha,\gamma}(t) (D^\gamma u)\big(f(z)t, z\big) dt \tag{12}$$

и $K_{\alpha,\gamma}(t) = \big(D^\alpha K_\gamma\big)(t)$. Следовательно,

$$\Big| \frac{d^i}{dz^i} I_{\alpha,\gamma}(z) \Big| \leq c \ \sum\nolimits_{j=0}^{i} \Big| \frac{d^{i-j}}{dz^{i-j}} \Big(f(z)^{-|\alpha|} \Big) \, \frac{d^j}{dz^j} S_{\alpha,\gamma}(z) \Big|.$$

Модуль первого сомножителя в общем члене последней суммы не превосходит $c\, f(z)^{j-i-|\alpha|}$. Отсюда

$$\left|\sigma_{i,\gamma}(z)\frac{d^i}{dz^i}\, I_{\alpha,\gamma}(z)\right| \le c\, \sum\nolimits_{j=0}^{i} f(z)^{|\gamma|-s-|\alpha|+j}\left|\frac{d^j}{dz^j}\, S_{\alpha,\gamma}(z)\right|. \tag{13}$$

Оценим второй сомножитель в общем члене суммы. Рассмотрим сначала случай $j=0$. Так как $\int K_{\alpha,\gamma}Q dt = 0$ для всех $Q \in \mathcal{P}^{(n-1)}_{|\alpha|-1}$, то

$$\left|S_{\alpha,\gamma}(z)\right| \le c\, \inf_Q \|w(\cdot,z)-Q\|_{p,B_1^{(n-1)}},$$

где $w(t,z) = \big(D^\gamma u\big)\big(f(z)t,z\big)$. Используем теорему 1.5.1, а затем сделаем замену переменной $t = y/f(z)$. В результате придем к оценке

$$\left|S_{\alpha,\gamma}(z)\right| \le c\, f(z)^{|\alpha|+(1-n)/p} U(z). \tag{14}$$

Таким образом, слагаемое в правой части (13), соответствующее $j=0$, не больше правой части в (3).

Пусть $1 \le j \le i$. Тогда $j+|\gamma| \le s \le l$, и производную порядка j функции $S_{\alpha,\gamma}(z)$ можно получить дифференцированием подынтегральной функции в (12). Выполняя дифференцирование, найдем, что

$$\frac{d^j}{dz^j}\, S_{\alpha,\gamma}(z) = \sum\nolimits_{1\le|\delta|\le j} g_\delta(z) J_\delta(z).$$

Здесь $\delta = \big(\overline{\delta},\delta_n\big) \in \mathbf{Z}^n_+$,

$$J_\delta(z) = \int_{|t|<1} K_{\alpha,\gamma}(t) t^{\overline{\delta}} \big(D^{\delta+\gamma}u\big)\big(f(z)t,z\big)dt$$

и $|g_\delta(z)| \le c\ f(z)^{|\delta|-j}$. Заметим, что при условии $|\delta| < |\alpha|$ функция $B_1^{(n-1)} \ni t \mapsto t^{\overline{\delta}} K_{\alpha,\gamma}(t)$ имеет нулевые моменты до порядка $|\alpha|-|\overline{\delta}|-1$ включительно. Отсюда

$$\left|J_\delta(z)\right| \le c\, \inf\left\{\|w(\cdot,z)-Q\|_{p,B_1^{(n-1)}} : Q \in \mathcal{P}^{(n-1)}_{|\alpha|-|\delta|-1}\right\},$$

где $w(t,z) = \big(D^{\delta+\gamma}u\big)\big(f(z)t,z\big)$. Так как $w(\cdot,z) \in L_p^{|\alpha|-|\delta|}\big(B_1^{(n-1)}\big)$ при п.в. $z \in (0,1)$, то применимо обобщенное неравенство Пуанкаре. Следовательно, последний инфимум мажорируется величиной

$$c\,\big\|\big(\nabla'_{|\alpha|-|\delta|}w\big)(\cdot,z)\big\|_{p,B_1^{(n-1)}},$$

в которой $\nabla'_{|\alpha|-|\delta|}$ означает градиент по первым $n-1$ переменным. Принимая во внимание, что $|\alpha| = l - |\gamma|$, получаем

$$\left|g_\delta(z)J_\delta(z)\right| \le c\, f(z)^{|\alpha|-j+(1-n)/p}U(z). \tag{15}$$

Если $|\alpha| = |\delta|$, то $|\delta+\gamma| = l$, и величина $|J_\delta(z)|$ оценивается с помощью неравенства Гёльдера. Здесь опять имеет место (15). Из оценок (13)–(15) следует, что модуль общего члена двойной суммы в (11) не превосходит правой части в (3). Доказательство леммы закончено.

5.1.2 Сглаживание функции, описывающей пик

Пусть φ – функция из определения 4.1.1 вершины внешнего пика. Следующее утверждение позволяет заменить эту функцию при доказательстве теоремы вложения более гладкой и удовлетворяющей некоторым дополнительным требованиям.

Лемма. *Пусть $\varphi \in C^{0,1}([0,1])$, φ возрастает и удовлетворяет условию $\varphi(0) = \lim_{z\to+0}\varphi'(z) = 0$. Тогда при любом натуральном l существуют возрастающая функция $f \in C^l((0,1])$ и положительная константа c, зависящая лишь от φ, l, такие, что $\lim_{z\to+0} f(z) = \lim_{z\to+0} f'(z) = 0$,*

$$c^{-1}\varphi(z) \le f(z) \le c\,\varphi(z) \tag{1}$$

и

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le c\, f(z)^{1-k}, \quad k = 1,\dots,l, \tag{2}$$

для всех $z \in (0,1]$.

Доказательство. Пусть $\psi \in C^l(\mathbf{R}^1)$, $\psi(t) = 0$ при $t \le 0$, $\psi(t) = 1$ при $t \ge 1$ и ψ возрастает на промежутке $[0,1]$. Построим последовательность $\{z_i\}$ по правилу $z_0 = 1$,

$$z_{i+1} + \varphi(z_{i+1}) = z_i, \quad i = 0,1,\dots \tag{3}$$

Последовательность $\{z_i\}$ убывает, а кроме того,

$$z_i \to 0, \quad z_{i+1}^{-1}z_i \to 1, \quad \varphi(z_{i+1})^{-1}\varphi(z_i) \to 1. \tag{4}$$

Положим

$$\psi_0(z) = \psi((z-z_1)/(z_0-z_1)), \quad z \in (0,1],$$

а при $i = 1, 2, \ldots$ определим функцию ψ_i следующим образом:

$$\psi_i(z) = \begin{cases} \psi((z - z_{i+1})/(z_i - z_{i+1})), & \text{если} \quad z \in (0, z_i], \\ 1 - \psi((z - z_i)/(z_{i-1} - z_i)), & \text{если} \quad z \in (z_i, 1]. \end{cases}$$

Тогда $0 \le \psi_i \le 1$, $\psi_i \in C^l((0,1])$ при $i \ge 0$, а также

$$\operatorname{supp} \psi_i = [z_{i+1}, z_{i-1}], \quad i \ge 1, \quad \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \psi_i(z) = 1, \quad z \in (0, 1].$$

Проверим, что требуемая функция f может быть задана формулой

$$f(z) = \sum\nolimits_{i=0}^{\infty} \varphi(z_i)\psi_i(z), \quad z \in (0, 1].$$

В самом деле, очевидно включение $f \in C^l((0,1])$. Далее, если $z \in [z_{i+1}, z_i]$, $i \ge 0$, то $\psi_i(z) + \psi_{i+1}(z) = 1$, поэтому

$$f(z) = \varphi(z_i)\psi_i(z) + \varphi(z_{i+1})\psi_{i+1}(z) \in [\varphi(z_{i+1}), \varphi(z_i)],$$

следовательно,

$$\varphi(z_{i+1})/\varphi(z_i) \le f(z)/\varphi(z) \le \varphi(z_i)/\varphi(z_{i+1}), \quad z \in [z_{i+1}, z_i].$$

Таким образом, оценка (1) верна при $c = \sup\{\varphi(z_i)/\varphi(z_{i+1}) : i \ge 0\}$. В частности, $\lim_{z \to +0} f(z) = 0$.

Для проверки монотонности f заметим, что

$$f(z) = \varphi(z_{i+1}) + (\varphi(z_i) - \varphi(z_{i+1}))\psi_i(z), \quad z \in [z_{i+1}, z_i], \quad i \ge 0.$$

Отсюда f – возрастающая функция, так как ψ_i возрастает на промежутке $[z_{i+1}, z_i]$. Кроме того, при $k = 1, \ldots, l$ и $z \in [z_{i+1}, z_i]$ имеем

$$f^{(k)}(z) = \frac{\varphi(z_i) - \varphi(z_{i+1})}{(z_i - z_{i+1})^k} \, \psi^{(k)}\!\left(\frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}}\right),$$

откуда при тех же z и k

$$|f^{(k)}(z)| \le c\,\varphi(z_{i+1})^{1-k} \operatorname{ess\,sup}\{\varphi'(t) : t \in (z_{i+1}, z_i)\}.$$

Последнее означает, что $\lim_{z \to +0} f'(z) = 0$ и выполнено условие (2). Лемма доказана.

5.1.3 Условие непрерывности оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ для области с пиком

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика на границе в смысле определения 4.1.1. Так как при малом $\varepsilon > 0$ для области $\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon$ верна теорема вложения Соболева, то при исследовании условий справедливости вложения $V_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ можно ограничиться рассмотрением области вида

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1),\ y/\varphi(z) \in \omega\}, \quad n \geq 2. \tag{1}$$

Относительно области $\omega \subset \mathbf{R}^{n-1}$ предположим, что она удовлетворяет условию конуса и лежит вместе с замыканием в шаре $B_1^{(n-1)}$, а функция φ удовлетворяет условию Липшица на промежутке $[0, 1]$, возрастает на этом промежутке, а также $\varphi(0) = \lim_{z\to+0} \varphi'(z) = 0$.

Далее в этом разделе Ω означает только что описанную область. Через c обозначаются положительные константы, зависящие лишь от $n, p, q, l, \omega, \varphi$. По определению $a \sim b$, если $c^{-1} \leq a/b \leq c$.

Для доказательства основного результата нам понадобится следующее утверждение, обобщающее лемму 4.1.2/1 (см. В. Д. Степанов [71]).

Лемма. *Пусть $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ и $l \geq 1$. Для существования такой постоянной C, не зависящей от f, что*

$$\left(\int\limits_a^b \left| w(x) \int\limits_x^b (t-x)^{l-1} f(t)dt \right|^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int\limits_a^b \left| v(x) f(x) \right|^p dx \right)^{1/p}, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы были конечными величины A_0, A_1, где

$$A_\gamma = \sup_{z\in(a,b)} \left\{ \left(\int_a^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)} |w(t)|^q dt \right)^{1/q} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_z^b (t-z)^{\frac{p(l-1)\gamma}{p-1}} |v(t)|^{\frac{p}{1-p}} dt \right)^{(p-1)/p} \right\}.$$

Более того, если C – наилучшая постоянная в (2), то

$$\max\{A_0, A_1\} \leq C \leq c(p, q, l) \max\{A_0, A_1\}.$$

При $p = 1 \le q < \infty$ неравенство (2) верно с наилучшей постоянной

$$C = \sup_{z\in(a,b)} |v(z)|^{-1} \left(\int_a^z (z-t)^{q(l-1)}|w(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Сформулируем основной результат раздела 5.1.

Теорема. *Пусть $l = 1, 2, \ldots$, $1 < p \le q < \infty$. Пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ тогда и только тогда, когда конечны величины A_0, A_1, где*

$$A_\gamma = \sup_{z\in(0,1)} \left\{ \left(\int_0^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{\frac{1}{q}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}}(t-z)^{\frac{p(l-1)\gamma}{p-1}}dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \right\}. \qquad (3)$$

Ограниченность оператора вложения:

$$V_1^l(\Omega) \to L_q(\Omega), \quad 1 \le q < \infty,$$

равносильна неравенству

$$\sup_{z\in(0,1)} \varphi(z)^{1-n} \left(\int_0^z (z-t)^{(l-1)q}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{1/q} < \infty. \qquad (4)$$

Доказательство. *Необходимость неравенств* (4) и

$$\max\{A_0, A_1\} < \infty. \qquad (5)$$

Пусть пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$. Подставим в неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\,\|u\|_{V_p^l(\Omega)} \qquad (6)$$

функцию

$$\Omega \ni x = (y, z) \mapsto u(x) = \int_z^1 (t-z)^{l-1} f(t)dt,$$

где $f \in L_{p,loc}(0,1)$. Ввиду леммы 4.1.1 для таких u оценка (6) равносильна двухвесовому неравенству

$$\left(\int_0^1 \varphi(z)^{n-1}dz \left|\int_z^1 (t-z)^{l-1} f(t)dt\right|^q\right)^{1/q} \le c \left(\int_0^1 |f(z)|^p \varphi(z)^{n-1}dz\right)^{1/p}.$$

Теперь (4) (при $p = 1$) и (5) (при $p > 1$) вытекают из леммы, предшествующей теореме.

Достаточность. Пусть $p > 1$ и выполнено неравенство (5). Покажем, что оценка (6) верна для всех $u \in V_p^l(\Omega)$.

Так как область ω в (1) представляется объединением конечного числа областей класса $C^{0,1}$ (см. леммы 1.3/1–2), а для каждой такой области верна лемма 4.5/1 о продолжении в круговой пик с сохранением класса, то можно считать, что область Ω в (1) является круговым пиком, т.е. $\omega = B_1^{(n-1)}$. Кроме того, ввиду леммы 5.1.2 можно предполагать, что функция φ в (1) удовлетворяет дополнительным требованиям

$$\varphi \in C^l(0,1), \quad |\varphi^{(k)}(z)| \le c\,\varphi(z)^{1-k}, \quad k = 1, \dots, l, \quad z \in (0,1). \tag{7}$$

Зафиксируем $\delta \in (0,1)$ и выберем произвольно $u \in V_p^l(\Omega)$, $u(x) = 0$ при $z > \delta$. Мы покажем, что в этом случае верна оценка

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\,A(\delta) \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{8}$$

где

$$A(\delta) = \max_{\gamma \in \{0;1\}} \sup_{z \in (0,\delta)} A_\gamma(z,\delta), \tag{9}$$

$$A_\gamma(z,\delta) = \left(\int_0^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \times$$
$$\times \left(\int_z^\delta \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} (t-z)^{\frac{p(l-1)\gamma}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{10}$$

Заметим, что из условия (5) вытекает ограниченность величины $A(\delta)$ при $\delta \in (0,1]$, так как A_γ в (3) мажорирует величину (10).

Далее нам понадобится оценка

$$A(\delta) \ge c\,\varphi(\delta)^{l-n/p+n/q}, \tag{11}$$

из которой, в частности, следует, что $l - n/p + n/q \ge 0$ (так как левая часть (11) ограничена) и, значит, показатель q не больше предельного соболевского. Достаточно проверить (11) при малых $\delta > 0$. Для таких δ, принимая во внимание (9) – (10), имеем

$$A(\delta) \ge A_1(\delta - \varphi(\delta), \delta) \ge$$

$$\geq \left(\int\limits_{\delta-2\varphi(\delta)}^{\delta-\varphi(\delta)} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} \left(\int\limits_{\delta-\varphi(\delta)}^{\delta} \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} (t-\delta+\varphi(\delta))^{(l-1)p'} dt \right)^{1/p'}.$$

Так как $\varphi(\delta+O(\varphi(\delta))) = \varphi(\delta)+o(\varphi(\delta))$, то правая часть последнего неравенства не меньше

$$c\,\varphi(\delta)^{n/q}\varphi(\delta)^{(1-n)/p} \left(\int_0^{\varphi(\delta)} t^{(l-1)p'} dt \right)^{1/p'},$$

что не меньше правой части (11). Итак, (11) имеет место.

Отметим, что из справедливости (8) для функций, равных нулю при $z > \delta$ вытекает (6) для всех $u \in V_p^l(\Omega)$. Это следует из того, что для области $\Omega^{(\varepsilon)} = \{x \in \Omega : z > \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in (0,1)$ пространство $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ по теореме Соболева (т.к. $\Omega^{(\varepsilon)} \in C^{0,1}$ и $l - n/p + n/q \geq 0$).

Пусть $K \in C_0^\infty\big(B_1^{(n-1)}\big)$, выполнены условия (5.1.1/1) и, кроме того, $\int K(y)dy = 1$. Для $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$ положим

$$u_\alpha(z) = \varphi(z)^{1-n} \int_{|y|<\varphi(z)} K\big(y/\varphi(z)\big)\big(D_y^\alpha u\big)(y,z)dy, \quad z \in (0,1),$$

и определим “полином”

$$Q(x) = \sum\nolimits_{|\alpha|<l} u_\alpha(z) y^\alpha/\alpha!, \quad x=(y,z) \in \Omega.$$

Наша цель – установить оценки

$$\|Q\|_{L_q(\Omega)} \leq c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{12}$$

$$\|u-Q\|_{L_q(\Omega)} \leq c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{13}$$

из которых, очевидно, следует (8) и тем самым утверждение достаточности теоремы.

Доказательство неравенства (12). Пусть

$$Q_\alpha(x) = u_\alpha(z) y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1},\ |\alpha| < l.$$

Поскольку $u_\alpha(z) = 0$ при $z > \delta$ и существует $u_\alpha^{(l)} \in L_{p,loc}(0,1)$, (см. лемму 5.1.1), то

$$u_\alpha(z) = \frac{(-1)^l}{(l-1)!} \int_z^\delta (t-z)^{l-1} u_\alpha^{(l)}(t)dt \tag{14}$$

при п.в. $z \in (0, \delta)$. Имеем

$$\|Q_\alpha\|_{L_q(\Omega)} \le c \left(\int_0^\delta \varphi(z)^{q|\alpha|+n-1} |u_\alpha(z)|^q dz \right)^{1/q}. \tag{15}$$

Оценим правую часть последнего неравенства. Для этого заметим, что ввиду (14) и сформулированной выше леммы наилучшая константа C_δ в неравенстве

$$\left(\int_0^\delta \varphi(z)^{q|\alpha|+n-1} |u_\alpha(z)|^q dz \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le C_\delta \left(\int_0^\delta \varphi(z)^{p|\alpha|+n-1} |u_\alpha^{(l)}(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \tag{16}$$

удовлетворяет соотношению

$$C_\delta \sim \max_{\gamma \in \{0;1\}} \sup_{z \in (0,\delta)} \left\{ \left(\int_0^z (z-t)^{q(l-1)(1-\gamma)} \varphi(t)^{n-1+q|\alpha|} dt \right)^{1/q} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_z^\delta \varphi(\tau)^{(n-1+p|\alpha|)/(1-p)} (\tau - z)^{p'(l-1)\gamma} d\tau \right)^{1/p'} \right\}, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

В силу монотонности φ произведение двух последних интегралов в фигурных скобках не превосходит величины (10), поэтому оценка (16) выполнена при $C_\delta = c\,A(\delta)$. Далее, согласно лемме 5.1.1

$$\varphi(z)^{p|\alpha|+n-1} |u_\alpha^{(l)}(z)|^p \le c \int_{|y|<\varphi(z)} |(\nabla_l u)(y,z)|^p dy$$

при п.в. $z \in (0,1)$, следовательно, правая часть (16) не больше правой части (12). Итак, для всех $\alpha \in \mathbf{Z}_+^{n-1}$, $|\alpha| < l$, левая часть (15) мажорируется величиной $c\,A(\delta)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}$. Тем самым оценка (12) доказана.

Доказательство неравенства (13). Построим убывающую последовательность $\{z_k\}_{k\ge 0}$ со свойствами (5.1.2/4) по правилу (5.1.2/3), где $z_0 = \delta$. Рассмотрим ячейки

$$\Omega_k = \{x : z \in (z_{k+1}, z_k), \ \ |y| < \varphi(z)\}, \ \ k \ge 0.$$

Поскольку $\Omega_k \in C^{0,1}$ и $l - n/p + n/q \geq 0$, то по теореме Соболева

$$\|v\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{n/q-n/p}\left(\|v\|_{L_p(\Omega_k)} + \varphi(z_k)^l \|\nabla_l v\|_{L_p(\Omega_k)}\right), \quad (17)$$

где $k = 0, 1, \dots$ и $v \in V_p^l(\Omega_k)$ – произвольная функция. Заметим, что отображение

$$V_p^l\big(B_{\varphi(z)}^{(n-1)}\big) \ni u(\cdot, z) \mapsto Q(\cdot, z)$$

является проектором из $V_p^l\big(B_{\varphi(z)}^{(n-1)}\big)$ на $\mathcal{P}_{l-1}^{(n-1)}$ (см. пример 1.5.2/2). В силу теоремы 1.5.2

$$\int_{|y|<\varphi(z)} \big|u(y,z) - Q(y,z)\big|^p dy \leq c\,\varphi(z)^{lp} \int_{|y|<\varphi(z)} \big|\nabla_l u(y,z)\big|^p dy$$

для п.в. $z \in (0, \delta)$. Отсюда и из (17) при $v = u - Q$ следует, что

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{l-n/p+n/q}\left(\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)} + \|\nabla_l Q\|_{L_p(\Omega_k)}\right). \quad (18)$$

Оценим величину $\|\nabla_l Q\|_{L_p(\Omega_k)}$. Пусть мультииндексы

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \quad \overline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}), \quad \gamma = (\overline{\gamma}, \gamma_n)$$

таковы, что $|\alpha| < l$, $|\gamma| = l$. Пусть, как и выше, $Q_\alpha(x) = u_\alpha(z) y^\alpha$. Если $\gamma_i > \alpha_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n-1$, то $D^\gamma Q_\alpha(x) = 0$. Если $\overline{\gamma} \leq \alpha$ (т.е. $\gamma_i \leq \alpha_i$ для всех $i = 1, \dots, n-1$), то в этом случае

$$|D^\gamma Q_\alpha(x)| \leq c\,\varphi(z)^{|\alpha| - |\overline{\gamma}|} \big|u_\alpha^{(\gamma_n)}(z)\big|, \ \ x = (y, z) \in \Omega.$$

Согласно лемме 5.1.1

$$\big|D^\gamma Q_\alpha(x)\big|^p \leq c\,\varphi(z)^{1-n} \int_{|y|<\varphi(z)} |\nabla_l u(y,z)|^p dy,$$

откуда

$$\|\nabla_l Q_\alpha\|_{L_p(\Omega_k)} \leq c\,\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)}, \ \ k \geq 0.$$

Последняя оценка и (18) дают

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega_k)} \leq c\,\varphi(z_k)^{l-n/p+n/q} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)}, \quad k \geq 0. \quad (19)$$

Отсюда и из алгебраического неравенства

$$\Big(\sum\nolimits_k a_k^q\Big)^{1/q} \leq \Big(\sum\nolimits_k a_k^p\Big)^{1/p}, \ \ a_k \geq 0, \ \ q \geq p, \quad (20)$$

получаем

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega)} \le c\,\varphi(\delta)^{l-n/p+n/q}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Принимая во внимание (11), приходим к (13). Теорема доказана при $p > 1$.

С очевидными изменениями приведенное доказательство достаточности переносится на случай $p = 1$. При выполнении условия (4) аналогичные (и даже несколько более простые) рассуждения приводят к оценке (8), в которой $p = 1$, $u \in V_1^l(\Omega)$, $u(x) = 0$ при $z > \delta$ и

$$A(\delta) = \sup_{z\in(0,\delta)} \varphi(z)^{1-n}\left(\int_0^z (z-t)^{(l-1)q}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{1/q}. \tag{21}$$

Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Пусть функция φ, описыващая заострение пика в (1), удовлетворяет условию

$$A = \sup_{z\in(0,1)}\left(\varphi(z)^{(n-1)(q^{-1}-p^{-1})}z^{l-p^{-1}+q^{-1}}\right) < \infty. \tag{22}$$

Тогда при $1 \le p \le q < \infty$ пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$. В самом деле, полагая $p' = p/(p-1)$ при $p > 1$, из определения (10) в силу монотонности φ выводим

$$A_\gamma(z,1) \le z^{1/q+(l-1)(1-\gamma)}\varphi(z)^{\frac{n-1}{q}}\left(\int\limits_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}}t^{(l-1)p'\gamma}dt\right)^{1/p'} \le$$

$$\le z^{1/q}\left(\int_z^1 t^{(l-1)p'}\varphi(t)^{(n-1)(1/q-1/p)p'}dt\right)^{1/p'} \le$$

$$\le z^{1/q}A\left(\int_z^1 t^{-p'/q}\frac{dt}{t}\right)^{1/p'} \le (q/p')^{1/p'}A. \tag{23}$$

Таким образом, $\max\{A_0, A_1\} \le c(p,q)\,A$, где A_γ определяется в (3).

Легко проверяется, что при $p = 1$ левая часть (4) не больше супремума в (22). Остается сослаться на даказанную выше теорему.

В случае $\varphi(2z) \sim \varphi(z),\ z \in (0,1/2)$, условие (22) необходимо для непрерывности оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ при тех же p,q. Например, при $p>1$ это вытекает из оценки

$$A_1 \geq \left(\int_{z/2}^{z} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} \left(\int_{z}^{2z} \varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}} (t-z)^{(l-1)p'} dt \right)^{1/p'} \geq$$

$$\geq c\,(z\varphi(z)^{n-1})^{1/q} \varphi(z)^{(1-n)/p} \left(\int_0^z \tau^{(l-1)p'} d\tau \right)^{1/p'}. \qquad (24)$$

Отсюда получаем $A_1 \geq c\,A$.

5.1.4 Вложение в весовое пространство L_q

Теорема 5.1.3 показывает, что для областей с внешними пиками показатель q, при котором пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$, меньше соболевского показателя $q = np/(n-lp)$ при $lp < n$. Оказывается, что q можно улучшить с помощью весовых норм и, в частности, добиться совпадения q с соболевским показателем.

Пусть $\sigma \in L_\infty(0,1)$ – положительная функция, отделенная от нуля на каждом промежутке $(\varepsilon, 1),\ \varepsilon \in (0,1)$.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область вида (5.1.3/1). Обозначим через $L_{q,\sigma}(\Omega)$ весовое пространство с нормой

$$\|u\|_{L_{q,\sigma}(\Omega)} = \left(\int_0^1 \sigma(z)^q dz \int_{y/\varphi(z)\in\omega} |u(y,z)|^q dy \right)^{1/q}, \ \ q \geq 1.$$

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 5.1.3.

Теорема. *В условиях теоремы* 5.1.3 *предположим еще, что если $lp < n$, то $q \leq np/(n-lp)$. Тогда пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_{q,\sigma}(\Omega)$ в том и только в том случае, если*

$$\max_{i=0;1} \sup_{z\in(0,1)} \left\{ \left(\int_0^z \sigma(t)^q \varphi(t)^{n-1} (z-t)^{q(l-1)(1-i)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} (t-z)^{\frac{p(l-1)i}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \right\} < \infty.$$

Пример. *Степенной пик.* Пусть $\varphi(z) = c\,z^\lambda,\ \lambda > 1$. Положим $\sigma(z) = z^\mu$. Тогда пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_{q,\sigma}(\Omega)$ при $lp < n$ и $q = np/(n-lp)$ в том и только в том случае, если $\mu \geq l(\lambda-1)(n-1)/n$.

5.1.5 О компактности вложения $V_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$

Здесь мы докажем критерий компактности оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ для области с внешним пиком. Ниже сохраняются обозначения, введенные в разд. 5.1.3.

Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *– область вида* (5.1.3/1). *Предположим, что* $1 < p \le q < \infty$, $l = 1, 2, \ldots$ *Тогда полная непрерывность оператора вложения:* $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ *равносильна условиям*

$$\lim_{z\to+0} A_0(z,1) = \lim_{z\to+0} A_1(z,1) = 0, \tag{1}$$

где величина $A_\gamma(z,\delta)$ *определена в* (5.1.3/10). *При* $1 \le q < \infty$ *оператор вложения:* $V_1^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ *вполне непрерывен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{z\to+0} \varphi(z)^{1-n} \left(\int_0^z (z-t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. *Достаточность условий* (1), (2). Соображения, высказанные в начале доказательства достаточности теоремы 5.1.3, позволяют ограничиться случаем $\omega = B_1^{(n-1)}$ в (5.1.3/1). Можно также считать, что функция φ удовлетворяет дополнительным требованиям (5.1.3/7). При этих условиях в теореме 5.1.3 для любого фиксированного $\delta \in (0,1)$ и произвольной функции $u \in V_p^l(\Omega)$, такой, что $u(y,z) = 0$ при $z > \delta$, была получена оценка (5.1.3/8), где $A(\delta)$ определяется в (5.1.3/9–10) для $p > 1$ и в (5.1.3/21) для $p = 1$. Пусть

$$\eta \in C^\infty\big([0,\infty)\big), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta\big|_{[0,1/2]} = 1, \quad \eta\big|_{(1,\infty)} = 0.$$

При $\delta \in (0,1/2)$ положим $\eta_\delta(x) = \eta(z/\delta)$ при $x = (y,z) \in \Omega$. В силу вышесказанного для любой функции $u \in V_p^l(\Omega)$ имеем

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\, A(\delta) \|\nabla_l(\eta_\delta u)\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega^{(\delta/2)})},$$

где

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (\varepsilon, 1),\ |y| < \varphi(z)\}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|u\|_{q,\Omega} \le c\, A(\delta) \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} +$$

$$+M_\delta \|u\|_{V_p^{l-1}(\Omega^{(\delta/2)})} + \|u\|_{L_q(\Omega^{(\delta/2)})} \qquad (3)$$

с положительной константой M_δ, не зависящей от u. Заметим, что из условия теоремы следует равенство $\lim_{\delta\to 0} A(\delta) = 0$, а из оценки (5.1.3/16) – неравенство $l - n/p + n/q > 0$. По теореме 1.8/2 пространство $V_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ и в $V_p^{l-1}(\Omega^{(\varepsilon)})$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь оценка (3) позволяет с помощью известного диагонального процесса выделить из любой ограниченной в $V_p^l(\Omega)$ последовательности сходящуюся в $L_q(\Omega)$ подпоследовательность.

Необходимость условий (1), (2). Пусть $V_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega)$ при $p > 1$ и одно из равенств (1) нарушено. Тогда существует такая сходящаяся к нулю последовательность $\{r_k\}_{k\geq 1}$ положительных чисел, для которой при $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$

$$A_\gamma(r_k, 1) = \left(\int_0^{r_k} (r_k - z)^{(l-1)q(1-\gamma)} \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int_{r_k}^1 (z - r_k)^{(l-1)p'\gamma} \varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}} dz\right)^{\frac{1}{p'}} \geq c > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (4)$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Положим

$$h_k(z) = (z - r_k)^{(l-1)p'\gamma} \varphi(z)^{(1-n)/(p-1)}.$$

Ясно, что существует единственное число $\varrho_k \in (r_k, 1)$, при котором

$$\int_{r_k}^{\varrho_k} h_k(z) dz = \int_{\varrho_k}^1 h_k(z) dz, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Заметим, что определенная таким образом последовательность ϱ_k сходится к нулю. В самом деле, если предположить, что подпоследовательность $\{\varrho_{k_i}\}$ отделена от нуля, то интегралы

$$\int_{r_{k_i}}^1 h_k(z) dz = 2 \int_{\varrho_{k_i}}^1 h_k(z) dz$$

ограничены в совокупности и, значит, $A_\gamma(r_{k_i}, 1) \to 0$, что противоречит (4). Итак, мы построили последовательность ϱ_k со свойствами

$$\varrho_k > r_k, \quad \varrho_k \to 0, \quad A_\gamma(r_k, \varrho_k) \geq \text{const} > 0$$

(напомним, что величина $A_\gamma(\cdot,\cdot)$ определена в (5.1.3/10)). Положим

$$u_k(x) = \int_z^1 \chi_{(r_k,\varrho_k)}(t)(t-z)^{l-1}(t-r_k)^{\frac{(l-1)\gamma}{p-1}}\varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}\,dt,$$

где $x=(y,z)\in\Omega$, а χ означает характеристическую функцию. Отметим, что $u_k(x)=0$ при $z>\varrho_k$ и

$$|\nabla_l u_k(x)| \sim \chi_{(r_k,\varrho_k)}(z)(z-r_k)^{\frac{(l-1)\gamma}{p-1}}\varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}}.$$

Тогда ввиду леммы 4.1.1

$$\|u_k\|_{V_p^l(\Omega)} \sim \|\nabla_l u_k\|_{L_p(\Omega)} \sim \left(\int_{r_k}^{\varrho_k} h_k(z)dz\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Кроме того,

$$c\,\|u_k\|^q_{L_q(\Omega)} \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{r_k} \varphi(z)^{n-1}dz \left(\int\limits_{r_k}^{\varrho_k}(t-z)^{l-1}(t-r_k)^{\frac{(l-1)\gamma}{p-1}}\varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}dt\right)^q.$$

Так как

$$(t-z)^{l-1} \geq (t-r_k)^{(l-1)\gamma}(r_k-z)^{(l-1)(1-\gamma)},$$

то

$$c\,\|u_k\|^q_{L_q(\Omega)} \geq$$

$$\geq \int_0^{r_k} \varphi(z)^{n-1}(r_k-z)^{q(l-1)(1-\gamma)}dz\left(\int_{r_k}^{\varrho_k} h_k(t)dt\right)^q. \tag{6}$$

В силу (5) и (6) для последовательности

$$v_k = u_k/\|u_k\|_{V_p^l(\Omega)}, \quad k=1,2,\ldots,$$

имеем

$$\|v_k\|_{L_q(\Omega)} \geq c\,A_\gamma(r_k,\varrho_k) \geq \text{const} > 0. \tag{7}$$

Поскольку последовательность $\{v_k\}$ ограничена в $V_p^l(\Omega)$, то существует подпоследовательность $\{v_k\}$, сходящаяся в $L_q(\Omega)$. Ввиду (7) ее предел – ненулевая функция. Но $v_k(y,z)=0$ при $z>\varrho_k$ и, значит, $v_k(x)\to 0$ при $x\in\Omega$. Поэтому пределом сходящейся в $L_q(\Omega)$ подпоследовательности $\{v_k\}$ может быть только нулевая функция. Полученное противоречие доказывает необходимость условия (1).

Пусть пространство $V_1^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega)$. Проверим условие (2). Если предположить, что оно не выполнено, то существуют такие последовательности положительных чисел $\{r_k\}$ и $\{\varepsilon_k\}$, которые сходятся к нулю и

$$\varphi(r_k+\varepsilon_k)^{1-n}\left(\int_0^{r_k}(r_k-t)^{(l-1)q}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{1/q}\geq \mathrm{const}>0.$$

Положим

$$u_k(x)=\int_z^1 (t-z)^{l-1}\chi_{(r_k,r_k+\varepsilon_k)}(t)dt, \quad x=(y,z)\in\Omega.$$

Тогда

$$\|u_k\|_{V_1^l(\Omega)}\sim\|\nabla_l u_k\|_{L_1(\Omega)}\leq c\int_{r_k}^{r_k+\varepsilon_k}\varphi(z)^{n-1}dz\leq c\,\varphi(r_k+\varepsilon_k)^{n-1}\varepsilon_k.$$

Из определения u_k также следует, что

$$\|u_k\|^q_{L_q(\Omega)}\geq c\int_0^{r_k}\varphi(z)^{n-1}dz\left(\int_{r_k}^{r_k+\varepsilon_k}(t-z)^{l-1}dt\right)^q\geq$$

$$\geq c\,\varepsilon_k^q\int_0^{r_k}\varphi(z)^{n-1}(r_k-z)^{(l-1)q}dz.$$

Таким образом, для последовательности $v_k=u_k/\|u_k\|_{V_1^l(\Omega)}$ имеем

$$\|v_k\|_{L_q(\Omega)}\geq\frac{c}{\varphi(r_k+\varepsilon_k)^{n-1}}\left(\int\limits_0^{r_k}(r_k-t)^{(l-1)q}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\geq \mathrm{const}>0.$$

Отсюда любая подпоследовательность $\{v_k\}$, сходящаяся в $L_q(\Omega)$, имеет ненулевой предел. Но $v_k(x)=0$ при $z>r_k+\varepsilon_k$, и упомянутая подпоследовательность может иметь только нулевой предел. Полученное противоречие доказывает равенство (2) и теорему.

Замечание. Положим

$$\Phi(z)=\varphi(z)^{(n-1)(q^{-1}-p^{-1})}z^{l-p^{-1}+q^{-1}}.$$

Тогда условие

$$\lim_{z\to+0}\Phi(z)=0 \tag{8}$$

достаточно для компактности оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ при $1 \le p \le q < \infty$. Условие (8) и необходимо, если $\varphi(2z) \sim \varphi(z)$, $z \in (0, 1/2)$.

При $p = 1$ это утверждение следует из доказанной теоремы и очевидных оценок

$$\Phi(z) \ge \varphi(z)^{1-n} \left(\int_0^z (z-t)^{(l-1)q} \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{1/q} \ge$$

$$\ge \varphi(z)^{1-n} \left(\varphi(z/2)^{n-1} \int_{z/2}^z (z-t)^{(l-1)q} dt \right)^{1/q}.$$

При $p > 1$ и $\varphi(2z) \sim \varphi(z)$ необходимость условия (8) является следствием оценки $A_1(z, 1) \ge c\,\Phi(z)$, которая получается так же, как (5.1.3/24). Для доказательства достаточности условия (8) при $p > 1$ выведем из (8) равенства (1). В принятых выше обозначениях имеем при $0 < z < \delta < 1$

$$A_\gamma(z, 1) \le A_\gamma(z, \delta) + \left(\int_0^z g(z,t) dt \right)^{1/q} \left(\int_\delta^1 h(z,t) dt \right)^{1/p'}, \tag{9}$$

где

$$g(z,t) = (z-t)^{(l-1)q(1-\gamma)} \varphi(t)^{n-1},\ h(z,t) = (t-z)^{(l-1)p'\gamma} \varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}. \tag{10}$$

Так же, как и (5.1.3/23), выводится оценка

$$A_\gamma(z, \delta) \le (q/p')^{1/p'} \sup \{\Phi(z) : z \in (0, \delta)\}. \tag{11}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу (8) существует такое число $\delta \in (0, 1)$, для которого правая часть (11) меньше $\varepsilon/2$. Для оценки второго слагаемого в правой части (9), равного произведению двух сомножителей, заметим, что первый из сомножителей стремится к нулю при $z \to 0$, а второй имеет мажоранту $\varphi(\delta)^{(1-n)/p}$. Поэтому при фиксированном δ найдется такое число $\zeta \in (0, \delta)$, что произведение указанных сомножителей меньше $\varepsilon/2$ при всех $z \in (0, \zeta)$. При тех же z имеем $A_\gamma(z, 1) < \varepsilon$. Требуемый результат получен.

В заключение приведем два примера, иллюстрирующих теоремы раздела 5.1.

Пример 1. *Степенной пик.* Пусть Ω – область вида (5.1.3/1), где $\varphi(z) = c\,z^\lambda$, $\lambda > 1$. Теорема 5.1.3 вместе со сформулированной выше теоремой приводят к следующим утверждениям. В случае $lp < 1 + \lambda(n-1)$ оператор вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ непрерывен тогда и только тогда, когда

$$q \le \big(1 + \lambda(n-1)\big)p/\big(1 + \lambda(n-1) - lp\big).$$

Тот же оператор компактен тогда и только тогда, когда последнее неравенство строгое. Если $lp \ge 1 + \lambda(n-1)$, то пространство $V_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega)$ при любом $q < \infty$ (на самом деле в следующем разделе будет доказано, что в случае $lp > 1 + \lambda(n-1)$ пространство $V_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $L_\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$).

Пример 2. Теорема Соболева утверждает, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с условием конуса пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$ при $q = np/(n - lp)$, если $lp < n$. При этом показатель q наилучший, а оператор вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ не является вполне непрерывным (см. замечание 1.8). Мы сейчас убедимся, что для области, не удовлетворяющей условию конуса, предельный показатель q в случае $lp < n$ может принимать любое значение из промежутка $(p, np/(n{-}lp))$, причем оператор вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ может быть вполне непрерывным. В самом деле, пусть $p \ge 1$, $lp < n$ и $q \in (p, np/(n-lp))$. Тогда существует ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, для которой

1) оператор вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ компактен;

2) пространство $V_p^l(\Omega)$ не вложено в $L_r(\Omega)$ при $r > q$.

По теореме 5.1.3 и сформулированной выше теореме о компактности (см. также замечания 5.1.3 и настоящего раздела)в качестве Ω можно выбрать область вида (5.1.3/1), где

$$\varphi(z) = z^\lambda(1 - \log z), \quad \lambda = (l - 1/p + 1/q)/((n-1)(1/p - 1/q)).$$

5.2 Непрерывность и ограниченность функций из пространств Соболева в области с внешним пиком

В этом разделе мы формулируем необходимые и достаточные условия непрерывности оператора вложения пространства $V_p^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, где Ω – область с вершиной внешнего пика на границе. Предварительно установим вспомогательные неравенства между C-нормами полиномов на интервалах числовой оси.

Лемма 1. *Пусть* $\varepsilon \in (0,1]$ *и* $l = 0, 1, \ldots$ *Существует такая константа* $c = c(l) > 0$, *что для всех* $P \in \mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^{(1)}$ *справедлива оценка*

$$\|P\|_{C[1,1+\varepsilon]} \le c\,\varepsilon^{-l}\|P\|_{C[0,\varepsilon]}. \tag{1}$$

Доказательство. Заметим сначала, что для $Q \in \mathcal{P}_l$ верна оценка

$$|Q^{(k)}(0)| \le c\,\|Q\|_{C[0,1]}, \quad k = 0, \ldots, l,$$

из которой с помощью преобразования подобия получим

$$|P^{(k)}(0)| \le c\,\varepsilon^{-k}\|P\|_{C[0,\varepsilon]}, \quad P \in \mathcal{P}_l, \;\; k \le l. \tag{2}$$

Если $P \in \mathcal{P}_l$ и $x \in [1, 1+\varepsilon]$, то

$$|P(x)| \le \sum_{k=0}^{l} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k!}|P^{(k)}(0)|.$$

Используя оценку (2), приходим к требуемому результату.

Лемма 2. *Пусть* Δ *– отрезок на прямой длины* $|\Delta|$ *и* $a \in \mathbf{R}^1$, $|a| \ge |\Delta|$. *Тогда для любого* $P \in \mathcal{P}_l$ *верна оценка*

$$\|P\|_{C(\Delta)} \le c\,(|a|/|\Delta|)^l\|P\|_{C(a+\Delta)},$$

где $a + \Delta = \{a + x : x \in \Delta\}$ *и* c *– та же константа, что и в* (1).

Доказательство. Достаточно считать $\Delta = [0, |\Delta|]$. Пусть $a > 0$. Тогда отображение $x \mapsto \Phi(x) = 1 - (x - |\Delta|)a^{-1}$ переводит отрезок Δ в отрезок $[1, 1 + |\Delta|a^{-1}]$, а отрезок $a + \Delta$ – в отрезок $[0, |\Delta|a^{-1}]$. Полагая $\varepsilon = |\Delta|a^{-1}$, $Q = P \circ \Phi^{-1}$ и применяя лемму 1, получим

$$\|P\|_{C(\Delta)} = \|Q\|_{C[1,1+\varepsilon]} \le c\,\varepsilon^{-l}\|Q\|_{C[0,\varepsilon]} = c\,\varepsilon^{-l}\|P\|_{C(a+\Delta)}.$$

В случае $a < 0$ отображение Φ переводит отрезок Δ в отрезок $[1 - \varepsilon, 1]$, а отрезок $a + \Delta$ – в отрезок $[-\varepsilon, 0]$, где $\varepsilon = |a|^{-1}|\Delta|$. Здесь требуемый результат следует из неравенства

$$\|Q\|_{C[1-\varepsilon,1]} \le c\,\varepsilon^{-l}\|Q\|_{C[-\varepsilon,0]}, \quad Q \in \mathcal{P}_l,$$

очевидно верного с той же константой c, что и в (1). Доказательство леммы закончено.

Пусть Ω – область (5.1.3/1), описанная в начале разд. 5.1.3. Ниже через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от n, p, l, Ω. Соотношение $a \sim b$ означает, что $c^{-1} \le a/b \le c$. Сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема. *Если $p \in (1, \infty)$ и $l = 1, 2, \ldots$, то непрерывность оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ равносильна неравенству*

$$\int_0^1 \frac{z^{(l-1)p/(p-1)}}{\varphi(z)^{(n-1)/(p-1)}} dz < \infty. \tag{3}$$

Указанный оператор вложения вполне непрерывен. Пространство $V_1^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{z^{l-1}\varphi(z)^{1-n} : z \in (0,1)\} < \infty, \tag{4}$$

а для полной непрерывности оператора вложения необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{z \to +0} z^{l-1}\varphi(z)^{1-n} = 0. \tag{5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Проверим неравенство (3). При малом $\delta > 0$ определим в Ω функцию u_δ:

$$u_\delta(x) = \int_z^1 (t-z)^{l-1} g_\delta(t) dt, \quad x = (y, z),$$

где

$$g_\delta(t) = t^{(l-1)/(p-1)} \varphi(t)^{(1-n)/(p-1)} \chi_{(\delta, 1-\delta)}(t)$$

и χ означает характеристическую функцию. Ясно, что $u_\delta(x) = 0$ при $z > 1-\delta$, $u_\delta \in C^{l-1}(\Omega) \cap V_\infty^l(\Omega)$ и, кроме того, $|(\nabla_l u)(x)| \sim g_\delta(z)$ для $x \in \Omega$. Ввиду леммы 4.1.1 верна оценка

$$\|u_\delta\|_{V_p^l(\Omega)} \le c\, \|\nabla_l u_\delta\|_{L_p(\Omega)},$$

следовательно,

$$\|u_\delta\|^p_{V_p^l(\Omega)} \le c\, I_\delta, \quad I_\delta = \int_\delta^{1-\delta} t^{(l-1)p/(p-1)} \varphi(t)^{(1-n)/(p-1)} dt.$$

Пусть $x = (y, z) \in \Omega$, $z \in (0, \delta)$. Для таких x имеем

$$u_\delta(x) = \int_\delta^1 (t-z)^{l-1} g_\delta(t) dt \le c\, \|u_\delta\|_{V_p^l(\Omega)}.$$

По теореме Лебега в последнем интеграле возможен предельный переход при $z \to 0$, поэтому $I_\delta \le c\, I_\delta^{1/p}$. Так как $I_\delta < \infty$, то отсюда получаем

$$\int_\delta^{1-\delta} t^{(l-1)p/(p-1)} \varphi(t)^{(1-n)/(p-1)} dt \le c.$$

В силу произвольности малого параметра δ неравенство (3) вытекает из последней оценки и теоремы Фату.

Установим неравенство (4) в предположении существования непрерывного оператора вложения: $V_1^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Если (4) неверно, то найдется такая последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, что $\lim r_k = 0$ и $r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n} \to \infty$. Пусть

$$f \in C^\infty([0,\infty)), \quad 0 \le f \le 1, \quad f|_{[0,1/2]} = 1, \quad f|_{[1,\infty)} = 0. \tag{6}$$

Положим

$$u_k(x) = r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n} f(z/r_k), \quad x = (y,z) \in \Omega, \quad k = 1,2,\ldots \tag{7}$$

Тогда $u_k \in C^\infty(\Omega)$, $u_k(x) = 0$ при $z > r_k$ и $u_k(x) = r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}$ при $z \in (0, r_k/2)$. Кроме того,

$$\|\nabla_l u_k\|_{L_1(\Omega)} \le c\, r_k^{-1}\varphi(r_k)^{1-n} \int_{r_k/2}^{r_k} \varphi(z)^{n-1} dz \le c.$$

Отсюда и из леммы 4.1.1 вытекает ограниченность последовательности $\{u_k\}$ в пространстве $V_1^l(\Omega)$. Однако

$$\|u_k\|_{L_\infty(\Omega)} \ge r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n} \to \infty,$$

что противоречит непрерывности вложения пространства $V_1^l(\Omega)$ в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Итак, (4) установлено.

Пусть оператор вложения: $V_1^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен. Проверим равенство (5). Если (5) нарушено, то существует такая последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, что $r_k \to 0$ и

$$\inf\{r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}\} = c_0 > 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $r_{k+1} < r_k/2$ при $k = 1,2,\ldots$ Как было показано выше, последовательность $\{u_k\}$, построенная в (7), ограничена в $V_1^l(\Omega)$. Пусть $i > k$, $z \in (r_i, r_k/2)$ и $x = (y,z) \in \Omega$. Для этих x имеем $u_i(x) = 0$, $u_k(x) = r_k^{l-1}\varphi(r_k)^{1-n}$, поэтому $\|u_i - u_k\|_{L_\infty(\Omega)} \ge c_0$, и последовательность $\{u_k\}$ не имеет подпоследовательности, сходящейся в $L_\infty(\Omega)$. Тем самым доказательство теоремы в части необходимости закончено.

Достаточность. Пусть $p > 1$ и выполнено условие (3). Покажем, что в этом случае оператор вложения $V_p^l(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ вполне непрерывен. Соображения, высказанные в начале доказательства достаточности в теореме 5.1.3, позволяют ограничиться рассмотрением кругового пика Ω, т.е. в (5.1.3/1) достаточно считать $\omega = B_1^{(n-1)}$.

Зафиксируем число $\delta \in (0, 1/2)$ и положим

$$z_0 = 2\delta, \quad z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Последовательность $\{z_k\}$ убывает, $z_k \to 0$, а также

$$z_{k+1} z_k^{-1} \to 1, \quad \varphi(z_{k+1})\varphi(z_k)^{-1} \to 1.$$

Кроме того, будем считать δ столь малым, что

$$z_2 > \delta \ \text{ и } \ \varphi(z_{k+1}) + \varphi(z_k) \geq \varphi(z_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Нам еще понадобятся ячейки

$$\Omega_k = \{x = (y, z) \in \Omega : \, z \in (z_{k+1}, z_{k-1})\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и

$$G_k = \{x = (y, z) \in \Omega : \, z \in (z_{k+1}, z_k)\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $u \in V_p^l(\Omega)$, $u(x) = 0$ при $z > \delta$. Заметим, что из сходимости интеграла в (3) и условия $\varphi(z) = o(z)$ при $z \to 0$ следует неравенство $lp > n$, поэтому $V_p^l(\Omega_k)$ непрерывно вложено в $C(\bar{\Omega}_k)$ по теореме Соболева. Сочетая эту теорему с обобщенным неравенством Пуанкаре, убедимся, что при каждом $k = 1, 2, \ldots$ существует линейное отображение $u \mapsto P_k \in \mathcal{P}_{l-1}$, для которого

$$\|u - P_k\|_{L_\infty(\Omega_k)} \leq c\,\varphi_k^{l-n/p} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)}, \tag{8}$$

где $\varphi_k = \varphi(z_k)$.

Так как $u|_{\Omega_1} = 0$, то $P_1 = 0$, и при $k \geq 2$ имеем

$$\|u\|_{L_\infty(G_k)} \leq \|u - P_k\|_{L_\infty(\Omega_k)} + \|P_k\|_{L_\infty(G_k)} \leq$$

$$\leq c\,\varphi_k^{l-n/p} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)} + \sum\nolimits_{i=2}^{k} \|P_i - P_{i-1}\|_{L_\infty(G_k)}. \tag{9}$$

Оценим общий член в последней сумме. Пусть $i \le k-1$. Ясно, что

$$\|P_i - P_{i-1}\|_{L_\infty(G_k)} \le$$
$$\le \max_{|y|\le\varphi_k} \max_{z\in[z_{k+1}, z_{k+1}+\varphi_i]} |P_i(y,z) - P_{i-1}(y,z)|. \tag{10}$$

При фиксированном y, $|y| \le \varphi_k$, применим лемму 2 к полиному $P_i(y,\cdot) - P_{i-1}(y,\cdot)$ и отрезку $\Delta = [z_{k+1}, z_{k+1}+\varphi_i]$ при

$$a = z_i - z_{k+1} = \sum\nolimits_{j=i+1}^{k+1} \varphi_j \ge \varphi_i.$$

В результате последний максимум в (10) мажорируем величиной

$$c\left(\frac{z_i - z_{k+1})}{\varphi_i}\right)^{l-1} \max\{|P_i(y,z) - P_{i-1}(y,z)| : z\in[z_i, z_{i-1}]\}$$

и, значит, при $i \le k-1$

$$\|P_i - P_{i-1}\|_{L_\infty(G_k)} \le c(z_i/\varphi_i)^{l-1}\|P_i - P_{i-1}\|_{L_\infty(G_{i-1})}. \tag{11}$$

Последняя оценка очевидно верна и при $i = k$. Из (9) и (11) получаем

$$\|u\|_{L_\infty(G_k)} \le c\,\varphi_k^{l-n/p}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_k)}+$$
$$+c\sum\nolimits_{i=2}^{k}(z_i/\varphi_i)^{l-1}\|P_i - P_{i-1}\|_{L_\infty(G_{i-1})}. \tag{12}$$

Используя (8), найдем, что

$$\|P_i - P_{i-1}\|_{L_\infty(G_{i-1})} \le \|u - P_{i-1}\|_{L_\infty(\Omega_{i-1})} + \|u - P_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} \le$$
$$\le c\sum\nolimits_{j=i-1}^{i} \varphi_j^{l-n/p}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_j)}.$$

Отсюда и из (12) выводим оценку

$$\|u\|_{L_\infty(G_k)} \le c\sum\nolimits_{i=1}^{k}(z_i/\varphi_i)^{l-1}\varphi_i^{l-n/p}\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega_i)}, \quad k = 2,3,\dots$$

С помощью неравенства Гёльдера получим

$$c\,\|u\|_{L_\infty(G_k)} \le$$
$$\le \left(\sum_{i=1}^{k} z_i^{(l-1)p'}\varphi_i^{1+(1-n)p'/p}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{k}\|\nabla_l u\|^p_{L_p(\Omega_i)}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{13}$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Так как

$$z_i^{(l-1)p'} \varphi_i^{1+(1-n)p'/p} \sim \int_{z_i}^{z_{i-1}} \frac{z^{(l-1)p'}}{\varphi(z)^{(n-1)p'/p}} dz,$$

то правая часть (13) не превосходит

$$c \left(\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \int_{z_i}^{z_{i-1}} \frac{z^{(l-1)p'}}{\varphi(z)^{(n-1)p'/p}} dz \right)^{1/p'} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Итак, для всех $u \in V_p^l(\Omega)$, таких, что $u(x) = 0$ при $z > \delta$, верна оценка

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c\, J_{2\delta}^{1/p'} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{14}$$

где

$$J_\delta = \int_0^\delta \frac{z^{(l-1)p'}}{\varphi(z)^{(n-1)p'/p}} dz.$$

Пусть f – функция со свойствами (6). Положим $f_\delta(x) = f(z/\delta)$ при $\delta \in (0, 1/2)$ и $x = (y, z) \in \Omega$. Для любой функции $u \in V_p^l(\Omega)$ имеем

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f_\delta u\|_{L_\infty(\Omega)} + \|(1 - f_\delta) u\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Первое слагаемое справа оценим с помощью (14), а при оценке второго заметим, что $f_\delta(x) = 1$ при $z < \delta/2$. В результате для всех достаточно малых $\delta > 0$ получим

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c\, J_{2\delta}^{1/p'} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \\ + C(\delta)\, \|u\|_{V_p^{l-1}(\Omega^{(\delta/2)})} + \|u\|_{L_\infty(\Omega^{(\delta/2)})}, \tag{15}$$

где $\Omega^{(\varepsilon)} = \{x \in \Omega : z > \varepsilon\}$ – срезанный пик, а $C(\delta)$ – положительное число, не зависящее от u. Поскольку $\Omega^{(\varepsilon)} \in C^{0,1}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, то пространство $V_p^l(\Omega^{(\delta/2)})$ компактно вложено как в $V_p^{l-1}(\Omega^{(\delta/2)})$, так и в $L_\infty(\Omega^{(\delta/2)})$ по теореме 1.8/2 (напомним, что из (3) следует $lp > n$). Кроме того, $J_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Теперь относительная компактность в $L_\infty(\Omega)$ любого множества, ограниченного в $V_p^l(\Omega)$, выводится из оценки (15) стандартными рассуждениями.

Приведенное доказательство достаточности с очевидными изменениями переносится и на случай $p = 1$. Теорема доказана.

Если область ω в (5.1.3/1) принадлежит классу $C^{0,1}$, то теорему можно несколько уточнить.

Следствие. *Пусть* Ω *определена в* (5.1.3/1), *где* $\omega \in C^{0,1}$. *Если выполнено неравенство* (3) *при* $p > 1$ *или имеет место* (4) *при* $p = 1$, *то пространство* $V_p^l(\Omega)$ *непрерывно вложено в* $C(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Ввиду леммы 4.5/1 и теоремы 1.4/2 любая функция $v \in V_p^l(\Omega)$ может быть аппроксимирована в $V_p^l(\Omega)$ функциями из $C^\infty(\overline{\Omega})$. В силу доказанной выше теоремы функция v есть предел в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ последовательности из $C^\infty(\overline{\Omega})$ и, значит, $v \in C(\overline{\Omega})$.

5.3 Нормы операторов вложения для возмущенных пиков

Пусть область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ имеет вершину внешнего пика на границе. Аппроксимируем Ω "хорошими" областями $\Omega^{(\varepsilon)}$, зависящими от малого параметра $\varepsilon > 0$. Естественно ожидать, что норма соболевского оператора вложения:

$$V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)}), \quad lp < n, \quad q = np/(n - lp),$$

растет при $\varepsilon \to +0$, так как пространство $V_p^l(\Omega)$ не вложено в $L_q(\Omega)$. Здесь мы иллюстрируем этот эффект, используя область

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1), |y| < \varphi(z)\}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $\varphi(z) = c\, z^\lambda,\ \lambda > 1$.

Рассматриваются два примера возмущения Ω вблизи вершины. Один пример – это срезанный пик

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \{x = (y, z) \in \Omega : z \in (\varepsilon, 1)\}. \tag{2}$$

Возмущенная область второго типа есть объединение $\Omega \cup B_\varepsilon$ (см. Рис. 7). Мы получаем точные двусторонние (зависящие от ε) оценки норм соболевских операторов вложения в обоих случаях. Выясняется, что нормы упомянутых операторов растут, вообще говоря, с разной скоростью.

Далее в этом разделе ε – малое положительное число. Через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от n, p, q, l, λ. По определению $a \sim b$, если $c \leq a/b \leq c^{-1}$.

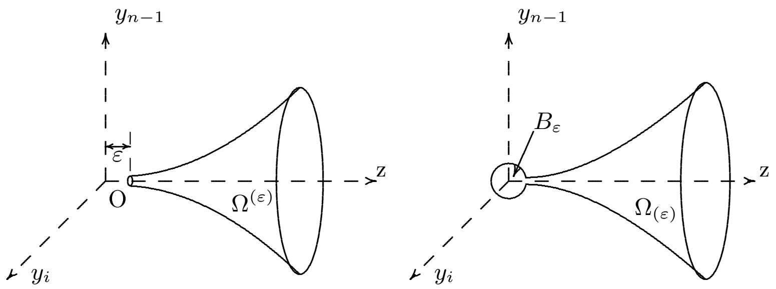

Рис. 7. Два примера возмущений пика вблизи вершины

5.3.1 Срезанные пики

Начнем со следующего замечания.

Замечание. Пусть $\Omega^{(\varepsilon)}$ – срезанный пик, $u \in L_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ и $u(x) = 0$ вблизи $z = 1$. Тогда верно неравенство Фридрихса

$$\|u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} \le c\,\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}.$$

Доказательство этого факта дословно повторяет рассуждения леммы 4.1.1. В частности, отсюда следует, что норма в пространстве $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ эквивалентна (равномерно относительно ε) норме

$$\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} + \|u\|_{L_p(\Omega^{(2/3)})}.$$

В следующем утверждении даются точные оценки нормы оператора вложения: $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$.

Предложение. *Пусть* $1 \le p \le q \le \infty$ *и* l *– натуральное число. Если* $l - n/p + n/q \ge 0$ *и последнее неравенство строгое при* $q = \infty$ *и* $p > 1$, *то норма оператора вложения:* $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ *эквивалентна величине*

$$C_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^\mu & \text{при} \quad \mu < 0, \\ |\log \varepsilon|^{(p-1)/p} & \text{при} \;\; \mu = 0,\ q = \infty, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

где $\mu = l - (\lambda(n-1) + 1)(p^{-1} - q^{-1})$.

Доказательство. Так как область $\Omega^{(\varepsilon)}$ принадлежит классу $C^{0,1}$, то пространство $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ по теореме

Соболева. Заметим, что верны соотношения эквивалентности

$$C_\varepsilon \sim \max_{\gamma\in\{0;1\}} \sup_{z\in(\varepsilon,1)} \left(\int_\varepsilon^z g(z,t)dt\right)^{1/q} \left(\int_z^1 h(z,t)dt\right)^{1/p'}, \qquad (2)$$

где $q<\infty$, $1/p+1/p'=1$, функции g,h определены в (5.1.5/10), а если $q=\infty$, то

$$C_\varepsilon \sim \left(\int_\varepsilon^1 \frac{z^{(l-1)p'}}{\varphi(z)^{(n-1)/(p-1)}}dz\right)^{1/p'} \sim \left(\int_\varepsilon^1 \frac{(z-\varepsilon)^{(l-1)p'}}{\varphi(z)^{(n-1)/(p-1)}}dz\right)^{1/p'}. \quad (3)$$

При $p=1$ правую часть в (2) следует заменить на

$$\sup_{z\in(\varepsilon,1)} \varphi(z)^{1-n} \left(\int_\varepsilon^z (z-t)^{(l-1)q}\varphi(t)^{n-1}dt\right)^{1/q},$$

а вместо (3) использовать соотношение $C_\varepsilon \sim \sup_{z\in(\varepsilon,1)} z^{l-1}\varphi(z)^{1-n}$.

Оценим снизу норму оператора вложения: $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$. Для этого предположим, что для всех $u\in V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$

$$\|u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} \le D_\varepsilon \|u\|_{V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})}, \quad D_\varepsilon = \mathrm{const} > 0. \qquad (4)$$

При $q<\infty$ подставим в это неравенство функцию

$$\Omega^{(\varepsilon)} \ni x=(y,z)\mapsto u(x)=\int_z^1 (t-z)^{l-1}f(t)dt,$$

где $f\in L_{p,loc}(0,1)$. Ввиду сформулированного выше замечания для таких u оценка (4) равносильна двухвесовому неравенству

$$\left(\int_\varepsilon^1 \varphi(z)^{n-1}dz\left|\int_z^1 (t-z)^{l-1}f(t)dt\right|^q\right)^{\frac1q} \le$$

$$\le c\,D_\varepsilon\left(\int_\varepsilon^1 |f(z)|^p\varphi(z)^{n-1}dz\right)^{\frac1p}.$$

Лемма 5.1.3 и соотношение (2) теперь дают $D_\varepsilon \ge c\,C_\varepsilon$.

При $q=\infty$ подставим в (4) функцию

$$\Omega^{(\varepsilon)} \ni x=(y,z)\mapsto u_\varepsilon(x)=\int_z^1 (t-z)^{l-1}(t-\varepsilon)^{\frac{l-1}{p-1}}\varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}dt.$$

Так как

$$\|u_\varepsilon\|_{V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c\,\|\nabla_l u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c\left(\int_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon(z)dz\right)^{1/p},$$

где $\psi_\varepsilon(z) = (z-\varepsilon)^{(l-1)p'}\varphi(z)^{(1-n)/(p-1)}$, то

$$\int_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon(z)dz = u_\varepsilon(\varepsilon) \leq \|u_\varepsilon\|_{L_\infty(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c\,D_\varepsilon\left(\int_\varepsilon^1 \psi_\varepsilon(z)dz\right)^{1/p}.$$

Отсюда ввиду (3) снова получаем $D_\varepsilon \geq c\,C_\varepsilon$. Эта оценка выводилась при $p > 1$. С очевидными изменениями она может быть получена и при $p = 1$.

Оценим сверху норму оператора вложения: $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$. Достаточно установить неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c\,C_\varepsilon\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} \tag{5}$$

в предположении $u(x) = 0$ в окрестности $z = 1$.

Его доказательство аналогично доказательству оценки (5.1.3/8) в теореме 5.1.3, поэтому мы отметим здесь лишь различия в рассуждениях. Представление (5.1.3/14) имеет место для $z \in (\varepsilon, 1)$ и $\delta = 1$. В рассуждениях, приводящих к (5.1.3/12), ссылаться на оценку (5.1.1/3) следует при $f(z) = c\,z^\lambda$ и $z \in (\varepsilon, 1)$. Таким образом, вместо (5.1.3/12) (с учетом соотношения (2)) получим

$$\|Q\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c\,C_\varepsilon\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}. \tag{6}$$

Далее, последовательность $\{z_k\}$ в (5.1.3/18) содержит лишь конечное число членов. Именно, пусть $z_0 = 1$,

$$z_{k+1} + \varphi(z_{k+1}) = z_k \quad \text{при} \quad k \geq 0, \quad z_k > \varepsilon. \tag{7}$$

Если $z_{N+1} < \varepsilon \leq z_N$, то мы полагаем $z_N = \varepsilon$. В неравенствах (5.1.3/18–19) можно считать, что k принимает значения $0, \ldots, N-1$. Из этих неравенств выводится оценка

$$\|u - Q\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c\,\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}.$$

Последняя в сочетании с (6) и очевидной оценкой $C_\varepsilon \geq c$ приводят к (5).

Докажем (5) при $q = \infty$. Пусть $\{z_k\}_{k=0}^N$ – конечная последовательность, определенная в (7), где $z_0 = \delta \in (0, 1)$, $\delta > 2\varepsilon$. В ходе доказательства теоремы 5.2 было установлено, что для некоторого фиксированного $\delta \in (0, 1)$ (зависящего только от функции φ) и любой функции $u \in V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$, равной нулю на $\Omega^{(\delta/2)}$, справедлива оценка

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega_k)} \leq c \left(\sum_{i=1}^{k} z_i^{(l-1)p'} \varphi(z_i)^{1+(1-n)p'/p} \right)^{\frac{1}{p'}} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}, \quad (8)$$

где

$$\Omega_k = \{x = (y, z) \in \Omega^{(\varepsilon)} : z \in (z_k, z_{k-1})\}$$

и $k = 1, \ldots, N$ (см. (5.2/13)). Так как последняя сумма не больше

$$c \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{z_i}^{z_{i-1}} z^{(l-1)p'} \varphi(z)^{(1-n)p'/p} dz = c \int\limits_{z_k}^{z_0} z^{(l-1)p'} \varphi(z)^{(1-n)p'/p} dz,$$

то из (8) выводим

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c \left(\int_\varepsilon^1 z^{(l-1)p'} \varphi(z)^{(1-n)p'/p} dz \right)^{1/p'} \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}.$$

Доказательство предложения закончено.

Сформулируем одно утверждение, вытекающее из только что доказанного.

Следствие. *В условиях предыдущего утверждения наилучшая постоянная D_ε в "неравенстве Пуанкаре"*

$$\inf\{\|u - Q\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} : Q \in \mathcal{P}_{l-1}\} \leq D_\varepsilon \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}, \ u \in V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}), \ (9)$$

удовлетворяет соотношению $D_\varepsilon \sim C_\varepsilon$, где величина C_ε определена в (1).

Доказательство. В силу доказанного выше предложения и сделанного перед ним замечания для любой функции $u \in V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ имеем

$$\inf\{\|u - Q\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} : Q \in \mathcal{P}_{l-1}\} \leq$$
$$\leq c\, C_\varepsilon (\inf\{\|u - Q\|_{L_p(\Omega^{(2/3)})} : Q \in \mathcal{P}_{l-1}\} + \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}).$$

Используя обобщенное неравенство Пуанкаре в области $\Omega^{(2/3)}$, получаем (9) с константой $c\, C_\varepsilon$. Отсюда $D_\varepsilon \leq c\, C_\varepsilon$. Для проверки обратного неравенства предположим, что (9) выполнено с некоторой константой D_ε. Пусть $u \in V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})$ и $u = 0$ на $\Omega^{(2/3)}$. Обозначим через Q_u полином, реализующий инфимум в левой части (9). Тогда

$$\|Q_u\|_{L_q(\Omega^{(2/3)})} \le D_\varepsilon \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})},$$

поэтому

$$\|u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} \le \|u - Q_u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} + \|Q_u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon)})} \le$$

$$\le D_\varepsilon \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})} + c\,\|Q_u\|_{L_q(\Omega^{(2/3)})} \le c\,D_\varepsilon \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega^{(\varepsilon)})}.$$

Таким образом, норма оператора вложения: $V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega^{(\varepsilon)})$ не превосходит $c\,D_\varepsilon$. Из доказанного выше предложения теперь следует, что $C_\varepsilon \le c\,D_\varepsilon$.

5.3.2 Объединение пика и малого шара

Положим

$$\Omega_{(\varepsilon)} = \Omega \cup B_\varepsilon$$

(см. Рис. 7), где Ω – область, определенная в (5.3/1) и $\varphi(z) = c\,z^\lambda$, $\lambda > 1$. В формулируемом ниже утверждении приводятся точные оценки нормы оператора вложения: $V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega_{(\varepsilon)})$ для малого положительного параметра ε.

Предложение. *Предположим, что $1 \le p \le q \le \infty$, $l = 1, 2, \dots$ и $l - n/p + n/q \ge 0$, причем последнее неравенство строгое при $p > 1$ и $q = \infty$. Тогда норма оператора вложения: $V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega_{(\varepsilon)})$ эквивалентна величине*

$$C_\varepsilon + \big(\varepsilon^{n/p - n/q} + \varepsilon^\nu\big)^{-1},$$

где C_ε определяется в (5.3.1/1) и $\nu = \big(\lambda(n-1)+1\big)/p - n/q - l$.

Предварительно установим одно вспомогательное утверждение, касающееся функций в малых областях и тонких цилиндрах.

Лемма. *Пусть (a, b) – интервал в $\mathbf{R}^1$ (конечный или бесконечный) и пусть $G_\varrho = B_\varrho^{(n-1)} \times (a, b)$. Если $\delta \in (0, \varepsilon/2)$, то для всех $u \in V_p^l(G_\varepsilon)$ верна оценка*

$$\|u\|_{p,G_\varepsilon} \le c\,(n,p,l)\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{(n-1)/p} \Big(\varepsilon^l \|\nabla_l u\|_{p,G_\varepsilon} + \sum_{k=0}^{l-1} \varepsilon^k \|\nabla_k u\|_{p,G_\delta}\Big).$$

Доказательство. Достаточно установить неравенство

$$\|v\|_{p,B_\varepsilon} \le c\,(\varepsilon\delta^{-1})^{(n-1)/p}\big(\varepsilon^l\|\nabla_l v\|_{p,B_\varepsilon} + \sum\nolimits_{j=0}^{l-1}\varepsilon^j\|\nabla_j v\|_{p,B_\delta}\big), \qquad (1)$$

где $B_\varepsilon = \{y \in \mathbf{R}^{n-1} : |y| < \varepsilon\}$ и $v \in V_p^l(B_\varepsilon)$. Введем полином P в $\mathbf{R}^{n-1}$ степени не выше $l-1$, удовлетворяющий обобщенному неравенству Пуанкаре

$$\|\nabla_j(v-P)\|_{p,B_\varepsilon} \le c\,\varepsilon^{l-j}\|\nabla_l v\|_{p,B_\varepsilon}, \quad 0 \le j \le l-1. \qquad (2)$$

Тогда

$$\|v\|_{p,B_\varepsilon} \le \|P\|_{p,B_\varepsilon} + c\,\varepsilon^l\|\nabla_l v\|_{p,B_\varepsilon}. \qquad (3)$$

Кроме того,

$$\|P\|_{p,B_\varepsilon} \le c\sum\nolimits_{|\alpha|<l}|(D^\alpha P)(0)|\,\varepsilon^{|\alpha|+(n-1)/p}.$$

Для любого полинома S в $\mathbf{R}^{n-1}$ верна оценка

$$|S(0)| \le c\,\delta^{(1-n)/p}\|S\|_{p,B_\delta}$$

с постоянной, зависящей лишь от n, p и степени полинома. Поэтому

$$\|P\|_{p,B_\varepsilon} \le c\,(\varepsilon\delta^{-1})^{(n-1)/p}\sum\nolimits_{j=0}^{l-1}\varepsilon^j\|\nabla_j P\|_{p,B_\delta}. \qquad (4)$$

Используя (2), найдем, что

$$\|\nabla_j P\|_{p,B_\delta} \le \|\nabla_j v\|_{p,B_\delta} + c\,\varepsilon^{l-j}\|\nabla_l v\|_{p,B_\varepsilon}. \qquad (5)$$

Теперь (1) следует из (3) – (5). Лемма доказана.

Доказательство предложения. Чтобы получить оценку снизу нормы оператора вложения: $V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega_{(\varepsilon)})$, предположим, что

$$\|u\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \le N_\varepsilon\|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})} \qquad (6)$$

для всех $u \in V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})$. Требуется установить следующие оценки:

$$N_\varepsilon \ge c\left(\varepsilon^{n/p-n/q} + \varepsilon^\nu\right)^{-1}, \qquad (7)$$

$$N_\varepsilon \ge c\,C_\varepsilon. \qquad (8)$$

Пусть $g \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $g(z) = 1$ при $z \le 1$, $g(z) = 0$ при $z \ge 2$. Положим $u(x) = g(z/\varepsilon)$ при $x = (y, z) \in \Omega_{(\varepsilon)}$ и подставим функцию u в (6). Тогда

$$c\,\varepsilon^{n/q} \le \|u\|_{L_q(B_\varepsilon)} \le N_\varepsilon \|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})} \le$$

$$\le c\,N_\varepsilon \left(\varepsilon^{n/p} + \left(\varphi(\varepsilon)^{n-1}\varepsilon\right)^{1/p} \varepsilon^{-l}\right),$$

откуда вытекает (7).

Из (5.3.1/1) следует, что (8) достаточно проверить только в случаях $\mu < 0$ и $\mu = 0$, $q = \infty$, где $\mu = l - \big(\lambda(n-1)+1\big)\big(p^{-1} - q^{-1}\big)$. Пусть $\psi \in C_0^\infty(1,2)$, $\psi|_{(4/3,5/3)} = 1$. Подставляя функцию

$$\Omega_{(\varepsilon)} \ni x = (y,z) \mapsto u(x) = \psi(z/\varepsilon)$$

в (6), получаем

$$c\left(\varepsilon\varphi(\varepsilon)^{n-1}\right)^{1/q} \le \|u\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \le N_\varepsilon \|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})} \le$$

$$\le c\,N_\varepsilon \left(\varepsilon\varphi(\varepsilon)^{n-1}\right)^{1/p} \varepsilon^{-l}.$$

Отсюда $N_\varepsilon \ge c\,\varepsilon^\mu$, если $\mu < 0$.

Обращаясь к случаю $\mu = 0$, $q = \infty$, введем функцию η со свойствами

$$\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^1), \quad \eta|_{(-\infty,1/3)} = 0, \quad \eta|_{(2/3,\infty)} = 1.$$

Функция u, определенная на $\Omega_{(\varepsilon)}$ равенством

$$u(y,z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z < \varepsilon, \\ \eta(\log z/\log\varepsilon), & \text{если } z \ge \varepsilon, \end{cases}$$

принадлежит пространству $V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})$ и равна нулю в окрестности $z = 1$. Для этой функции верна оценка

$$|(\nabla_l u)(x)| \le c\,z^{-l}|\log\varepsilon|^{-1} \quad \text{при} \quad z > \varepsilon,$$

объединяя которую с леммой 4.1.1, находим

$$\|u\|_{V_p^l(\Omega^{(\varepsilon)})} \le c\,\varepsilon^{n/p} + c\,\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} \le c\,|\log\varepsilon|^{(1-p)/p}.$$

Подстановка u в (6) дает

$$1 \le \|u\|_{L_\infty(\Omega_{(\varepsilon)})} \le c\,N_\varepsilon |\log\varepsilon|^{(1-p)/p},$$

откуда следует (8) при $\mu = 0$ и $q = \infty$.

Получим теперь оценку сверху для нормы оператора вложения: $V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)}) \to L_q(\Omega_{(\varepsilon)})$. Пусть $\Omega^{(\varepsilon)}$ означает срезанный пик (5.3/2) и пусть $u \in V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})$. При любом достаточно малом ε имеем

$$\|u\|_{L_q(\Omega_{(\varepsilon)})} \le \|u\|_{L_q(B_\varepsilon)} + \|u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon/2)})}. \tag{9}$$

Для оценки последнего слагаемого применим предложение 5.3.1:

$$\|u\|_{L_q(\Omega^{(\varepsilon/2)})} \le c\, C_\varepsilon \|u\|_{V_p^l(\Omega^{(\varepsilon/2)}}. \tag{10}$$

Величину же $\|u\|_{L_q(B_\varepsilon)}$ мажорируем двумя способами. Первый состоит в использовании теоремы вложения Соболева:

$$\|u\|_{L_q(B_\varepsilon)} \le c\, \varepsilon^{n/q-n/p} \|u\|_{V_p^l(B_\varepsilon)}. \tag{11}$$

Второй способ заключается в следующем. Рассмотрим цилиндры

$$T_\varepsilon = \{(y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (\varepsilon/2, 2\varepsilon/3),\ |y| < \varphi(\varepsilon/2)\},$$

$$G_\varepsilon = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (\varepsilon/2, 2\varepsilon/3),\ |y| < 2\varepsilon/3\}.$$

Ясно, что $T_\varepsilon \subset G_\varepsilon$ при любом достаточно малом ε. По теореме вложения Соболева и теореме 1.5.2 имеем

$$\|u\|_{L_q(B_\varepsilon)} \le c\, \varepsilon^{n/q-n/p} \left(\|u\|_{L_p(G_\varepsilon)} + \varepsilon^l \|\nabla_l u\|_{L_p(B_\varepsilon)} \right). \tag{12}$$

Используя сформулированную выше лемму, найдем, что

$$\|u\|_{L_p(G_\varepsilon)} \le c \left(\varphi(\varepsilon)/\varepsilon\right)^{(1-n)/p} \Big(\varepsilon^l \|\nabla_l u\|_{L_p(G_\varepsilon)} + \sum_{k=0}^{l-1} \varepsilon^k \|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)} \Big).$$

Последняя оценка в сочетании с (12) приводят к неравенству

$$c\, \|u\|_{L_q(B_\varepsilon)} \le \varepsilon^{-\nu} \|\nabla_l u\|_{L_p(B_\varepsilon)} + \sum\nolimits_{k=0}^{l-1} \varepsilon^{k-l-\nu} \|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)}, \tag{13}$$

$\nu = \big(\lambda(n-1)+1\big)/p - n/q - l$. Для оценки общего члена суммы в (13) рассмотрим несколько случаев.

1^o $(l-k)p < \lambda(n-1)+1$. Очевидно, что

$$\varepsilon^{k-l} \|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)} \le c\, \|z^{k-l} \nabla_k u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Применяя неравенство Харди

$$\|z^{k-l}\nabla_k u\|_{L_p,\Omega)} \le c\,\|u\|_{V_p^l(\Omega)}$$

(см. пример 4.1.2), получим

$$\varepsilon^{k-l-\nu}\|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{-\nu}\|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})}. \tag{14}$$

2^o $(l-k)p = \lambda(n-1)+1$. Согласно предложению 5.3.1 норма оператора вложения:

$$V_p^{l-k}\big(\Omega^{(\varepsilon/2)}\big) \to L_\infty\big(\Omega^{(\varepsilon/2)}\big) \tag{15}$$

эквивалентна $|\log\varepsilon|^{(p-1)/p}$. Поэтому

$$\|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)} \le (\,\mathrm{mes}_n(T_\varepsilon))^{1/p}\,\|\nabla_k u\|_{L_\infty(\Omega^{(\varepsilon/2)})} \le$$

$$\le c\,\varepsilon^{(\lambda(n-1)+1)/p}|\log\varepsilon|^{(p-1)/p}\|u\|_{V_p^l(\Omega^{(\varepsilon/2)}}.$$

3^o $(l-k)p > \lambda(n-1)+1$. В этом случае по предложению 5.3.1 норма оператора вложения (15) ограничена равномерно относительно ε, и то же рассуждение, что и в 2^o, приводит к оценке

$$\|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)} \le c\,\varepsilon^{(\lambda(n-1)+1)/p}\|u\|_{V_p^l(\Omega^{(\varepsilon/2)})}.$$

Объединяя 2^o и 3^o с (5.3.1/1), приходим к следующему результату: если $(l-k)p \ge \lambda(n-1)+1$, то

$$\varepsilon^{k-l-\nu}\|\nabla_k u\|_{L_p(T_\varepsilon)} \le c\,C_\varepsilon\|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})}.$$

Последняя оценка вместе с (13), (14) дают

$$\|u\|_{L_q(B_\varepsilon)} \le c\,\big(C_\varepsilon + \varepsilon^{-\nu}\big)\,\|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})}. \tag{16}$$

Теперь неравенство

$$\|u\|_{L_q(\Omega_\varepsilon))} \le c\,\big(C_\varepsilon + (\varepsilon^\nu + \varepsilon^{n/p-n/q})^{-1}\big)\|u\|_{V_p^l(\Omega_{(\varepsilon)})}$$

является следствием (9) – (11) и (16). Предложение доказано.

Замечание. Если $lp > n$, то нормы обоих операторов вложения:

$$V_p^l\big(\Omega^{(\varepsilon)}\big) \to C\big(\overline{\Omega}^{(\varepsilon)}\big), \quad V_p^l\big(\Omega_{(\varepsilon)}\big) \to C\big(\overline{\Omega}_{(\varepsilon)}\big)$$

эквивалентны правой части в (5.3.1/1) при $q = \infty$.

Пусть $lp < n$ и $q = np/(n - lp)$. Если $\lambda \geq (2n-1)/(n-1)$, то нормы операторов вложения:

$$V_p^l\big(\Omega^{(\varepsilon)}\big) \to L_q\big(\Omega^{(\varepsilon)}\big), \quad V_p^l\big(\Omega_{(\varepsilon)}\big) \to L_q\big(\Omega_{(\varepsilon)}\big)$$

эквивалентны $\varepsilon^{-l(\lambda-1)(n-1)/n}$. Если $1 < \lambda < (2n-1)/(n-1)$, то норма первого оператора эквивалентна той же величине, а норма второго оператора эквивалентна $\varepsilon^{-\min\{l,(\lambda-1)(n-1)/p\}}$ и растет при $\varepsilon \to 0$ быстрее, чем норма первого оператора.

Эти утверждения вытекают из предложения 5.3.1 и предложения, доказанного в настоящем разделе.

5.4 Непрерывность оператора граничного следа: $W_p^1(\Omega) \to L_q(\partial\Omega)$ для области с внешним пиком

Согласно теореме 3.1.1 функции класса $W_p^1(\Omega)$, $\Omega \in C^{0,1}$, имеют следы на $\partial\Omega$, принадлежащие $L_p(\partial\Omega)$. Более того, по теореме Соболева (см. теорему 1.7 и ее обобщения) в этом случае для граничного следа верна оценка

$$\left(\int_{\partial\Omega} |u(x)|^q ds_x\right)^{1/q} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \quad u \in W_p^1(\Omega),$$

где ds_x – элемент площади поверхности $\partial\Omega$, $q = (n-1)p/(n-p)$ при $p < n$, $q \in [1, \infty)$ при $p = n$, $q = \infty$ при $p > n$ и c – положительная постоянная, не зависящая от u.

Ситуация меняется, когда область имеет особенности на границе. Например, если

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : 0 < z < 1,\ |y| < z^\lambda\}, \quad \lambda > 1,$$

то функция $\Omega \ni x \mapsto u(x) = z^{-1-\lambda(n-2)}$ принадлежит пространству $W_p^1(\Omega)$ при $1 < p < (1 + \lambda(n-1))/(2 + \lambda(n-2))$, но ее след $u|_{\partial\Omega}$ несуммируем на $\partial\Omega$.

В настоящем разделе даны необходимые и достаточные условия непрерывности оператора граничного следа $W_p^1(\Omega) \ni u \mapsto u|_{\partial\Omega} \in L_q(\partial\Omega)$ для области с внешним пиком при $p, q \geq 1$.

5.4.1 Случай $q < p$

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика в смысле определения 4.1.1. Относительно области ω предположим, что она односвязна и принадлежит классу $C^{0,1}$. По теореме 3.1.1 граничный след произвольной функции из $W_p^1(\Omega)$ есть элемент пространства $L_p(\partial\Omega\backslash B_\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Таким образом, упомянутый след определен почти везде на $\partial\Omega$. Ниже мы даем условие принадлежности следа пространству $L_q(\partial\Omega)$ при $q < p$. Фигурирующие далее положительные константы c зависят только от p, q, n, Ω.

Нам понадобится двухвесовое неравенство Харди для интервалов числовой оси в случае $q < p$ (см. В. Г. Мазья [40, 1.3]).

Лемма. *Пусть $1 \le q < p \le \infty$ и $-\infty \le a < b \le \infty$. Неравенство*

$$\left(\int_a^b \left| w(x) \int_x^b f(t)dt \right|^q dx\right)^{1/q} \le C \left(\int_a^b |v(x)f(x)|^p dx\right)^{1/p} \qquad (1)$$

верно с константой C, не зависящей от функции f, тогда и только тогда, когда

$$B = \left(\int\limits_a^b \left[\frac{dx}{|v(x)|^{p'}} \int\limits_a^x |w(y)|^q dy \left(\int\limits_x^b \frac{dy}{|v(y)|^{p'}}\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty,$$

где $1/p + 1/p' = 1$. Если C – точная константа в (1), то

$$q^{1/q}((p-q)/(p-1))^{(q-1)/q} B \le C \le {p'}^{(q-1)/q} q^{1/q} B$$

и

$$B = C \quad \text{при} \quad q = 1 < p \le \infty.$$

Сформулируем основной результат разд. 5.4.1.

Теорема. *Пусть $1 \le q < p$. Непрерывность оператора*

$$W_p^1(\Omega) \ni u \mapsto u|_{\partial\Omega} \in L_q(\partial\Omega) \qquad (2)$$

для области с вершиной внешнего пика на границе равносильна условию

$$D = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^z \varphi(t)^{n-2} dt \left(\int\limits_z^1 \frac{dt}{\varphi(t)^{\frac{n-1}{p-1}}}\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}} \frac{dz}{\varphi(z)^{\frac{n-1}{p-1}}} < \infty. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть оператор (2) непрерывен. Тогда для всех $u \in W_p^1(\Omega)$ верна оценка

$$\left(\int_S |u(x)|^q ds_x \right)^{1/q} \le c\, \|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{4}$$

где

$$S = \{x = (y, z) : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \partial\omega\}. \tag{5}$$

Проверим условие (3).

Для $f \in L_{p,loc}(0,1)$ определим функцию

$$\{x = (y, z) : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \omega\} \ni x \mapsto u(x) = \int_z^1 f(t)dt,$$

$u(x) = 0$ при остальных $x \in \Omega$. Подставляя функцию u в (4) и принимая во внимание лемму 4.1.1, получим

$$\left(\int_0^1 \left| \int_z^1 f(t)dt \right|^q \varphi(z)^{n-2} dz \right)^{1/q} \le$$

$$\le c \left(\int_0^1 |f(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz \right)^{1/p},$$

и неравенство (3) вытекает из леммы, предшествующей теореме.

Пусть теперь (3) имеет место. Чтобы установить непрерывность оператора (2), достаточно проверить оценку (4) для $u \in W_p^1(\Omega)$ при условии $u = 0$ вне окрестности U из определения 4.1.1. Обозначим через $\bar{u}(z)$ среднее значение функции $u(\cdot, z)$ на сечении $\Omega \cap U$ гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$. Покажем, что функция $(0,1) \ni z \mapsto \bar{u}(z)$ абсолютно непрерывна и оценим ее производную. Имеем

$$\bar{u}(z) = \frac{1}{\varphi(z)^{n-1}|\omega|} \int\limits_{\varphi(z)\omega} u(y,z)dy = \frac{1}{|\omega|} \int\limits_{\omega} u(\varphi(z)Y, z)dY,$$

где $|\omega| = \mathrm{mes}_{n-1}(\omega)$. Отметим, что функция

$$\omega \times (0,1) \ni (Y, z) \mapsto v(Y, z) = u(\varphi(z)Y, z)$$

принадлежит классу $W_p^1(\omega \times (\varepsilon, 1))$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Следовательно, функция $v(Y, \cdot)$ абсолютно непрерывна при п.в. $Y \in \omega$. Отсюда для любой функции $\eta \in C_0^\infty(0,1)$ получаем

$$\int_0^1 \bar{u}(z)\eta'(z)dz = -\frac{1}{|\omega|} \int_\omega dY \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial z}(Y, z)\eta(z)dz.$$

Таким образом, функция $\bar{u}$ абсолютно непрерывна на интервале $(0,1)$, и при п.в. $z \in (0,1)$

$$\bar{u}'(z) = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega \left(\frac{\partial u}{\partial z}(\varphi(z)Y,z) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y_i}(\varphi(z)Y,z)\varphi'(z)Y_i\right)dY.$$

С помощью неравенства Гёльдера найдем, что

$$\int_0^1 |\bar{u}'(z)|^p\varphi(z)^{n-1}dz \le$$

$$\le \frac{1}{|\omega|}\int\limits_0^1\varphi(z)^{n-1}dz\int\limits_\omega\left|\frac{\partial u}{\partial z}(\varphi(z)Y,z) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y_i}(\varphi(z)Y,z)\varphi'(z)Y_i\right|^p dY \le$$

$$\le c\int_0^1 dz\int_{\varphi(z)\omega}|\nabla u(y,z)|^p dy \le c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}. \qquad (6)$$

Кроме того,

$$\int_S |\bar{u}(z)|^q ds_x \le c(\omega)\int_0^1 |\bar{u}(z)|^q\varphi(z)^{n-2}dz. \qquad (7)$$

Так как $\bar{u}(1) = 0$, то по предыдущей лемме имеем

$$\left(\int_0^1 |\bar{u}(z)|^q\varphi(z)^{n-2}dz\right)^{1/q} \le$$

$$\le c(p,q)D^{(p-q)/pq}\left(\int_0^1 |\bar{u}'(z)|^p\varphi(z)^{n-1}dz\right)^{1/p}, \qquad (8)$$

где величина D определена в (3). Из (6) – (8) вытекает оценка

$$\left(\int_S |\bar{u}(z)|^q ds_x\right)^{1/q} \le c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad (9)$$

в которой ds_x – элемент площади поверхности S (см. (5)).

Обратимся к оценке величины $\|u-\bar{u}\|_{L_q(S)}$. Так как $q < p$, то по неравенству Гёльдера

$$\|u-\bar{u}\|_{L_q(S)} \le c\,\|u-\bar{u}\|_{L_p(S)}. \qquad (10)$$

В свою очередь,

$$\|u-\bar u\|_{L_p(S)} \le c\left(\int\limits_0^1 dz\int\limits_{S_z}|u(y,z)-\bar u(z)|^p dS_z(y)\right)^{1/p}, \qquad (11)$$

где $S_z = \{\varphi(z)y : y\in\partial\omega\}$ – сечение поверхности S гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$. Применим в области $\varphi(z)\omega = \{\varphi(z)y : y \in \omega\}$ при фиксированном z известную оценку для граничного следа функции $w \in W_p^1(\varphi(z)\omega)$:

$$\varphi(z)\int\limits_{S_z}|w(y)|^p dS_z(y) \le$$

$$\le c\int\limits_{\varphi(z)\omega}|w(y)|^p dy + c\,\varphi(z)^p\int\limits_{\varphi(z)\omega}|\nabla_y w(y)|^p dy.$$

Положим в этой оценке $w(y) = u(y,z)-\bar u(z)$ и используем неравенство Пуанкаре

$$\int_{\varphi(z)\omega}|w(y)|^p dy \le c\,\varphi(z)^p\int_{\varphi(z)\omega}|\nabla_y w(y)|^p dy.$$

Тогда получим

$$\int_{S_z}|u(y,z)-\bar u(z)|^p dS_z(y) \le c\,\varphi(z)^{p-1}\int_{\varphi(z)\omega}|\nabla_y u(y,z)|^p dy.$$

Интегрируя это неравенство по $z\in(0,1)$ и принимая во внимание (10), (11), придем к оценке

$$\left(\int_S |u(x)-\bar u(z)|^q ds_x\right)^{1/q} \le c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \qquad (12)$$

Из последнего неравенства и (9) следует (4). Доказательство теоремы закончено.

Пример. Рассмотрим степенной пик

$$\Omega = \{(y,z)\in\mathbf{R}^n : z\in(0,1), |y| < c\,z^\lambda\},\quad \lambda > 1. \qquad (13)$$

Тогда оператор сужения на границу (2) непрерывен при $1\le q<p$ в следующих случаях:

1) $p \ge 1+\lambda(n-1)$ и $q\in[1,p)$;

2) $p < 1+\lambda(n-1)$ и $1\le q < p\,\min\{1,(1+\lambda(n-2))/(1+\lambda(n-1)-p)\}$.

5.4.2 Случай $p \le q$

Мы сохраняем введенные в начале разд. 5.4.1 предположения и обозначения. Соотношение $a \sim b$ означает, что $c^{-1} \le a/b \le c$.

В следующем утверждении дано необходимое и достаточное условие непрерывности оператора сужения на границу (5.4.1/2) для области с внешним пиком при $q \ge p$.

Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *– область с вершиной внешнего пика на границе. Оператор* (5.4.1/2) *непрерывен при* $p \le q < \infty$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$D = \sup_{r\in(0,1)} \left(\int_0^r \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \left(\int_r^1 \varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}} dz\right)^{(p-1)/p} < \infty. \quad (1)$$

Доказательство. Необходимость неравенства (1) устанавливается так же, как и в теореме 5.4.1 с помощью подстановки пробной функции в неравенство (4) и последующей ссылки на лемму 4.1.2/1.

Достаточность. Пусть условие (1) выполнено и $u \in W_p^1(\Omega)$, причем $u = 0$ вне окрестности U из определения 4.1.1. Пусть $\bar{u}(z)$ имеет тот же смысл, что и в теореме 5.4.1. Так как $\bar{u}(1) = 0$, то по лемме 4.1.2/1 верна оценка

$$\left(\int_0^1 |\bar{u}(z)|^q \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \le c(p,q) D \left(\int_0^1 |\bar{u}'(z)|^p \varphi(z)^{n-1} dz\right)^{1/p},$$

где D определяется формулой (1). Сочетая эту оценку с (5.4.1/6–7) (две последние остаются в силе), приходим к (5.4.1/9).

Проверим неравенство (5.4.1/12). Убедимся, что показатель q в (1) не превосходит предельного показателя в теореме Соболева. В самом деле, из (1) выводим при всех достаточно малых $z > 0$ неравенство

$$\left(\int_{z-\varphi(z)}^z \varphi(t)^{n-2} dt\right)^{1/q} \left(\int_z^{z+\varphi(z)} \varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}} dt\right)^{(p-1)/p} \le D.$$

Так как $\varphi(z + O(\varphi(z))) = \varphi(z) + o(\varphi(z))$ при $z \to +0$, то из предыдущего неравенства следует, что при малых $z > 0$

$$\varphi(z)^{(n-1)/q+1-n/p} \le \text{const}.$$

Отсюда $1 - n/p + (n-1)/q \ge 0$.

Для доказательства оценки (5.4.1/12) положим $z_0 = 1$ и построим убывающую последовательность $\{z_k\}$ со свойствами (5.1.2/4) по правилу (5.1.2/3). Разобьем область $\Omega \cap U$ и поверхность S на ячейки

$$\Omega_k = \{x = (y, z) : z \in (z_k, z_{k-1}),\ y/\varphi(z) \in \omega\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$S_k = \{x = (y, z) : z \in (z_k, z_{k-1}),\ y/\varphi(z) \in \partial\omega\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что

$$\left(\int_S |u(x) - \bar{u}(z)|^q ds_x\right)^{1/q} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{S_k} |u(x) - \bar{u}(z)|^q ds_x\right)^{1/q}. \qquad (2)$$

Пусть $v \in W_p^1(\Omega_k)$. Замена переменной

$$x = (y, z) \mapsto X = (Y, Z) : \quad Y = y/\varphi(z),\ Z = (z - z_k)/\varphi(z_k),$$

переводит область Ω_k в цилиндр $G = \omega \times (0, 1)$, а поверхность S_k в боковую поверхность $\Gamma = \partial\omega \times (0, 1)$ цилиндра G. Положим $w(X) = v(x)$. Так как q не больше предельного показателя в теореме Соболева, то верна оценка

$$\left(\int_\Gamma |w(X)|^q d\Gamma_X\right)^{1/q} \le c\, \|w\|_{W_p^1(G)}, \qquad (3)$$

где $d\Gamma_X$ – элемент площади поверхности Γ. Заметим, что

$$|\nabla_X w| \sim \varphi(z_k)|\nabla_x v|, \quad dx \sim \varphi(z_k)^n dX, \quad ds_x \sim \varphi(z_k)^{n-1} d\Gamma_X.$$

В силу указанных соотношений эквивалентности неравенство (3) в переменных $x = (y, z)$ приобретает вид

$$\left(\int_{S_k} |v(x)|^q ds_x\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c\, \varphi(z_k)^{-\frac{n}{p} + \frac{n-1}{q}} \left(\|v\|_{L_p(\Omega_k)} + \varphi(z_k)\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_k)}\right), \qquad (4)$$

где $k = 1, 2, \dots$, а константа c не зависит от v и k. Положим в (4) $v(x) = u(x) - \bar{u}(z)$ и оценим правую часть. Используя неравенство Пуанкаре на каждом сечении $\Omega(z) = \varphi(z)\omega$ области Ω_k плоскостью $z = \mathrm{const}$, найдем, что

$$\|u - \bar{u}\|_{L_p(\Omega_k)} \le c \left(\int_{z_k}^{z_{k-1}} \varphi(z)^p dz \int_{\Omega(z)} |\nabla_y u(y, z)|^p dy\right)^{1/p}.$$

Поэтому

$$\left(\int_{S_k} |u(x)-\bar{u}(z)|^q ds_x\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c\,\varphi(z_k)^{1-\frac{n}{p}+\frac{n-1}{q}} \left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega_k)} + \|\bar{u}'\|_{L_p(\Omega_k)}\right).$$

Отсюда с учетом (2) и алгебраического неравенства (5.1.3/20) выводим оценку

$$\left(\int_{S} |u(x)-\bar{u}(z)|^q ds_x\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq c\left(\|\nabla u\|_{L_p(\Omega\cap U)} + \|\bar{u}'\|_{L_p(\Omega\cap U)}\right),$$

где U – окрестность из определения 4.1.1. Принимая во внимание (5.4.1/6), получаем оценку (5.4.1/12).

Итак, при выполнении условия (1) для любой функции u класса $W_p^1(\Omega)$, такой, что u сосредоточена вблизи вершины пика, верна оценка (5.4.1/4). Как было установлено выше, показатель q не превосходит предельного соболевского, поэтому непрерывность оператора (5.4.1/2) выводится с помощью гладкой срезки с носителем в малой окрестности вершины пика и теоремы Соболева. Доказательство теоремы закончено.

Замечание. Теорема верна и при $q=\infty$. В этом случае условие (1) равносильно неравенству

$$\int_0^1 \varphi(t)^{\frac{1-n}{p-1}}\,dt < \infty, \tag{5}$$

необходимость которого проверяется так же, как и в теореме. С другой стороны, по теореме 5.2 неравенство (5) необходимо и достаточно для непрерывности оператора вложения: $W_p^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$. В частности, при условии (5) непрерывен оператор сужения на границу: $W_p^1(\Omega) \to C(\partial\Omega)$.

Пример. Рассмотрим степенной пик (5.4.1/13). Оператор сужения на границу (5.4.1/2) непрерывен при $q \geq p$, если выполнено одно из условий

1) $p > 1+\lambda(n-1)$ и $p \leq q \leq \infty$;

2) $p = 1+\lambda(n-1)$ и $p \leq q < \infty$;

3) $1 \leq p < 1+\lambda(n-1)$ и $p \leq q \leq (\lambda(n-2)+1)p/(1+\lambda(n-1)-p)$.

5.5 Вложение пространства Соболева в L_q и C на гёльдеровой области

5.5.1 Условия непрерывности операторов вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$, $V_p^l(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$

Используя полученные выше результаты, мы установим в данном разделе теорему вложения пространства $V_p^l(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ и в $C(\overline{\Omega})$ для так называемых гёльдеровых областей. Опишем упомянутый класс областей.

Определение. Пусть $a \in (0, \infty)$ и $\psi : [0, a) \to [0, \infty)$ – непрерывная возрастающая вогнутая функция, удовлетворяющая условию $\psi(0) = 0$. Говорят, что ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ принадлежит классу $C^{0,\psi}$,[1] если для каждой точки $X \in \partial\Omega$ существуют система декартовых координат $(x', x_n) : x' \in \mathbf{R}^{n-1}, x_n \in \mathbf{R}^1$ с началом в точке X и цилиндрическая окрестность

$$U = \{(x', x_n) : |x'| < R, x_n \in (-b, b)\}, \quad R < a/2,$$

такие, что

$$U \cap \Omega = \{(x', x_n) : |x'| < R, \, -b < x_n < f(x')\}$$

и

$$U \cap \partial\Omega = \{(x', x_n) : |x'| < R, \, x_n = f(x')\},$$

где функция f удовлетворяет в шаре $B_R^{(n-1)}$ условиям

$$f(x') \in (-b, b), \quad |f(x') - f(y')| \leq \psi(|x' - y'|).$$

Замечание 1. Если U – окрестность из определения,

$$x = (x', x_n) \in U \cap \overline{\Omega}, \quad y = (y', y_n) \in U \quad \text{и} \quad x_n - y_n > \psi(|x' - y'|),$$

то $y_n < f(y')$, т.е. $y \in U \cap \Omega$. Отсюда следует, что для $\Omega \in C^{0,\psi}$ при достаточно малом $\delta > 0$ каждая точка замыкания $\overline{\Omega}$ является вершиной содержащегося в Ω пика, конгруэнтного пику

$$K_\delta = \{x : x_n \in (0, \delta), \, |x'| < \psi^{-1}(x_n)\}. \tag{1}$$

Замечание 2. Можно считать, что окрестность U в определении класса $C^{0,\psi}$ имеет вид $U = B_R^{(n-1)} \times (-\psi(R), \psi(R))$.

---

[1] при $\psi(t) = t^\lambda, \lambda \in (0, 1]$ этот класс обозначается $C^{0,\lambda}$

Положим $\varphi = \psi^{-1}$. Тогда φ есть непрерывная возрастающая выпуклая функция на некотором промежутке $[0, \delta]$. Следовательно, $\varphi \in C^{0,1}([0,\delta])$ и существует $\lim_{t\to+0} \varphi'(t) \geq 0$. Если последний предел положителен, то Ω удовлетворяет условию конуса, и для области Ω верна теорема вложения Соболева. Будем далее считать, что

$$\varphi(0) = \lim_{t\to+0} \varphi'(t) = 0. \tag{2}$$

Нашей целью является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область класса $C^{0,\psi}$, $\varphi = \psi^{-1}$ и выполнено условие* (2). *Пусть еще $l = 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty)$.*
(i) *Предположим, что при некотором $\varepsilon > 0$*

$$\left(\int_0^\varepsilon t^{(l-1)p'} \varphi(t)^{(1-n)p'/p} dt\right)^{1/p'} < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1.$$

Тогда пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $C(\overline{\Omega})$.
(ii) *Если $1 \leq p \leq q < \infty$ и*

$$\sup\{t^{l-1/p+1/q} \varphi(t)^{(n-1)(1/q-1/p)} : t \in [0, \varepsilon]\} < \infty \tag{3}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, то пространство $V_p^l(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$.

Для доказательства теоремы нам потребуются “транзитивные свойства” вложений $L_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. Мы их сформулируем в нижеследующих леммах 1, 2.

Лемма 1. *Пусть G – область в $\mathbf{R}^n$, $p, q \in [1, \infty)$. Предположим, что $r \in (p, \infty)$, $s \in (q, \infty)$ и $p^{-1} - q^{-1} = r^{-1} - s^{-1}$. Тогда из непрерывности оператора вложения: $L_p^1(G) \to L_q(G)$ следует непрерывность оператора вложения*: $L_r^1(G) \to L_s(G)$. Кроме того, если g – подобласть G, $g \subset\subset G$, и для всех $u \in L_p^1(G)$, $u|_g = 0$, верна оценка

$$\|u\|_{L_q(G)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L_p(G)}, \quad C = \mathrm{const},$$

то для всех $v \in L_r^1(G)$, $v|_g = 0$, справедлива оценка

$$\|v\|_{L_s(G)} \leq s q^{-1} C \, \|\nabla v\|_{L_r(G)}.$$

Доказательство. Пусть g – подобласть G,

$$g \subset\subset G, \quad v \in L_r^1(G) \cap L_\infty(G), \quad v|_g = 0.$$

Подставляя функцию $u = |v|^{s/q}$ в неравенство

$$\|u\|_{L_q(G)} \le C\,\|\nabla u\|_{L_p(G)}, \quad C = \mathrm{const}, \tag{4}$$

получим

$$\|v\|^{s/q}_{L_s(G)} \le C\,\|\nabla(|v|^{s/q})\|_{L_p(G)} \le C\,sq^{-1}\|\,|v|^{(s-q)/q}|\nabla v|\,\|_{L_p(G)}.$$

Последнюю норму оценим с помощью неравенства Гёльдера:

$$\|\,|v|^{(s-q)/q}|\nabla v|\,\|^p_{L_p(G)} \le$$

$$\le \left(\int_G |v|^{(s-q)pr/((r-p)q)} dx\right)^{1-p/r} \left(\int_G |\nabla v|^r dx\right)^{p/r} =$$

$$= \|v\|^{(r-p)s/r}_{L_s(G)} \|\nabla v\|^p_{L_r(G)}.$$

Отсюда

$$\|v\|^{s/q}_{L_s(G)} \le C\,sq^{-1}\|v\|^{(s-q)/q}_{L_s(G)}\|\nabla v\|_{L_r(G)}. \tag{5}$$

Так как пространство $L^1_p(G)$ вложено в $L_q(G)$, то $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$, поэтому из включения $v \in L_\infty(G)$ следует $v \in L_s(G)$ и, значит, из (5) вытекает, что

$$\|v\|_{L_s(G)} \le C\,sq^{-1}\|\nabla v\|_{L_r(G)}. \tag{6}$$

Чтобы избавиться от предположения $v \in L_\infty(G)$, рассмотрим функции

$$v^+(x) = \max\{v(x), 0\}, \quad v^-(x) = \max\{-v(x), 0\}$$

и при $N = 1, 2, \dots$ определим

$$v_N(x) = \min\{v^+(x), N\} - \min\{v^-(x), N\}.$$

Тогда $v_N \in L_\infty(G)$, $v_N|_g = 0$, если $v|_g = 0$, $v_N \in L^1_r(G)$ при $v \in L^1_r(G)$ и $|\nabla v_N| \le |\nabla v|$. В силу вышесказанного имеем

$$\|v_N\|_{L_s(G)} \le C\,sq^{-1}\|\nabla v\|_{L_r(G)}, \quad v \in L^1_r(G), \quad v|_g = 0.$$

Так как $v_N(x) \to v(x)$ при $N \to \infty$ для почти всех $x \in G$, то неравенство (6) следует из последней оценки и теоремы Фату.

Установим непрерывность оператора вложения: $L^1_r(G) \to L_s(G)$. Выберем подобласть $g_1 \subset G$ так, чтобы $g \subset\subset g_1 \subset\subset G$ и введем срезку η:

$$\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^n), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta|_g = 0, \quad \eta = 1 \text{ в окрестности } \mathbf{R}^n \setminus g_1.$$

Очевидно, что для любой функции $v \in L^1_r(G)$

$$\|v\|_{L_s(G)} \le \|\eta v\|_{L_s(G)} + \|(1-\eta)v\|_{L_s(G)}. \tag{7}$$

Первое слагаемое справа оценивается с помощью (6):

$$\|\eta v\|_{L_s(G)} \le C\, qs^{-1} \|\nabla(\eta v)\|_{L_r(G)} \le$$

$$\le C\, qs^{-1} \|\nabla v\|_{L_r(G)} + C_1 \|v\|_{L_r(g_1)}.$$

Здесь C_1 – положительная константа, не зависящая от v. Поскольку пространство $L^1_p(G)$ вложено в $L_q(G)$, то $1 - n/p + n/q \ge 0$ и, значит, $1 - n/r + n/s \ge 0$. По теореме Соболева пространство $\mathring{W}^1_r(g_1)$ вложено в $L_s(\mathbf{R}^n)$, поэтому последний член в (7) не превосходит $C_2 \|v\|_{W^1_r(g_1)}$ с константой, не зависящей от v. Мы показали, что для всех $v \in L^1_r(G)$ верна оценка

$$\|v\|_{L_s(G)} \le \mathrm{const}(\|v\|_{L_r(g_1)} + \|\nabla v\|_{L_r(G)}).$$

Доказательство леммы закончено.

Лемма 2. *Пусть G – область в $\mathbf{R}^n$ и пусть пространство $L^1_1(G)$ непрерывно вложено в $L_s(G)$ при некотором $s \in [1, n/(n-1)]$. Предположим, что $p \in [1, \infty)$, $l = 1, 2, \dots$ и $pl(1 - s^{-1}) \le 1$. Тогда $L^l_p(G)$ непрерывно вложено в $L_q(G)$, где*

$$q = p/(1 - pl(1 - s^{-1})) \tag{8}$$

при $pl(1 - s^{-1}) < 1$ и $q \in [1, \infty)$ при $pl(1 - s^{-1}) = 1$. В частности, при $s = n/(n-1)$ и $lp < n$ получаем $q = np/(n - lp)$.

Доказательство. В силу вложения $L^1_1(G) \subset L_s(G)$ область G имеет конечный объем, так что $L^1_1(G) \subset L_{s-\varepsilon}(G)$ при малом $\varepsilon > 0$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $pl(1 - s^{-1}) < 1$.

При $l = 1$ требуемый результат является следствием леммы 1. Дальнейшие рассуждения проведем индукцией по l. Пусть $l > 1$. Предположим, что

$$L^{l-1}_p(G) \subset L_r(G), \quad r = p/(1 - p(l-1)(1 - s^{-1})).$$

Выберем любой элемент $u \in L_p^l(G)$. Тогда $\nabla u \in L_p^{l-1}(G)$, и по индукционному предположению $\nabla u \in L_r(G)$. Отсюда $u \in L_r^1(G)$, а так как

$$r^{-1} - q^{-1} = 1 - s^{-1},$$

то $u \in L_q(G)$ в силу леммы 1. Таким образом, верно по крайней мере теоретико-множественное включение $L_p^l(G) \subset L_q(G)$. Но в этом случае тождественный оператор: $L_p^l(G) \to L_q(G)$ замкнут и, следовательно, непрерывен, чем и заканчивается доказательство леммы.

Доказательство теоремы. (i) При некотором $\delta > 0$ для любой точки $x \in \overline{\Omega}$ существует такое ортогональное преобразование T_x в $\mathbf{R}^n$, что пик $x + T_x K_\delta$, конгруэнтный пику (1), содержится в Ω. Пусть $u \in V_p^l(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Так как функция $y \mapsto v(y) = u(x + T_x y)$ принадлежит классу $V_p^l(K_\delta) \cap C(\overline{K_\delta})$, то по теореме 5.2 верна оценка

$$|v(0)| \le c\, \|v\|_{V_p^l(K_\delta)}.$$

Заметим, что при сдвиге и ортогональном преобразовании координат в $\mathbf{R}^n$ норма в пространстве V_p^l заменяется на эквивалентную с константами, зависящими лишь от l, n. Поэтому последняя оценка дает

$$|u(x)| \le c\, \|u\|_{V_p^l(x + T_x K_\delta)},$$

где константа не зависит от x, u. Тем более верна оценка

$$|u(x)| \le c\, \|u\|_{V_p^l(\Omega)}.$$

Множество $V_p^l(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ плотно в $V_p^l(\Omega)$ по теореме 1.4/2 и, следовательно, оператор вложения: $V_p^l(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ непрерывен.

(ii) Отметим, что для области $\Omega \in C^{0,\psi}$ пространства $V_p^l(\Omega)$ и $L_p^l(\Omega)$ совпадают в силу следствия 1.5.1.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $p = l = 1$ и выведем отсюда утверждение (ii) теоремы в общем случае. Пусть выполнено условие (3), откуда, в частности, следует, что $l - n/p + n/q \ge 0$. Поэтому параметр s, определенный уравнением (8), удовлетворяет условию $s \in [1, n/(n-1)]$, причем левая часть (3) равна

$$\left(\sup\{t^{1/s} \varphi(t)^{(1-n)(1-1/s)} : t \in [0, \varepsilon]\}\right)^l.$$

Ввиду сделанного предположения пространство $V_1^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_s(\Omega)$, и непрерывность вложения $V_p^l(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ вытекает из леммы 2.

Итак, достаточно провести доказательство для случая $p=l=1$ и значения $q\geq 1$, удовлетворяющего условию

$$C=\sup\{t^{1/q}\varphi(t)^{(1-n)(1-1/q)}:t\in[0,\varepsilon]\}<\infty. \tag{9}$$

С помощью конечного разбиения единицы и теоремы 1.4/2 доказательство непрерывности вложения $V_1^1(\Omega)\subset L_q(\Omega)$ сводится к проверке неравенства

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leq \mathrm{const}\cdot\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}, \tag{10}$$

в котором $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u=0$ вне множества $\Omega\cap B_{R/4}(X)$, $X\in\partial\Omega$ и $B_R^{(n-1)}\times(-\psi(R),\psi(R))$ – окрестность точки X в локальных координатах из определения гёльдеровой области.

Выведем (10) из следующего изопериметрического неравенства, доказываемого ниже: [2]

$$|G|^{1/q}\leq \mathrm{const}\cdot s(\partial_i G). \tag{11}$$

Здесь $G\subset B_{R/4}(X)\cap\Omega$ – произвольное открытое допустимое множество, т.е., такое, что поверхность $\partial_i G=\partial G\cap\Omega$ есть многообразие класса C^∞, $|G|=\mathrm{mes}_n(G)$ и s – $(n-1)$-мерная площадь.

Представляя $|u(x)|$ в виде

$$|u(x)|=\int_0^\infty \chi_{(0,|u(x)|)}(t)dt \tag{12}$$

и пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leq\int_0^\infty |M_t|^{1/q}dt,\quad M_t=\{x\in\Omega:|u(x)|>t\}. \tag{13}$$

По теореме Морса [127] (см. также В. Г. Мазья [40, 1.2.2]) при почти всех $t>0$ множества $E_t=\{x\in\Omega:|u(x)|=t\}$ являются многообразиями класса C^∞. Таким образом, M_t – допустимое множество при п.в. $t>0$, и неравенство (11) дает

$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leq \mathrm{const}\int_0^\infty s(E_t)dt.$$

---

[2] На самом деле (10) равносильно изопериметрическому неравенству (11), см. В. Г. Мазья [33], [40, 3.2.3].

Согласно известной формуле для интеграла от модуля градиента гладкой функции (см., например, В. Г. Мазья [40, 1.2.4], У. Земер [144, 2.7.1]), последний интеграл равен $\|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}$.

Доказательство неравенства (11). Не ограничивая общности, будем считать число ε из условия теоремы настолько малым, что $\varphi'(t) < 1$ при п.в. $t \in (0, \varepsilon)$. Кроме того, полагаем далее $X = 0$ и считаем, что координаты $x = (x', x_n)$ совпадают с локальными координатами из определения гёльдеровой области при $X = 0$, а параметр R окрестности из упомянутого определения удовлетворяет условию $R \le \varphi(\varepsilon)/3$.

Каждой точке $x \in \Omega \cap \bar{B}_{R/2}$ поставим в соответствие шар $B_{r_x}(x)$ с радиусом $r_x = \varphi(f(x') - x_n)/4$. Проверим следующие свойства:

$$B_{r_x}(x) \subset \Omega \cap B_R \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega \cap B_{R/2}, \tag{14}$$

$$B_{r_x}(x) \cap B_{R/4} = \emptyset, \quad \text{если} \quad |x| = R/2. \tag{15}$$

В самом деле, если $x \in \Omega$, $|x| = R/2$ и $y \in B_{r_x}(x)$, то

$$|y| \ge R/2 - r_x = R/2 - \varphi(f(x') - x_n)/4 \ge$$

$$\ge R/2 - \varphi(\psi(R/2) + R/2)/4 \ge R/4.$$

Последнее неравенство верно, так как в силу сделанных предположений $\psi'(t) > 1$ при почти всех $t \in (0, \varphi(\varepsilon))$, и, значит,

$$\psi(2t) - \psi(t) = \int_t^{2t} \psi'(s) ds \ge t \tag{16}$$

при $t \in (0, \varphi(\varepsilon)/2]$. Отсюда $\psi(R/2) + R/2 \le \psi(R)$. Таким образом, условие (15) выполнено.

Пусть $x \in \Omega \cap B_{R/2}$, $y \in B_{r_x}(x)$. Мы имеем

$$|y| \le |x| + r_x \le R/2 + \varphi(\psi(R/2) + R/2)/4 \le$$

$$\le R/2 + \varphi(\psi(R))/4 = 3R/4,$$

так что на самом деле $B_{r_x}(x) \subset B_{3R/4}$.

Для проверки (14) теперь достаточно установить неравенство

$$\operatorname{dist}(x, \partial\Omega \cap B_R) > r_x \ \text{ для всех } \ x \in \Omega \cap B_{R/2}. \tag{17}$$

Если $(z', f(z'))$ – произвольная точка $\partial\Omega \cap B_R$, то

$$f(x') - x_n \le |f(x') - f(z')| + |f(z') - x_n| \le$$

$$\leq \psi(|x' - z'|) + |f(z') - x_n|.$$

Для оценки правой части последнего неравенства рассмотрим два случая. Пусть $|x' - z'| \geq |f(z') - x_n|$. Тогда

$$f(x') - x_n \leq$$
$$\leq \psi(|x' - z'|) + |x' - z'| \leq \psi(2\,|x' - z'|).$$

Мы снова использовали (16) при $t = |x' - z'| < 3R/2 \leq \varphi(\varepsilon)/2$. Аналогично в случае $|x' - z'| < |f(z') - x_n|$ имеем

$$f(x') - x_n \leq$$
$$\leq \psi(|f(z') - x_n|) + |f(z') - x_n| \leq \psi(2\,|f(z') - x_n|),$$

поскольку $|f(z')| + |x_n| < 3R/2$. Таким образом,

$$\varphi(f(x') - x_n) \leq 2(|x' - z'| + |f(z') - x_n|)$$

и

$$|x - z| > \varphi(f(x') - x_n)/4 \quad \text{для всех} \quad z = (z', f(z')) \in \partial\Omega \cap B_R.$$

Отсюда следует (17) и вместе с тем (14).

Перейдем непосредственно к доказательству неравенства (11). Пусть $G \subset \Omega \cap B_{R/4}$ – произвольное допустимое открытое множество и $x = (x', x_n) \in G$. При фиксированном x' обозначим через $\ell(x')$ отрезок, состоящий из точек $(x', t) \in \Omega \cap B_{R/2}$. Имеются две возможности: либо

$$|B_{r_y}(y) \cap G| < |B_{r_y}(y)|/2 \quad \text{для всех} \quad y \in \ell(x'), \tag{18}$$

либо существует такая точка $y \in \ell(x')$, что

$$|B_{r_y}(y) \cap G| = |B_{r_y}(y)|/2. \tag{19}$$

Ввиду условия (15) во втором случае существует минимальное значение $t = t(x')$, при котором верно (19) для $y = (x', t)$. Подмножество $G_1 \subset G$ по определению состоит из тех точек $x \in G$, для которых имеет место (18) или верно (19) для $y = (x', t(x'))$ при $x_n < t(x')$. Ясно, что для всех $x \in G_1$

$$|B_{r_x}(x) \cap G| < |B_{r_x}(x)|/2.$$

Положим еще $G_2 = G \setminus G_1$ и оценим отдельно объем каждого множества G_1, G_2.

Очевидно, что шары $B_{r_x}(x)$ образуют при $x \in G_1$ покрытие G_1. Применяя теорему Безиковича [86] (см. также [40, 1.2.1]), выделим из этого покрытия не более чем счетное подпокрытие $\{\mathcal{B}_j\}$, кратность которого зависит только от n. Примем во внимание следующий геометрический факт. Если B – открытый шар в $\mathbf{R}^n$ и $g \subset B$ – открытое подмножество, такое, что

$$|g| \le |B|/2 \quad \text{и} \quad \partial g \cap B \in C^\infty,$$

то

$$|g|^{(n-1)/n} \le c(n) s(\partial g \cap B), \tag{20}$$

(см. В. Г. Мазья [40, 3.2.1]). Используя (20), получим

$$|G_1| \le \sum\nolimits_j |\mathcal{B}_j \cap G| \le c \sum\nolimits_j \left(s(\mathcal{B}_j \cap \partial G)\right)^{n/(n-1)} \le$$

$$\le c \left(\sum\nolimits_j s(\mathcal{B}_j \cap \partial G)\right)^{n/(n-1)} \le c\, s(\partial_i G)^{n/(n-1)} \tag{21}$$

с константой, зависящей только от n. Так как $q \le n/(n-1)$ (это следует из (9)), то

$$|G_1|^{1/q} \le |\Omega|^{1/q-(n-1)/n} |G_1|^{(n-1)/n} \le$$

$$\le c(n) |\Omega|^{1/q-(n-1)/n} s(\partial_i G). \tag{22}$$

Обратимся к оценке объема множества G_2. При $x = (x', x_n)$ положим $\Pi(x) = x'$. Пусть $x \in G_2$ и $B^{(x')}$ – шар с центром $(x', t(x'))$ и радиусом $r_{(x', t(x'))}$. По лемме Витали (см. И. Стейн [71, 1.1.6]) существует не более чем счетное подмножество непересекающихся шаров $\{B^{(j)}\}$ из этого семейства, таких, что концентрические с $B^{(j)}$ шары $\hat{B}^{(j)}$, $\operatorname{diam}(\hat{B}^{(j)}) = 5 \operatorname{diam}(B^{(j)})$, образуют покрытие множества $\cup_{x' \in \Pi G_2} B^{(x')}$. Пусть $x^{(j)} = ((x^{(j)})', x_n^{(j)})$ – центр шара $B^{(j)}$ и $r_j = \varphi(d_j)/4$ – его радиус, где $d_j = f((x^{(j)})') - x_n^{(j)}$. Для любого $x \in G_2$ точка $(x', t(x'))$ принадлежит некоторому шару $\hat{B}^{(j)}$. Если при этом $x \notin \hat{B}^{(j)}$, то $x_n > x_n^{(j)}$, поскольку $x_n > t(x')$. Отсюда следует, что не более чем счетное объединение множеств

$$D_j = \hat{B}^{(j)} \cup \left\{x : x' \in S_j, x_n^{(j)} < x_n < \max\{f(x'), f((x^{(j)})')\}\right\},$$

где

$$S_j = \Pi \hat{B}^{(j)} \cap \Pi G_2,$$

покрывает G_2. При $x' \in S_j$ имеем

$$|f(x') - x_n^{(j)}| \le$$
$$\le \psi(|x' - (x^{(j)})'| + f((x^{(j)})') - x_n^{(j)} \le \psi(5r_j) + d_j.$$

Так как для вогнутой функции ψ выполнено свойство удвоения $\psi(2t) \le 2\psi(t)$, то

$$|f(x') - x_n^{(j)}| \le \psi(5\,\varphi(d_j)/4) + d_j \le 3\,d_j.$$

Отсюда получаем оценку

$$|D_j| \le c(r_j^n + r_j^{n-1} d_j) \le c\,\varphi(d_j)^{n-1} d_j$$

с константой, не зависящей от j. Заметим, что $x^{(j)} \in \Omega \cap B_{R/2}$, поэтому

$$d_j = f((x^{(j)})') - x_n^{(j)} \le \psi(R/2) + R/2 \le \psi(R) < \varepsilon,$$

как следует из (16). Таким образом,

$$|G_2| \le \sum\nolimits_j |D_j| \le c(n) C^q \sum\nolimits_j r_j^{(n-1)q}, \tag{23}$$

где C определяется в (9). Поскольку $|B^{(j)} \cap G| = |B^{(j)}|/2$, то

$$\sum\nolimits_j r_j^{q(n-1)} \le c(n,q) \sum\nolimits_j |B^{(j)} \cap G|^{q(n-1)/n} \le$$
$$\le c(n,q) \Big(\sum\nolimits_j |B^{(j)} \cap G|^{(n-1)/n} \Big)^q. \tag{24}$$

Используя (20) для оценки общего члена последней суммы и принимая во внимание дизъюнктность шаров $B^{(j)}$, получим

$$|G_2| \le \mathrm{const} \Big(\sum\nolimits_j s(\partial G \cap B^{(j)}) \Big)^q \le \mathrm{const} \cdot s(\partial_i G)^q.$$

Последнее вместе с (22) дают (11). Теорема доказана.

В ходе локазательства теоремы фактически установлено такое утверждение.

Следствие. *Изопериметрическое неравенство* (11) *можно записать в виде*

$$\sup \frac{|G|^{1/q}}{s(\partial_i G)} \le \gamma(\mu), \tag{25}$$

где супремум берется по всем допустимым множествам G, таким, что $G \subset B_{R/4}(X) \cap \Omega$, $X \in \partial\Omega$, $|G| \le \mu$, $\mu \in (0, |B_{R/4}(X) \cap \Omega|)$,

$$\gamma(\mu) = c_1 \max\left\{\mu^{1/q-(n-1)/n},\ \sup\{\Phi(t) : t \in (0, \psi(c_2\mu^{1/n})]\}\right\}, \quad (26)$$

$\Phi(t) = t^{1/q}\varphi(t)^{(1-n)(1-1/q)}$, $c_1 = c_1(n,q)$, $c_2 = c_2(n)$.

В самом деле, из (21), (23), (24) вытекает неравенство

$$|G|^{1/q} \le c(n,q) \max\{|G|^{1/q-(n-1)/n},\ \sup_j \Phi(d_j)\} s(\partial_i G).$$

Для оценки последнего супремума примем во внимание равенства $|B^{(j)} \cap G| = |B^{(j)}|/2$, а также соотношения

$$\varphi(d_j) = 4r_j \le c(n)|B^{(j)} \cap G|^{1/n} \le c(n)|G|^{1/n},$$

откуда $d_j \le \psi(c(n)\mu^{1/n})$.

Замечание 3. Условие (3) точно в следующем смысле: существует область $\Omega \in C^{0,\psi}$, для которой условие (3) необходимо для непрерывности оператора вложения: $V_p^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$. Из замечания 5.1.3 вытекает, что в качестве такой области можно выбрать пик (1), если $\psi^{-1}(2z) \le \mathrm{const} \cdot \psi^{-1}(z)$ при малых $z > 0$.

Из теоремы 5.2 следует, что в том же смысле точно и условие в утверждении (i).

5.5.2 Теорема о компактности

В этом разделе мы дадим точные условия компактности вложений $V_p^l(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и $V_p^l(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ для гёльдеровой области. Нам понадобятся аналоги лемм 5.5.1/1–2, в которых идет речь о компактности рассмотренных там операторов вложения.

Лемма 1. *Если выполнены условия леммы* 5.5.1/1 *и оператор вложения: $L_p^1(G) \to L_q(G)$ вполне непрерывен, то вполне непрерывен и оператор вложения: $L_r^1(G) \to L_s(G)$.*

Доказательство. Заметим, что при любом $\varepsilon > 0$ верна оценка

$$\|u\|_{L_q(G)} \le \varepsilon \|\nabla u\|_{L_p(G)} + C_\varepsilon \|u\|_{L_p(g_\varepsilon)}, \quad u \in L_p^1(G), \quad (1)$$

где g_ε – внутренняя подобласть G (т.е. $g_\varepsilon \subset\subset G$), а $C_\varepsilon > 0$ не зависит от u. Полагая

$$\|u\|_{L_p^1(G)} = \|u\|_{L_p(g)} + \|\nabla u\|_{L_p(G)} \quad (2)$$

для некоторой фиксированной подобласти $g \subset\subset G$ и считая, что $g \subset g_\varepsilon$, перепишем (1) в равносильном виде

$$\|u\|_{L_q(G)} \leq \varepsilon \, \|u\|_{L_p^1(G)} + C_\varepsilon \|u\|_{L_p(g_\varepsilon)}, \quad u \in L_p^1(G).$$

Установим последнее. Если предположить противное, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ можно построить возрастающую последовательность подобластей $g_k \subset\subset G$ и последовательность $\{u_k\}_{k \geq 1} \subset L_p^1(G)$, такие, что $\|u_k\|_{L_p^1(G)} = 1$ при всех k, $\cup_{k \geq 1} g_k = G$ и

$$\|u_k\|_{L_q(G)} > \varepsilon_0 + k \, \|u_k\|_{L_p(g_k)}.$$

Поскольку пространство $L_p^1(G)$ компактно вложено в $L_q(G)$, то существует подпоследовательность $\{u_k\}$ (не ограничивая общности, считаем, что это сама последовательность $\{u_k\}$), которая сходится в $L_q(G)$. Пусть u – ее предел. Так как $\|u_k\|_{L_q(G)} > \varepsilon_0$, то $\|u\|_{L_q(G)} \geq \varepsilon_0$. Кроме того,

$$\|u_k\|_{L_p(g_k)} < k^{-1} \|u_k\|_{L_q(G)}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

откуда $u_k \to 0$ в $L_{p,loc}(G)$. Однако последнее противоречит сходимости $u_k \to u$ в $L_q(G)$ к ненулевой функции u.

Итак, (1) имеет место. Пусть $u \in L_r^1(G)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если $u|_{g_\varepsilon} = 0$, то из (1) и леммы 5.5.1/1 следует, что

$$\|u\|_{L_s(G)} \leq sq^{-1} \varepsilon \, \|\nabla u\|_{L_r(G)}.$$

В общем случае введем срезку ξ_ε:

$$\xi_\varepsilon \in C_0^\infty(G), \quad 0 \leq \xi_\varepsilon \leq 1, \quad \xi_\varepsilon|_{g_\varepsilon} = 1.$$

Тогда для любой функции $u \in L_r^1(G)$ имеем

$$\|u\|_{L_s(G)} \leq \|\xi_\varepsilon u\|_{L_s(G)} + \|(1 - \xi_\varepsilon) u\|_{L_s(G)} \leq$$

$$\leq sq^{-1} \varepsilon \, \|\nabla((1 - \xi_\varepsilon) u)\|_{L_r(G)} + \|u\|_{s, G_\varepsilon},$$

где G_ε – такая подобласть G, что $\operatorname{supp} \xi_\varepsilon \subset G_\varepsilon \subset\subset G$. Поэтому существуют положительная бесконечно малая последовательность $\{\delta_i\}_{i \geq 1}$, последовательность положительных чисел $\{M_i\}_{i \geq 1}$ и последовательность подобластей $G_i \subset\subset G$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что для всех $u \in L_r^1(G)$ верна оценка

$$\|u\|_{L_s(G)} \leq \delta_i \|\nabla u\|_{L_r(G)} + M_i \|u\|_{L_t(G_i)}, \quad t = \max\{r, s\}. \tag{3}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что при всех $i = 1, 2, \ldots$ $G_i \in C^{0,1}$ и $G_i \subset G_{i+1}$.

Так как $L^1_p(G)$ компактно вложено в $L_q(G)$, то $p^{-1} - q^{-1} < n^{-1}$ (ср. замечание 1.8). Тогда

$$r^{-1} - s^{-1} = p^{-1} - q^{-1} < n^{-1},$$

и, согласно теореме 1.8/2, пространство $L^1_r(G_i)$ компактно вложено в $L_t(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Как и в (2), специфицируем норму $\| \cdot \|_{L^1_r(G)}$ фиксированной внутренней подобластью $g \subset G$. Например, можно для определенности положить $g = G_1$ и при любом $i \geq 1$ специфицировать норму $\| \cdot \|_{L^1_r(G_i)}$ той же подобластью.

Пусть $\{u_k\}_{k\geq 1}$ – последовательность, лежащая в единичном шаре пространства $L^1_r(G)$. Выделим из нее подпоследовательность, сходящуюся в $L_s(G)$. В силу вышесказанного можно построить набор последовательностей $\{u_k\}$, $\{u^{(1)}_k\}$, $\{u^{(2)}_k\}$, ..., каждая из которых является подпоследовательностью предыдущей и $\{u^{(i)}_k|_{G_i}\}$ сходится в $L_t(G_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Положим $v_k = u^{(k)}_k$, $k \geq 1$. Тогда $\{v_k\}$ – подпоследовательность $\{u_k\}$ и, очевидно, $\{v_k\}$ сходится в $L_t(G_i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $\{v_k\}$ сходится в себе в $L_s(G)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем такой номер j, что $\delta_j < \varepsilon/4$. Тогда из (3) следует оценка

$$\|v_k - v_i\|_{L_s(G)} < \varepsilon/2 + M_j \|v_k - v_i\|_{L_t(G_j)}, \tag{4}$$

где $i, k = 1, 2, \ldots$ Так как $\{v_k\}$ сходится в $L_t(G_j)$, то существует такой номер N, что при всех $i, k \geq N$ последний член в (4) не превосходит $\varepsilon/2$. Итак, $\{v_k\}$ – подпоследовательность $\{u_k\}$, сходящаяся в $L_s(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 5.5.1/2 *и оператор вложения: $L^1_1(G) \to L_s(G)$ вполне непрерывен. Тогда вполне непрерывен и оператор вложения: $L^l_p(G) \to L_q(G)$.*

Доказательство. В силу лемм 5.5.1/1–2 оператор вложения

$$I : L^l_p(G) \to L_q(G)$$

представляется суперпозицией $I = I_2 I_1$ двух непрерывных операторов, где I_1 – оператор вложения:

$$L^l_p(G) \to L^1_r(G), \quad r = p/(1 - p(l-1)(1 - s^{-1})),$$

а I_2 – оператор вложения: $L^1_r(G) \to L_q(G)$. Остается заметить, что I_2 вполне непрерывен по лемме 1.

Сформулируем теорему о компактности вложений $V^l_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и $V^l_p(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ для гёльдеровой области.

Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область класса $C^{0,\psi}$, $\varphi = \psi^{-1}$ и выполнено условие* (5.5.1/2). *Пусть еще $l = 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty)$.*
(i) *Если $p \le q < \infty$ и*

$$\lim_{t\to+0}\{t^{l-1/p+1/q}\varphi(t)^{(1-n)(1/p-1/q)}\} = 0,$$

то пространство $V^l_p(\Omega)$ компактно вложено в $L_q(\Omega)$.
(ii) *Пусть либо*

$$\int_0^\varepsilon t^{(l-1)p'}\varphi(t)^{(1-n)p'/p}dt < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1,\ p > 1$$

при некотором $\varepsilon > 0$, либо

$$\lim_{t\to 0} t^{l-1}\varphi(t)^{1-n} = 0, \quad p = 1.$$

Тогда оператор вложения: $V^l_p(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$ вполне непрерывен.

Доказательство. (i) Рассуждая так же, как в начале доказательства п. (ii) в теореме 5.5.1 и используя лемму 2, убедимся, что достаточно рассмотреть случай $p = l = 1$. Итак, пусть

$$\Phi(t) = t^{1/q}\varphi(t)^{(1-n)(1-1/q)}, \quad \lim_{t\to+0}\Phi(t) = 0. \tag{5}$$

При $z \in \partial\Omega$ и $r > 0$ положим $\Omega_r(z) = \Omega \cap B_r(z)$. Установим, что для любой точки $z \in \partial\Omega$ существует $r = r(z) > 0$ со следующим свойством: множество

$$\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : u\big|_{\Omega\setminus\Omega_r(z)} = 0\}, \tag{6}$$

содержащееся в единичном шаре пространства $V^1_1(\Omega)$, относительно компактно в $L_q(\Omega)$. Проверим это свойство при $r = R/4$, где $R = R(z)$ – параметр, характеризующий цилиндрическую окрестность точки $z \in \partial\Omega$ из определения класса $C^{0,\psi}$. Пусть u – произвольная функция из множества (6). Положим $N_t = \{x \in \Omega : |u(x)| \ge t\}$,

$M_t = \{x \in \Omega : |u(x)| > t\}$ при $t \geq 0$. Для любого $\tau > 0$ имеем очевидные оценки

$$\int_\Omega |u|^q dx \leq \int_{N_\tau} |u|^q dx + \tau^q |\Omega| \leq$$

$$\leq c(q) \left(\int_\Omega (|u| - \tau)_+^q dx + \tau^q |\Omega| \right), \tag{7}$$

где $|\Omega| = \mathrm{mes}_n(\Omega)$ и $v_+(x) = \max\{v(x), 0\}$. При $\mu \in (0, |\Omega_r(z)|)$ определим

$$\tau = \sup\{t \geq 0 : |N_t| \geq \mu\}.$$

Нетрудно убедиться, что тогда $|M_\tau| \leq \mu \leq |N_\tau|$. Применяя формулы (5.5.1/12–13) по отношению к $(|u| - \tau)_+$, получим

$$\|(|u| - \tau)_+\|_{L_q(\Omega)} \leq \int_0^\infty |M_{t+\tau}|^{1/q} dt. \tag{8}$$

Так как $M_{t+\tau}$ – допустимое подмножество $\Omega_r(z)$ при п.в. $t > 0$ и $M_{t+\tau} \subset M_\tau$, то изопериметрическое неравенство (5.5.1/25) дает

$$|M_{t+\tau}|^{1/q} \leq \gamma(\mu) s(\partial_i M_{t+\tau}),$$

где величина $\gamma(\mu)$ определена в (5.5.1/26). Отсюда и из (8) выводим

$$\|(|u| - \tau)_+\|_{L_q(\Omega)} \leq \gamma(\mu) \int_\tau^\infty s(\partial_i M_t) \leq \gamma(\mu) \|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}. \tag{9}$$

Здесь на последнем шаге использована формула

$$\int_0^\infty s(\{x \in \Omega : |u(x)| = t\}) dt = \|\nabla u\|_{L_1(\Omega)}$$

(см. [40, 1.2.4], [144, 2.7.1]).

Пусть $\omega = \omega(\mu)$ – подобласть Ω, $\overline{\omega} \subset \Omega$ и $|\Omega \backslash \omega| < \mu/2$. Поскольку $|N_\tau| \geq \mu$, то $|\omega \cap N_\tau| \geq \mu/2$ и, значит,

$$2 \int_\omega |u| dx \geq \mu\tau.$$

Объединяя последнее с (7) и (9), приходим к оценке

$$c(q) \|u\|_{L_q(\Omega)} \leq \gamma(\mu) \|\nabla u\|_{L_1(\Omega)} + 2\mu^{-1} |\Omega|^{1/q} \|u\|_{L_1(\omega)}. \tag{10}$$

В силу (5) имеем $\lim_{\mu\to+0}\gamma(\mu) = 0$, а кроме того, пространство $V_1^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_1(\omega)$ при любом $\mu \in (0, |\Omega_r(z)|)$ по лемме 1.8. Теперь из (10) стандартными рассуждениями выводится относительная компактность в $L_q(\Omega)$ пересечения множества (6) с единичным шаром пространства $V_1^1(\Omega)$.

Установим относительную компактность в $L_q(\Omega)$ множества, ограниченного в $V_1^1(\Omega)$. По теореме 1.4/2 множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в пространстве $V_1^1(\Omega)$, поэтому достаточно показать, что всякая последовательность $\{u_k\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, ограниченная в $V_1^1(\Omega)$, имеет подпоследовательность, сходящуюся в $L_q(\Omega)$. Построим такое конечное покрытие $\partial\Omega$ шарами $\{B^{(i)} = B_{r_i}(z_i)\}_{i=1}^N$, $z_i \in \partial\Omega$, что при любом $i = 1, \ldots, N$ подмножество функций из

$$\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) :\ u\big|_{\Omega\setminus B^{(i)}} = 0\},$$

ограниченное в $V_1^1(\Omega)$, относительно компактно в $L_q(\Omega)$. Указанный набор шаров покрывает некоторую замкнутую пограничную полосу Ω. Пусть при $1 \le i \le N$ функции $\eta_i \in C_0^\infty(B^{(i)})$ образуют разбиение единицы для упомянутой пограничной полосы. Положим

$$\eta_0(x) = 1 - \sum\nolimits_{i=1}^{N} \eta_i(x), \quad x \in \Omega.$$

Тогда $\eta_0 \in C_0^\infty(\Omega)$, а набор функций $\{\eta_i\}_{i=0}^N$ образует разбиение единицы для $\overline{\Omega}$.

Так как последовательность $\{\eta_0 u_k\}$ ограничена в $\mathring{V}_1^1(\Omega)$ (т.е. в замыкании $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{V_1^1(\Omega)}$) и $q < n/(n-1)$ (это следует из (5)), то в силу теоремы 1.8/2 существует подпоследовательность $\{u_k^{(0)}\}$ последовательности $\{u_k\}$, для которой $\{\eta_0 u_k^{(0)}\}$ сходится в $L_q(\Omega)$. Далее, последовательность $\{\eta_1 u_k^{(0)}\}$ принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega})$, ограничена в $V_1^1(\Omega)$, причем каждый ее член равен нулю на множестве $\Omega \setminus B^{(1)}$. По предположению существует такая подпоследовательность $\{u_k^{(1)}\}$ последовательности $\{u_k^{(0)}\}$, что $\{\eta_1 u_k^{(1)}\}$ сходится в $L_q(\Omega)$. Продолжая этот процесс, построим набор последовательностей

$$\{u_k\}, \quad \{u_k^{(0)}\}, \quad \{u_k^{(1)}\}, \ldots, \{u_k^{(N)}\},$$

каждая из которых является подпоследовательностью предыдущей, причем $\{\eta_i u_k^{(i)}\}$ сходится в $L_q(\Omega)$ при $i = 0, \ldots, N$. Так как

$$u_k^{(N)} = \sum\nolimits_{i=0}^{N} \eta_i u_k^{(N)}$$

и каждое слагаемое последней суммы сходится в $L_q(\Omega)$, то то же верно и для суммы. Компактность вложения $V_1^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ установлена.

(ii) Так же, как и в п. (i), установим при каждом $z \in \partial\Omega$ существование такого числа $r = r(z) > 0$, что пересечение множества (6) с единичным шаром пространства $V_p^l(\Omega)$ относительно компактно в $C(\overline{\Omega})$. Пусть $z \in \partial\Omega$ и пусть $r > 0$ настолько мало, что шар $B_{2r}(z)$ содержится в окрестности $U = U(z)$ из определения области класса $C^{0,\psi}$, а также $\varphi'(t) < 1/2$ при п.в. $t \in (0, r)$ (последнее возможно в силу (5.5.1/2)). Положим $\delta = 2r/3$. Тогда диаметр пика K_δ, описанного в (5.5.1/1), не больше r. В соответствии с упомянутым выше определением существует ортогональное преобразование T_z пространства $\mathbf{R}^n$, для которого

$$\Omega_r(z) + K_\delta(z) \subset \Omega_{2r}(z), \quad K_\delta(z) = T_z K_\delta. \tag{11}$$

Рассмотрим еше пик

$$G_\delta = \{x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n : x_n \in (0, \delta/2), |x'| < \frac{1}{2}\varphi(x_n)\}$$

и срезанный пик

$$G_\delta^{(\varrho)} = \{x \in G_\delta : x_n \in (\varrho, \delta/2\}, \quad \varrho \in (0, \delta/4).$$

Очевидно, что

$$\operatorname{dist}(\partial K_\delta, G_\delta^{(\varrho)}) = d(\varrho, \delta) > 0. \tag{12}$$

Положим $G_\delta^{(\varrho)}(z) = T_z G_\delta^{(\varrho)}$ и $G_\delta(z) = T_z G_\delta$. Если $x \in \Omega_r(z)$, то в силу (11), (12) имеем

$$\operatorname{dist}(x + G_\delta^{(\varrho)}(z), \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}\Big(x + G_\delta^{(\varrho)}(z), \partial(x + K_\delta(z))\Big) = d(\varrho, \delta).$$

Таким образом, замыкание множества $\Omega_r(z) + G_\delta^{(\varrho)}(z)$ лежит в Ω при любом $\varrho \in (0, \delta/4)$.

Пусть u – произвольная функция из множества (6) и $x \in \Omega_r(z)$. Поскольку $x + G_\delta(z) \subset \Omega$, то в пике $x + G_\delta(z)$ можно применить оценку (5.2/15), согласно которой[3]

$$|u(x)| \leq g(\varrho)\|\nabla_l u\|_{L_p(x+G_\delta(z))} + C_\varrho \, \|u\|_{V_p^{l-1}(x+G_\delta^{(\varrho)}(z))} +$$

[3]мы используем тот факт, что сдвиг и ортогональное преобразование в $\mathbf{R}^n$ сохраняют норму в пространствах Соболева с точностью до эквивалентности с константами, зависящими лишь от n и показателя гладкости

$$+\|u\|_{L_\infty(x+G_\delta^{(\varrho)}(z))}. \tag{13}$$

Здесь $g(\varrho)$ и C_ϱ – положительные величины, не зависящие от x и функции u, причем $\lim_{\varrho\to 0} g(\varrho) = 0$. Так как $u\big|_{\Omega\setminus\Omega_r(z)} = 0$, то из (13) следует оценка

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le g(\varrho)\|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + C_\varrho\|u\|_{V_p^{l-1}(\omega)} + \|u\|_{C(\overline{\omega})}, \tag{14}$$

где $\omega = \omega(z,\varrho,\delta)$ – подобласть Ω, лежащая в Ω вместе с замыканием. Не ограничивая общности, можно считать, что ω имеет гладкую границу, поэтому пространство $V_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $C(\overline{\omega})$ по теореме 1.8/2 (заметим, что неравенство $lp > n$ вытекает из условия теоремы). Кроме того, $V_p^l(\Omega)$ компактно вложено в $V_p^{l-1}(\omega)$ по лемме 1.8. Теперь из (14) стандартными рассуждениями выводится относительная компактность в $C(\overline{\Omega})$ единичного шара пространства (6) с нормой $\|\cdot\|_{V_p^l(\Omega)}$.

Относительная компактность шара $\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \|u\|_{V_p^l(\Omega)} \le 1\}$ в пространстве $C(\overline{\Omega})$ устанавливается с помощью разбиения единицы, подчиненного покрытию $\partial\Omega$ конечным набором шаров. Рассуждения здесь аналогичны окончанию доказательства п. (i) теоремы. Остается заметить, что отсюда следует компактность вложения $V_p^l(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, благодаря плотности в $V_p^l(\Omega)$ множества $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Замечание. Условия теоремы точны. Например, условие п. (i) необходимо, если в качестве $\Omega \in C^{0,\psi}$ выбрать пик (5.5.1/1), где $\psi^{-1}(2z) \le \text{const}\cdot\psi^{-1}(z)$ при малых z (см. также замечание 5.1.5).

5.6 Комментарии к главе 5

Максимальное значение q, при котором пространство $W_p^1(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L_q(\Omega)$ для области со степенным пиком

$$\Omega = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0,1), |y| < \varphi(z)\}, \tag{1}$$

где $\varphi(z) = c\,z^\lambda$, $\lambda > 1$, было найдено в работе В. Г. Мазья [33] как следствие более общих теорем вложения. Относительно аналогичных результатов для степенных пиков см. также книгу Р. А. Адамса [83] (Sec. 5.35, 5.36), работы И. Г. Глобенко [18], М. Фукушима и М. Томисаки [100].

Д. А. Лабутин [27] доказал теорему вложения пространства Соболева в пространство L_q с максимальным предельным показателем для некоторого класса областей, которые могут иметь внешние степенные заострения.

В. Г. Мазья [37, 38], [40, 4.4, 5.1] получил, в частности, необходимые и достаточные условия непрерывности вложений пространства $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ и в $C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ для области (1) как следствия критериев непрерывности вложений в терминах изопериметрических (при $p = 1$) или емкостных (при $p > 1$) неравенств. В случае непрерывной положительной выпуклой функции φ, $\varphi(0) = 0$, эти условия имеют вид

$$\sup_{z\in(0,1)} \left\{ \left(\int_0^z \varphi(t)^{n-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_z^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \right\} < \infty \qquad (2)$$

для непрерывности вложения $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ при $p \le q < \infty$ и

$$\int_0^1 \varphi(t)^{\frac{n-1}{1-p}} dt < \infty$$

для непрерывности оператора вложения: $W_p^1(\Omega) \to C(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

В работе авторов [123] (см. также книгу [125, 8.2, 8.3] и работу [132] одного из авторов) этот результат был обобщен на случай пространства $W_p^l(\Omega)$, $l \ge 1$, и области, имеющей на границе вершину внешнего пика, заострение которого описывается функцией φ. Однако при $l > 1$ на φ накладывалось дополнительное требование $\varphi(2t) \sim \varphi(t)$. В теоремах разделов 5.1 – 5.2 настоящей книги это требование снято. Мы следуем работе [51] в разд. 5.1 – 5.2.

Отметим, что для области вида (5.1.3/1) оценка

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\, \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad (3)$$

верная для всех $u \in W_p^1(\Omega)$ с носителем вблизи вершины пика при условии (2), допускает уточнение за счет использования весовых норм. Поясним сказанное на примере степенного пика (1) в случае $\varphi(z) = z^\lambda$, $\lambda > 1$. Преобразование координат

$$x = (y, z) \mapsto \xi = (\eta, \zeta) : \ \eta = y, \ \zeta = \varphi(z)$$

переводит пик Ω в конус $K = \{\xi : \zeta \in (0, 1), |\eta| < \zeta\}$. Положим $v(\xi) = u(x(\xi))$ и обозначим через $\bar{v}(\zeta)$ среднее значение v на сечении

K гиперплоскостью $\zeta = \text{const}$. Применяя лемму 4.1.2/1 для оценки $\|\zeta^\beta \bar{v}\|_{L_q(K)}$ и используя разбиение K на "ячейки"

$$\{\xi \in K : 2^{-i-1} < \zeta < 2^{-i}\}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

для оценки $\|\zeta^\beta (v - \bar{v})\|_{L_q(K)}$, получим весовое неравенство

$$\|\zeta^\beta v\|_{L_q(K)} \le c\,\|\zeta^\alpha \nabla v\|_{L_p(K)},$$

где

$$1 \le p < n, \quad p \le q \le \frac{np}{n-p}, \quad \beta = \alpha - 1 + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > -\frac{n}{q}.$$

Возвращаясь к переменной x, приходим к оценке

$$\|z^{\lambda\beta + (\lambda-1)/q} u\|_{L_q(\Omega)} \le$$

$$\le c\,(\|z^{\alpha\lambda + (\lambda-1)/p} \nabla_y u\|_{L_p(\Omega)} + \|z^{\alpha\lambda - (\lambda-1)(p-1)/p} \partial u/\partial z\|_{L_p(\Omega)}).$$

Если положить здесь $\alpha = (\lambda - 1)(p - 1)(\lambda p)^{-1}$, то получим неравенство

$$\|z^{\lambda\beta + (\lambda-1)/q} u\|_{L_q(\Omega)} \le c\,(\|z^{\lambda-1} \nabla_y u\|_{L_p(\Omega)} + \|\partial u/\partial z\|_{L_p(\Omega)}). \qquad (4)$$

Выберем $q = \big(1 + \lambda(n-1)\big)p/\big(1 + \lambda(n-1) - p\big)$ – предельный показатель в теореме вложения $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$. Тогда вес в левой части последнего неравенства исчезнет, и мы устанавливаем оценку

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le c\,(\|z^{\lambda-1} \nabla_y u\|_{L_p(\Omega)} + \|\partial u/\partial z\|_{L_p(\Omega)}).$$

Так как $\lambda > 1$, то этот результат точнее, чем оценка (3). При любом $\lambda > 1$ можно взять в (4) предельный показатель в теореме Соболева $q = np/(n-p)$. Тогда неравенство (4) принимает вид

$$\|z^{(\lambda-1)(n-1)/n} u\|_{L_{np/(n-p)}} \le c\,(\|z^{\lambda-1} \nabla_y u\|_{L_p(\Omega)} + \|\partial u/\partial z\|_{L_p(\Omega)})$$

для произвольной функции $u \in W_p^1(\Omega)$ с носителем в окрестности вершины пика. Таким образом, вновь получаем оценку, более точную, чем вложение $W_p^1(\Omega) \subset L_{q,\sigma}(\Omega)$ при $q = np/(n-p)$ с весом $\sigma(x) = z^{(\lambda-1)(n-1)/n}$ (ср. пример 5.1.4).

Содержание раздела 5.3 соответствует разделу 8.4 книги [125] авторов. В разд. 5.4 мы следуем работе [61]. Утверждение, сформулированное в примере 5.4.1, при $p = n = 2$ было установлено в работе [79].

Теорема 5.5.1 при $l = 1$ была доказана Д. А. Лабутиным [28] при дополнительном предположении $\varphi(2t) \sim \varphi(t)$. Мы следуем работе [28] при доказательстве неравенства (5.5.1/11). Леммы 5.5.1/1–2 и 5.5.2/1–2 хорошо известны [40, 4.9].

Относительно доказательства теорем 5.5.1 и 5.5.2 отметим, что равносильность неравенств (5.5.1/10) и (5.5.1/11) для областей общего вида, а также критерии компактности в терминах изопериметрических неравенств были установлены в работе В. Г. Мазья [33] еще в 1960 г. Связь между изопериметрическими неравенствами и теоремами вложения изучалась в работах [34, 36, 37, 38] (см. также главы 3, 4, 7, 8 книги [40]).

Укажем некоторые новые результаты об эквивалентности изопериметрических неравенств интегральным неравенствам соболевского типа. В. Г. Мазья [119] показал, что вложения в дробные пространства Бесова или потенциалов Рисса равносильны изопериметрическим неравенствам нового типа. Сформулируем один из результатов в этом направлении. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ и μ – мера на $\Omega \times \Omega$, $\mu(E \times F) = \mu(F \times E)$. Определим полунорму

$$|u|_{q,\mu} = \left(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} |u(x) - u(y)|^q \mu(dx, dy) \right)^{1/q}.$$

Оказывается [119], что неравенство

$$|u|_{q,\mu} \le C \int_\Omega |\nabla u| dx, \quad q \ge 1,$$

выполнено для всех $u \in C^\infty(\Omega) \cap L_1^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для всех $g \subset \Omega$, таких, что $\Omega \cap \partial g$ – гладкая поверхность, верно неравенство

$$\mu(g, \Omega \setminus g)^{1/q} \le 2^{-1/q} C\, s(\Omega \cap \partial g),$$

где s означает $(n-1)$-мерную площадь.

Глава 6

Граничные значения функций из пространств Соболева в некоторых нелипшицевых областях

В этой главе изучаются пространства граничных следов функций из пространств Соболева первого порядка в некоторых многомерных, вообще говоря, нелипшицевых областях. В разделе 6.1 строятся локально конечные шаровые покрытия открытого множества $\{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) > 0\}$, где φ – неотрицательная функция в $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющая условию Липшица, а радиус каждого шара покрытия сравним со значением функции φ в его центре. Если φ есть расстояние до замкнутого множества, такие покрытия аналогичны покрытиям по Уитни. Упомянутые покрытия используются в разделе 6.2 при доказательстве теорем, описывающих пространства граничных значений функций класса W_p^1, $p \in [1, \infty)$, для областей между липшицевыми графиками, допускающих, в частности, наличие нулевых ребер на границе или касание липшицевых поверхностей. В разд. 6.3 охарактеризованы граничные следы функций того же класса для областей, дополнительных к областям между липшицевыми графиками. В разд. 6.4 и 6.5 граничные следы описаны для функций из $W_p^1(\Omega)$ для плоской области с нулевым углом или углом 2π на границе.

Сформулируем основные результаты шестой главы. Пусть G – область в $\mathbf{R}^{n-1}$. Предположим, что φ_1, φ_2 – функции на $\overline{G}$, удовлетворяющие условию Липшица

$$|\varphi_i(x) - \varphi_i(\xi)| \le \mathrm{const}\,|x-\xi|, \quad x,\xi \in G, \quad i=1,2,$$

а также условиям $\varphi_1 < \varphi_2$ на G и $\varphi_1 = \varphi_2$ на ∂G. Рассмотрим область

$$\Omega = \bigl\{x=(y,z)\in \mathbf{R}^n : y\in G,\ z\in \bigl(\varphi_1(y),\varphi_2(y)\bigr)\bigr\}, \quad n\ge 2. \tag{1}$$

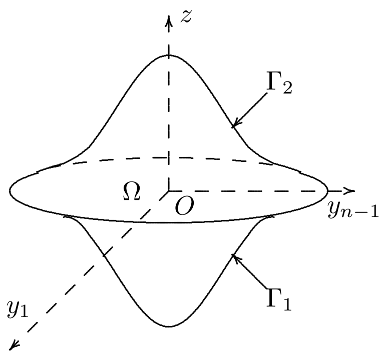

Рис. 8

Нижнюю и верхнюю части $\partial\Omega$ обозначим через Γ_1 и Γ_2 соответственно, т.е.

$$\Gamma_i = \{(y,\varphi_i(y)) : \ y\in G\}, \quad i=1,2,$$

(см. рис. 8). Пусть $p\in(1,\infty)$ и пусть f – функция на $\partial\Omega$, локально суммируемая на Γ_1 и Γ_2. Тогда $f \in TW_p^1(\Omega)$ в том и только в том случае, если правая часть следующего соотношения конечна и, более того,

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \ \Bigl\{\sum_{i=1}^{2}\int_{\Gamma_i}|f(x)|^p\varphi(y)ds_x +$$

$$+\int_G |f(y,\varphi_2(y)) - f(y,\varphi_1(y))|^p\,\varphi(y)^{1-p}dy +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma_i : |x-\xi|<AM(y,\eta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\Bigr\}^{1/p},$$

где $x = (y, z), \xi = (\eta, \zeta)$, ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, A – положительная постоянная (которая может быть выписана явно), зависящая только от n и постоянной Липшица для функции φ и

$$M(y, \eta) = \max\{\varphi(y), \varphi(\eta)\}.$$

Знак $\sim$ означает эквивалентность норм. Аналогичный результат имеет место для $p = 1$:

$$\|f\|_{TW_1^1(\Omega)} \sim \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} |f(x)|\varphi(y) ds_x +$$

$$+ \int_G |f(y, \varphi_2(y)) - f(y, \varphi_1(y))| dy +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \iint\limits_{\{x, \xi \in \Gamma_i : |x - \xi| < AM(y, \eta)\}} |f(x) - f(\xi)| \frac{ds_x ds_\xi}{M(y, \eta)^{n-1}}.$$

Предположим, что область G из определения (1) ограничена и имеет липшицеву границу. Тогда пространство $TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ при $p \in (1, \infty)$ описывается соотношением

$$\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})} \sim \left\{ \sum\nolimits_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_i} |f(x)|^p ds_x + \right.$$

$$+ \sum\nolimits_{i=1}^{2} \iint_{\Gamma_i \times \Gamma_i} |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x - \xi|^{n+p-2}} +$$

$$\left. + \int_G |f(y, \varphi_2(y)) - f(y, \varphi_1(y))|^p \frac{dy}{\operatorname{dist}(y, \partial G)^{p-1}} \right\}^{1/p},$$

а пространство $TW_1^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ совпадает с $L_1(\partial\Omega)$.

6.1 Шаровые покрытия, связанные с липшицевой функцией

Этот раздел содержит вспомогательные утверждения, использующиеся далее в доказательстве теорем о следах. Начнем со следующей леммы о покрытиях, которая играет важную роль в доказательстве основных результатов.

Лемма 1. *Пусть* φ *– неотрицательная функция в* $\mathbf{R}^n$, $\varphi \not\equiv 0$, *и пусть* φ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| \le L|x - \xi|, \quad x, \xi \in \mathbf{R}^n, \quad L = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда существуют такие положительные постоянные $c_1 = c_1(n)$, $c_2 = c_2(n)$, *что для любого* $a \in (0, c_1 L^{-1}]$ *множество*

$$G = \{x \in \mathbf{R}^n : \varphi(x) > 0\}$$

можно покрыть последовательностью открытых шаров

$$B^{(\ell)} = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_\ell| < a\,\varphi(x_\ell)\}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

со следующими свойствами: концентрические шары удвоенного диаметра лежат в G *вместе с замыканиями и образуют покрытие, кратность которого не превосходит* c_2. *В частности, можно положить* $c_1 = 2^{-n-5} n^{-1/2}$.

Доказательство. При $i \in \mathbf{Z}^1$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ определим куб

$$Q_{i,k} = \left\{x \in \mathbf{R}^n : 0 \le x_s - 2^{-i} k_s \le 2^{-i}, s = 1, \ldots, n\right\}$$

и введем множество индексов

$$\mathfrak{A} = \left\{\alpha = (i, k) \in \mathbf{Z}^{n+1} : \varphi(x) \ge 2^{-i} L \ \text{ для всех } \ x \in Q_\alpha\right\}.$$

Куб Q_β при $\beta \in \mathfrak{A}$ назовем максимальным, если из включений $\alpha \in \mathfrak{A}$, $Q_\beta \subset Q_\alpha$ следует $Q_\beta = Q_\alpha$. Заметим, что внутренности различных максимальных кубов не пересекаются. Пусть $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ – подмножество, соответствующее максимальным кубам. Поскольку каждая точка G лежит в некотором кубе Q_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, а каждый куб Q_α содержится в максимальном кубе, то

$$G = \bigcup\nolimits_{\beta \in \mathfrak{B}} Q_\beta.$$

Дальнейшие рассуждения проведем в два этапа.

1^o. Пусть $\{\hat{Q}_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ – семейство замкнутых кубов $\hat{Q}_\beta$ с ребрами, параллельными координатным осям, концентрических с Q_β и таких, что

$$\mathrm{diam}\,(\hat{Q}_\beta) = (1 + d_n)\,\mathrm{diam}\,(Q_\beta), \quad d_n = (2\sqrt{n})^{-1}.$$

Мы сейчас проверим, что число кубов $\hat{Q}_\beta$, содержащих одну и ту же точку, ограничено постоянной, зависящей только от n. Сначала получим верхнюю и нижнюю оценки для $\varphi(x)$ при $x \in \hat{Q}_\beta$. Пусть $\beta = (i,k) \in \mathfrak{B}$ и $x \in \hat{Q}_\beta$. Тогда

$$|x - \xi| \le 2^{-i} d_n n^{1/2}$$

для некоторой точки $\xi \in Q_\beta$. Отсюда

$$\varphi(x) \ge \varphi(\xi) - L|x - \xi| \ge 2^{-i-1} L. \tag{2}$$

В частности, $\hat{Q}_\beta \subset G$. Далее, пусть α – любой индекс вида

$$\alpha = (i-1, j) \in \mathbf{Z}^{n+1},$$

для которого $Q_\beta \subset Q_\alpha$. Мы имеем $\alpha \notin \mathfrak{A}$ в силу максимальности куба Q_β, и существует такая точка $z \in Q_\alpha$, что $\varphi(z) < 2^{1-i} L$. Поэтому

$$\varphi(x) \le \varphi(z) + L|x - z| \le 2^{-i} L (2 + n^{1/2}(2 + d_n)). \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает следующая двусторонняя оценка:

$$2^{-i-1} L \le \varphi(x) \le 2^{n+2-i} L, \quad x \in \hat{Q}_\beta. \tag{4}$$

Заметим, что если

$$\beta = (i,k),\ \alpha = (m,l),\ \alpha, \beta \in \mathfrak{B} \ \text{ и } \ \hat{Q}_\alpha \cap \hat{Q}_\beta \ne \emptyset,$$

то $|i - m| \le n + 3$.

Это неравенство легко выводится, если применить (4) к каждому кубу $\hat{Q}_\alpha$, $\hat{Q}_\beta$ и к их общей точке.

Зафиксируем $\alpha = (m,l) \in \mathfrak{B}$ и оценим число кубов $\hat{Q}_\beta$, пересекающихся с Q_α. Пусть $\beta = (i,k) \in \mathfrak{B}$. Если

$$m < i \ \text{ и } \ \hat{Q}_\beta \cap Q_\alpha \ne \emptyset, \ \text{ то } \ \partial Q_\beta \cap \partial Q_\alpha \ne \emptyset,$$

и число таких кубов Q_β не превосходит $(2^{i-m} + 2)^n$. Пусть $m \ge i$. Тогда кубы $\hat{Q}_\beta$ и Q_α имеют общую точку только если ∂Q_β пересекается с границей того (единственного) куба вида $Q_{i,r}$, $r \in \mathbf{Z}^n$, который содержит Q_α. Число таких кубов Q_β не больше, чем 3^n. Поскольку $|i - m| \le n + 3$, общее число кубов $\hat{Q}_\beta$, пересекающихся с Q_α, мажорируется выражением

$$c\,(n) = (n+4)3^n + \sum\nolimits_{s=1}^{n+3} (2^s + 2)^n. \tag{5}$$

Ясно, что кратность покрытия $\left\{\hat{Q}_\beta\right\}_{\beta\in\mathfrak{B}}$ не превосходит $c\,(n)$.

2^o. Обратимся к построению требуемых шаровых покрытий G. Покажем, что они существуют при условии

$$0 < aL \leq 2^{-n-5}n^{-1/2}. \tag{6}$$

Пусть N – наибольшее целое число, меньшее $2n^{1/2}(aL)^{-1}$. Положим

$$\varepsilon_i = 2^{-i-1}aL, \quad i = 0, \pm 1, \ldots$$

Если $\beta = (i,k) \in \mathfrak{B}$, то точки

$$x_{j,\beta} = 2^{-i}k + \varepsilon_i n^{-1/2} j, \tag{7}$$

где

$$j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbf{Z}^n, \quad 1 \leq j_s \leq N, \quad s = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

лежат в кубе Q_β и образуют ε_i-сеть для Q_β. Поскольку

$$\min\{\varphi(x) : x \in Q_\beta\} \geq 2^{-i}L,$$

то $a\varphi(x_{j,\beta}) \geq 2\varepsilon_i$. Таким образом, семейство всех шаров вида

$$B^{(j,\beta)} = \left\{x \in \mathbf{R}^n : |x - x_{j,\beta}| < a\varphi(x_{j,\beta})\right\}, \tag{9}$$

где $\beta \in \mathfrak{B}$ и j удовлетворяет условиям (8), покрывает G.

Пусть $\mathcal{B}^{(j,\beta)}$ – открытый концентрический с $B^{(j,\beta)}$ шар удвоенного диаметра. Если индекс $\beta = (i,k) \in \mathfrak{B}$ фиксирован, то расстояния между любыми разными центрами этих шаров не меньше $n^{-1/2}\varepsilon_i$. С другой стороны, из (4) следует, что

$$\operatorname{diam}(\mathcal{B}^{(j,\beta)}) \leq 2^{n+4-i}aL = 2^{n+5}\varepsilon_i. \tag{10}$$

Поэтому при фиксированном $\beta \in \mathfrak{B}$ число шаров $\mathcal{B}^{(j,\beta)}$, содержащих одну и ту же точку, мажорируется некоторой постоянной c_0, зависящей лишь от n. Кроме того, из (6) и (10) выводим

$$\operatorname{diam}(\mathcal{B}^{(j,\beta)}) \leq 2^{-i}d_n.$$

Отсюда $\overline{\mathcal{B}}^{(j,\beta)} \subset \hat{Q}_\beta \subset G$, и кратность покрытия $\{\mathcal{B}^{(j,\beta)}\}$ не превосходит $c_0(n)\,c\,(n)$, где $c\,(n)$ – та же постоянная, что и в (5). Итак, шары, определенные в (7)–(9), образуют требуемое покрытие G. Доказательство леммы 1 закончено.

Замечание 1. Только что построенное семейство $\{\mathcal{B}^{(j,\beta)}\}$ имеет следующее свойство. Если два шара из этого семейства пересекаются, то отношение их диаметров ограничено сверху и снизу постоянными, зависящими только от n. Действительно, в лемме 1 показано, что если $\beta = (i, k) \in \mathfrak{B}$, то

$$8\varepsilon_i \leq \operatorname{diam}(\mathcal{B}^{(j,\beta)}) \leq 2^{n+5}\varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = 2^{-i-1}aL.$$

Пусть

$$\mathcal{B}^{(j,\beta)} \cap \mathcal{B}^{(l,\alpha)} \neq \emptyset \ \text{ при } \ \alpha = (m, r) \in \mathfrak{B}.$$

В этом случае имеем $\hat{Q}_\beta \cap \hat{Q}_\alpha \neq \emptyset$ и, значит, $|i - m| \leq n + 3$, как было отмечено в лемме 1. Отсюда отношение диаметров этих шаров принадлежит промежутку $[2^{-2n-5}, 2^{2n+5}]$.

Замечание 2. При фиксированном $a \in (0, c_1 L^{-1}]$ любое компактное подмножество G пересекается лишь с конечным числом шаров из набора $\{\mathcal{B}^{(j,\beta)}\}$.

В самом деле, пусть F – компактное подмножество G. Тогда сужение $\varphi|_F$ ограничено сверху и снизу положительными постоянными. Из (4) следует, что множество F не пересекается с кубами $\hat{Q}_\beta$, $\beta \in \mathfrak{B}$, имеющими достаточно большие или достаточно малые ребра. Далее, при фиксированном $i \in \mathbf{Z}^1$ компакт F пересекается только с конечным числом кубов $Q_{i,k}$, $k \in \mathbf{Z}^n$. Следовательно, F имеет общие точки лишь с конечным числом максимальных кубов. Кроме того, число кубов $\{\hat{Q}_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$, пересекающихся с фиксированным максимальным кубом, ограничено постоянной, которая зависит лишь от n. Остается заметить, что каждый куб $\hat{Q}_\beta$ содержит конечное число шаров $\{\mathcal{B}^{(j,\beta)}\}$.

Пример. Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество, $G \neq \mathbf{R}^n$. Положим

$$\varphi(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{R}^n \setminus G), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Тогда φ – липшицева функция (с липшицевой постоянной 1), и G есть в точности то множество, на котором φ положительна. В этом случае покрытие G, построенное в лемме 1, состоит из шаров с диаметрами, сравнимыми с расстояниями от этих шаров до ∂G.

Обратимся к построению подходящих разбиений единицы, подчиненных покрытиям, указанным в лемме 1.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и пусть* $\{B^{(\ell)}\}_{\ell \geq 1}$ *– покрытие G последовательностью шаров вида* (1), *построенное в лемме* 1. *Существуют гладкое разбиение единицы* $\{\psi_\ell\}_{\ell \geq 1}$ *в* G, *подчиненное покрытию последовательностью открытых концентрических шаров с диаметрами* $\frac{3}{2}\operatorname{diam}(B^{(\ell)})$ *и такая постоянная* c, *зависящая только от* n, *что*

$$|\nabla\psi_\ell| \operatorname{diam}(B^{(\ell)}) \le c, \quad \ell = 1, 2, \dots \tag{11}$$

Доказательство. Будем считать, что $\{B^{(\ell)}\}_{\ell\ge 1}$ – перенумерованная последовательность $\{B^{(j,\beta)}\}$ шаров, определенных в (7)–(9). Обозначим через r_ℓ радиус $B^{(\ell)}$ и положим

$$\eta_\ell(x) = \eta\left(r_\ell^{-1}(x - x_\ell)\right), \ \ x \in \mathbf{R}^n, \ \ \ell = 1, 2, \dots,$$

где

$$\eta \in C_0^\infty(B_{3/2}), \quad 0 \le \eta \le 1, \quad \eta\big|_{B_1} = 1.$$

Тогда $\eta_\ell \in C_0^\infty\left(B_{3r_\ell/2}(x_\ell)\right)$ и при $x \in G$ сумма

$$\psi(x) = \sum\nolimits_{\ell\ge 1} \eta_\ell(x)$$

ограничена сверху и снизу положительными постоянными, зависящими лишь от n. Покажем, что функции $\psi_\ell = \eta_\ell\psi^{-1}$, $\ell = 1, 2, \dots,$ образуют требуемое разбиение единицы. Проверить нужно лишь оценку (11). Имеем

$$|\nabla\psi_\ell| \le \psi^{-1}|\nabla\eta_\ell| + \psi^{-2}\sum\nolimits_{s\ge 1} \eta_\ell|\nabla\eta_s|.$$

Общий член последней суммы отличен от нуля только если носители функций η_ℓ и η_s пересекаются и, значит, только если величина $r_\ell r_s^{-1}$ ограничена сверху и снизу положительными постоянными, зависящими лишь от n (см. замечание 1). Кроме того, число ненулевых слагаемых в указанной сумме равномерно ограничено в любой фиксированной точке множества G. Остается заметить, что верна оценка $|\nabla\eta_\ell| \le c\,(n)\, r_\ell^{-1}$. Доказательство леммы 2 закончено.

Следующее утверждение будет использовано в разд. 6.2.2.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Предположим, что* $t \in G$ *и* $x \in B_r(t)$, *где* $r = a\,\varphi(t)$, $a > 0$. *Если* $A = a(1 + 2aL)^{-1}$ *и*

$$|x - \xi| \le A \max\{\varphi(x), \varphi(\xi)\},$$

то $\xi \in B_{2r}(t)$.

Доказательство. Ввиду неравенства

$$|\xi - t| < r + A \max\{\varphi(x), \varphi(\xi)\}$$

достаточно проверить, что последнее слагаемое не больше r. Имеем

$$\varphi(x) \le \varphi(t) + L|x - t| \le \varphi(t) + Lr,$$

откуда

$$\varphi(x) \le (1 + aL)\varphi(t) \tag{12}$$

и $A\varphi(x) \le r$. Покажем, что последняя оценка останется верной при замене x на ξ. Пусть $\varphi(\xi) \ge \varphi(x)$. Тогда

$$\varphi(\xi) \le \varphi(x) + L|x - \xi| \le \varphi(x) + AL\varphi(\xi).$$

Следовательно, $\varphi(\xi) \le (1-AL)^{-1}\varphi(x)$. Принимая во внимание (12), находим

$$\varphi(\xi) \le (1 - AL)^{-1}(1 + aL)\varphi(t) = A^{-1}r,$$

чем и заканчивается доказательство.

6.2 Следы функций в области между липшицевыми графиками

6.2.1 Описание областей и лемма об аппроксимации

Начнем с определения областей, которые рассматриваются в настоящем разделе. Пусть G – область в $\mathbf{R}^{n-1}$. Предположим, что φ_1, φ_2 – функции на $\overline{G}$, удовлетворяющие условию Липшица

$$|\varphi_i(y) - \varphi_i(\eta)| \le L_i|y - \eta|, \quad y, \eta \in \overline{G}, \quad i = 1, 2, \quad L_i = \mathrm{const} > 0,$$

а также условиям $\varphi_1 < \varphi_2$ на G и $\varphi_1 = \varphi_2$ на ∂G. Рассмотрим область

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : y \in G,\ z \in (\varphi_1(y), \varphi_2(y))\}, \quad n \ge 2, \tag{1}$$

(см. рис. 8 на стр. 246). В частности, G может совпадать с $\mathbf{R}^{n-1}$. В этом случае Ω есть слой между двумя липшицевыми графиками.

Нижнюю и верхнюю части $\partial\Omega$ обозначим через Γ_1 и Γ_2 соответственно, т.е.

$$\Gamma_i = \{(y, \varphi_i(y)) :\ y \in G\}, \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Отметим, что каждая функция $v \in W_p^1(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, имеет следы $v|_{\Gamma_1}$, $v|_{\Gamma_2}$. Более того, след $v|_{\Gamma_i}$ может быть описан теоремой 3.1.1 в окрестности любой точки поверхности Γ_i, $i = 1, 2$.

Для доказательства основного результата настоящего параграфа нам понадобятся два вспомогательных утверждения. Далее через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от $n, p, \varphi_1, \varphi_2$. Если $a, b > 0$, то символ $a \sim b$ означает, что $c^{-1} \le ab^{-1} \le c$.

Лемма 1. *Пусть $G \ne \mathbf{R}^{n-1}$. Если $v \in W_p^1(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, $v|_{\Gamma_1} = 0$, то*

$$\int_\Omega |v(x)|^p \frac{dx}{\big(\operatorname{dist}(y, \partial G)\big)^p} \le c \, \|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Доказательство. Пусть $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Поскольку $\varphi|_{\partial G} = 0$ и φ удовлетворяет условию Липшица, мы имеем

$$\varphi(y) \le c \operatorname{dist}(y, \partial G), \;\; y \in G.$$

Ясно, что

$$\int_\Omega |v(x)|^p \frac{dx}{\varphi(y)^p} \le \int_G \frac{dy}{\varphi(y)^p} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \left| \int_{\varphi_1(y)}^{z} \frac{\partial v}{\partial t}(y,t) dt \right|^p.$$

В силу неравенства Гёльдера выражение справа не превосходит $\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega)}$, чем и заканчивается доказательство леммы 1.

Пусть $p \in [1, \infty)$. Введем пространство $\mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$, состоящее из таких функций $v \in W_p^1(\Omega)$, что $v|_{\Gamma_1} = 0$ и $v|_{\Gamma_2} = 0$.

Лемма 2. *Пространство $\mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$ совпадает с $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, т.е. с замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_p^1(\Omega)$.*

Доказательство. Только включение $\mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2) \subset \mathring{W}_p^1(\Omega)$ требует проверки.

При $v \in W_p^1(\Omega)$ пусть $\Pi(v)$ означает ортогональную проекцию множества $\operatorname{supp} v$ в G. Заметим, что функции $v \in \mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$, для которых $\Pi(v)$ содержится в компактном подмножестве G, принадлежат $\mathring{W}_p^1(\Omega)$. Поэтому достаточно аппроксимировать такими функциями произвольный элемент $v \in \mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$. Определим $v_N(x) = \psi_N(y) v(x)$, $x \in \Omega$, где $N = 1, 2, \ldots$, $\psi_N(y) = \psi(|y|/N)$ и ψ – функция из $C^\infty\big([0, \infty)\big)$, подчиненная требованиям

$$0 \le \psi \le 1, \quad \psi\big|_{[0,1]} = 1, \quad \psi\big|_{[2,\infty)} = 0.$$

Тогда $v_N \to v$ в $W_p^1(\Omega)$ при $N \to \infty$. Поскольку множества $\Pi(v_N)$ ограничены, доказательство закончено в случае $G = \mathbf{R}^{n-1}$. Покажем, что если $G \neq \mathbf{R}^{n-1}$, то любая функция $v \in \mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$ с ограниченным носителем может быть аппроксимирована в $W_p^1(\Omega)$ элементами пространства $\mathring{W}_p^1(\Omega)$. Определим функцию λ на $[0, \infty)$:

$$\lambda\big|_{[0,1)} = 0, \ \ \lambda\big|_{(2,\infty)} = 1, \ \ \lambda(t) = t - 1, \ \ t \in [1, 2].$$

При малом $\varepsilon > 0$ положим

$$v_\varepsilon(x) = \lambda\big(\varepsilon^{-1}\varrho(y)\big)v(x), \quad x = (y, z) \in \Omega, \ \varrho(y) = \mathrm{dist}(y, \partial G).$$

Тогда $v_\varepsilon \in \mathring{W}_p^1(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2)$, носитель v_ε ограничен, $v_\varepsilon(x) = 0$, если $\varrho(y) < \varepsilon$. Отсюда $v_\varepsilon \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$. Ясно, что $v_\varepsilon \to v$ в $L_p(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того,

$$c\,\|\nabla(v_\varepsilon - v)\|^p_{L_p(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|(1 - \lambda(\varepsilon^{-1}\varrho))\nabla v\|^p_{L_p(\Omega)} + \int_{\Omega(v,\varepsilon)} \frac{|v(x)|^p}{\varrho(y)^p} dx, \tag{3}$$

где $\Omega(v, \varepsilon) = \{x \in \Omega : y \in \Pi(v), \ \varrho(y) < 2\varepsilon\}$. Первое слагаемое в правой части (3) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ по теореме Лебега об ограниченной сходимости. Второе слагаемое стремится к нулю по лемме 1 и ввиду того, что $\mathrm{mes}_n\big(\Omega(v, \varepsilon)\big) \to 0$. Доказательство леммы закончено.

Формулируемое ниже утверждение непосредственно вытекает из леммы 2.

Следствие. *Пусть* $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *и пусть* $T_p(\Gamma)$ *– пространство таких функций* f *на* Γ, *что* $f = u|_\Gamma$ *для некоторой функции* $u \in W_p^1(\Omega)$; *норму* f *в* $T_p(\Gamma)$ *определим как*

$$\inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)} : u\big|_\Gamma = f\right\}. \tag{4}$$

Положим $TW_p^1(\Omega) = W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$. *Если* $u \in W_p^1(\Omega)$ *и*

$$\dot{u} = u + \mathring{W}_p^1(\Omega) \in TW_p^1(\Omega),$$

то отображение $\dot{u} \mapsto u|_\Gamma$ *есть изоморфизм между* $TW_p^1(\Omega)$ *и* $T_p(\Gamma)$.

Замечание. Приведенное следствие позволяет отождествить пространства $TW_p^1(\Omega)$ и $T_p(\Gamma)$. Ниже мы рассматриваем элементы пространства $TW_p^1(\Omega)$ просто как функции f на Γ с конечной нормой $\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$, определяемой выражением (4).

6.2.2 Теоремы о следах

Пусть Ω – область, определенная в (6.2.1/1). Положим $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Ясно, что φ удовлетворяет условию Липшица на $\overline{G}$, $\varphi = 0$ на ∂G и $\varphi > 0$ на G. Продолжая φ нулем во внешность $\overline{G}$, мы получаем функцию, удовлетворяющую условию Липшица на $\mathbf{R}^{n-1}$, причем $\{y \in \mathbf{R}^{n-1} : \varphi(y) > 0\} = G$. Ниже предполагается, что такое продолжение уже сделано.

Теорема 3.1.1 дает локальное описание следов $u|_{\Gamma_i}$, $i = 1, 2$, функций $u \in W_p^1(\Omega)$: в окрестности любой точки Γ_i след принадлежит $W_p^{1-1/p}$ при $p > 1$ и L_1 при $p = 1$. Это полная локальная характеристика следа. Однако этой информации недостаточно, чтобы описать пространство $TW_p^1(\Omega)$. При $p > 1$ такое описание дано в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, определенная в* (6.2.1/1), *и пусть $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_i – поверхность* (6.2.1/2). *Предположим, что функция $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ограничена. Если $p \in (1, \infty)$, то*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \{f\}_p + \sum_{i=1,2} \left(|f|_{i,p}^p + \int_{\Gamma_i} |f(x)|^p \varphi(y) ds_x \right)^{1/p}, \qquad (1)$$

где $\{f\}_p$ и $|f|_{i,p}$ – полунормы, определяемые равенствами

$$\{f\}_p^p = \int_G |f(y, \varphi_2(y)) - f(y, \varphi_1(y))|^p \varphi(y)^{1-p} dy,$$

$$|f|_{i,p}^p = \iint_{\{x,\xi \in \Gamma_i : |x-\xi| < AM(y,\eta)\}} |f(x) - f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}, \quad i = 1, 2,$$

$x = (y, z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$, ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности Γ,

$$M(y, \eta) = \max\{\varphi(y), \varphi(\eta)\}, \quad y, \eta \in G,$$

и A – положительная постоянная, зависящая только от n и постоянной Липшица для функции φ. В частности, можно положить

$A = c_1(1+2c_1)^{-1}L^{-1}$, *где* $c_1 = c_1(n-1)$ – *постоянная из леммы* 6.1/1 *и* L *удовлетворяет условию*

$$\sup_{y,\eta\in G, y\neq\eta} |\varphi(y)-\varphi(\eta)||y-\eta|^{-1} \leq L.$$

Доказательство. В соответствии с замечанием 6.2.1 мы интерпретируем пространство $TW_p^1(\Omega)$ как пространство функций на Γ с нормой (6.2.1/4). Для функции f, определенной на Γ, положим

$$f_i(y) = f(y, \varphi_i(y)), \quad y \in G, \ i = 1, 2.$$

Пусть $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|_\Gamma = f$. Заметим, что

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \sim \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \sum_{i=1,2} \|f_i \varphi^{1/p}\|_{L_p(G)}. \tag{2}$$

В самом деле, если $i = 1, 2$ и $z \in (\varphi_1(y), \varphi_2(y))$, то по неравенству Гёльдера

$$|u(y,z) - f_i(y)|^p \leq \varphi(y)^{p-1} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \left|\frac{\partial u}{\partial t}(y,t)\right|^p dt \tag{3}$$

при п.в. $y \in G$. Интегрируя по $z \in (\varphi_1(y), \varphi_2(y))$, а затем по $y \in G$, получаем

$$\Big| \|u\|_{L_p(\Omega)} - \|f_i \varphi^{1/p}\|_{L_p(G)} \Big| \leq c\, \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда вытекает (2). Таким образом, (1) является следствием соотношения

$$\inf\left\{\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} : u\big|_\Gamma = f\right\} \sim \{f\}_p + \sum\nolimits_{i=1,2} |f|_{i,p}. \tag{4}$$

Доказательство последнего проведем в несколько этапов.

1^o. Сначала установим требуемые оценки для следа $f = u|_\Gamma$ функции $u \in W_p^1(\Omega)$. Неравенство

$$\{f\}_p \leq \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \tag{5}$$

вытекает из (3) при $z = \varphi_{3-i}(y)$.

Так как $ds_x \sim dy$ и $ds_\xi \sim d\eta$ на Γ_i, то оценка

$$|f|_{i,p} \leq c\, \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

вытекает из неравенства

$$\iint\limits_{\{y,\eta\in G:|y-\eta|<AM(y,\eta)\}} |f_i(y)-f_i(\eta)|^p \frac{dyd\eta}{|y-\eta|^{n+p-2}} \le c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}. \quad (7)$$

Пусть $i=1$. Замена переменных

$$x=(y,z)\mapsto X=(s,t),\quad s=y,\ t=z-\varphi_1(y)$$

переводит Ω на область $\{X\in\mathbf{R}^n : s\in G,\ 0<t<\varphi(s)\}$, причем $|\nabla_x u|\sim|\nabla_X u|$ и $|D(s,t)/D(y,z)|=1$. Таким образом, доказательство (7) при $i=1$ сводится к случаю $\varphi_1=0$. Мы установим (7) при

$$A=c_1(1+2c_1)^{-1}L^{-1},\quad c_1=2^{-n-4}(n-1)^{-1/2}. \quad (8)$$

По лемме 6.1/1 существует такая последовательность $(n-1)$-мерных шаров $\{B_{r_k}(y_k)\}_{k\ge1}$ с радиусами $r_k=c_1L^{-1}\varphi(y_k)$, что эти шары образуют покрытие G, а открытые концентрические шары $\{\mathcal{B}^{(k)}\}_{k\ge1}$ удвоенного диаметра лежат в G. Кроме того, кратность покрытия $\{\mathcal{B}^{(k)}\}_{k\ge1}$ зависит только от n. Из леммы 6.1/3 следует, что если $y\in B_{r_k}(y_k)$, $\eta\in G$ и $|y-\eta|<AM(y,\eta)$, то $\eta\in\mathcal{B}^{(k)}$. Отметим также, что при $y\in\mathcal{B}^{(k)}$

$$|\varphi(y)-\varphi(y_k)|\le 2r_kL,$$

откуда

$$1-2^{-n-3}\le\varphi(y)/\varphi(y_k)\le 1+2^{-n-3},\quad y\in\mathcal{B}^{(k)},\ \ k\ge1. \quad (9)$$

При $i=1$ левая часть (7) не превосходит

$$\sum\nolimits_{k\ge1}\int_{B_{r_k}(y_k)}dy\int_{|y-\eta|<AM(y,\eta)}|f_1(y)-f_1(\eta)|^p\frac{d\eta}{|y-\eta|^{n+p-2}}$$

и, следовательно, мажорируется суммой

$$\sum_{k\ge1}\ \iint\limits_{\mathcal{B}^{(k)}\times\mathcal{B}^{(k)}}|f_1(y)-f_1(\eta)|^p\frac{dyd\eta}{|y-\eta|^{n+p-2}}. \quad (10)$$

Пусть

$$\Omega_k=\bigl\{x=(y,z): y\in\mathcal{B}^{(k)},\ 0<z<(1-2^{-n-3})\varphi(y_k)\bigr\},\quad k\ge1.$$

Каждая ячейка Ω_k лежит в Ω в силу (9) (напомним, что мы временно предполагаем $\varphi_1 = 0$). Ввиду теоремы 3.1.2 общий член суммы в (10) не больше, чем $c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega_k)}$. Поэтому выражение (10) не превосходит $c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}$. Отсюда вытекает (7) при $i = 1$. Случай $i = 2$ разбирается аналогично.

Оценки (5) и (6) означают, что правая часть (4) мажорируется левой частью, умноженной на константу. Для доказательства обратного неравенства рассмотрим произвольную функцию f на Γ, для которой $f_1,\ f_2 \in L_{p,loc}(G)$ и правая часть (4) конечна. Нашей целью является построение функции u с градиентом из $L_p(\Omega)$, удовлетворяющей условию $u|_\Gamma = f$ и неравенству

$$c\,\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \le \{f\}_p + \sum\nolimits_{i=1,2} |f|_{i,p}. \tag{11}$$

2^o. На этом этапе мы определим такие функции u_1, u_2 с градиентами из $L_p(\Omega)$, что $u_i|_{\Gamma_i} = f|_{\Gamma_i}$, $i = 1, 2$, и

$$\|\nabla u_i\|_{L_p(\Omega)} \le c\,|f|_{i,p}, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Для построения указанных "отдельных" продолжений функций $f|_{\Gamma_i}$ в Ω нам понадобится локально конечное покрытие G последовательностью $(n-1)$-мерных шаров $\{B^{(k)}\}_{k\ge1}$ со следующими свойствами:

1) $B^{(k)} \subset G$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, и кратность покрытия $\{B^{(k)}\}$ зависит только от n;

2) Открытые концентрические с $B^{(k)}$ шары половинного диаметра образуют покрытие G;

3) Если $y \in B^{(k)}$, то $\varphi(y) \sim \operatorname{diam}(B^{(k)})$;

4) Если $y, \eta \in B^{(k)}$, то

$$|y-\eta| + \sum\nolimits_{i=1,2} |\varphi_i(y) - \varphi_i(\eta)| < AM(y, \eta) \tag{13}$$

с постоянной A, определенной в (8).

Проверим существование семейства $\{B^{(k)}\}$ с указанными свойствами. Пусть L_1, L_2, L – постоянные Липшица для функций φ_1, φ_2, φ соответственно. Положим

$$b = \min\left\{2c_1L^{-1},\ A\big(2 + AL + 2(L_1+L_2)\big)^{-1}\right\},$$

где A и c_1 – те же, что и в (8). Ввиду леммы 6.1/1 и замечания 6.1/2 существует такая последовательность $\{y_k\}_{k\ge1} \subset G$, что шары

$$B^{(k)} = \left\{y \in \mathbf{R}^{n-1} : |y - y_k| < b\varphi(y_k)\right\}, \quad k \ge 1, \tag{14}$$

образуют локально конечное покрытие G и удовлетворяют условиям 1), 2). Кроме того, если $y \in B^{(k)}$, то

$$|\varphi(y) - \varphi(y_k)| \le bL\varphi(y_k),$$

откуда

$$1 - bL \le \varphi(y)/\varphi(y_k) \le 1 + bL, \tag{15}$$

и условие 3) выполнено. Далее, из определения b следует, что

$$(1 + L_1 + L_2)\,\mathrm{diam}\,(B^{(k)}) \le A\,(1 - bL)\varphi(y_k).$$

При $y, \eta \in B^{(k)}$ правая часть последнего неравенства не больше $AM(y, \eta)$ в силу (15). В то же время левая часть больше

$$|y - \eta| + \sum\nolimits_{i=1,2} |\varphi_i(y) - \varphi_i(\eta)|.$$

Таким образом, условие 4) также выполнено для шаров, определенных в (14).

Ниже мы пишем для краткости φ_k вместо $\varphi(y_k)$. Пусть $\{\psi_k\}_{k\ge1}$ – гладкое разбиение единицы на G, подчиненное покрытию открытыми концентрическими с (14) шарами радиусов $\frac{3}{4}b\varphi_k$. Согласно лемме 6.1/2 можно считать, что

$$|\nabla\psi_k| \le c\,\varphi_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Введем еще последовательность $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ функций со следующими свойствами: при всех $k \ge 1$

$$\lambda_k \in C_0^\infty(B^{(k)}), \quad 0 \le \lambda_k \le 1, \quad \lambda_k\psi_k = \psi_k,$$

$$\mathrm{dist}\,(\mathrm{supp}\,\lambda_k, G \setminus B^{(k)}) \ge c\,\varphi_k, \quad |\nabla\lambda_k| \le c\,\varphi_k^{-1}.$$

Обратимся к построению требуемых продолжений $f|_{\Gamma_i} \mapsto u_i$ при $i = 1, 2$. Пусть

$$\Gamma_{i,k} = \{x = (y, z) : y \in B^{(k)},\ z = \varphi_i(y)\}, \ \ i = 1, 2, \ \ k \ge 1,$$

и пусть $\overline{f}_{i,k}$ есть среднее значение f на $\Gamma_{i,k}$. Определим функцию $f_{i,k}$ на $\Gamma_{i,k}$:

$$\Gamma_{i,k} \ni x \mapsto f_{i,k}(x) = \lambda_k(y)\left(f(x) - \overline{f}_{i,k}\right).$$

Отображение

$$x = (y, z) \mapsto \Phi_i x = \big(y, z - \varphi_i(y)\big)$$

переводит поверхность $\Gamma_{i,k}$ на $\sigma_k = \{(y,z) : y \in B^{(k)}, z = 0\}$, причем

$$\|f_{i,k}\|_{L_p(\Gamma_{i,k})} \sim \|f_{i,k} \circ \Phi_i^{-1}\|_{L_p(\sigma_k)} \quad \text{и} \quad [f_{i,k}]_{p,\Gamma_{i,k}} \sim [f_{i,k} \circ \Phi_i^{-1}]_{p,\sigma_k},$$

где $[\cdot]_{p,\Gamma_{i,k}}$, $[\cdot]_{p,\sigma_k}$ – полунормы, определенные в (3.1.1/3). В силу замечания 3.1.1 существует продолжение $U_{i,k}$ функции $f_{i,k} \circ \Phi_i^{-1}$ с поверхности σ_k на $\mathbf{R}^n$, такое, что

$$\varphi_k^{-1} \|U_{i,k}\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla U_{i,k}\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le$$
$$\le c\left(\varphi_k^{-1+1/p} \|f_{i,k} \circ \Phi_i^{-1}\|_{L_p(\sigma_k)} + [f_{i,k} \circ \Phi_i^{-1}]_{p,\sigma_k}\right).$$

Положим $C^{(k)} = B^{(k)} \times \mathbf{R}^1$ и $u_{i,k} = U_{i,k} \circ \Phi_i|_{C^{(k)}}$. Тогда $u_{i,k}$ является продолжением функции $f_{i,k}$ с поверхности $\Gamma_{i,k}$ на цилиндр $C^{(k)}$, и верна оценка

$$\varphi_k^{-1} \|u_{i,k}\|_{L_p(C^{(k)})} + \|\nabla u_{i,k}\|_{L_p(C^{(k)})} \le$$
$$\le c\left(\varphi_k^{-1+1/p} \|f_{i,k}\|_{L_p(\Gamma_{i,k})} + [f_{i,k}]_{p,\Gamma_{i,k}}\right). \tag{16}$$

Определим при $x = (y, z) \in \Omega$

$$v_i(x) = \sum\nolimits_{k \ge 1} \overline{f}_{i,k} \psi_k(y), \tag{17}$$

$$w_i(x) = \sum\nolimits_{k \ge 1} \psi_k(y) u_{i,k}(x) \tag{18}$$

(мы считаем общий член последней суммы равным нулю во внешности $C^{(k)}$). Ясно, что каждая функция $u_i = v_i + w_i$, $i = 1, 2$, удовлетворяет условию $u_i|_{\Gamma_i} = f|_{\Gamma_i}$.

Доказательство оценки (12). Поскольку $\sum_{k \ge 1} \nabla \psi_k = 0$ в G, то

$$\nabla v_i(x) = \sum\nolimits_{k \ge 1} \left[\overline{f}_{i,k} - f(y, \varphi_i(y))\right] \nabla \psi_k(y), \quad x \in \Omega.$$

Так как число ненулевых слагаемых в сумме по $k \ge 1$ равномерно ограничено для любого $y \in G$, мы имеем

$$|\nabla v_i(x)|^p \le c \sum\nolimits_{k \ge 1} |\overline{f}_{i,k} - f(y, \varphi_i(y))|^p |\nabla \psi_k(y)|^p,$$

откуда

$$\|\nabla v_i\|^p_{L_p(\Omega)} \le c \sum\nolimits_{k\ge 1} \varphi_k^{1-p} \|f - \overline{f}_{i,k}\|^p_{L_p(\Gamma_{i,k})}.$$

По лемме 3.1.1 общий член последней суммы не больше $c\,[f]^p_{p,\Gamma_{i,k}}$. Из условия (13) вытекает, что $|x-\xi| < AM(y,\eta)$, если $x, \xi \in \Gamma_{i,k}$. Поэтому

$$[f]^p_{p,\Gamma_{i,k}} \le c \int_{\Gamma_{i,k}} ds_x \int_{\{\xi\in\Gamma_i : |\xi - x| < AM(y,\eta)\}} |f(x) - f(\xi)|^p |x-\xi|^{2-n-p} ds_\xi.$$

Семейство $\{\Gamma_{i,k}\}_{k\ge 1}$ образует покрытие Γ_i, кратность которого зависит лишь от n. Отсюда

$$\sum\nolimits_{k\ge 1} [f]^p_{p,\Gamma_{i,k}} \le c\,|f|^p_{i,p}, \quad i = 1, 2, \tag{19}$$

следовательно,

$$\|\nabla v_i\|_{L_p(\Omega)} \le c\,|f|_{i,p}, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Обратимся к оценке нормы градиента функции (18) в $L_p(\Omega)$. Из (16) и неравенства $|\nabla \psi_k| \le c\,\varphi_k^{-1}$ получаем

$$\|\nabla w_i\|^p_{L_p(\Omega)} \le c \sum\nolimits_{k\ge 1} \Big(\varphi_k^{1-p} \|f_{i,k}\|^p_{L_p(\Gamma_{i,k})} + [f_{i,k}]^p_{p,\Gamma_{i,k}} \Big). \tag{21}$$

Согласно лемме 3.1.1

$$\varphi_k^{1-p} \|f_{i,k}\|^p_{L_p(\Gamma_{i,k})} \le c\,[f]^p_{p,\Gamma_{i,k}}. \tag{22}$$

Для оценки второго слагаемого общего члена суммы в (21) заметим, что

$$c\,[f_{i,k}]^p_{p,\Gamma_{i,k}} \le [f]^p_{p,\Gamma_{i,k}} + I, \tag{23}$$

где

$$I = \iint\limits_{\Gamma_{i,k}\times\Gamma_{i,k}} |f(\xi) - \overline{f}_{i,k}|^p |\lambda_k(y) - \lambda_k(\eta)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}.$$

Поскольку

$$|\lambda_k(y) - \lambda_k(\eta)| \le c\,\varphi_k^{-1} |y - \eta|, \quad y, \eta \in B^{(k)},$$

а также $ds_x \sim dy$ при $x \in \Gamma_{i,k}$, то

$$I \le c\,\varphi_k^{-p} \int_{\Gamma_{i,k}} |f(\xi) - \overline{f}_{i,k}|^p ds_\xi \int_{|y-\eta|<\mathrm{diam}(B^{(k)})} |y-\eta|^{2-n} d\eta \le$$

$$\le c\,\varphi_k^{1-p} \|f - \overline{f}_{i,k}\|^p_{L_p(\Gamma_{i,k})} \le c\,[f]^p_{p,\Gamma_{i,k}}. \tag{24}$$

Здесь на последнем шаге вновь была использована лемма 3.1.1. Оценки (21)–(24) дают

$$\|\nabla w_i\|^p_{L_p(\Omega)} \le c \sum\nolimits_{k\ge 1} [f]^p_{p,\Gamma_{i,k}}.$$

Это неравенство вместе с (19), (20) приводят к (12).

3^o. На данном этапе мы построим продолжение $f \mapsto u$, удовлетворяющее условию (11), и тем самым завершим доказательство теоремы. Будет показано, что требуемое продолжение можно выбрать в виде

$$u(x) = u_1(x) + (u_2(x) - u_1(x))(z - \varphi_1(y))/\varphi(y), \quad x = (y,z) \in \Omega,$$

где $u_i = v_i + w_i$, а функции v_i, w_i определены в (17), (18). Так как $u_i|_{\Gamma_i} = f|_{\Gamma_i}$, $i = 1, 2$, то для указанной функции u очевидно имеем $u|_\Gamma = f$. Обращаясь к неравенству (11), заметим сначала, что

$$c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)} \le \sum\nolimits_{i=1,2} \|\nabla u_i\|^p_{L_p(\Omega)} +$$

$$+ \int_\Omega \varphi(y)^{-p} |u_2(x) - u_1(x)|^p dx.$$

Согласно (12) неравенство (11) является следствием оценки

$$\int_\Omega |u_2(x) - u_1(x)|^p \frac{dx}{\varphi(y)^p} \le$$

$$\le c\,\{f\}^p_p + c \sum\nolimits_{i=1,2} |f|^p_{i,p}. \tag{25}$$

Установим последнюю. Из определений (17), (18) и условий 1), 3) для шаров (14) вытекает, что интеграл в левой части (25) мажорируется выражением

$$c \sum\nolimits_{k\ge 1} |\overline{f}_{2,k} - \overline{f}_{1,k}|^p \varphi_k^{n-p} +$$

$$+c\sum\nolimits_{i=1,2}\sum\nolimits_{k\geq 1}\varphi_k^{-p}\|u_{i,k}\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)}. \tag{26}$$

Как было показано выше (см. (16), (22)–(24) и (19)), двойная сумма в (26) не превосходит $c\sum_{i=1,2}|f|^p_{i,p}$. Общий член первой суммы в (26) эквивалентен

$$\varphi_k^{1-p}\int_{B^{(k)}}|\overline{f}_{2,k}-\overline{f}_{1,k}|^p dy$$

и поэтому не больше

$$c\int_{B^{(k)}}|f(y,\varphi_2(y))-f(y,\varphi_1(y))|^p\varphi(y)^{1-p}dy+$$

$$+c\sum\nolimits_{i=1,2}\varphi_k^{1-p}\int_{B^{(k)}}|f(y,\varphi_i(y))-\overline{f}_{i,k}|^p dy.$$

Поскольку $dy\sim ds_x$ при $x\in\Gamma_{i,k}$, последняя сумма по i не превосходит

$$c\sum\nolimits_{i=1,2}\varphi_k^{1-p}\|f-\overline{f}_{i,k}\|^p_{L_p(\Gamma_{i,k})},$$

что мажорируется величиной $c\sum_{i=1,2}[f]^p_{p,\Gamma_{i,k}}$ по лемме 3.1.1. Принимая во внимание (19), мы можем оценить сверху первую сумму в (26) правой частью (25). Неравенство (25) установлено, и доказательство теоремы закончено.

Из доказательства теоремы 1 вытекает такое утверждение.

Следствие. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения:* $TW^1_p(\Omega)\to W^1_p(\Omega),\ \ p\in(1,\infty)$.

Замечание 1. В определении полунормы $|f|_{i,p}$ можно считать $A\in(0,1]$. Этого можно добиться, выбрав в (8) достаточно большую константу Липшица L для функции φ.

Замечание 2. Неравенство (7) показывает, что соотношение (1) останется верным, если $|f|^p_{i,p}$ заменить левой частью (7).

Следующая теорема описывает следы функций из $W^1_1(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* Ω *– та же область, что и в теореме* 1. *Тогда*

$$\|f\|_{TW^1_1(\Omega)}\sim\sum_{i=1,2}\int_{\Gamma_i}|f(x)|\varphi(y)ds_x+$$

$$+\int_G |f(y,\varphi_2(y)) - f(y,\varphi_1(y))|dy+$$

$$+\sum_{i=1,2} \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma_i : |x-\xi|<AM(y,\eta)\}} |f(x)-f(\xi)| \frac{ds_x ds_\xi}{M(y,\eta)^{n-1}},$$

где приняты обозначения, введенные в теореме 1.

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1. Оценки для следа функции из $W_1^1(\Omega)$ выводятся точно так же, как в п. 1^o доказательства теоремы 1. Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что и выше в пп. 2^o и 3^o и даже несколько проще, так как неравенство (16) при $p=1$ приобретает вид

$$\varphi_k^{-1} \|u_{i,k}\|_{L_1(C^{(k)})} + \|\nabla u_{i,k}\|_{L_1(C^{(k)})} \le c\,\|f_{i,k}\|_{L_1(\Gamma_{i,k})}.$$

Следует отметить, что оператор продолжения: $TW_1^1(\Omega) \to W_1^1(\Omega)$ (построенный так же, как в п. 3^o доказательства теоремы 1) ограничен, но нелинеен.

6.3 Области, дополнительные к областям между липшицевыми графиками

Здесь мы опишем граничные значения функций из класса $W_p^1(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, для областей, дополнительных к рассмотренным в разд. 6.2.

Пусть $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ $(n \ge 2)$ – область класса $C^{0,1}$. Предположим, что φ_1, φ_2 – функции на $\overline{G}$, удовлетворяющие условию Липшица, а также условиям $\varphi_1 < \varphi_2$ на G и $\varphi_1 = \varphi_2$ на ∂G. Пусть

$$\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \left\{x=(y,z) : y \in \overline{G},\ \varphi_1(y) \le z \le \varphi_2(y)\right\}. \qquad (1)$$

По теореме 3.1.1 каждая функция $u \in W_p^1(\Omega),\ 1 \le p < \infty$, имеет след $u|_\Gamma$, где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и Γ_i – поверхности (6.2.1/2). Таким образом, след $u|_{\partial\Omega}$ определен почти всюду на $\partial\Omega$.

Ниже знак $\sim$ и буква c имеют тот же смысл, что и в разд. 6.2.

Теорема 1. *Пусть Ω – область, определенная в* (1), *где G – ограниченная область класса $C^{0,1}$. Если $p \in (1,\infty)$, то*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \sum\nolimits_{i=1,2} \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_i)}$$

$$+\left(\int_G |f(y,\varphi_2(y))-f(y,\varphi_1(y))|^p \frac{dy}{\operatorname{dist}(y,\partial G)^{p-1}}\right)^{1/p}, \tag{2}$$

где $\Gamma_i = \{(y,\varphi_i(y)) : y \in G\},\ i=1,2.$

Доказательство. Функция φ_1 может быть продолжена до липшицевой ограниченной функции на $\mathbf{R}^{n-1}$ (см. И. Стейн [71], гл. 6, теорема 3). С помощью отображения $\Omega \ni (y,z) \mapsto (y, z-\varphi_1(y))$ доказательство соотношения (2) сводится к случаю $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 > 0$ на G, $\varphi_2 = 0$ на ∂G. Мы тогда пишем φ вместо φ_2.

Пусть $u \in W_p^1(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = f$. Оценка

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_i)} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \quad i=1,2,$$

следует из теоремы 3.1.1. Обращаясь к неравенству

$$\int_G |f(y,\varphi(y))-f(y,0)|^p \frac{dy}{\operatorname{dist}(y,\partial G)^{p-1}} \le c\,\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}, \tag{3}$$

заметим, что достаточно оценить интеграл в левой части лишь по узкой пограничной полосе в G. Поскольку $G \in C^{0,1}$, то существует такое покрытие ∂G конечным набором окрестностей, что пересечение ∂G с каждой из них является графиком липшицевой функции в некоторой системе декартовых координат. Пусть U – любая из этих окрестностей. Используя билипшицево отображение U на $(n-1)$-мерный куб, сведем рассмотрение к случаю

$$U \cap G = \left\{y \in \mathbf{R}^{n-1} : y_{n-1} \in (0,1),\ |y_i| < 1,\ i=1,\dots,n-2\right\} \tag{4}$$

и

$$U \setminus \overline{G} = \left\{y \in \mathbf{R}^{n-1} : y_{n-1} \in (-1,0),\ |y_i| < 1,\ i=1,\dots,n-2\right\}. \tag{5}$$

Тогда (3) следует из неравенства

$$\int_{U\cap G} |f(y,\varphi(y))-f(y,0)|^p \frac{dy}{y_{n-1}^{p-1}} \le c\,\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}. \tag{6}$$

Пусть L означает постоянную Липшица для функции φ. С произвольной точкой $y = (y', y_{n-1}) \in U \cap G$ свяжем прямоугольник $P_1P_2P_3P_4$ с вершинами

$$P_1 = (y', y_{n-1}, Ly_{n-1}), \ \ P_2 = (y', -y_{n-1}, Ly_{n-1}),$$

$$P_3 = (y', -y_{n-1}, -Ly_{n-1}), \ \ P_4 = (y', y_{n-1}, -Ly_{n-1})$$

Мы имеем

$$c\,|f(y,\varphi(y))-f(y,0)|^p \le |f(y,\varphi(y))-u(P_1)|^p+$$

$$+|f(y,0)-u(P_4)|^p+\sum\nolimits_{i=1}^{3}|u(P_i)-u(P_{i+1})|^p. \qquad (7)$$

Оценим интеграл по $U\cap G$ (с весом y_{n-1}^{1-p}) от каждого слагаемого в правой части (7). Так как $\varphi(y)\le Ly_{n-1}$ при $y\in U\cap G$, то

$$|f(y,\varphi(y))-u(P_1)|^p=\left|\int_{\varphi(y)}^{Ly_{n-1}}\frac{\partial u}{\partial z}(y,z)dz\right|^p\le$$

$$\le (Ly_{n-1})^{p-1}\int_{\varphi(y)}^{Ly_{n-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial z}(y,z)\right|^p dz.$$

Поэтому

$$\int_{U\cap G}|f(y,\varphi(y))-u(P_1)|^p y_{n-1}^{1-p}dy\le c\,\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}.$$

Остальные слагаемые в правой части (7) оцениваются аналогично. Итак, неравенство (6) установлено.

Для завершения доказательства соотношения (2) требуется построить такое продолжение $u\in W_p^1(\Omega)$ функции f, определенной на $\partial\Omega$, для которого $c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$ мажорируется правой частью (2). Напомним, что достаточно считать $\varphi_1=0$ (в этом случае мы пишем φ вместо φ_2).

Введем покрытие ребра $\{(y,0):y\in\partial G\}$ конечным набором $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^N$ окрестностей $\mathcal{U}_j\subset\mathbf{R}^n$ со следующим свойством. Если U_j есть ортогональная проекция $\mathcal{U}_j$ на гиперплоскость $z=0$, то семейство $\{U_j\}_{j=1}^N$ является покрытием ∂G, и каждое множество $U_j\cap G$ может быть представлено в некоторой системе декартовых координат неравенством $y_{n-1}>\psi_j(y_1,\dots,y_{n-2})$, где ψ_j – функция, удовлетворяющая условию Липшица. Ясно, что существует такое $\delta>0$, при котором объединение $\cup_{j=1}^N\mathcal{U}_j$ содержит полосу

$$\Gamma(\delta)=\left\{(y,z)\in\partial\Omega: y\in\overline{G},\ \operatorname{dist}(y,\partial G)\le\delta\right\}. \qquad (8)$$

Обратимся к построению требуемого продолжения $f\mapsto u$ для функции f с конечной правой частью соотношения (2). Достаточно рассмотреть случай $\operatorname{supp} f\subset\Gamma(\delta)$ (результат в общем случае тогда выводится при помощи гладкой срезки и теоремы 3.1.1). Зафиксируем j, $1 \le j \le N$, и положим $U = U_j$. Без потери общности можно считать, что верны равенства (4) и (5). Пусть функция φ продолжена нулем в $\mathbf{R}^{n-1} \setminus G$ и пусть

$$\sigma_- = \{(y,0) : y \in U\}, \quad \sigma_+ = \{(y,\varphi(y)) : y \in U\}, \tag{9}$$

$$\Gamma_- = \{(y,0) : y \in U \cap G\}, \quad \Gamma_+ = \{(y,\varphi(y)) : y \in U \cap G\}. \tag{10}$$

Для заданной функции f определим функцию f_- на σ_-:

$$f_-\big|_{\Gamma_-} = f\big|_{\Gamma_-},$$

$$f_-(y,0) = f(y_1, \dots, y_{n-2}, -y_{n-1}, 0) \ \text{ при } \ y \in U \setminus G.$$

Легко проверяется оценка

$$\|f_-\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma_-)} \le c\,\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_-)}. \tag{11}$$

Далее, положим

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } \ x \in \sigma_+ \cap \Gamma_+, \\ f_-(x) & \text{при } \ x \in \sigma_+ \setminus \Gamma_+. \end{cases}$$

Мы утверждаем, что тогда $f_+ \in W_p^{1-1/p}(\sigma_+)$ и верна оценка

$$\|f_+\|^p_{W_p^{1-1/p}(\sigma_+)} \le c\,\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_+)} + c\,\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_-)} +$$

$$+ c\int_{U\cap G} |f(y,\varphi(y)) - f(y,0)|^p y_{n-1}^{1-p} dy. \tag{12}$$

В самом деле, ввиду (11) неравенство (12) будет установлено, если мы мажорируем интеграл

$$\int_{\sigma_+\cap\sigma_-} ds_\xi \int_{\sigma_+\setminus\sigma_-} |f_+(x) - f_+(\xi)|^p \frac{ds_x}{|x-\xi|^{n+p-2}} \tag{13}$$

правой частью (12) (здесь ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности σ_+). Выражение (13) не больше

$$c\int_{U\setminus G} d\eta \int_{U\cap G} |f_-(\eta,0) - f(y,\varphi(y))|^p \frac{dy}{|y-\eta|^{n+p-2}},$$

что не превосходит

$$c\iint_{\{y,\eta\in U\cap G\}}|f(y,0)-f(\eta,0)|^p\frac{dyd\eta}{|\overline{\eta}-y|^{n+p-2}}+$$

$$+c\int_{U\cap G}|f(y,0)-f(y,\varphi(y))|^p dy\int_{U\cap G}\frac{d\eta}{|\overline{\eta}-y|^{n+p-2}},$$

где $\overline{\eta}=(\eta_1,\dots,\eta_{n-2},-\eta_{n-1})$. Интеграл по $\{y,\eta\in U\cap G\}$ оценивается сверху через $c\,\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_-)}$, а последний интеграл по $\eta\in U\cap G$ не превосходит $c\,y_{n-1}^{1-p}$. Таким образом, неравенство (12) доказано.

Введем гладкое разбиение единицы $\{\mu_j\}_{j=1}^N$ в полосе (8), подчиненное покрытию $\{\mathcal{U}_j\}_{j=1}^N$. Кроме того, пусть

$$\lambda_j\in C_0^\infty(\mathcal{U}_j),\;\;\lambda_j\mu_j=\mu_j,\;\;0\le\lambda_j\le 1,\;\;j=1,\dots,N.$$

Предыдущие рассуждения показывают, что для каждого $1\le j\le N$ существуют локальные продолжения $f_\pm^{(j)}$ функции f с поверхностей (10) (при $U=U_j$, где U_j – проекция $\mathcal{U}_j$) на поверхности $\sigma_\pm^{(j)}$, определенные в (9); при этом

$$\|\lambda_j f_-^{(j)}\|^p_{W_p^{1-1/p}(\sigma_-^{(j)})}+\|\lambda_j f_+^{(j)}\|^p_{W_p^{1-1/p}(\sigma_+^{(j)})}\le c\sum_{i=1,2}\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_i)}+$$

$$+c\int_G|f(y,\varphi(y))-f(y,0)|^p\frac{dy}{\operatorname{dist}(y,\partial G)^{p-1}}. \tag{14}$$

Согласно теореме 3.1.1 для каждого $j=1,\dots,N$ существуют продолжения

$$W_p^{1-1/p}(\sigma_\pm^{(j)})\ni\lambda_j f_\pm^{(j)}\mapsto u_\pm^{(j)}\in W_p^1(\mathbf{R}^n),$$

удовлетворяющие условию

$$\|u_\pm^{(j)}\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)}\le c\,\|\lambda_j f_\pm^{(j)}\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma_\pm^{(j)})}.$$

Заметим, что константы в (14) и в последнем неравенстве вообще говоря зависят от набора $\{\mathcal{U}_j\}$ (но не зависят от f). При тех же j положим

$$u_j(x)=\begin{cases}0\;\;\text{вне}\;\;\mathcal{U}_j,\\ \mu_j(x)u_-^{(j)}(x),\;\;\text{если}\;\;x=(y,z)\in\mathcal{U}_j\cap\Omega,\;z<0,\\ \mu_j(x)u_+^{(j)}(x),\;\;\text{если}\;\;x=(y,z)\in\mathcal{U}_j\cap\Omega,\;z>\varphi(y).\end{cases}$$

Тогда $u_j \in W_p^1(\Omega)$ и $\|u_j\|^p_{W_p^1(\Omega)}$ мажорируется правой частью (14). Теперь требуемое продолжение $f \mapsto u$ из $\partial\Omega$ на Ω может быть задано формулой $u = \sum_{j=1}^N u_j$. Доказательство теоремы 1 закончено.

Оказывается, что описание пространства $TW_1^1(\Omega)$ не отличается от случая $\Omega \in C^{0,1}$.

Теорема 2. *Пусть* Ω *– область из теоремы* 1. *Тогда пространство* $TW_1^1(\Omega)$ *совпадает с* $L_1(\partial\Omega)$.

Доказательство. Опять достаточно предположить, что $\varphi_1 = 0$. Оценка

$$\|f\|_{L_1(\partial\Omega)} \leq c\,\|f\|_{TW_1^1(\Omega)} \tag{15}$$

следует из теоремы 3.1.1. Обращаясь к обратному неравенству, продолжим f нулем на множество $\{(y,0) : y \notin G\}$. Пусть

$$\Omega_1 = \{x = (y,z) \in \Omega : z < 0\}, \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega : z > 0\}.$$

По той же теореме 3.1.1 существуют функции $u_i \in W_1^1(\Omega_i)$ при $i = 1, 2$, удовлетворяющие условиям $u_i|_{\partial\Omega_i} = f|_{\partial\Omega_i}$ и

$$\|u_i\|_{W_1^1(\Omega_i)} \leq c\,\|f\|_{L_1(\partial\Omega_i)}, \quad i = 1, 2.$$

Определим функцию u на Ω следующим образом: $u(x) = u_1(x)$ при $z \leq 0$ и $u(x) = u_2(x)$ при $z > 0$. Тогда $u \in W_1^1(\Omega)$. Кроме того, $u|_{\partial\Omega} = f$ и

$$\|u\|_{W_1^1(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{L_1(\partial\Omega)}.$$

Отсюда следует неравенство, обратное к (15).

Замечание 1. Предположим, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в (1). В этом вырожденном случае функция $u \in W_p^1(\Omega)$ имеет, вообще говоря, различные следы на верхнем и нижнем “берегах” границы $\partial\Omega$. Положим

$$u_- = u\big|_{\{(y,z):y\in G, z<\varphi(y)\}}, \quad u_+ = u\big|_{\{(y,z):y\in G, z>\varphi(y)\}},$$

где $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$. Пусть $\Gamma = \{(y, \varphi(y)) : y \in G\}$ и $f_+, f_- \in L_p(\Gamma)$. Незначительные модификации доказательств теорем 1–2 приводят к соотношениям

$$\inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\Omega)} : u_+\big|_\Gamma = f_+,\ u_-\big|_\Gamma = f_-\right\} \sim \|f_-\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)} +$$

$$+\|f_+\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)} + \left(\int\limits_G \big|f_+(y,\varphi(y)) - f_-(y,\varphi(y))\big|^p \frac{dy}{\operatorname{dist}(y,\partial G)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

при $p > 1$ и

$$\inf\left\{\|u\|_{W_1^1(\Omega)} : u_+\big|_\Gamma = f_+,\ u_-\big|_\Gamma = f_-\right\} \sim \|f_-\|_{L_1(\Gamma)} + \|f_+\|_{L_1(\Gamma)}.$$

Замечание 2. Нормы в пространствах следов $TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ и $TW_p^1(\Omega)$ для области Ω из теоремы 1, вообще говоря, несравнимы при $p > 1$. Пересечение $TW_p^1(\Omega) \cap TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ может быть интерпретировано как пространство $TW_p^1(\mathbf{R}^n, \partial\Omega)$ следов функций из $W_p^1(\mathbf{R}^n)$ на поверхности $\partial\Omega$ с нормой

$$\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n,\partial\Omega)} = \inf\left\{\|u\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} : u\big|_{\partial\Omega} = f\right\}.$$

Комбинируя теоремы 1, 2 данного раздела с теоремами 6.2.2/1–2, приходим к следующим результатам:

$$\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n,\partial\Omega)} \sim \left\{ \sum\nolimits_{i=1,2} \|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_i)} + \right.$$

$$\left. + \int_G |f(y,\varphi_2(y)) - f(y,\varphi_1(y))|^p \varphi(y)^{1-p} dy \right\}^{1/p},\ p > 1,$$

где приняты обозначения, использованные в теореме 1; в то же время имеем $TW_1^1(\mathbf{R}^n, \partial\Omega) = L_1(\partial\Omega)$ с эквивалентностью норм.

6.4 Плоская область с нулевым углом

Начнем с описания интересующей нас области. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^2$ и $O \in \partial\Omega$. Предположим, что кривая $\partial\Omega \setminus \{O\}$ локально может быть представлена графиком липшицевой функции. В точке O поместим начало декартовых координат $x = (x_1, x_2)$. Пусть функции φ_1, φ_2 определены на промежутке [0,1], и удовлетворяют на этом промежутке условию Липшица. Кроме того, предположим, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, а функция $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ положительна на $(0, 1]$ и $\lim \varphi'(t) = 0$ при $t \to +0$.

Определение. Точка O называется *вершиной нулевого угла* на границе области Ω, если существует такая окрестность U этой точки, что

$$U \cap \Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 \in (0, 1),\ \varphi_1(x_1) < x_2 < \varphi_2(x_1)\right\}.$$

Для определенности будем дополнительно считать, что $\varphi(t) < t$ при $t \in (0,1]$, а также (см. Рис. 9)

$$U \cap \partial\Omega = \cup_{i=1}^{2} \{x : x_1 \in [0,1) : x_2 = \varphi_i(x_1)\}.$$

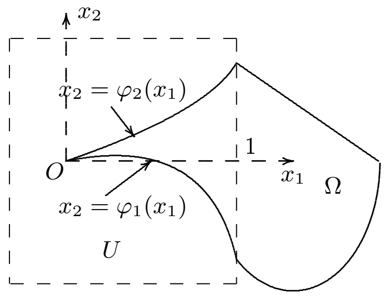

Рис. 9

Отметим, что вершина внешнего пика при $n = 2$ в смысле определения 4.1.1 является вершиной нулевого угла.

Пусть O – вершина нулевого угла на границе плоской области Ω. Если $\Gamma \subset \partial\Omega$ – кривая, удаленная от O, то по теореме 3.1.1 каждая функция $u \in W_p^1(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, имеет след $u|_\Gamma \in W_p^{1-1/p}(\Gamma)$ при $p > 1$ и $u|_\Gamma \in L_1(\Gamma)$ при $p = 1$. Таким образом, след $u|_{\partial\Omega}$ определен почти всюду. Пространство $TW_p^1(\Omega)$ этих следов снабжено нормой (3.1.1/1).

В данном разделе через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от p и Ω. Соотношение $a \sim b$ означает, что $c^{-1} \le ab^{-1} \le c$.

Теорема 1. *Пусть O – вершина нулевого угла на границе плоской области Ω. Если $p \in (1,\infty)$, то верно соотношение*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \left(\sum_{i=1,2} \int_0^1 |f_i(t)|^p \varphi(t) dt \right)^{1/p} +$$

$$+ \{f\}_p + \sum\nolimits_{i=1,2} |f_i|_p + \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}, \qquad (1)$$

где $f_i(t) = f(t, \varphi_i(t)),\ i = 1, 2,\ \varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$

$$\{f\}_p = \left(\int_0^1 |f_2(t) - f_1(t)|^p \varphi(t)^{1-p} dt \right)^{1/p},$$

$$|g|_p = \Bigg(\iint\limits_{\{t,\tau\in(0,1):|t-\tau|<M(t,\tau)\}} |g(t)-g(\tau)|^p \frac{dtd\tau}{|t-\tau|^p} \Bigg)^{1/p},$$

$$M(t,\tau) = \max\{\varphi(t),\varphi(\tau)\},$$

$$\Gamma = \partial\Omega \setminus \{x=(x_1,x_2)\in U\cap\partial\Omega : x_1 \le 1/2\}$$

и U – окрестность из определения вершины нулевого угла.

Доказательство. Пусть $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = f$. Оценка

$$\{f\}_p^p + \sum_{i=1,2} \int_0^1 |f_i(t)|^p \varphi(t)dt \le c\,\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)} \tag{2}$$

выводится так же, как (6.2.2/3–5) в теореме 6.2.2/1.

Неравенство

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \tag{3}$$

является следствием теоремы 3.1.1.

Обратимся к оценке

$$|f_i|_p \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \quad i=1,2. \tag{4}$$

Зафиксируем $\delta \in (0,1)$ так, чтобы выполнялось следующее условие: константа $L = L(\delta)$ в неравенстве

$$\sup\left\{|\varphi(t)-\varphi(\tau)||t-\tau|^{-1} : t,\tau\in[0,\delta],\ t\ne\tau\right\} \le L$$

может быть выбрана так, что $A = 1$ в (6.2.2/8) при $n = 2$. Это возможно, поскольку $\lim_{t\to 0}\varphi'(t) = 0$. Мы можем при этом считать $\overline{B}_\delta \subset U$. Заметим, что если

$$t,\tau\in(0,1),\ |t-\tau| < M(t,\tau)$$

и одна из точек t или τ лежит в $[\delta/2,1)$, то другая точка находится в промежутке $(\varepsilon(\delta),1)$ при некотором $\varepsilon(\delta)>0$. В самом деле, пусть, например, $\tau \ge \delta/2$. Тогда $t > \tau - M(t,\tau)$. Если $\varphi(\tau) > \varphi(t)$, то

$$t > \tau - \varphi(\tau) \ge \min\{s-\varphi(s) : s\in[\delta/2,1]\} > 0.$$

Если же $\varphi(\tau) \le \varphi(t)$, то $t + \varphi(t) > \tau$, откуда $t > \delta/4$ в силу неравенства $\varphi(t) < t$. Таким образом, число $\varepsilon(\delta)$ существует, и можно считать, что $\varepsilon(\delta)\in(0,\delta/2)$. Следовательно,

$$c\,|f_i|_p^p \le [f]^p_{p,\partial\Omega\setminus\overline{B}_{\varepsilon(\delta)}} +$$

$$+ \iint\limits_{\{t,\tau\in(0,\delta/2):|t-\tau|<M(t,\tau)\}} |f_i(t)-f_i(\tau)|^p \frac{dtd\tau}{|t-\tau|^p}, \tag{5}$$

где $[\cdot]_{p,\partial\Omega\setminus\overline{B}_{\varepsilon(\delta)}}$ – полунорма, определенная в (3.1.1/3) при $n = 2$. Первое слагаемое в правой части (5) не превосходит $c\,\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}$ по теореме 3.1.1. Для оценки интеграла в (5) введем срезку

$$\eta \in C^\infty([0,\infty)),\ 0 \le \eta \le 1,\ \eta\big|_{[0,2/3]} = 1,\ \eta\big|_{[5/6,\infty)} = 0. \tag{6}$$

Положим $\Omega_\delta = \{x \in \Omega \cap U : x_1 < \delta\}$ и определим функцию

$$\Omega_\delta \ni x \mapsto v(x) = \eta(x_1/\delta)u(x).$$

Тогда $v(x) = u(x)$ при $x_1 \in (0, \delta/2)$ и $v(x) = 0$ вблизи $x_1 = \delta$. Пусть D_δ означает объединение Ω_δ со своим симметричным образом относительно прямой $x_1 = \delta$. Функция v, доопределенная нулем на множестве $D_\delta \setminus \Omega_\delta$, принадлежит $W^1_p(D_\delta)$, и верна оценка

$$\|v\|_{W^1_p(D_\delta)} \le c\,\|u\|_{W^1_p(\Omega)}.$$

Применяя теорему 6.2.2/1 (см. также замечание 6.2.2/2) к области D_δ, мажорируем интеграл в (5) величиной $c\,\|v\|^p_{W^1_p(D_\delta)}$. Таким образом, неравенство (4) установлено. Из (2)–(4) следует, что правая часть (1) не больше $c\,\|f\|_{TW^1_p(\Omega)}$.

Дальнейшие рассуждения посвящены доказательству обратного неравенства. Пусть f – функция на $\partial\Omega$ и $\langle f\rangle$ – норма, определяемая правой частью (1). При условии $\langle f\rangle < \infty$ построим такую функцию $u \in W^1_p(\Omega)$, что

$$u\big|_{\partial\Omega} = f \quad \text{и} \quad \|u\|_{W^1_p(\Omega)} \le c\,\langle f\rangle. \tag{7}$$

Пусть η – функция, подчиненная условиям (6). Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} \eta(x_1), & x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega \cap U, \\ 0, & x \in \partial\Omega \setminus U. \end{cases}$$

Тогда supp $(1-\psi)f \subset \Gamma$, а, кроме того, (см. (3.1.1/4))

$$\|(1-\psi)f\|_{W^{1-1/p}_p(\Gamma)} \le c\,\|f\|_{W^{1-1/p}_p(\Gamma)}.$$

По теореме 3.1.1 существует функция $\tilde{u} \in W_p^1(\Omega)$, для которой

$$\tilde{u}\big|_{\partial\Omega} = (1-\psi)f \quad \text{и} \quad \|\tilde{u}\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\Gamma)}.$$

Определим функцию $w \in W_p^1(\Omega \cap U)$, удовлетворяющую условиям $w|_{\partial\Omega\cap U} = \psi f$ и

$$\|w\|^p_{W_p^1(\Omega\cap U)} \le c\,\{f\}_p^p + c\sum_{i=1,2}\Big(|f_i|_p^p + \|f_i\varphi^{1/p}\|^p_{L_p(0,1)}\Big). \tag{8}$$

Если такая функция w построена, то функция u, подчиненная (7), может быть определена следующим образом. Пусть $\mu \in C^\infty([0,\infty))$, $\eta\mu = \eta$ и $\mu = 0$ в окрестности $[1,\infty)$. Положим $\tilde{w}(x) = \mu(x_1)w(x)$ при $x \in \Omega\cap U$ и $\tilde{w} = 0$ на $\Omega\setminus U$. Тогда $\tilde{w} \in W_p^1(\Omega)$,

$$\tilde{w}\big|_{\partial\Omega} = \psi f \quad \text{и} \quad \|\tilde{w}\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\|w\|_{W_p^1(\Omega\cap U)}.$$

Условия (7) очевидно выполнены для функции $u = \tilde{u} + \tilde{w}$.

Для построения w рассмотрим вспомогательную область

$$D = \{x : x_1 \in (0,2),\ \varphi_1(x_1) < x_2 < \varphi_2(x_1)\},$$

где

$$\varphi_i(1+t) = \varphi_i(1-t), \quad t\in[0,1], \quad i = 1,2.$$

Определим функцию h на ∂D:

$$h\big|_{\partial D\cap U} = \psi f, \quad h\big|_{\partial D\setminus U} = 0.$$

По следствию 6.2.2 существует такая функция $w \in W_p^1(D)$, что $w|_{\partial D} = h$ и

$$c\,\|w\|^p_{W_p^1(D)} \le$$

$$\le \int_0^2 |h_2(t)-h_1(t)|^p\varphi(t)^{1-p}dt + \sum_{i=1,2}\|h_i\varphi^{1/p}\|^p_{L_p(0,2)} +$$

$$+\sum_{i=1,2}\iint\limits_H |h_i(t)-h_i(\tau)|^p\frac{dt\,d\tau}{|t-\tau|^p} \tag{9}$$

где $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ на $[0,2]$,

$$h_i(t) = h(t,\varphi_i(t)), \quad t\in(0,2), \quad i=1,2,$$

$$H = \{(t,\tau) : t, \tau \in (0,2),\ |t-\tau| < AM(t,\tau)\}$$

и

$$M(t,\tau) = \max\{\varphi(t), \varphi(\tau)\}, \quad t,\tau \in (0,2).$$

Константа A зависит только от постоянной Липшица L для функции φ. В частности, можно положить $A = 2^{-6}(1+2^{-5})^{-1}L^{-1} \in (0,1]$ (см. замечание 6.2.2/1).

Ясно, что $w = \psi f$ на $\partial\Omega \cap U$. Проверим, что правая часть (9) не больше правой части (8), следовательно, $w|_{\Omega\cap U}$ есть требуемая функция, подчиненная (8). В оценке нуждается только последняя сумма по i в (9). Заметим, что если $(t,\tau) \in H$, то $\varphi(t) \sim \varphi(\tau)$, а также

$$|t-\tau| \le AL \max\{t,\tau\} \le 2AL \le 1/6.$$

Здесь мы использовали оценку $\varphi(t) \le Lt$. Так как $h_i(t) = 0$ при $t \ge 5/6$, подынтегральная функция в последнем интеграле в (9) отлична от нуля только если $t,\tau \in (0,1)$. Поэтому интеграл по H в (9) не превосходит

$$c \iint\limits_{\{(t,\tau)\in H: t,\tau\in(0,1)\}} \eta(\tau)^p |f_i(t) - f_i(\tau)|^p \frac{dt d\tau}{|t-\tau|^p} +$$

$$+ c\int_0^1 |f_i(t)|^p dt \int_{|t-\tau|<AM(t,\tau)} \frac{|\eta(t)-\eta(\tau)|^p}{|t-\tau|^p} d\tau,$$

где функция η описана в (6). Первый член в этой сумме не больше $c\,|f_i|_p^p$, а второй мажорируется выражением $c\,\|f_i\varphi^{1/p}\|^p_{L_p(0,1)}$. Доказательство теоремы закончено.

Замечание 1. Соотношение (1) останется верным, если $\Gamma \subset \partial\Omega$ – произвольная связная кривая, удаленная от точки O и такая, что $\operatorname{dist}(\partial\Omega \setminus \Gamma,\ \partial\Omega \setminus U) > 0$. Это устанавливается с помощью подходящей срезающей функции η, подчиненной требованиям, аналогичным (6). При этом константы в (1) зависят от Γ.

Следующее утверждение доказывается так же, как и теорема 1, со ссылкой на теорему 6.2.2/2 вместо 6.2.2/1.

Теорема 2. *Пусть Ω – та же область, что и в теореме* 1. *Тогда*

$$\|f\|_{TW_1^1(\Omega)} \sim \int\limits_0^1 |f_2(t) - f_1(t)|dt +$$

$$+\sum_{i=1,2}\int\limits_0^1 |f_i(t)|\varphi(t)dt + \|f\|_{L_1(\Gamma)}+$$

$$+\sum_{i=1,2}\iint\limits_{\{t,\tau\in(0,1):|t-\tau|<M(t,\tau)\}} |f_i(t)-f_i(\tau)|\frac{dtd\tau}{M(t,\tau)},$$

где приняты те же обозначения, что и в теореме 1.

Замечание 2. Пусть Ω – та же область, что и в двух предыдущих теоремах. По теореме 2 пространство $L_1(\partial\Omega)$ непрерывно вложено в $TW_1^1(\Omega)$. Покажем, что включение $L_1(\partial\Omega)\subset TW_1^1(\Omega)$ строгое. В самом деле, предположим $L_1(\partial\Omega)=TW_1^1(\Omega)$. Тогда

$$\|f\|_{L_1(\partial\Omega)} \le c\,\|u\|_{W_1^1(\Omega)} \tag{10}$$

для любой функции $u\in W_1^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}=f$. При достаточно малом $\varepsilon>0$ определим функцию $v\in C^{0,1}([0,1])$: $v=1$ на $[0,\varepsilon]$, $v=0$ на $[\varepsilon+\varphi(\varepsilon),1]$, v линейна на $[\varepsilon,\varepsilon+\varphi(\varepsilon)]$. Положим $u(x)=v(x_1)$ при $x\in\Omega\cap U$ и $u=0$ на $\Omega\setminus U$. Подставляя u в (10), получим

$$c\,\varepsilon \le \int_0^{\varepsilon+\varphi(\varepsilon)} \varphi(t)dt + \frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\varphi(\varepsilon)} \varphi(t)dt.$$

Однако последнее противоречит условию $\varphi(t)=o(t)$ при $t\to+0$.

Замечание 3. Пусть Ω – та же область, что и выше. Тогда пространство $TW_1^1(\Omega)$ не совпадает ни с одним весовым пространством $L_1(\partial\Omega,\sigma)$, где σ – неотрицательная ограниченная измеримая весовая функция на $\partial\Omega$, отделенная от нуля на любой части $\partial\Omega$, удаленной от точки O.

В самом деле, предположим, что $L_1(\partial\Omega,\sigma)$ вложено в $TW_1^1(\Omega)$. Пусть $f\in L_1(\partial\Omega,\sigma)$. Определим функцию g на $\partial\Omega$:

$$g(t,\varphi_2(t))=0 \ \text{ при } \ t\in(0,1)$$

и $g=f$ на остальной части $\partial\Omega$. По теореме 2 имеем

$$\|f\sigma\|_{L_1(\partial\Omega)} \ge \|g\sigma\|_{L_1(\partial\Omega)} \ge c\,\|g\|_{TW_1^1(\Omega)} \ge c\int_0^1 |f_1(t)|dt$$

(мы используем обозначения теоремы 2). Оценка

$$\|f\sigma\|_{L_1(\partial\Omega)} \ge c\,\|f_2\|_{L_1(0,1)}$$

устанавливается аналогично. Таким образом,

$$L_1(\partial\Omega, \sigma) \subset L_1(\partial\Omega) \subset TW_1^1(\Omega).$$

Следовательно, равенство $TW_1^1(\Omega) = L_1(\partial\Omega, \sigma)$ влечет равенство $TW_1^1(\Omega) = L_1(\partial\Omega)$, что противоречит замечанию 2.

6.5 Граничные значения функций в плоской области с внутренним пиком

В этом разделе мы имеем дело с областями, описанными в определении 4.7.2. Пусть Ω – плоская область с вершиной внутреннего пика на границе. По теореме 3.1.1 каждая функция $u \in W_p^1(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, имеет след $u|_\sigma \in W_p^{1-1/p}(\sigma)$, если $\sigma \subset \partial\Omega$ – кривая, удаленная от вершины O пика. Поэтому след $u|_{\partial\Omega}$ определен почти всюду. Пространство $TW_p^1(\Omega)$ всех таких следов снабжается нормой (3.1.1/1).

В этом разделе символ c означает различные положительные константы, зависящие только от p и Ω, а соотношение $a \sim b$ равносильно тому, что $c \le a/b \le c^{-1}$.

Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная область с вершиной внутреннего пика на границе. Если $p \in (1, \infty)$, то*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \left(\|f\|^p_{L_p(\partial\Omega)} + \iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} |f(P) - f(Q)|^p \frac{ds_P ds_Q}{\varrho(P,Q)^p} \right)^{1/p}, \quad (1)$$

где ds_P, ds_Q – элементы длины на $\partial\Omega$, а $\varrho(P,Q)$ – расстояние между точками P, Q вдоль кривой $\partial\Omega$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $U \cap \partial\Omega = \{O\} \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$, где U – окрестность из определения 4.7.2 и

$$\Gamma_\pm = \{(x, \varphi_\pm(x)) : \ x \in (0,1)\}. \quad (2)$$

Если f – функция на $\partial\Omega$, то функции f_+, f_- определяются на (0,1) равенством

$$f_\pm(x) = f(x, \varphi_\pm(x)), \quad x \in (0,1).$$

Заметим, что норма в правой части (1) эквивалентна норме

$$\|\!|f|\!\| = \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + \langle f \rangle,$$

где $\sigma = \partial\Omega \setminus \{(x,y) \in U \cap \partial\Omega :\ x \le 1/2\}$ и

$$\langle f\rangle^p = \|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_-)} + \|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_+)} +$$
$$+ \int_0^1 |f_+(x) - f_-(x)|^p \frac{dx}{x^{p-1}}.$$

Эквивалентность упомянутых норм следует из соотношений

$$\varrho(P,Q) \sim x + t, \ \text{ если } \ P = (x, \varphi_+(x)) \in \Gamma_+,\ Q = (t, \varphi_-(t)) \in \Gamma_-,$$

$$x^{1-p} \sim \int_0^1 \frac{dt}{(x+t)^p}, \quad x \in (0,1)$$

и неравенства

$$\Bigg|\Bigg(\iint\limits_S |f_+(x) - f_-(t)|^p \frac{dxdt}{(x+t)^p}\Bigg)^{1/p} -$$
$$-\Bigg(\iint\limits_S |f_+(x) - f_-(x)|^p \frac{dxdt}{(x+t)^p}\Bigg)^{1/p}\Bigg| \le$$
$$\le \Bigg(\iint\limits_S |f_-(x) - f_-(t)|^p \frac{dxdt}{|x-t|^p}\Bigg)^{1/p}, \quad S = (0,1)\times(0,1).$$

Таким образом, соотношение (1) эквивалентно соотношению

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim |\!|\!| f |\!|\!|. \tag{3}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $B_{2\varepsilon} \subset U,\ B_{2\varepsilon} \cap \sigma = \emptyset$. Используя гладкую срезающую функцию и теорему 3.1.1, легко показать, что (3) является следствием соотношения

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \langle f\rangle \tag{4}$$

для функций f, удовлетворяющих условию $\operatorname{supp} f \subset B_\varepsilon$.

Для проверки (4) рассмотрим вспомогательную область

$$D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) : x \in [0,2],\ \varphi_-(x) \le y \le \varphi_+(x)\},$$

где φ_-, φ_+ определены на $[1,2]$ равенством

$$\varphi_\pm(1+x) = \varphi_\pm(1-x), \quad x \in [0,1].$$

Для заданной функции f на $\partial\Omega$, $\operatorname{supp} f \subset B_\varepsilon$, определим функцию g на ∂D:

$$g\big|_{\partial D\cap\partial\Omega} = f\big|_{\partial D\cap\partial\Omega}, \quad g\big|_{\partial D\setminus\partial\Omega} = 0.$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(B_{2\varepsilon})$, $\psi = 1$ на B_ε. Если $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = f$, а функция v удовлетворяет условиям

$$v\big|_{D\cap B_{2\varepsilon}} = \psi u, \quad v\big|_{D\setminus B_{2\varepsilon}} = 0,$$

то $v \in W_p^1(D)$, а также

$$v\big|_{\partial D} = g, \quad \|v\|_{W_p^1(D)} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Обратно, если $v \in W_p^1(D)$, $v|_{\partial D} = g$, а функция u определена на Ω равенствами

$$u\big|_{\Omega\cap B_{2\varepsilon}} = \psi v, \quad u\big|_{\Omega\setminus B_{2\varepsilon}} = 0,$$

то $u \in W_p^1(\Omega)$ и

$$u\big|_{\partial\Omega} = f, \quad \|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\|v\|_{W_p^1(D)}.$$

Таким образом, включения $f \in TW_p^1(\Omega)$, $g \in TW_p^1(D)$ имеют место одновременно и

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \|g\|_{TW_p^1(D)}.$$

Теперь (4) следует из теоремы 6.3/1. Теорема доказана.

Замечание 1. Если Ω – та же область, что и в предыдущей теореме, то $TW_1^1(\Omega) = L_1(\partial\Omega)$. Это равенство является простым следствием теоремы 3.1.1.

Замечание 2. Очевидные изменения в доказательстве теоремы позволяют рассмотреть область с разрезом, т.е. случай $\varphi_+ = \varphi_-$ (ср. замечание 6.3/1). Сформулируем соответствующий результат не примере круга с удаленным радиусом.

Пример. Пусть $\Omega = B_1 \setminus \{(x,0) : 0 \le x \le 1\}$ и пусть (r,θ) – полярные координаты. Функция f, определенная на $\partial\Omega$ (и имеющая, вообще говоря, различные значения на “берегах” $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$), принадлежит $TW_p^1(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$, тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} |f(1,\theta)|^p d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(1,\theta) - f(1,\alpha)|^p}{|\theta-\alpha|^p} d\alpha d\theta +$$

$$+\int_0^1 dr\int_0^{\pi/2}\frac{|f(r,0)-f(1,\theta)|^p}{(1-r)^p+\theta^p}d\theta+$$

$$+\int_0^1 dr\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{|f(r,2\pi)-f(1,\theta)|^p}{(1-r)^p+(2\pi-\theta)^p}d\theta+$$

$$+\int_0^1(|f(r,0)|^p+|f(r,2\pi)|^p)dr+\int_0^1|f(r,2\pi)-f(r,0)|^p\frac{dr}{r^{p-1}}<\infty.$$

Замечание 3. Комбинируя теорему настоящего раздела с теоремами 6.4/1–2 и замечанием 1, мы приходим к следующим нормировкам пространства $TW_p^1(\mathbf{R}^2,\partial\Omega)$ для области Ω с внутренним пиком (ср. замечание 6.3/2):

$$\|f\|_{TW_1^1(\mathbf{R}^2,\partial\Omega)}\sim\|f\|_{L_1(\partial\Omega)}$$

и

$$\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^2,\partial\Omega)}\sim\Big\{\int_0^1|f(x,\varphi_+(x))-f(x,\varphi_-(x))|^p\varphi(x)^{1-p}dx+$$

$$+\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_-)}+\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\Gamma_+)}+\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}\Big\}^{1/p},\ p\in(1,\infty).$$

Здесь $\varphi=\varphi_+-\varphi_-$, Γ_+,Γ_- определены в (2), а σ – любое открытое связное подмножество $\partial\Omega$, удаленное от вершины O пика и содержащее $\partial\Omega\setminus(\Gamma_+\cup\Gamma_-\cup\{O\})$.

6.6 Комментарии к главе 6

Содержание разделов 6.1 – 6.3 соответствует работе В. Г. Мазья, Ю. В. Нетрусова и С. В. Поборчего [42].

Теорема 6.4/1 при некоторых дополнительных условиях на границу вблизи особой точки была доказана Г. Н. Яковлевым [78]. Теорема 6.5 также принадлежит Г. Н. Яковлеву [77].

Теорема 6.4/2 установлена в работе авторов [47].

В связи с теоремой 6.3/2 укажем работу Г. Анцелотти и М. Джаквинта [84], где найдено необходимое и достаточное условие совпадения пространств $TW_1^1(\Omega)$ и $L_1(\partial\Omega)$:

$$\sup_{x\in\Omega}\lim_{\varrho\to 0}\sup\{P_{C\Omega}(E)/P_\Omega(E):E\subset\Omega_\varrho(x)\}<\infty.$$

Здесь $\Omega_\varrho(x) = B_\varrho(x) \cap \Omega$, а $P_\Omega(E)$, $P_{C\Omega}(E)$ – внутренняя и внешняя части периметра измеримого множества E относительно области Ω (см. [84]). Отметим, что условия суммируемости граничных следов функций из $BV(\Omega)$ изучались в работе Ю. Д. Бураго и В. Г. Мазья [11] (см. также В. Г. Мазья [40, гл. 6]).

Начиная с 70-х годов прошлого века интенсивно изучались следы дифференцируемых функций на подмножествах $\mathbf{R}^n$ с нецелой хаусдорфовой размерностью (такие подмножества еще носят название фракталов). Укажем работы А. Ёнссона и Х. Валлина [114], А. Ёнссона [113], Х. Валлина [140, 141] в этом направлении.

Ю. В. Нетрусов [53, 54, 55] рассмотрел задачу о продолжении функций из L_p-пространств на подмножествах $\mathbf{R}^n$ в пространства гладких функций на $\mathbf{R}^n$. В частности, он показал, что для каждого множества $F \subset \mathbf{R}^n$ с локально конечной $(n-l)$-мерной мерой Хаусдорфа существует ограниченный (нелинейный) оператор продолжения: $L_1(F) \to W_1^l(\mathbf{R}^n)$, $l < n$.

Отметим здесь работу П. Хайлаша и О. Мартио [106], где следы функций из $W_p^1(\mathbf{R}^n)$ на широком классе подмножеств $\mathbf{R}^n$ описаны в терминах пространств Соболева в метрических пространствах.

Упомянем еще работу Ю. Брудного и П. Шварцмана [89], в которой, в частности, пространство следов $\big(C^1(\mathbf{R}^n) \cap L^1_\infty(\mathbf{R}^n)\big)|_F$ охарактеризовано для замкнутого $F \subset \mathbf{R}^n$.

Глава 7

Граничные следы функций из пространств Соболева в областях с пиками

В этой главе изучается пространство граничных следов функций класса W_p^1, $p \in [1, \infty)$, в n-мерной области ($n > 2$) с вершиной пика на границе. В разд. 7.1 рассмотрен случай $p = 1$. В разд. 7.2 охарактеризовано пространство следов для внешнего пика при $p > 1$. Пространство граничных значений функций в области с внутренним пиком описано в разд. 7.3 и 7.4 при $p < n - 1$ и $p = n - 1$ соответственно. В разд. 7.5 доказаны некоторые вспомогательные интегральные неравенства для функций, определенных на границе области в окрестности вершины пика. В разд. 7.6 охарактеризовано пространство граничных следов функций из W_p^1 для области с внутренним пиком при $p > n - 1$.

Опишем полученные в седьмой главе результаты на примере пика

$$\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1),\ |y| < \varphi(z)\}, \quad n > 2,$$

где φ – возрастающая функция из $C^{0,1}([0, 1])$, такая, что $\varphi(0) = \lim_{z \to 0} \varphi'(z) = 0$.

Оказывается, что граничные значения функций из $W_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ и $W_p^1(\Omega)$ характеризуются конечностью нормы

$$\|\!|f|\!\|_{p,\partial\Omega} = \Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} |f(x)|^p q(x) ds_x + \iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} |f(x)-f(\xi)|^p Q(x,\xi) ds_x ds_\xi \Bigg)^{\frac{1}{p}},$$

где q и Q – неотрицательные весовые функции, а ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности $\partial\Omega$.

Пусть f – функция на $\partial\Omega$ с носителем в малой окрестности вершины пика. Тогда $f \in TW_p^1(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$, в том и только в том случае, если $\|\!|f|\!\|_{p,\partial\Omega} < \infty$, где $0 \le q(x) \le \mathrm{const} \cdot \varphi'(z)$,

$$Q(x,\xi) = \begin{cases} |x-\xi|^{2-n-p} \ \text{при} \ |z-\zeta| < M(z,\zeta), \ z,\zeta \in (0,1), \\ 0 \ \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$x = (y,z), \xi = (\eta,\zeta)$ и $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z),\varphi(\zeta)\}$. При этом норма $\|\!|f|\!\|_{p,\partial\Omega}$ эквивалентна норме $\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$.

Необходимым и достаточным условием принадлежности функции f пространству $TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ является конечность $\|\!|f|\!\|_{p,\partial\Omega}$, где

$$q(x) = \begin{cases} \varphi(z)^{1-p} \ \text{при} \ 1 < p < n-1, \\ \big(\varphi(z)|\log(\varphi(z)/z)|\big)^{1-p} \ \text{при} \ p = n-1, \\ \varphi(z)^{2-n} \ \text{при} \ p > n-1 \end{cases}$$

и $Q(x,\xi) \ne 0$ только если $z,\zeta \in (0,1)$. Для таких пар $x,\xi \in \partial\Omega$ весовая функция Q определяется следующим образом. В случае $p < n-1$

$$Q(x,\xi) = |x-\xi|^{2-n-p}.$$

Той же формулой значение $Q(x,\xi)$ определяется и при $p \ge n-1$, $|x-\xi| < M(z,\zeta)$. Наконец, если $|x-\xi| \ge M(z,\zeta)$, то

$$Q(x,\xi) = \frac{M(z,\zeta)^{2(1-p)}}{|x-\xi|} \left(\log\left(1 + \frac{|x-\xi|}{M(z,\zeta)}\right)\right)^{-p}, \ \ p = n-1,$$

и

$$Q(x,\xi) = |x-\xi|^{n-p-2}\big(\varphi(z)\varphi(\zeta)\big)^{2-n}, \ \ p > n-1.$$

Норма $\|\!|f|\!\|_{p,\partial\Omega}$ с такими весами q, Q эквивалентна $\|f\|_{TW_p^1(\mathbf{R}^n\setminus\overline{\Omega})}$. При $p = n-1$ на функцию φ накладываются некоторые дополнительные условия.

Определенная на $\partial\Omega$ функция f с носителем в малой окрестности вершины пика принадлежит пространству $TW_1^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\|f\|_{1,\partial\Omega} < \infty$, где

$$0 \le q(x) \le \mathrm{const}\, \varphi'(z),$$

$$Q(x,\xi) = \begin{cases} M(z,\zeta)^{1-n} \ \text{при} \ z,\zeta \in (0,1), \ |z-\zeta| < M(z,\zeta), \\ 0 \ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, нормы $\|f\|_{TW_1^1(\Omega)}$ и $\|f\|_{1,\partial\Omega}$ эквивалентны.

Пространство $TW_1^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ совпадает с $L_1(\partial\Omega)$ с эквивалентностью норм.

Во всех перечисленных случаях существует ограниченный оператор продолжения:

$$TW_p^1(\Omega) \to W_p^1(\Omega) \ \text{ или } \ TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \to W_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}).$$

Этот оператор линеен при $p > 1$ и нелинеен при $p = 1$.

7.1 Следы функций с градиентом из L_1

В этом разделе изучается пространство $TW_1^1(\Omega)$ для области с вершиной внешнего или внутреннего пика на границе.

7.1.1 Внешние пики

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n > 2$, и пусть точка O является вершиной внешнего пика в смысле определения 4.1.1. Дополнительно будем считать, что границы $\partial\omega$ и $\partial\Omega$ связны, а также $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$. Для простоты изложения будем еще предполагать выполнение условий $\varphi(z) < z$ при $z \in (0,1]$ и

$$U \cap \partial\Omega = \Gamma \cup \{O\}, \ \ \Gamma = \{(y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0,1), y/\varphi(z) \in \partial\omega\}, \quad (1)$$

где функция φ и окрестность U – те же, что и в определении 4.1.1.

Замечание 1. Сделаем здесь одно общее замечание относительно граничных значений функций из $W_p^1(\Omega)$ для области с вершиной внутреннего или внешнего пика на границе. Так как поверхность $\partial\Omega \setminus \{O\}$ локально представима графиком липшицевой функции, то каждый элемент $v \in W_p^1(\Omega)$ имеет след $v|_{\partial\Omega}$, определенный почти всюду на $\partial\Omega$. Этот след описывается теоремой 3.1.1 в окрестности любой точки из $\partial\Omega\backslash\{O\}$. Можно показать (см., например, упражнение 1.6 на стр. 74 в [125]), что множество $\{v \in W_p^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ совпадает с $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, т.е. с замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W_p^1(\Omega)$. Таким образом, пространство граничных следов

$$TW_p^1(\Omega) = \{f = v\big|_{\partial\Omega} : v \in W_p^1(\Omega)\},$$

с нормой (3.1.1/1) изоморфно фактор-пространству $W_p^1(\Omega)/\mathring{W}_p^1(\Omega)$.

Далее в этом разделе через c обозначаются положительные постоянные, зависящие только от n и Ω. Соотношение $a \sim b$ по определению означает, что $c^{-1} \le a/b \le c$.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной пика, направленного во внешность области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Тогда*

$$\|f\|_{TW_1^1(\Omega)} \sim \int_{U\cap\partial\Omega} \varphi'(z)|f(x)|ds_x + \int_S |f(x)|ds_x + \langle f\rangle, \qquad (2)$$

где

$$\langle f\rangle = \iint\limits_{\{x,\xi\in U\cap\partial\Omega:|\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|\frac{ds_x ds_\xi}{M(z,\zeta)^{n-1}},$$

$x = (y,z)$, $\xi = (\eta,\zeta)$, ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности $\partial\Omega$, U – окрестность из определения 4.1.1,

$$S = \partial\Omega \setminus \{x \in U\cap\partial\Omega : z \in [0,1/2]\}$$

и

$$M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}.$$

Соотношение (2) останется верным, если опустить первое слагаемое в его правой части.

Доказательство. Пусть $v \in W_1^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = f$. По теореме 3.1.1

$$\|f\|_{L_1(S)} \le c\,\|v\|_{W_1^1(\Omega)}. \qquad (3)$$

Положим $\gamma = \partial\omega$. Ясно, что

$$\int_\Gamma \varphi'(z)|f(x)|ds_x \le c\int_0^1 \varphi(z)^{n-2}\varphi'(z)dz \int_\gamma |f(\varphi(z)Y,z)|d\gamma_Y,$$

где поверхность Γ определена в (1). Полагая $\varphi(z) = t$, приведем правую часть последнего неравенства к виду

$$c\int_0^{\varphi(1)} t^{n-2}dt\int_\gamma |f(tY,\varphi^{-1}(t))|d\gamma_Y. \tag{4}$$

Отображение $s = y$, $t = \varphi(z)$ переводит множество $U\cap\Omega$ на конус $K = \{(s,t) : t \in (0,\varphi(1)),\ s/t \in \omega\}$. Пусть $w(s,t) = v(s,\varphi^{-1}(t))$. Тогда

$$\|w\|_{W_1^1(K)} \leq c\,\|v\|_{W_1^1(U\cap\Omega)}.$$

Заметим, что выражение (4) не превосходит $c\,\|w\|_{L_1(\partial K)}$, что, в свою очередь, не больше $c\,\|w\|_{W_1^1(K)}$ по теореме 3.1.1. Отсюда

$$\int_\Gamma \varphi'(z)|f(x)|ds_x \leq c\,\|v\|_{W_1^1(\Omega)}. \tag{5}$$

Обратимся к оценке последнего слагаемого в (2). Положим

$$I(f) = \int_\Gamma \frac{ds_x}{\varphi(z)^{n-1}}\int_{\{\xi\in\Gamma:0<z-\zeta<\varphi(z)\}} |f(x)-f(\xi)|ds_\xi. \tag{6}$$

Из (1) и определения полунормы $\langle f\rangle$ получаем $\langle f\rangle = 2I(f)$, поэтому неравенство $\langle f\rangle \leq c\,\|v\|_{W_1^1(\Omega)}$ является следствием оценки

$$I(f) \leq c\,\|\nabla v\|_{L_1(U\cap\Omega)}. \tag{7}$$

Для проверки (7) выберем такое число $z_1 \in (0,1)$, что $2\varphi(z) < z$ при $z \in (0,z_1]$ и построим последовательность $\{z_k\}_{k\geq 0}$ по правилу

$$z_0 = 1,\ \ z_{k+1} = z_k - 2\varphi(z_k),\ \ k \geq 1.$$

Эта последовательность убывает и, кроме того,

$$z_k \to 0,\ \ \varphi(z_{k+1})\varphi(z_k)^{-1} \to 1,\ \ z_{k+1}z_k^{-1} \to 1.$$

Будем считать z_1 столь малым, что $\varphi(z_{k-1}) < 2\varphi(z_k)$ для всех $k \geq 2$. В этом случае $z - \varphi(z) > z_{k+1}$ при $z \in (z_k, z_{k-1})$, $k \geq 2$. Положим

$$a = \min\{z-\varphi(z) : z \in [z_1,1]\},\ \ \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : z \in (a,1)\}$$

и

$$\Gamma_k = \{x \in \Gamma : z \in (z_{k+1}, z_{k-1})\},\ \ k \geq 2,$$

$$\sigma_k = \{x \in \Gamma : z \in (z_k, z_{k-1})\}, \quad k \geq 1.$$

Тогда из включений $x \in \sigma_k$, $\xi \in \Gamma$, $\zeta \in (z - \varphi(z), z)$ следует, что $\xi \in \Gamma_k$. Поэтому

$$I(f) \leq \sum\nolimits_{k\geq 1} \int_{\sigma_k} \frac{ds_x}{\varphi(z)^{n-1}} \int_{\Gamma_k} |f(x) - f(\xi)| ds_\xi \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} [f]_{1,\Gamma_k},$$

где $[\cdot]_{1,\Gamma_k}$ – полунорма (3.1.1/7). По теореме 3.1.2 верна оценка

$$[f]_{1,\Gamma} \leq c \, \|\nabla v\|_{L_1(\Omega_k)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

в которой

$$\Omega_1 = \{x \in U \cap \Omega : z \in (a, 1)\},$$

$$\Omega_k = \{x \in U \cap \Omega : z \in (z_{k+1}, z_{k-1})\}, \quad k \geq 2.$$

Отсюда вытекает неравенство (7).

Оценки (3), (5), (7) показывают, что норма в правой части (2) мажорируется величиной $c \, \|f\|_{TW_1^1(\Omega)}$. Обратимся к проверке обратного неравенства.

Пусть $f \in L_{1,loc}(\partial\Omega \setminus \{O\})$ – такая функция, для которой два последних слагаемых в правой части (2) конечны. Требуется построить продолжение u функции f с поверхности $\partial\Omega$ в область Ω, удовлетворяющее условию

$$c \, \|u\|_{W_1^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_1(S)} + \langle f \rangle. \tag{8}$$

Сначала рассмотрим случай $f|_S = 0$. Положим

$$t_0 = 1, \quad t_{k+1} = t_k - \nu \, \varphi(t_k), \quad k \geq 0, \tag{9}$$

где

$$\nu = \min\{1/6, \, (2\|\varphi'\|_{L_\infty(0,1)})^{-1}\}.$$

Принимая для краткости обозначение $\varphi_k = \varphi(t_k)$, заметим, что

$$t_2 > 2/3, \quad t_k \searrow 0, \quad t_{k+1} t_k^{-1} \to 1, \quad \varphi_{k+1} \varphi_k^{-1} \to 1.$$

Кроме того,

$$\varphi_k - \varphi_{k+1} = \int_{t_{k+1}}^{t_k} \varphi'(t) dt \leq \nu \, \varphi_k \|\varphi'\|_{L_\infty(0,1)} \leq \varphi_k / 2,$$

откуда $\varphi_k \leq 2\varphi_{k+1}$ при $k \geq 0$. Следовательно,

$$t_{k-1} - t_{k+1} = \nu \, (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \leq 6\nu \, \varphi_{k+1} \leq \varphi_{k+1} \tag{10}$$

и, значит,

$$(t_{k+1}, t_{k-1}) \subset (t - \varphi(t), t + \varphi(t)) \;\text{ при }\; t \in (t_{k+1}, t_{k-1}), \;\; k \geq 1. \quad (11)$$

Пусть

$$S_k = \{x \in \Gamma : z \in (t_{k+1}, t_{k-1})\}, \;\; k \geq 1,$$
$$G_k = \{x \in U \cap \Omega : z \in (t_{k+1}, t_{k-1})\}, \;\; k \geq 1,$$

Согласно замечанию 3.1.1 и следствию 3.1.1 для каждого $k \geq 1$ существует функция $w_k \in W_1^1(G_k)$ со свойствами

$$w_k\big|_{S_k} = f - \overline{f}_k, \;\; \varphi_k^{-1}\|w_k\|_{L_1(G_k)} + \|\nabla w_k\|_{L_1(G_k)} \leq c\,[f]_{1,S_k}, \quad (12)$$

где $\overline{f}_k$ – среднее значение функции f на S_k и $[\cdot]_{1,S_k}$ – полунорма (3.1.1/7).

Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ на промежутке $(0, t_1]$, подчиненное покрытию $\{(t_{k+1}, t_{k-1})\}_{k\geq 1}$. При этом можно считать $|\lambda_k'| \leq c\,\varphi_k^{-1}$. Положим

$$V(x) = \sum\nolimits_{k\geq 1} \overline{f}_k \lambda_k(z), \quad x = (y, z) \in U \cap \Omega, \quad (13)$$

$$W(x) = \sum\nolimits_{k\geq 1} \lambda_k(z) w_k(x), \quad x \in U \cap \Omega, \quad (14)$$

$$(E\,f)(x) = V(x) + W(x), \;\; x \in U \cap \Omega, \quad E\,f\big|_{\Omega\setminus U} = 0 \quad (15)$$

(общий член суммы в (14) доопределяется нулем вне G_k). Имеем $V(x) = W(x) = 0$ при $z > t_1$. Отсюда и из (13)–(15) следует равенство $E\,f\big|_{\partial\Omega} = f$. Мы утверждаем также, что верна оценка

$$\|E\,f\|_{W_1^1(\Omega)} \leq c\,\langle f\rangle. \quad (16)$$

В самом деле, заметим, что

$$V|_{G_k\cap G_{k+1}} = \overline{f}_{k+1} + (\overline{f}_k - \overline{f}_{k+1})\lambda_k, \;\; k \geq 1,$$

откуда

$$\|\nabla V\|_{L_1(G_k\cap G_{k+1})} \leq c\,\varphi_k^{n-1}|\overline{f}_k - \overline{f}_{k+1}| \leq c\sum\nolimits_{i=k}^{k+1} \|f - \overline{f}_i\|_{L_1(S_i)}.$$

По лемме 3.1.1 последняя сумма не больше $\sum_{i=k}^{k+1}[f]_{1,S_i}$. Поэтому

$$\|\nabla V\|_{L_1(U\cap\Omega)} \leq c\sum\nolimits_{k\geq 1}[f]_{1,S_k}. \quad (17)$$

Ввиду (12) аналогичная оценка имеет место и для W:

$$\|\nabla W\|_{L_1(U\cap\Omega)} \le c\sum\nolimits_{k\ge 1}[f]_{1,S_k}. \qquad (18)$$

В силу (11) сумма в правой части (18) не превосходит

$$\sum\nolimits_{k\ge 1}|S_k|^{-1}\int_{S_k} ds_x \int_{\{\xi\in\Gamma:|\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|ds_\xi,$$

где $|S_k|$ означает площадь поверхности S_k. Поскольку

$$|S_k| \sim M(z,\zeta)^{n-1} \text{ при } x\in S_k,\, \xi\in\Gamma,\ \ |\zeta-z|<M(z,\zeta),$$

то последняя сумма мажорируется величиной $c\,\langle f\rangle$. Отсюда и из (15), (17), (18) получаем

$$\|\nabla(E\,f)\|_{L_1(\Omega)} \le c\,\langle f\rangle.$$

Теперь (16) вытекает из леммы 4.1.1.

Обращаясь к построению продолжения $f\mapsto u$ в общем случае, предположим, что

$$f\in L_{1,loc}(\partial\Omega\setminus\{O\}) \text{ и } \langle f\rangle + \|f\|_{L_1(S)}<\infty.$$

По теореме 3.1.1 существует функция $\tilde u\in W_1^1(\Omega)$ со свойствами

$$\tilde u\big|_{\partial\Omega} = \chi f, \quad \|\tilde u\|_{W_1^1(\Omega)} \le c\,\|f\|_{L_1(S)}, \qquad (19)$$

где χ – характеристическая функция S. Положим $g=(1-\chi)f$ и определим $E\,g$ при помощи (13)–(15) (с заменой f на g). Тогда функция $u=\tilde u+E\,g$ удовлетворяет граничному условию $u|_{\partial\Omega}=f$, а неравенства (16), (19) приводят к оценке

$$c\,\|u\|_{W_1^1(\Omega)} \le \|f\|_{L_1(S)} + \langle g\rangle.$$

Требуемое неравенство (8) вытекает из предыдущей оценки и оценки

$$\langle g\rangle \le c\,(\|f\|_{L_1(S)} + \langle f\rangle). \qquad (20)$$

Докажем последнюю. Так как

$$|g(x)-g(\xi)| \le |f(x)-f(\xi)| + |f(x)||\chi(x)-\chi(\xi)|,$$

то

$$I(g) \le I(f) + \int_{\Gamma} |f(x)| \frac{ds_x}{\varphi(z)^{n-1}} \int_{\Gamma(z)} |\chi(x) - \chi(\xi)| ds_\xi, \qquad (21)$$

где $I(f)$ – полунорма, определенная в (6) и

$$\Gamma(z) = \{\xi = (\eta, \zeta) \in \Gamma : \zeta \in (z - \varphi(z), z)\}.$$

При $x \in \Gamma \setminus S$ интеграл по $\Gamma(z)$ равен нулю, а в случае $x \in \Gamma \cap S$ этот интеграл не превосходит $c\,\varphi(z)^{n-1}$. Следовательно, двойной интеграл в (21) не больше $c\,\|f\|_{L_1(\Gamma\cap S)}$. Чтобы получить (20), остается использовать эквивалентность полунорм $\langle f\rangle$ и $I(f)$.

Возможность опустить интеграл по $U \cap \partial\Omega$ в (2) вытекает из (5) и (8). Доказательство теоремы закончено.

Замечание 2. Соотношение (2) останется верным, если S является связным открытым подмножеством $\partial\Omega$, содержащим $\partial\Omega \setminus U$ и расположенным на положительном расстоянии от вершины O. Доказательство этого факта аналогично приведенному в теореме. Надо только выбрать подходящим образом коэффициент ν в (9). При этом константы в соотношении эквивалентности (2), вообще говоря, зависят от S.

Замечание 3. Объединяя теорему настоящего раздела с теоремой 5.4.2, приходим к следующему утверждению: если выполнено условие

$$\sup_{r\in(0,1)} \left\{ \left(\int_0^r \varphi(z)^{n-2} dz \right)^{1/q} \varphi(r)^{1-n} \right\} < \infty, \quad q \in [1, \infty),$$

то для области Ω с внешним пиком верно соотношение

$$\|f\|_{TW_1^1(\Omega)} \sim \langle f\rangle + \|f\|_{L_q(\partial\Omega)},$$

где $\langle f\rangle$ – та же полунорма, что и в (2).

Используя только что доказанную теорему, можно выписать явно определяемую полунорму, эквивалентную полунорме $\|\cdot\|_{TL_1^1(\Omega)}$ (см. (3.1.1/2)).

Следствие. *В условиях сформулированной выше теоремы верно соотношение*

$$\|f\|_{TL_1^1(\Omega)} \sim \langle f\rangle + [f]_{1,S},$$

где $[\cdot]_{1,S}$ *– полунорма* (3.1.1/7).

Доказательство. Пусть $\overline{f}$ – среднее значение функции f на поверхности S. Объединяя следствие 3.1.1, теорему 1.5.2 и соотношение (2) с опущенным первым слагаемым в правой части, получим

$$\|f\|_{TL_1^1(\Omega)} \sim \|f-\overline{f}\|_{TW_1^1(\Omega)} \sim \langle f\rangle + \|f-\overline{f}\|_{L_1(S)}.$$

Остается заметить, что $\|f-\overline{f}\|_{L_1(S)} \sim [f]_{1,S}$.

7.1.2 О невозможности совпадения пространств $TW_1^1(\Omega)$ и $L_1(\partial\Omega,\sigma)$

Пусть $n>2$ и $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ – область с внешним пиком. Предположим, что функция $\sigma\in L_\infty(\partial\Omega)$ неотрицательна и отделена от нуля на любом подмножестве $\partial\Omega$, находящемся на положительном расстоянии от вершины O пика. Обозначим через $L_1(\partial\Omega,\sigma)$ пространство функций на $\partial\Omega$, характеризующихся конечностью нормы

$$\|f\|_{L_1(\partial\Omega,\sigma)} = \|\sigma f\|_{L_1(\partial\Omega)}.$$

Если $\sigma(x)\le c\,\varphi'(z)$ вблизи точки O, то по теореме 7.1.1 верны вложения $L_1(\partial\Omega)\subset TW_1^1(\Omega)\subset L_1(\partial\Omega,\sigma)$. Покажем, что указанные вложения строгие, и, следовательно, невозможно описать пространство $TW_1^1(\Omega)$ в терминах весовых классов $L_1(\partial\Omega,\sigma)$.

Допустим, что пространство $L_1(\partial\Omega,\sigma)$ вложено в $TW_1^1(\Omega)$. На поверхности $\gamma=\partial\omega$ выделим две дизъюнктные части γ_1 и γ_2 равной $(n-2)$-мерной площади. Положим

$$\Gamma_i=\{x=(y,z): z\in(0,1), y/\varphi(z)\in\gamma_i\},\quad i=1,2.$$

Для произвольного элемента $f\in L_1(\partial\Omega,\sigma)$ определим функцию g на $\partial\Omega$: $g(x)=f(x)$ при $x\in\Gamma_1$ и $g(x)=0$ при $x\in\partial\Omega\setminus\Gamma_1$. Так как $g\in L_1(\partial\Omega,\sigma)$, то по теореме 7.1.1 имеем

$$\|\sigma f\|_{L_1(\Gamma_1)} = \|\sigma g\|_{L_1(\partial\Omega)} \ge c\,\|g\|_{TW_1^1(\Omega)} \ge c\,\langle g\rangle \ge$$

$$\ge c\int_{\Gamma_1}|f(x)|\frac{ds_x}{\varphi(z)^{n-1}}\int_{\Gamma_2(z)} ds_\xi \ge c\int_{\Gamma_1}|f(x)|ds_x,$$

где $\Gamma_2(z)=\{\xi=(\eta,\zeta)\in\Gamma_2:\zeta\in(z-\varphi(z),z)\}$. Аналогично получим

$$\|\sigma f\|_{L_1(\Gamma_2)} \ge c\,\|f\|_{L_1(\Gamma_2)}.$$

Итак, из вложения $L_1(\partial\Omega,\sigma)\subset TW_1^1(\Omega)$ вытекает, что

$$L_1(\partial\Omega,\sigma)\subset L_1(\partial\Omega).$$

Пусть теперь пространство $TW_1^1(\Omega)$ вложено в $L_1(\partial\Omega,\sigma)$, где вес σ "сильнее" φ' в том смысле, что

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{ess\,inf}\left\{ \big(\varphi'(t)\big)^{-1} \int_\gamma \sigma(\varphi(t)Y,t)d\gamma_Y : t\in(0,z) \right\} = \infty. \qquad (1)$$

Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ определим функцию u на Ω, полагая $u=0$ вне множества $\{(y,z)\in U\cap\Omega,\ z\le \varepsilon+\varphi(\varepsilon)\}$, а на указанном множестве $u(x)=1$ при $z\le\varepsilon$ и $u(x)=1-(z-\varepsilon)/\varphi(\varepsilon)$, если $z\in[\varepsilon,\varepsilon+\varphi(\varepsilon)]$. Подставляя функцию u в неравенство

$$\|\sigma u\|_{L_1(\partial\Omega)} \le c\,\|u\|_{W_1^1(\Omega)},$$

получим

$$\int_0^\varepsilon \varphi(z)^{n-2}dz \int_\gamma \sigma(\varphi(z)Y,z)d\gamma_Y \le c\,\varphi(\varepsilon)^{n-1},$$

что противоречит равенству (1).

В частности, пространство $TW_1^1(\Omega)$ не вложено в $L_1(\partial\Omega)$ и, в силу вышесказанного, не совпадает с весовым классом $L_1(\partial\Omega,\sigma)$.

7.1.3 Внутренние пики

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n, n>2$, и точка $O\in\partial\Omega$ является вершиной пика, направленного внутрь Ω в смысле определения 4.7.1. Для простоты изложения наложим на Ω те же дополнительные требования, что и в случае внешнего пика: $\overline{\omega}\subset B_1^{(n-1)}$, $\partial\omega$ и $\partial\Omega$ связны, а также $\varphi(z)<z$ при $z\in(0,1]$.

Пространство $TW_1^1(\Omega)$ описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть область Ω имеет вершину внутреннего пика на границе. Тогда $TW_1^1(\Omega)=L_1(\partial\Omega)$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что окрестность U из определения 4.7.1 имеет вид

$$U=\{x=(y,z)\in\mathbf{R}^n : z\in(-1,1),\ |y|<1\}$$

и что верно (7.1.1/1).

Пусть $u\in W_1^1(\Omega)$, $u\big|_{\partial\Omega}=f$. Норма функции f в $L_1(\partial\Omega\setminus U)$ мажорируется величиной $c\,\|u\|_{W_1^1(\Omega)}$ ввиду теоремы 3.1.1. Кроме того, согласно теореме 3.2 при п.в. $z\in(0,1)$ имеем

$$\|f(\cdot,z)\|_{L_1(\Gamma_z)} \le c\,\|u(\cdot,z)\|_{W_1^1(U_z)}, \qquad (1)$$

где Γ_z и U_z означают сечения гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$ множеств $U \cap \partial\Omega$ и $U \cap \Omega$ соответственно. Интегрируя (1) по $z \in (0,1)$, убедимся, что норма элемента f в пространстве $L_1(U \cap \partial\Omega)$ не превосходит $c\,\|u\|_{W_1^1(\Omega)}$. Таким образом,

$$\|f\|_{L_1(\partial\Omega)} \le c\,\|f\|_{TW_1^1(\Omega)}.$$

Для доказательства обратного неравенства построим продолжение $u \in W_1^1(\Omega)$ функции $f \in L_1(\partial\Omega)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_1^1(\Omega)} \le c\,\|f\|_{L_1(\partial\Omega)}. \tag{2}$$

Пусть $B_{2\varepsilon} \subset U$. Достаточно определить требуемое продолжение функции f в случае $\operatorname{supp} f \subset B_\varepsilon$ (общий случай тогда обосновывается с помощью срезки и теоремы 3.1.1). Будем считать ε столь малым, что $\varphi(2\varepsilon) \le \varepsilon$. Положим

$$z_0 = 2\varepsilon, \ \ z_{k+1} = z_k - \varphi(z_k), \ \ k = 0, 1, \ldots$$

Отметим следующие свойства построенной последовательности:

$$z_k \searrow 0, \ \ z_{k+1} z_k^{-1} \to 1, \ \ \varphi(z_{k+1})\varphi(z_k)^{-1} \to 1.$$

На промежутке $(0, z_1]$ введем гладкое разбиение единицы $\{\sigma_k\}_{k\ge1}$, подчиненное покрытию $\{(z_{k+1},\ z_{k-1})\}_{k\ge1}$, причем $|\sigma_k'| \le c/\varphi(z_k)$. Пусть

$$\Gamma_k = \{x \in U \cap \partial\Omega : z \in (z_{k+1},\ z_{k-1})\}, \ \ k \ge 1.$$

В силу замечания 3.1.1 для каждого $k \ge 1$ существует оператор продолжения

$$E_k : L_1(\Gamma_k) \to W_1^1(\mathbf{R}^n),$$

удовлетворяющий условию

$$\|\nabla(E_k g)\|_{L_1(\mathbf{R}^n)} + \varphi(z_k)^{-1}\|E_k g\|_{L_1(\mathbf{R}^n)} \le c\,\|g\|_{L_1(\Gamma_k)} \tag{3}$$

при $g \in L_1(\Gamma_k)$. Пусть еще $\psi \in C_0^\infty(B_{2\varepsilon})$, $\psi = 1$ в B_ε. Определим функцию u на Ω следующим образом: $u(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus B_{2\varepsilon}$ и

$$u(x) = \psi(x) \sum\nolimits_{k\ge1} \sigma_k(z)(E_k f_k)(x), \ \ x = (y, z) \in \Omega \cap B_{2\varepsilon},$$

где $f_k = f|_{\Gamma_k}$. Тогда $u|_{\partial\Omega} = f$, и с помощью (3) легко проверяется оценка (2). Доказательство теоремы закончено.

Из этой теоремы непосредственно вытекает такое утверждение.

Следствие. *Для той же области, что и в теореме, верно соотношение*

$$\|f\|_{TL_1^1(\Omega)} \sim [f]_{1,\partial\Omega},$$

левая и правая части которого определены в (3.1.1/2) *и* (3.1.1/7) *соответственно.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{f}$ среднее значение функции f на $\partial\Omega$. По теореме 1.5.2 (область Ω очевидно удовлетворяет условию конуса) и ввиду сформулированной выше теоремы имеем

$$\|f\|_{TL_1^1(\Omega)} \sim \|f-\overline{f}\|_{TW_1^1(\Omega)} \sim \|f-\overline{f}\|_{L_1(\partial\Omega)} \sim [f]_{1,\partial\Omega}.$$

7.2 Пространство $TW_p^1(\Omega)$ для области с внешним пиком

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, с внешним пиком (см. определение 4.1.1). Мы сохраняем дополнительные требования, сформулированные в начале разд. 7.1.1. В частности, имеет место (7.1.1/1). В настоящем разделе положительные константы c и константы в соотношениях эквивалентности зависят только от n, p, Ω.

Пространство $TW_p^1(\Omega)$ описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной пика, направленного во внешность области Ω. Если $p \in (1,\infty)$, то*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \left(\int_{U\cap\partial\Omega} \varphi'(z)|f(x)|^p ds_x\right)^{1/p} + \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} +$$

$$+\left(\iint\limits_{\{x,\xi\in U\cap\partial\Omega:|\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}, \qquad (1)$$

где

$$\sigma = \partial\Omega \setminus \{x=(y,z)\in U\cap\partial\Omega : 0 \leq z \leq 1/2\},$$

а остальные обозначения те же, что и в теореме 7.1.1. *Соотношение* (1) *останется верным, если в его правой части опустить первое слагаемое.*

Доказательство. Пусть $v \in W_p^1(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = f$. Так как $|v|^p \in W_1^1(\Omega)$ и

$$\||v|^p\|_{W_1^1(\Omega)} \leq c\,\|v\|^p_{W_p^1(\Omega)},$$

то оценка

$$\int_{U\cap\partial\Omega} \varphi'(z)|f(x)|^p ds_x \leq c\,\|v\|^p_{W_p^1(\Omega)} \tag{2}$$

является следствием неравенства (7.1.1/5). Далее, из теоремы 3.1.1 вытекает оценка

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} \leq c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{3}$$

Пусть Γ – поверхность, определенная в (7.1.1/1). Положим для краткости

$$\Delta(f;x,\xi) = |f(x) - f(\xi)|^p|x-\xi|^{2-n-p} \tag{4}$$

и определим полунормы $|f|_{p,\Gamma}$, $I(f)$ равенствами

$$|f|^p_{p,\Gamma} = \iint_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} \Delta(f;x,\xi)ds_x ds_\xi, \tag{5}$$

$$I(f)^p = \iint_{\{x,\xi\in\Gamma:0<z-\zeta<\varphi(z)\}} \Delta(f;x,\xi)ds_x ds_\xi. \tag{6}$$

Легко видеть, что $|f|_{p,\Gamma} \sim I(f)$, поэтому оценка $|f|_{p,\Gamma} \leq c\,\|v\|_{W_p^1(\Omega)}$ следует из неравенства

$$I(f) \leq c\,\|\nabla v\|_{L_p(\Omega\cap U)}. \tag{7}$$

Обратимся к доказательству последнего. Пусть $\{z_k\}_{k\geq 0}$, $\{\Gamma_k\}_{k\geq 1}$, $\{\sigma_k\}_{k\geq 1}$ и $\{\Omega_k\}_{k\geq 1}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 7.1.1 (см. доказательство оценки (7.1.1/7)). Тогда

$$I(f)^p \leq \sum\nolimits_{k\geq 1} \int_{\sigma_k} ds_x \int_{\Gamma_k} \Delta(f;x,\xi)ds_\xi \leq$$

$$\leq \sum\nolimits_{k\geq 1} \iint_{\Gamma_k\times\Gamma_k} \Delta(f;x,\xi)ds_x ds_\xi.$$

По теореме 3.1.2 общий член последней суммы мажорируется величиной $c\,\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega_k)}$, и, значит, эта сумма не больше $c\,\|\nabla v\|^p_{L_p(\Omega\cap U)}$. Отсюда следует (7).

Оценки (2), (3), (7) показывают, что норма в правой части (1) не превосходит $c\,\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$. Для доказательства обратного неравенства продолжим функцию $f \in L_{p,loc}(\partial\Omega \setminus \{O\})$ с конечной нормой $|f|_{p,\Gamma}+\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}$ внутрь области Ω таким образом, что продолжение (обозначаемое через u) удовлетворяет условию

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\big(|f|_{p,\Gamma} + \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}\big). \tag{8}$$

Сначала рассмотрим случай, когда носитель f находится вблизи вершины пика. Пусть $\delta \in (0,1)$ – фиксированное число. Предположим, что $\operatorname{supp} f \subset \{x \in U \cap \partial\Omega : z \le \delta\}$. В этом случае мы определим линейный оператор $f \mapsto E_\delta f \in W_p^1(\Omega)$ со следующими свойствами:

$$E_\delta f\big|_{\partial\Omega} = f, \quad E_\delta f\big|_{\Omega\setminus U} = 0$$

и

$$\|E_\delta f\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,|f|_{p,\Gamma} \tag{9}$$

с постоянной $c = c\,(n,p,\varphi,\omega,\delta)$.

Построение оператора E_δ. Вновь используем последовательность $\{t_k\}_{k\ge 0}$, определенную в (7.1.1/9), где

$$\nu = \min\big\{(1-\delta)/2,\ 1/6,\ \big(2\|\varphi'\|_{L_\infty(0,1)}\big)^{-1}\big\}. \tag{10}$$

Положим $\varphi_k = \varphi(t_k)$. Легко проверить, что

$$t_2 > \delta, \ \ t_{k+1}t_k^{-1} \to 1, \ \ \varphi_{k+1}\varphi_k^{-1} \to 1.$$

Кроме того, имеют место соотношения (7.1.1/10–11). Введем гладкое разбиение единицы $\{\lambda_k\}_{k\ge 1}$ для промежутка $(0,t_1]$, подчиненное покрытию интервалами (t_{k+1},t_{k-1}), $k=1,2,\ldots$ Пусть еще функции $\mu_k \in C_0^\infty(t_{k+1},t_{k-1})$ таковы, что $\mu_k\lambda_k = \lambda_k$ при $k \ge 1$, а также

$$0 \le \mu_k, \lambda_k \le 1, \quad |\mu_k'| + |\lambda_k'| \le c\,\varphi_k^{-1}$$

и

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{supp}\mu_k, \mathbf{R}^1 \setminus (t_{k+1},t_{k-1})\big) \ge c\,\varphi_k, \ \ k=1,2,\ldots$$

Пусть поверхности S_k и области G_k – те же, что и в теореме 7.1.1. Положим

$$f_k(x) = \mu_k(z)(f(x) - \overline{f}_k), \ \ x=(y,z) \in S_k, \ \ k \ge 1,$$

где $\overline{f}_k$ есть среднее значение функции f на S_k.

Проверим оценку

$$\varphi_k^{1/p-1}\|f_k\|_{L_p(S_k)} + [f_k]_{p,S_k} \le c\,[f]_{p,S_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

в которой $[\cdot]_{p,S_k}$ – полунорма (3.1.1/3). В самом деле, ввиду леммы 3.1.1 имеем

$$\|f_k\|_{L_p(S_k)} \le \|f - \overline{f}_k\|_{L_p(S_k)} \le c\,\varphi_k^{1-1/p}[f]_{p,S_k}.$$

Заметим, что $c\,[f_k]^p_{p,S_k} \le [f]^p_{p,S_k} + J$, где

$$J = \iint_{S_k\times S_k} |f(\xi) - \overline{f}_k|^p |\mu_k(z) - \mu_k(\zeta)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}.$$

Так как $|\mu_k'| \le c\,\varphi_k^{-1}$, то

$$J \le c\,\varphi_k^{-p}\int_{S_k} |f(\xi) - \overline{f}_k|^p ds_\xi \int_{S_k} \frac{ds_x}{|x-\xi|^{n-2}}.$$

Внутренний интеграл не больше $c\,\varphi_k$. Отсюда и из леммы 3.1.1 выводим $J \le c\,[f]^p_{p,S_k}$ и, таким образом, устанавливаем (11).

Объединяя неравенства (11) и $[f]_{p,S_k} \le |f|_{p,\Gamma}$ (последнее следует из включений (7.1.1/11)), получим $f_k \in W_p^{1-1/p}(S_k)$. Продолжим функцию f_k, полагая $f_k = 0$ на $\partial G_k \setminus S_k$ (см. Рис. 33). Без труда проверяется, что тогда $f_k \in W_p^{1-1/p}(\partial G_k)$ и при $k \ge 1$ верна оценка

$$\varphi_k^{1-p}\|f_k\|^p_{L_p(\partial G_k)} + [f_k]^p_{p,\partial G_k} \le c\,\big(\varphi_k^{1-p}\|f_k\|^p_{L_p(S_k)} + [f_k]^p_{p,S_k}\big). \tag{12}$$

Согласно замечанию 3.1.1 для каждого k существует линейный оператор продолжения

$$E^{(k)} : W_p^{1-1/p}(\partial G_k) \to W_p^1(\mathbf{R}^n),$$

удовлетворяющий условию

$$\varphi_k^{-1}\|E^{(k)}g\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla E^{(k)}g\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le$$

$$\le c\big(\varphi_k^{-1+1/p}\|g\|_{L_p(\partial G_k)} + [g]_{p,\partial G_k}\big), \quad g \in W_p^{1-1/p}(\partial G_k).$$

Последнее неравенство вместе с (11) и (12) приводят к оценке

$$\varphi_k^{-1}\|E^{(k)}f_k\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla E^{(k)}f_k\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\,[f]_{p,S_k}. \tag{13}$$

Определим теперь функцию $E_\delta f$ на Ω следующим образом: положим $E_\delta f|_{\Omega\setminus U} = 0$ и

$$\big(E_\delta f\big)(x) = \sum\nolimits_{k\geq 1} \overline{f}_k \lambda_k(z) + \sum\nolimits_{k\geq 1} \lambda_k(z)\big(E^{(k)} f_k\big)(x) \tag{14}$$

при $x = (y,z) \in U \cap \Omega$. Так как $f(x) = 0$ при $z \geq t_2 > \delta$, то $(E_\delta f)(x) = 0$ при $z > t_1$. Отсюда и из (14) вытекает, что $E_\delta f|_{\partial\Omega} = f$.

Обратимся к доказательству оценки (9). Обозначим первую сумму в правой части (14) через $V(x)$, а вторую сумму – через $W(x)$. Оценка

$$\|\nabla V\|^p_{L_p(U\cap\Omega)} \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} [f]^p_{p,S_k} \tag{15}$$

доказывается с помощью представления

$$V|_{G_k\cap G_{k+1}} = \overline{f}_{k+1} + (\overline{f}_k - \overline{f}_{k+1})\lambda_k$$

точно так же, как (7.1.1/17) в теореме 7.1.1, а оценка

$$\|\nabla W\|^p_{L_p(U\cap\Omega)} \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} [f]^p_{p,S_k} \tag{16}$$

является следствием (13). Ввиду включения (7.1.1/11) последняя сумма не больше

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} \int_{S_k} ds_x \int_{\{\xi\in\Gamma:|\zeta - z|<M(z,\zeta)\}} \Delta(f;x,\xi)ds_\xi,$$

где величина $\Delta(f;x,\xi)$ определена в (4). Таким образом,

$$\sum\nolimits_{k\geq 1} [f]^p_{p,S_k} \leq c\,|f|^p_{p,\Gamma}. \tag{17}$$

Неравенства (15)–(17) и лемма 4.1.1 приводят к (9).

Построение продолжения $f \mapsto u$ в общем случае. Предположим, что $f \in L_{p,loc}(\partial\Omega \setminus \{O\})$ и правая часть (8) конечна. Пусть ψ – липшицева функция на $\partial\Omega$, такая, что $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ в окрестности множества $\partial\Omega \setminus \sigma$ и

$$\operatorname{supp}\psi \subset \{x = (y,z) \in \partial\Omega \cap U,\ z \leq 3/4\}.$$

Тогда $\operatorname{supp}(1-\psi) \subset \sigma$, и легко устанавливается оценка

$$\|(1-\psi)f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} \leq c\,\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}.$$

По теореме 3.1.1 существует функция $\tilde{u} \in W_p^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{u}\big|_{\partial\Omega} = (1-\psi)f, \quad \|\tilde{u}\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}. \tag{18}$$

Проверим, что требуемое продолжение u функции f (т.е. такое, для которого верна оценка (8)), может быть задано формулой

$$u = \tilde{u} + E_\delta(\psi f) \ \text{ при } \ \delta = 3/4.$$

В самом деле, очевидно равенство $u|_{\partial\Omega} = f$, а из (9) и (18) следует оценка

$$c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + |\psi f|_{p,\Gamma}.$$

Теперь желаемый результат вытекает из неравенства

$$|\psi f|_{p,\Gamma} \le c\left(|f|_{p,\Gamma} + \|f\|_{L_p(\Gamma\cap\sigma)}\right). \tag{19}$$

Для доказательства последнего заметим, что $|\cdot|_{p,\Gamma} \sim I(\cdot)$, как следует из определений (5)–(6). Имеем

$$c\,I(\psi f)^p \le I(f)^p + \int_\Gamma |f(x)|^p J(x)ds_x, \tag{20}$$

где

$$J(x) = \int_{\Gamma(z)} |\psi(x) - \psi(\xi)|^p \frac{ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}$$

и $\Gamma(z) = \{\xi = (\eta,\zeta) \in \Gamma : \zeta \in (z-\varphi(z), z)\}$. Если $x \in \Gamma\setminus\sigma$, то $\psi(x) = \psi(\xi) = 1$ и $J(x) = 0$. Если же $x \in \Gamma\cap\sigma$, тогда

$$J(x) \le c\int_{\Gamma(z)} |x-\xi|^{2-n} ds_\xi.$$

С помощью замены переменных $\varphi(\zeta)^{-1}\eta = Y$, $\varphi(z)^{-1}(z-\zeta) = t$ убедимся, что $J(x) \le c$. Итак, последний член в (20) не больше $c\,\|f\|^p_{L_p(\Gamma\cap\sigma)}$. Отсюда следует (19), и доказательство сотношения (1) закончено.

Возможность опустить первое слагаемое в правой части (1) вытекает из неравенств (2) и (8). Теорема доказана.

Сделаем несколько замечаний относительно установленной теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы следует, что соотношение (1) остается верным, если σ является открытым связным подмножеством $\partial\Omega$, содержащим $\partial\Omega\backslash U$ и удаленным на положительное расстояние от вершины пика.

Замечание 2. Пусть Γ – поверхность, определенная в (7.1.1/1), $f \in L_{p,loc}(\Gamma)$, $f(x) = 0$ при $z > \delta$ и $|f|_{p,\Gamma} < \infty$. Тогда формула (14) определяет оператор продолжения с поверхности Γ внутрь "круглого" пика

$$G = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1), |y| < \varphi(z)\}$$

(мы предполагаем, что $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$). Более того, верна оценка

$$\|E_\delta f\|_{W_p^1(G)} \leq c\,|f|_{p,\Gamma},$$

где $c = c(n, p, \varphi, \omega, \delta)$. Этот факт устанавливается так же, как и оценка (9).

Замечание 3. Пусть Γ и f – те же, что в предыдущем замечании. Тогда правая часть (14) равна нулю, если $z \geq \delta + \varphi(\delta)$. В самом деле, из определения последовательности $\{t_k\}$ (см. (7.1.1/9) и (10)) следует, что $t_2 > \delta$. Поэтому $\delta \in [t_{i+1}, t_i)$ для некоторого $i \geq 2$ и, значит, $(E_\delta f)(y, z) = 0$ при $z \geq t_{i-1}$. Ввиду (7.1.1/10) и монотонности φ имеем

$$\delta + \varphi(\delta) \geq t_{i+1} + \varphi(t_{i+1}) \geq t_{i-1}.$$

Замечание 4. Положим

$$D = \{(y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1),\ y/\varphi(z) \in B_1^{(n-1)} \setminus \overline{\omega}\},$$

где φ и ω – те же, что в теореме (и в определении 4.1.1). Пусть Γ – поверхность, определенная в (7.1.1/1) и $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма, описанная в (4)–(5). Если $u \in W_p^1(D)$ и $u|_\Gamma = f$, то

$$|f|_{p,\Gamma} \leq c\,(n, p, \omega)\|\nabla u\|_{L_p(D)}, \quad p \in (1, \infty).$$

Эта оценка доказывается так же, как и оценка (7). Нужно только в доказательстве заменить области Ω_k на $\{x \in D : z \in (z_{k+1}, z_{k-1})\}$.

Замечание 5. Объединяя теоремы 5.4/1–2 с теоремой настоящего раздела, приходим к такому утверждению: если выполнено условие

$$\int_0^1 \left[\int_0^z \varphi(t)^{n-2} dt \left(\int_z^1 \frac{dt}{\varphi(t)^{\frac{n-1}{p-1}}}\right)^{q-1}\right]^{\frac{p}{p-q}} \frac{dz}{\varphi(z)^{\frac{n-1}{p-1}}} < \infty$$

при $q \in [1, p)$ или условие

$$\sup_{r\in(0,1)} \left(\int_0^r \varphi(z)^{n-2} dz\right)^{1/q} \left(\int_r^1 \varphi(z)^{\frac{1-n}{p-1}} dz\right)^{(p-1)/p} < \infty$$

при $p \le q \le \infty$, то соотношение (1) останется верным при замене первого слагаемого в правой части на $\|f\|_{L_q(\partial\Omega)}$.

Завершим раздел следующим утверждением.

Следствие. *В условиях теоремы справедливо соотношение*

$$\|f\|_{TL^1_p(\Omega)} \sim |f|_{p,\Gamma} + [f]_{p,\sigma}$$

где полунорма $|\cdot|_{p,\Gamma}$ *определена в* (4)–(5) *а полунорма* $[\cdot]_{p,\sigma}$ *– в* (3.1.1/3).

Доказательство аналогично доказательству следствия 7.1.1.

7.3 Пространство $TW^1_p(\Omega)$ для области с внутренним пиком, $p \in (1, n-1)$

В этом разделе мы опишем пространство $TW^1_p(\Omega)$ для области Ω в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внутреннего пика на границе при $p \in (1, n-1)$.

Пусть φ и ω – те же, что и в определении 4.7.1, $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$ и ω имеет связную границу. Пусть Γ – поверхность, введенная в (7.1.1/1). В следующей лемме строится вспомогательный оператор продолжения с поверхности Γ на все пространство $\mathbf{R}^n$, $n > 2$.

Лемма. *Пусть выполнены условия* $p \in (1,\infty)$, $0 < \delta + \varphi(\delta) < 1$, $f \in L_p(\Gamma)$, $f(y,z) = 0$ *при* $z > \delta$ *и* $|f|_{p,\Gamma} < \infty$, *где* $|\cdot|_{p,\Gamma}$ *– полунорма, определенная в* (7.2/4–5). *Тогда существуют линейное отображение* $f \mapsto Ef \in W^1_p(\mathbf{R}^n)$ *и положительная постоянная* $c = c\,(n, p, \varphi, \omega, \delta)$, *такие, что* $Ef|_\Gamma = f$,

$$\operatorname{supp}(Ef) \subset \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in [0, \delta + \varphi(\delta)],\ |y| \le 8\varphi(z)\} \qquad (1)$$

и

$$c\,\|Ef\|^p_{W^1_p(\mathbf{R}^n)} \le |f|^p_{p,\Gamma} + \int_\Gamma \varphi(z)^{1-p} |f(x)|^p ds_x. \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{t_k\}_{k\ge0}$, заданную формулами (7.1.1/9), (7.2/10). Положим $\varphi_k = \varphi(t_k)$,

$$S_k = \{x = (y,z) \in \Gamma : z \in (t_{k+1}, t_{k-1})\}, \quad k \ge 1.$$

Пусть $f_k, \overline{f}_k, \mu_k, E^{(k)}$ имеют тот же смысл, что и в (7.2/13–14). Введем последовательность $\{\psi_k\}_{k\geq 1} \subset C^\infty([0,\infty))$ со свойствами $\psi_k(t) = 1$ при $t \in [0, \varphi_{k-1}]$, $\psi_k(t) = 0$ при $t \geq 2\varphi_{k-1}$ и $|\psi_k'| \leq c\,\varphi_k^{-1}$. Положим

$$\sigma_k(x) = \mu_k(z)\psi_k(|y|), \quad x = (y,z) \in \mathbf{R}^n, \quad k \geq 1.$$

Тогда $\sigma_k(x) = \mu_k(z)$, если $x \in \Gamma$. Отсюда $\sum_{k\geq 1} \sigma_k(x) = 1$ при $x \in \Gamma$, $z \leq t_1$. Заметим также, что $\varphi_{k-1} \leq 2\varphi_k$ при $k = 1, 2, \ldots$, поскольку

$$\varphi_{k-1} - \varphi_k = \int_{t_k}^{t_{k-1}} \varphi'(t)dt \leq \nu\,\varphi_{k-1}\|\varphi'\|_{L_\infty(0,1)} \leq \frac{\varphi_{k-1}}{2}$$

(ср. (7.1.1/9), (7.2/10)). Поэтому

$$\operatorname{supp}\sigma_k \subset \{x \in \mathbf{R}^n : z \in (t_{k+1}, t_{k-1}),\ |y| \leq 8\varphi(z)\}. \tag{3}$$

Проверим, что требуемое отображение может быть задано формулой

$$Ef = \sum\nolimits_{k\geq 1} \overline{f}_k\sigma_k + \sum\nolimits_{k\geq 1} \sigma_k\, E^{(k)} f_k. \tag{4}$$

Рассуждения, приведенные в замечании 7.2/3, дают $(Ef)(x) = 0$ при $z \geq \delta + \varphi(\delta)$ (в частности, $(Ef)(x) = 0$ при $z \geq t_1$). Отсюда и из (3)–(4) вытекают включение (1) и равенство $Ef|_\Gamma = f$.

Обращаясь к доказательству оценки (2), обозначим через v и w соответственно первую и вторую сумму в (4). Так как каждая точка $\mathbf{R}^n$ принадлежит не более чем двум множествам набора $\{\operatorname{supp}\sigma_k\}$, то

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leq c\sum\nolimits_{k\geq 1} |\overline{f}_k|^p \|\nabla\sigma_k\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)}.$$

Ввиду оценки $|\nabla\sigma_k| \leq c\,\varphi_k^{-1}$ общий член последней суммы не больше

$$c\int_{S_k} |f(x)|^p \varphi(z)^{1-p} ds_x,$$

где ds_x означает элемент площади поверхности Γ. Таким образом,

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leq c\int_\Gamma |f(x)|^p\varphi(z)^{1-p} ds_x. \tag{5}$$

Имеем также

$$\|\nabla w\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \leq c\sum\nolimits_{k\geq 1}\left(\varphi_k^{-p}\|E^{(k)}f_k\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} + \|\nabla E^{(k)} f_k\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)}\right).$$

Объединяя это неравенство с (7.2/13) и (7.2/17), получаем

$$\|\nabla w\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\,|f|^p_{p,\Gamma}.$$

Последняя оценка, оценка (5) и неравенство Фридрихса

$$\|Ef\|_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\,\|\nabla(Ef)\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}$$

(которое верно благодаря (1)) приводят к (2). Лемма доказана.

Замечание. Поверхность Γ в лемме может быть, очевидно, заменена поверхностью $\{(y,z)\in\mathbf{R}^n : z\in(0,1), |y|=\varphi(z)\}$.

Сформулируем основной результат настоящего раздела. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n\,(n>2)$ – ограниченная область с внутренним пиком в смысле определения 4.7.1. Далее будем предполагать, что выполнены также требования, перечисленные в начале разд. 7.1.3. Ниже через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие лишь от n, p, Ω; соотношение $a\sim b$ означает $c^{-1}\le ab^{-1}\le c$.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной пика, направленного внутрь области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Если $1<p<n-1$, то*

$$\|f\|_{TW^1_p(\Omega)} \sim \left(\int_{\partial\Omega\cap U}\varphi(z)^{1-p}|f(x)|^p ds_x\right)^{1/p} + \|f\|_{L_p(\partial\Omega\setminus U)} +$$

$$+\left(\iint_{\partial\Omega\times\partial\Omega}|f(x)-f(\xi)|^p\frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}}\right)^{1/p}, \qquad (6)$$

где U – окрестность из определения 4.7.1, $x=(y,z)$ *и* ds_x, ds_ξ – *элементы площади поверхности* $\partial\Omega$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $U=\{x=(y,z) : |y|<1,\ z\in(-1,1)\}$ и имеет место (7.1.1/1). Положим $V=\{x\in U : z>0\}$.

Пусть $u\in W^1_p(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}=f$. Обозначим через Γ_z и V_z сечения гиперплоскостью $z=\mathrm{const}$ множеств Γ и $V\cap\Omega$ сответственно. По теореме 3.2 оценка

$$\varphi(z)^{1-p}\|f(\cdot,z)\|^p_{L_p(\Gamma_z)} \le c\,\|u(\cdot,z)\|^p_{W^1_p(V_z)}$$

справедлива для п.в. $z\in(0,1)$. Интегрируя по $z\in(0,1)$, получаем

$$\int_\Gamma \varphi(z)^{1-p}|f(x)|^p ds_x \le c\,\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}. \qquad (7)$$

Пусть $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма, определенная в (7.2/4-5). Ввиду замечания 7.2/4 верна оценка

$$|f|_{p,\Gamma} \le c\,\|\nabla u\|_{L_p(V\cap\Omega)}. \tag{8}$$

Установим неравенство

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \le c\,\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}, \tag{9}$$

где $x=(y,z),\ \xi=(\eta,\zeta),\ M(z,\zeta)=\max\{\varphi(z),\varphi(\zeta)\}$. В самом деле, левая часть (9) не превосходит

$$c\int_\Gamma |f(x)|^p ds_x \int_{\{\zeta\in(0,1):|\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} \frac{\varphi(\zeta)^{n-2}d\zeta}{|\zeta-z|^{n+p-2}}.$$

Внутренний интеграл мажорируется интегралом

$$\int_{|\zeta-z|>\varphi(z)} |\zeta-z|^{-p} d\zeta,$$

который не больше $c\,\varphi(z)^{1-p}$. Отсюда и из (7) следует (9).

Выберем число $\delta\in(0,1)$ так, чтобы правая часть включения (1) содержалась в U. Положим

$$\sigma = \partial\Omega\setminus\{x\in U\cap\partial\Omega : z\le\delta/2\} \tag{10}$$

и заметим, что из теоремы 3.1.1 вытекает оценка

$$\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{11}$$

Обозначим через $|\!|\!|f|\!|\!|$ правую часть соотношения (6). Неравенства (7) – (11) дают

$$|\!|\!|f|\!|\!| \le c\,\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}.$$

Для проверки обратного неравенства построим продолжение $f\mapsto u$ произвольной функции f ($|\!|\!|f|\!|\!|<\infty$), из $\partial\Omega$ внутрь Ω, удовлетворяющее условию

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \le c\,|\!|\!|f|\!|\!|. \tag{12}$$

С этой целью введем липшицеву функцию ψ на $\partial\Omega$ со свойствами $0\le\psi\le1$, $\psi=1$ в окрестности $\partial\Omega\setminus\sigma$ и

$$\operatorname{supp}\psi\subset\{x\in\partial\Omega\cap U : z\le\delta\}.$$

Возможность продолжить функцию $(1-\psi)f$ в Ω обосновывается с помощью теоремы 3.1.1, и для этого продолжения (обозначаемого через $\tilde{u}$) имеет место (7.2/18), где σ – поверхность, определенная в (10). Отметим еще, что верна оценка (7.2/19). Пусть E – оператор продолжения, построенный в лемме, предшествующей теореме. Согласно этой лемме и предыдущим рассуждениям определенная в Ω функция $u = \tilde{u} + E(\psi f)$ является продолжением функции f и справедлива оценка (12). Доказательство теоремы закончено.

Следствие. *В условиях теоремы соотношение* (6) *останется верным, если в его правой части опустить второе слагаемое.*

Доказательство. Обозначим через $\|f\|$ сумму первого и третьего слагаемых в правой части (6). Пусть $\|f\| < \infty$. Если $\overline{f}$ есть среднее значение функции f на Γ, то

$$\|f-\overline{f}\|^p_{L_p(\partial\Omega)} \leq |\Gamma|^{-1}\int_{\partial\Omega} ds_x \int_\Gamma |f(x)-f(\xi)|^p ds_\xi,$$

где $|\Gamma|$ площадь поверхности Γ. Отсюда величина $c\,\|f-\overline{f}\|_{L_p(\partial\Omega)}$ мажорируется последним членом в (6). Кроме того,

$$\int_\Gamma \varphi(z)^{1-p}|f(x)-\overline{f}|^p ds_x \leq c\int_\Gamma \varphi(z)^{1-p}|f(x)|^p ds_x$$

и, значит, $|\!|\!|f-\overline{f}|\!|\!| \leq c\,\|f\|$. Пусть $F : TW^1_p(\Omega) \to W^1_p(\Omega)$ – ограниченный оператор продолжения. Тогда функция $u = \overline{f} + F(f-\overline{f})$ удовлетворяет граничному условию $u|_{\partial\Omega} = f$, и в силу соотношения $\|\cdot\|_{TW^1_p(\Omega)} \sim |\!|\!|\cdot|\!|\!|$ справедлива оценка

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega)} \leq c\left(|\overline{f}| + |\!|\!|f-\overline{f}|\!|\!|\right).$$

Так как правая часть последнего неравенства не превосходит $c\,\|f\|$ и ввиду (11) получаем $\|f\|_{L_p(\partial\Omega\setminus U)} \leq c\,\|f\|$.

7.4 Область с внутренним пиком, пространство $TW^1_p(\Omega)$ в случае $p = n-1$

В данном разделе рассматривается та же задача, что и в предыдущем, но в случае $p = n-1$. Оказывается, что пространства $TW^1_p(\Omega)$ при $p < n-1$ и $p = n-1$ характеризуются различными условиями. Мы сохраняем обозначения, использованные в разд. 7.3.

7.4.1 Эквивалентные нормы для функций, определенных на поверхности с пиком

Начнем с неравенства Харди для функций в области с внутренним пиком.

Лемма 1. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, $n > 2$, с вершиной внутреннего пика на границе. Если $1 \le p < n$, то для всех $u \in W_p^1(\Omega)$*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \frac{dx}{|x|^p} \le c\, \|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}. \tag{1}$$

Доказательство. По теореме 4.7.1 существует ограниченный оператор продолжения: $W_p^1(\Omega) \to W_p^1(\mathbf{R}^n)$, так что (1) следует из того же неравенства при $\Omega = \mathbf{R}^n$. В этом случае неравенство (1) хорошо известно и легко устанавливается переходом к сферическим координатам и применением вдоль каждого радиуса одномерного неравенства (1.1.2/3).

В формулируемых ниже леммах настоящего раздела Γ означает ту же поверхность, что и в лемме 7.3 (ср. (7.1.1/1), а через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие только от p, φ, ω. Предполагается, что $\varphi(z) < z$ при $z \in (0, 1]$.

Лемма 2. *Пусть $p = n - 1 > 1$ и пусть $M(z, \zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$, $z, \zeta \in (0, 1)$,*

$$\Phi(z) = \big(\varphi(z) \log(z/\varphi(z))\big)^{1-p}, \quad z \in (0, 1),$$

$$Q(t) = 1 + t^{2p-2}\big(\log(1 + t)\big)^{-p}, \quad t > 0.$$

При $f \in L_p(\Gamma)$ норма

$$\left(\int\limits_\Gamma |f(x)|^p \Phi(z) ds_x + \iint\limits_{\Gamma\times\Gamma} |f(x) - f(\xi)|^p Q\left(\frac{r}{M(z,\zeta)}\right) \frac{ds_x ds_\xi}{r^{n+p-2}}\right)^{1/p}$$

эквивалентна норме $\langle f\rangle_{p,\Gamma}$, определяемой равенством

$$\langle f\rangle^p_{p,\Gamma} = \int_\Gamma |f(x)|^p \Phi(z) ds_x +$$

$$+ \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma: 2^{-1}<z/\zeta<2\}} |f(x) - f(\xi)|^p Q\left(\frac{r}{M(z,\zeta)}\right) \frac{ds_x ds_\xi}{r^{n+p-2}},$$

где $x=(y,z), \xi=(\eta,\zeta), r=|x-\xi|$ *и* ds_x, ds_ξ *– элементы площади поверхности* Γ.

Доказательство. Справедливы следующие неравенства:

$$\int\limits_{\{\xi\in\Gamma:\zeta>2z\}} \frac{ds_\xi}{r^{n+p-2}} \le c\int\limits_{2z}^{1} \varphi(\zeta)^{p-1}\frac{d\zeta}{\zeta^{2p-1}} \le \frac{c}{z^{p-1}} \le c\,\Phi(z),\ z\in(0,1/2);$$

$$\int\limits_{\{x\in\Gamma:z<\zeta/2\}} \frac{ds_x}{r^{n+p-2}} \le c\int\limits_{0}^{\zeta/2} \varphi(z)^{p-1}\frac{dz}{\zeta^{2p-1}} \le \frac{c}{\zeta^{p-1}} \le c\,\Phi(\zeta),\ \zeta\in(0,1);$$

$$\int\limits_{\{\xi\in\Gamma:\zeta>2z\}} \frac{ds_\xi}{rM(z,\zeta)^{2p-2}[\log(1+r/M(z,\zeta))]^p} \le c\int\limits_{2z}^{1} \frac{(\zeta/\varphi(\zeta))^{p-1}}{[\log(\zeta/\varphi(\zeta))]^p}\frac{d\zeta}{\zeta^p} \le$$

$$\le c\int_{2z}^{1}\frac{(\zeta/\varphi(z))^{p-1}}{[\log(\zeta/\varphi(z))]^p}\frac{d\zeta}{\zeta^p} \le c\,\Phi(z),\ \ z\in(0,1/2);$$

$$\int_{\{x\in\Gamma:z<\zeta/2\}} \frac{M(z,\zeta)^{2-2p}ds_x}{r[\log(1+r/M(z,\zeta))]^p} \le c\,\Phi(\zeta),\ \ \zeta\in(0,1).$$

Таким образом, имеем

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:\zeta>2z\}} \big(|f(x)|^p+|f(\xi)|^p\big)Q\left(\frac{r}{M(z,\zeta)}\right)\frac{ds_x ds_\xi}{r^{n+p-2}} \le c\int\limits_{\Gamma}|f(x)|^p\Phi(z)ds_x,$$

откуда следует требуемая эквивалентность.

Лемма 3. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ *– гладкое разбиение единицы для промежутка* $(0,1/2]$, *подчиненное покрытию* $\{(2^{-1-k},2^{1-k})\}_{k\ge1}$, *и пусть* $|\lambda_k'|\le c\,2^k$. *Предположим, что* $p=n-1>1$ *и* $\varphi(2z)\sim\varphi(z)$ *при* $z\in(0,1/2)$. *Если* $f\in L_p(\Gamma)$ *и* $f(y,z)=0$ *при* $z>1/2$, *то*

$$\langle f\rangle_{p,\Gamma}^p \sim \sum\nolimits_{k\ge1}\langle\lambda_k f\rangle_{p,\Gamma}^p,$$

где $\langle\cdot\rangle_{p,\Gamma}$ *– норма, введенная в лемме 2.*

Доказательство. Положим $H=\{(x,\xi): x,\xi\in\Gamma: 2^{-1}<z/\zeta<2\}$, где $x=(y,z)$, $\xi=(\eta,\zeta)$. Ясно, что

$$f(x)=\sum\nolimits_{k\ge1}\lambda_k(z)f(x),\quad x\in\Gamma,$$

$$f(x) - f(\xi) = \sum\nolimits_{k\geq 1} \big(\lambda_k(z)f(x) - \lambda_k(\zeta)f(\xi)\big), \quad (x,\xi) \in H,$$

и число ненулевых слагаемых в обеих суммах ограничено равномерно относительно x, ξ. Поэтому

$$|f(x)|^p \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} |\lambda_k(z)f(x)|^p,$$

$$|f(x) - f(\xi)|^p \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} |\lambda_k(z)f(x) - \lambda_k(\zeta)f(\xi)|^p\,,$$

откуда

$$\langle f\rangle^p_{p,\Gamma} \leq c \sum\nolimits_{k\geq 1} \langle \lambda_k f\rangle^p_{p,\Gamma}.$$

Для доказательства обратного неравенства достаточно проверить оценку

$$\sum_{k\geq 1} \iint\limits_H |\lambda_k(z)f(x) - \lambda_k(\zeta)f(\xi)|^p \, Q\left(\frac{r}{M(z,\zeta)}\right) \frac{ds_x ds_\xi}{r^{n+p-2}} \leq c\,\langle f\rangle^p_{p,\Gamma} \quad (2)$$

(мы сохраняем обозначения, введенные в лемме 2). Заметим, что

$$c\sum\nolimits_{k\geq 1} |\lambda_k(z)f(x) - \lambda_k(\zeta)f(\xi)|^p \leq |f(x) - f(\xi)|^p +$$

$$+|f(\xi)|^p \sum\nolimits_{k\geq 1} |\lambda_k(z) - \lambda_k(\zeta)|^p$$

и что последняя сумма не превосходит $c\,\zeta^{-p}|z - \zeta|^p$, если $(x, \xi) \in H$. Кроме того,

$$Q\left(\frac{r}{M}\right) \sim \left\{ \begin{array}{l} 1 \;\text{ при }\; |\zeta - z| < M, \\ \left(\frac{|\zeta - z|}{M}\right)^{2p-2} \left(\log\left(1 + \frac{|\zeta - z|}{M}\right)\right)^{-p} \;\text{ при }\; |\zeta - z| > M, \end{array}\right.$$

где $M = M(z,\zeta)$. Поскольку $M(z,\zeta) \sim \varphi(\zeta)$ для $(x,\xi) \in H$, то левая часть (2) мажорируется выражением $c\,\big(\langle f\rangle^p_{p,\Gamma} + I_1 + I_2\big)$, в котором

$$I_1 = \int_\Gamma |f(\xi)|^p \frac{ds_\xi}{\zeta^p} \int_{\{x\in\Gamma : |\zeta - z| < M(z,\zeta)\}} |\zeta - z|^p \frac{ds_x}{r^{n+p-2}},$$

$$I_2 = \int_\Gamma |f(\xi)|^p \frac{ds_\xi}{\zeta^p} \int_{\ell(\zeta)} \frac{(|\zeta - z|/\varphi(\zeta))^{p-1} dz}{[\log(1 + |\zeta - z|/\varphi(\zeta))]^p}$$

и $\ell(\zeta) = \{z \in (0,1) : \varphi(\zeta) < |\zeta - z| < \zeta\}$.

Обозначим через $J(\xi)$ внутренний интеграл в I_1. Так как подынтегральная функция в $J(\xi)$ не превосходит r^{2-n} и $\varphi(z) \sim \varphi(\zeta)$ при $|\zeta - z| < M(z,\zeta)$, то

$$J(\xi) \le \int_{\{x\in\Gamma:|z-\zeta|<c\,\varphi(\zeta)\}} |x-\xi|^{2-n} ds_x.$$

С помощью замены переменных

$$(y,z) \mapsto (Y,t), \quad Y = \varphi(z)^{-1}y, \quad t = \varphi(\zeta)^{-1}(z-\zeta)$$

найдем, что $J(\xi) \le c\,\varphi(\zeta)$. Следовательно, $I_1 \le cI_3$, где

$$I_3 = \int_\Gamma |f(\xi)|^p \Phi(\zeta) ds_\xi.$$

Чтобы оценить I_2, представим интеграл по множеству $\ell(\zeta)$ в виде

$$2\varphi(\zeta) \int_1^{\zeta/\varphi(\zeta)} t^{p-1} \left(\log(1+t)\right)^{-p} dt.$$

Это выражение мажорируется величиной $c\,\zeta\, g(\zeta/\varphi(\zeta))$, в которой $g(t)$ – подынтегральная функция в последнем интеграле. Отсюда $I_2 \le cI_3$. Неравенство (2) установлено, чем и завершается доказательство леммы.

7.4.2 Теорема о следах

Мы сохраняем обозначения и условия на область Ω, приведенные перед теоремой 7.3. Сформулируем основной результат разд. 7.4.

Теорема. *Пусть точка O является вершиной внутреннего пика на границе области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n > 2)$ и $p = n - 1$. Педположим, что $\varphi'(z) \le c\,\varphi(z)/z$ при $z \in (0,1)$. Тогда*

$$\|f\|_{TW^1_p(\Omega)} \sim \Bigg\{ \int_{U\cap\partial\Omega} |f(x)|^p \frac{ds_x}{\big(\varphi(z)\log(z/\varphi(z))\big)^{p-1}} +$$
$$+ \|f\|^p_{L_p(\partial\Omega\setminus U)} + \iint_{\partial\Omega\times\partial\Omega} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{r^{n+p-2}} +$$
$$+ \iint\limits_{\{x,\xi\in U\cap\partial\Omega: r>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{M(z,\zeta)^{2-2p} ds_x ds_\xi}{r\big(\log(1+r/M(z,\zeta))\big)^p} \Bigg\}^{1/p}, \quad (1)$$

где U – окрестность из определения 4.7.1, $r = |x - \xi|$, $x = (y, z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$, $M(z, \zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$ *и* ds_x, ds_ξ *– элементы площади поверхности* $\partial\Omega$.

Доказательство. Поскольку $(\log \varphi(z))' \le c\,(\log z)'$, то

$$\varphi(b)/\varphi(a) \le (b/a)^c \quad \text{при} \quad 0 < a \le b < 1$$

и, в частности, $\varphi(2z) \sim \varphi(z)$ при $z \in (0, 1/2)$. Без ограничения общности можно считать, что $U = B_1^{(n-1)} \times (-1, 1)$ и имеет место (7.1.1/1).

Пусть $u \in W_p^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = f$. Положим $\delta = 1/2$ и определим поверхность σ так же, как и в (7.3/10). Тогда теорема 3.1.1 приводит к оценке (7.3/11). Обозначим через $\|\!|f|\!\|$ правую часть соотношения (1). Ввиду (7.3/11) и леммы 7.4.1/2 неравенство $\|\!|f|\!\| \le c\,\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}$ является следствием доказываемой ниже оценки

$$\langle f \rangle_{p,\Gamma} \le c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{2}$$

Из леммы 7.4.1/1 вытекает, что гладкие положительно однородные функции нулевой степени на $\mathbf{R}^n \setminus \{O\}$ являются мультипликаторами в пространстве $W_p^1(\Omega)$. Поэтому достаточно установить (2) в случае $u(x) = 0$ во внешности конуса $\{x : z \in (0, 1/2),\ |y| < z\}$. Пусть $\{\lambda_k\}_{k \ge 1}$ – разбиение единицы, описанное в лемме 7.4.1/3. По лемме 7.4.1/1 имеем

$$\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)} \sim \sum\nolimits_{k \ge 1} \Big(2^{kp} \|\lambda_k u\|^p_{L_p(\Omega)} + \|\nabla(\lambda_k u)\|^p_{L_p(\Omega)} \Big). \tag{3}$$

Заметим, что носитель функции $\lambda_k u$ лежит в множестве

$$D_k = \left\{ x : z \in (2^{-k-1}, 2^{-k+1}),\ |y| < z,\ y/\varphi(z) \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \overline{\omega} \right\}.$$

Рассмотрим отображение

$$x \mapsto \nu_k(x) = X = (Y, Z), \quad Y = y/\varphi(z), \quad Z = z/\varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\varphi_k = \varphi(2^{-k})$. Тогда множество $\nu_k D_k$ есть подобласть цилиндра

$$C^{(e)} = \big(\mathbf{R}^{n-1} \setminus \overline{\omega}\big) \times \mathbf{R}^1.$$

Поскольку $\varphi'(z) = O(z^{-1}\varphi(z))$, то

$$\varphi_k |(\nabla_x u)| \sim |\nabla_X ((\lambda_k u) \circ \nu_k^{-1})|$$

при $x \in D_k$. После замены $x \to X$ соотношение (3) принимает вид

$$\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)} \sim \sum\nolimits_{k\geq 1} \varphi_k \|(\lambda_k u)\circ \nu_k^{-1}\|^p_{W^1_p(C^{(e)},\varepsilon_k)}. \tag{4}$$

Здесь $\varepsilon_k = 2^k\varphi_k$, а норма $\|\cdot\|_{W^1_p(C^{(e)},\varepsilon_k)}$ определена в (3.3.1/1). Из (4) следует, что

$$\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)} \geq c\sum\nolimits_{k\geq 1} \varphi_k \|(\lambda_k f)\circ \nu_k^{-1}\|^p_{TW^1_p(C^{(e)},\varepsilon_k)} \tag{5}$$

(ср. (3.3.1/2)). По теореме 3.7 верно соотношение

$$\|g_k\|^p_{TW^1_p(C^{(e)},\varepsilon_k)} \sim |\log\varepsilon_k|^{1-p}\|g_k\|^p_{L_p(\partial C^{(e)})}$$

$$+ \iint\limits_{\partial C^{(e)}\times\partial C^{(e)}} |g_k(X)-g_k(X')|^p Q(|X-X'|)\frac{ds_X ds_{X'}}{|X-X'|^{n+p-2}},$$

в котором $g_k = (\lambda_k f)\circ\nu_k^{-1}$; $ds_X, ds_{X'}$ – элементы площади поверхности $\partial C^{(e)}$ и Q – функция, определенная в лемме 7.4.1/2. Возвращаясь к переменным $x = \nu_k^{-1}(X)$, $\xi = \nu_k^{-1}(X')$, получим

$$\varphi_k\|(\lambda_k f)\circ\nu_k^{-1}\|^p_{TW^1_p(C^{(e)},\varepsilon_k)} \sim \langle\lambda_k f\rangle^p_{p,\Gamma}. \tag{6}$$

Объединяя (5) и (6) с леммой 7.4.1/3, приходим к (2). Таким образом,

$$|\!|\!| f |\!|\!| \leq c\,\|f\|_{TW^1_p(\Omega)},$$

где $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ – норма, определяемая правой частью (1).

Для доказательства обратного неравенства построим такое продолжение $f \mapsto u$ функции f ($|\!|\!| f|\!|\!| < \infty$) из $\partial\Omega$ внутрь Ω, что

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega)} \leq c\,|\!|\!| f|\!|\!|.$$

Достаточно определить искомое продолжение в случае, когда

$$\operatorname{supp} f \subset \{x\in U\cap\partial\Omega,\ z\leq\delta\}$$

и $\delta > 0$ – малое число. Тогда общий случай обосновывается с помощью подходящей срезающей функции и теоремы 3.1.1 (см. конец доказательства теоремы 7.3). Выберем $\delta \in (0,1/2]$ так, чтобы при $z \in (0, \delta]$ выполнялось неравенство $8\varphi(z) < z$. Введем последовательность функций $\{\mu_k\}_{k \geq 1}$, удовлетворяющих условиям

$$\mu_k \in C_0^\infty\left(2^{-1-k}, 2^{1-k}\right), \quad \mu_k \lambda_k = \lambda_k, \quad |\mu_k'| \leq c\, 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть еще $\mu \in C^\infty([0,\infty))$, $\mu(t) = 1$ при $t \leq 1/2$, $\mu(t) = 0$ при $t \geq 1$. Положим

$$\psi_k(x) = \mu_k(z)\mu(2^{k+1}|y|), \ \ k = 1, 2, \ldots, \ \ x = (y, z) \in \mathbf{R}^n.$$

По теореме 3.7 и ввиду (6) при каждом $k = 1, 2, \ldots$ существует такая функция $v_k \in W_p^1(C^{(e)})$, что $v_k|_{\partial C^{(e)}} = (\lambda_k f) \circ \nu_k^{-1}$ и

$$\|v_k\|_{W_p^1(C^{(e)}, \varepsilon_k)} \leq c\, \varphi_k^{-1/p} \langle \lambda_k f \rangle_{p,\Gamma}. \tag{7}$$

Функция $w_k = (\psi_k \circ \nu_k^{-1}) v_k$ имеет следующие свойства:

$$\operatorname{supp} w_k \subset \overline{\nu_k D_k}, \quad w_k\big|_{\partial C^{(e)}} = (\lambda_k f) \circ \nu_k^{-1}$$

и, кроме того, верна оценка

$$\|w_k\|_{W_p^1(C^{(e)}, \varepsilon_k)} \leq c\, \|v_k\|_{W_p^1(C^{(e)}, \varepsilon_k)}. \tag{8}$$

Пусть $u_k = w_k \circ \nu_k$. Тогда $\operatorname{supp} u_k \subset \overline{D}_k$, $u_k|_\Gamma = \lambda_k f$ и

$$2^{pk} \|u_k\|_{L_p(D_k)}^p + \|\nabla u_k\|_{L_p(D_k)}^p \leq c\, \varphi_k \|w_k\|_{W_p^1(C^{(e)}, \varepsilon_k)}^p. \tag{9}$$

Положим $u = \sum_{k \geq 1} u_k$. Эта функция определена в Ω, равна нулю вне множества

$$D = \{x : z \in (0,1), |y| < z, \ y/\varphi(z) \notin \overline{\omega}\}$$

и удовлетворяет граничному условию $u|_\Gamma = f$. Более того, из леммы 7.4.1/3 и оценок (7)–(9) следует, что

$$\|u\|_{W_p^1(D)}^p \leq c \sum\nolimits_{k \geq 1} \|u_k\|_{W_p^1(D_k)}^p \leq c \sum\nolimits_{k \geq 1} \langle \lambda_k f \rangle_{p,\Gamma}^p \leq c\, \langle f \rangle_{p,\Gamma}^p .$$

Итак, функция u – требуемое продолжение функции f. Теорема доказана.

Следствие. *Соотношение* (1) *останется верным, если в его правой части опустить член* $\|f\|_{L_p(\partial\Omega \setminus U)}^p$.

Это утверждение доказывается так же, как и следствие 7.3.

7.5 Неравенства для функций на поверхности с пиком

В двух последних разделах настоящей главы изучается пространство $TW_p^1(\Omega)$ для области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с внутренним пиком при $p > n-1$. Данный раздел содержит некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть φ и ω имеют тот же смысл, что и в определении 4.7.1. Предположим еще, что выполнены следующие условия: $\varphi(z) < z$ при $z \in (0,1]$, $\overline{\omega} \subset B_1^{(n-1)}$ и $\partial\omega$ – связное множество. Как и выше, через Γ обозначим поверхность, определенную в (7.1.1/1) при $n > 2$. Нам понадобятся также круговая поверхность

$$S = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0,1),\ |y| = \varphi(z)\},\ n > 2, \tag{1}$$

и круговой пик

$$G = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0,1),\ |y| < \varphi(z)\},\ n > 2. \tag{2}$$

Положим для $f \in L_{p,loc}(\Gamma),\ p \in (1,\infty)$

$$\{f\}_{p,\Gamma} = \Bigg(\iint\limits_H \frac{dz d\zeta}{|\zeta - z|^{p+2-n}} \int\limits_\gamma |f(\varphi(z)y,z) - f(\varphi(\zeta)y,\zeta)|^p d\gamma_y \Bigg)^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

где $\gamma = \partial\omega$, $d\gamma_y$ означает элемент $(n-2)$-мерной площади поверхности γ,

$$H = \{(z,\zeta) : z,\zeta \in (0,1),\ |\zeta - z| > M(z,\zeta)\}$$

и, как обычно, $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$. Полунорма $\{\cdot\}_{p,S}$ для функций на S определяется таким же образом с заменой γ на S^{n-2}.

Ниже мы докажем три леммы о функциях на Γ и S, которые аналогичны соответствующим утверждениям разд. 3.4 для функций на цилиндрической поверхности. Фигурирующие ниже положительные константы c и константы в соотношениях эквивалентности зависят только от n, p, φ, γ.

Лемма 1. *Пусть $p > n-1 \geq 2$ и пусть $v \in W_p^1(G)$. Тогда*

$$c\,\{v\}_{p,\Gamma} \leq \{v\}_{p,S} + \|\nabla v\|_{L_p(G)}. \tag{4}$$

Это неравенство останется верным, если Γ и S поменять местами.

Доказательство. Положим $B = B_1^{(n-1)}$. Заметим, что при п.в. $z, \zeta \in (0,1)$ функция

$$B \ni y \mapsto u(y) = v(\varphi(z)y, z) - v(\varphi(\zeta)y, \zeta)$$

принадлежит пространству $W_p^1(B)$ и справедлива оценка

$$c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(B)} \le \varphi(z)^{p+1-n}\|\nabla v(\cdot, z)\|^p_{L_p(B_{\varphi(z)})} +$$

$$+\varphi(\zeta)^{p+1-n}\|\nabla v(\cdot, \zeta)\|^p_{L_p(B_{\varphi(\zeta)})}. \tag{5}$$

Из теорем 1.5.2 и 3.1.1 вытекает неравенство

$$c\,\|u\|^p_{L_p(\gamma)} \le \|u\|^p_{L_p(\partial B)} + \|\nabla u\|^p_{L_p(B)}.$$

Умножим его на $|\zeta - z|^{n-2-p}$ и проинтегрируем по определенному выше множеству H. Используя (5), придем к оценке

$$c\,\{v\}^p_{p,\Gamma} \le \{v\}^p_{p,S} +$$

$$+\int_0^1 dz \int\limits_{|y|<\varphi(z)} |(\nabla v)(y,z)|^p dy \int\limits_{|\zeta - z|>\varphi(z)} \frac{\varphi(z)^{p+1-n}}{|\zeta - z|^{p+2-n}} d\zeta.$$

Последний внутренний интеграл по переменной ζ ограничен равномерно относительно $z \in (0,1)$, откуда следует (4). Аналогично доказывается неравенство, которое получается, если в (4) поменять местами Γ и S.

Лемма 2. *Пусть*

$$f \in L_{p,loc}(\Gamma), \quad p > n-1 \ge 2.$$

Если $f(y,z) = 0$ *при* $z > 1/2$, *то*

$$\iint\limits_{\{x,\xi \in \Gamma : |\zeta - z| > M(z,\zeta)\}} |f(x) - f(\xi)|^p (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n} \frac{ds_x ds_\xi}{|\zeta - z|^{p+2-n}} +$$

$$+|f|^p_{p,\Gamma} \sim \{f\}^p_{p,\Gamma} + |f|^p_{p,\Gamma}, \tag{6}$$

где $x = (y,z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$; ds_x, ds_ξ *– элементы площади поверхности* Γ *и* $|\cdot|_{p,\Gamma}$ *– полунорма, определенная в* (7.2/4–5).

Доказательство. Пусть

$$D = \{x : z \in (0,1),\ y/\varphi(z) \in \omega\}.$$

Если $|f|_{p,\Gamma} < \infty$, то существует продолжение u функции f с поверхности Γ внутрь области D, такое, что

$$\|u\|_{W^1_p(D)} \le c\,|f|_{p,\Gamma}$$

(см. замечание 7.2/2). Положим $y = \varphi(z)Y,\ \eta = \varphi(\zeta)Y',\ Y, Y' \in \gamma$. Так как

$$|f(x) - f(\xi)| \le$$

$$\le |f(\varphi(\zeta)Y', \zeta) - f(\varphi(z)Y', z)| +$$

$$+ |f(\varphi(z)Y', z) - f(\varphi(z)Y, z)|,$$

то интеграл в левой части (6) не превосходит $c\,\{f\}^p_{p,\Gamma} + c\,I$, где

$$I = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{\gamma\times\gamma} |f(x) - f(x')|^p d\gamma_Y d\gamma_{Y'} \int\limits_{|\zeta - z| > \varphi(z)} \frac{d\zeta}{|\zeta - z|^{p+2-n}}, \qquad (7)$$

$x = (\varphi(z)Y, z),\ x' = (\varphi(z)Y', z)$. Последний внутренний интеграл по переменной ζ не больше $c\,\varphi(z)^{n-1-p}$, значит,

$$I \le c \int_0^1 dz \iint_{\Gamma_z \times \Gamma_z} |f(y,z) - f(y',z)|^p\ \frac{d\Gamma_z(y) d\Gamma_z(y')}{|y - y'|^{n+p-3}}. \qquad (8)$$

Здесь Γ_z означает сечение Γ гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$. Ввиду теоремы 3.1.2 интеграл по множеству $\Gamma_z \times \Gamma_z$ мажорируется при п.в. $z \in (0,1)$ величиной $c\,\|\nabla u(\cdot, z)\|^p_{L_p(\varphi(z)\omega)}$. Отсюда правая часть (8) не превосходит $c\,\|\nabla u\|^p_{L_p(D)}$, что не больше $c\,|f|^p_{p,\Gamma}$. Поэтому левая часть (6) имеет мажоранту $c(\{f\}^p_{p,\Gamma} + |f|^p_{p,\Gamma})$.

Покажем теперь, что правая часть соотношения (6) не превосходит левой части, умноженной на некоторую константу c. Если $z, \zeta \in (0,1)$ и $Y' \in \gamma$, то

$$c\,|f(\varphi(z)Y', z) - f(\varphi(\zeta)Y', \zeta)|^p \le$$

$$\leq \int_\gamma |f(\varphi(z)Y', z) - f(\varphi(z)Y, z)|^p d\gamma_Y +$$

$$+ \int_\gamma |f(\varphi(z)Y, z) - f(\varphi(\zeta)Y', \zeta)|^p d\gamma_Y.$$

Умножая это неравенство на $|\zeta - z|^{n-p-2}$ и интегрируя по переменным Y', z, ζ, мажорируем выражение $c\{f\}^p_{p,\Gamma}$ суммой интеграла в левой части (6) и интеграла I, определенного в (7). Как было показано выше, $I \leq c\,|f|^p_{p,\Gamma}$. Таким образом, требуемое неравенство установлено и соотношение (6) доказано.

Замечание. Ясно, что поверхность Γ в лемме 2 может быть заменена поверхностью S.

Пусть f – функция, определенная на поверхности S, и пусть $\overline{f}(z)$ – среднее значение функции $f(\cdot, z)$ на сечении S гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$, т.е.

$$\overline{f}(z) = \left|S^{n-2}\right|^{-1} \int_{S^{n-2}} f(\varphi(z)\theta, z)d\theta, \quad z \in (0,1), \tag{9}$$

где $d\theta$ означает элемент $(n-2)$-мерной площади сферы S^{n-2} и $\left|S^{n-2}\right|$ – площадь S^{n-2}. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $f \in L_{p,loc}(S)$, $p \in (1,\infty)$, и пусть $f(y,z) = 0$ при $z > 1/2$. Справедливы оценки*

$$\int_S \varphi(z)^{1-p} |f(x) - \overline{f}(z)|^p ds_x \leq c\,|f|^p_{p,S}, \tag{10}$$

$$\left(\iint\limits_{\{x,\xi \in S: |\zeta - z| < M(z,\zeta)\}} |\overline{f}(z) - \overline{f}(\zeta)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{n+p-2}} \right)^{1/p} \leq c\,|f|_{p,S}, \tag{11}$$

а при $p > n-1$ верна оценка

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|\overline{f}(z) - \overline{f}(\zeta)|^p dz d\zeta}{(M(z,\zeta) + |\zeta - z|)^{2-n} |\zeta - z|^p} \leq c\left(|f|_{p,S} + \{f\}_{p,S}\right)^p. \tag{12}$$

Здесь $|\cdot|_{p,S}$ – полунорма, определенная в (7.2/4–5), $x = (y,z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$; ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности S и $\{\cdot\}_{p,S}$ – полунорма, определенная в (3).

Доказательство. Начнем с неравенства (10). Пусть S_z – сечение поверхности S гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$. Тогда

$$\int_S \varphi(z)^{1-p} |f(x) - \overline{f}(z)|^p ds_x \le$$

$$\le c \int_0^1 \frac{dz}{\varphi(z)^{p+1-n}} \int_{S^{n-2}} d\alpha \int_{S^{n-2}} |f(\varphi(z)\alpha, z) - f(\varphi(z)\theta, z)|^p d\theta \le$$

$$\le c \int_0^1 dz \iint_{S_z \times S_z} |f(y,z) - f(y',z)|^p \, \frac{dS_z(y) dS_z(y')}{|y - y'|^{n+p-3}}.$$

Правая часть последнего неравенства оценивается сверху величиной $c\,|f|^p_{p,S}$ так же, как правая часть (8) оценивалась в лемме 2.

Для доказательства неравенства (11) обозначим левую часть (11) через $|\overline{f}|_{p,S}$ и положим $T = \{(z,\zeta) : z, \zeta \in (0,1), |\zeta - z| < M(z,\zeta)\}$. Имеем

$$|\overline{f}|^p_{p,S} \le c \iint_T |\overline{f}(z) - \overline{f}(\zeta)|^p (\varphi(z)\varphi(\zeta))^{n-2} dz d\zeta \; \times$$

$$\times \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{S^{n-2}} (|\zeta - z| + |\varphi(z)\theta - \varphi(\zeta)\alpha|)^{2-n-p} d\alpha.$$

Заметим, что подынтегральное выражение в последнем интеграле по S^{n-2} эквивалентно

$$(\varphi(\zeta)|\alpha - \theta| + |\zeta - z|)^{2-n-p}$$

и сделаем замену $\alpha = \theta + \varphi(\zeta)^{-1}|\zeta - z|\beta$. В результате мажорируем этот интеграл величиной $c\,\varphi(\zeta)^{2-n}|\zeta - z|^{-p}$. Таким образом,

$$|\overline{f}|^p_{p,S} \le c\,J,$$

где

$$J = \iint\limits_T \frac{|\overline{f}(z) - \overline{f}(\zeta)|^p}{|\zeta - z|^p} \; M(z,\zeta)^{n-2} dz d\zeta. \tag{13}$$

Так как

$$T = \{(z,\zeta) : 0 < z - \zeta < \varphi(z)\} \cup \{(z,\zeta) : 0 < \zeta - z < \varphi(\zeta)\},$$

то

$$c\,J \le \iint\limits_{\{0 < z - \zeta < \varphi(z)\}} \frac{\varphi(z)^{n-2} dz d\zeta}{(z - \zeta)^p} \int\limits_{S^{n-2}} |f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p d\theta. \tag{14}$$

Проверим, что правая часть последнего неравенства не превосходит $c\,|f|^p_{p,S}$. По теореме 7.2 (примененной к пику G, определенному в (2)) существует функция $v \in W^1_p(G)$, которая удовлетворяет условию $v|_S = f$ и
$$\|v\|_{W^1_p(G)} \le c\,|f|_{p,S}.$$
Пусть $\{z_i\}_{i\ge 0}$ – убывающая последовательность со свойствами
$$z_0 = 1,\ \ z_i \to 0,\ \ \varphi(z_{i+1})\varphi(z_i)^{-1} \to 1,\ \ z_i - z_{i+1} \sim \varphi(z_i)$$
и $z-\varphi(z) > z_{i+1}$, если $z \in (z_i, z_{i-1}),\ i \ge 2$ (способ построения такой последовательности указан в теореме 7.1.1 при доказательстве неравенства (7.1.1/7)). Положим $\Delta_k = (z_{k+1}, z_{k-1}),\ k \ge 2$ и введем
$$a = \min\{z-\varphi(z) : z \in [z_1, 1]\}, \quad \Delta_1 = (a, 1).$$
Тогда правая часть (14) не больше
$$c\sum_{k\ge 1}\varphi(z_k)^{n-2}\int\limits_{S^{n-2}} d\theta \iint\limits_{\Delta_k\times\Delta_k} \frac{|f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta,\zeta)|^p}{|z-\zeta|^p} dz d\zeta. \tag{15}$$
При $\theta \in S^{n-2}$ и $k = 1, 2, \dots$ определим
$$\Pi^{(\theta)}_k = \{x \in \mathbf{R}^n : z \in \Delta_k,\ y/|y| = \theta,\ 1/2 < |y|/\varphi(z) < 1\}.$$
Множество $\Pi^{(\theta)}_k$ можно рассматривать как двумерное сечение области
$$G_k = \{x \in \mathbf{R}^n : z \in \Delta_k,\ \varphi(z)/2 < |y| < \varphi(z)\}$$
гиперплоскостью $\theta = \mathrm{const}$. Положим $\varrho = |y|$ и представим $\Pi^{(\theta)}_k$ как область
$$\{(\varrho, z) : z \in \Delta_k,\ 1/2 < \varrho/\varphi(z) < 1\}$$
в плоскости переменных ϱ, z. Заметим, что $v|_{\Pi^{(\theta)}_k} \in W^1_p(\Pi^{(\theta)}_k)$ при почти всех $\theta \in S^{n-2}$. Применяя теорему 3.1.2, получим
$$\iint_{\Delta_k\times\Delta_k} |f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p \frac{dz d\zeta}{|\zeta - z|^p} \le$$
$$\le c\int_{\Delta_k} dz \int_{\varphi(z)/2}^{\varphi(z)} (|v_z|^p + |v_\varrho|^p) d\varrho.$$

Отсюда общий член суммы в (15) не превосходит $c\,\|\nabla v\|^p_{L_p(G_k)}$. Таким образом, упомянутая сумма не больше $c\,\|\nabla v\|^p_{L_p(G)}$, и оценка (11) установлена. Попутно доказано неравенство $J \le c\,|f|^p_{p,S}$, где J определяется в (13).

Обращаясь к доказательству оценки (12), мажорируем ее левую часть величиной

$$c\,J + c\iint\limits_H |\overline{f}(z) - \overline{f}(\zeta)|^p \frac{dzd\zeta}{|\zeta - z|^{p+2-n}} \tag{16}$$

с тем же множеством H, что и в (3). Как было отмечено выше, первое слагаемое в (16) не превосходит $c\,|f|^p_{p,S}$. В то же время второе слагаемое не больше

$$c\iint\limits_H \frac{dzd\zeta}{|\zeta - z|^{p+2-n}} \int\limits_{S^{n-2}} |f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p d\theta = c\,\{f\}^p_{p,S}.$$

Отсюда вытекает (12). Доказательство леммы закончено.

7.6 Внутренний пик. Пространство граничных следов при $p > n - 1$

Пусть φ – функция из определения 4.7.1, такая, что $\varphi(z) < z$ при $z \in (0, 1]$, и пусть S – поверхность, определенная в (7.5/1). Для доказательства основного результата нам понадобится следующая лемма, в которой функции, зависящие только от переменной z, продолжаются с поверхности S внутрь области D, где

$$D = \{x = (y, z) \in \mathbf{R}^n : z \in (0, 1),\ \ \varphi(z) < |y| < 1\},\ \ n > 2.$$

Лемма. *Пусть $g \in L_{p,loc}(0, 1)$, $p \in (1, \infty)$ и $g(z) = 0$ при $z > 1/2$. Пусть еще $K \in C_0^\infty(1/4, 1/2)$ и $\int K(t)dt = 1$. Положим*

$$(Fg)(x) = \int_{1/4}^{1/2} K(t)g(z + (|y| - \varphi(z))t)dt,\ \ x \in D.$$

Тогда существует такая константа $c = c\,(n, p, \varphi)$, что

$$\|\nabla(Fg)\|^p_{L_p(D)} \le c\int_0^1\int_0^1 \frac{|g(z) - g(\zeta)|^p dzd\zeta}{\big(M(z,\zeta) + |\zeta - z|\big)^{2-n}|\zeta - z|^p}\ , \tag{1}$$

где $M(z,\zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta)\}$. *Кроме того,* $Fg\big|_{|y|=\varphi(z)} = g(z)$ *при почти всех* $z \in (0,1)$.

Доказательство. Для краткости обозначим $\varrho = |y|$, $v = Fg$, $\tau = \varrho - \varphi(z)$, $L(t) = tK(t)$. Поскольку

$$v_\varrho = -\tau^{-1} \int_{1/4}^{1/2} L'(t) g(z+\tau t)dt$$

и

$$v_z = \tau^{-1} \int_{1/4}^{1/2} \big(\varphi'(z)L'(t) - K'(t)\big) g(z+\tau t)dt,$$

то

$$|(\nabla v)(x)| \le c \int_{1/4}^{1/2} |g(z+\tau t) - g(z)|\tau^{-1}dt, \quad x \in D.$$

Отсюда

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(D)} \le c \int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 \varrho^{n-2} d\varrho \left(\int_{1/4}^{1/2} |g(z+\tau t) - g(z)| \frac{dt}{\tau} \right)^p .$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\|\nabla v\|_{L_p(D)} \le c \int_{1/4}^{1/2} dt \left(\int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 |g(z+\tau t) - g(z)|^p \varrho^{n-2} \frac{d\varrho}{\tau^p} \right)^{1/p} .$$

Замена переменной $\varrho = \varphi(z) + ht^{-1}$ во внутреннем интеграле по промежутку $(\varphi(z), 1)$ приводит к оценке

$$\|\nabla v\|^p_{L_p(D)} \le c \int_0^1 dz \int_0^{(1-\varphi(z))/2} \frac{|g(z+h) - g(z)|^p}{(h+\varphi(z))^{2-n} h^p} dh,$$

правая часть которой не превосходит правой части неравенства (1).

Остается проверить, что $v(y,z) = g(z)$ при п.в. $z \in (0,1)$, если $|y| = \varphi(z)$. Для произвольного малого $\varepsilon > 0$ положим $g_\varepsilon(z) = v(y,z)$ при $|y| = \varphi(z) + \varepsilon$. Требуемый результат следует из равенства

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^1 |g_\varepsilon(z) - g(z)|^p dz = 0,$$

верного для любого фиксированного $a \in (0,1)$. Лемма доказана.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область с внутренним пиком в смысле определения 4.7.1. Далее мы сохраняем обозначения и дополнительные требования на Ω, сформулированные перед теоремой 7.3. Пространство $TW_p^1(\Omega)$ при $p > n-1$ описывается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ и точка $O \in \partial\Omega$ – вершина пика, направленного внутрь Ω. Если $p > n-1 \geq 2$, то*

$$\|f\|_{TW_p^1(\Omega)} \sim \Bigg\{ \int_{U\cap\partial\Omega} \varphi(z)^{2-n}|f(x)|^p ds_x + \|f\|^p_{L_p(\partial\Omega\setminus U)} +$$

$$+ \iint\limits_{\{x,\xi\in\partial\Omega\cap U: r>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}\frac{ds_x ds_\xi}{r^{p+2-n}} +$$

$$+ \iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} |f(x)-f(\xi)|^p \frac{ds_x ds_\xi}{r^{n+p-2}} \Bigg\}^{1/p}, \qquad (2)$$

где $x=(y,z)$, $\xi=(\eta,\zeta)$, $r=|x-\xi|$, $M(z,\zeta)=\max\{\varphi(z),\varphi(\zeta)\}$, U – окрестность из определения 4.7.1 и ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности $\partial\Omega$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $U = B_1^{(n-1)}\times(-1,1)$ и имеет место (7.1.1/1). Пусть σ – поверхность, определенная в (7.3/10) при $\delta = 1/4$. Установим соотношение (2) в несколько этапов.

1^o. Покажем, что норма, задаваемая правой частью (2), эквивалентна норме

$$|\!|\!|f|\!|\!| = \|\varphi^{(2-n)/p}f\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + |f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}, \qquad (3)$$

где Γ – поверхность, определенная в (7.1.1/1), $|\cdot|_{p,\Gamma}$ – полунорма, определенная в (7.2/4–5) и $\{\cdot\}_{p,\Gamma}$ – полунорма (7.5/3). Заметим следующее: если $x,\xi\in\Gamma$ и $|\zeta - z| > M(z,\zeta)$, то подынтегральная функция в последнем слагаемом в правой части (2) мажорируется подынтегральной функцией в предшествующем слагаемом. Кроме того, $|x-\xi| \sim |\zeta - z|$ при этих x,ξ. Отсюда вытекает, что норма, определяемая правой частью (2), эквивалентна норме

$$\|f\| = \|\varphi^{(2-n)/p}f\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + |f|_{p,\Gamma} + (f)_{p,\Gamma},$$

где

$$(f)^p_{p,\Gamma} = \iint\limits_{\{x,\xi\in\Gamma:|\zeta-z|>M(z,\zeta)\}} |f(x)-f(\xi)|^p(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{2-n}\frac{ds_x ds_\xi}{|\zeta-z|^{p+2-n}}.$$

Пусть ψ – липшицева функция на $\partial\Omega$, $\psi=1$ в окрестности $\partial\Omega\backslash\sigma$, $0\le\psi\le 1$ и

$$\operatorname{supp}\psi\subset\{x\in\partial\Omega\cap U : z\le 1/4\}.$$

Легко проверяются оценки

$$c\,\{\psi f\}_{p,\Gamma}\le\{f\}_{p,\Gamma}+\|\varphi^{(2-n)/p}f\|_{L_p(\Gamma)}, \tag{4}$$

$$\{(1-\psi)f\}_{p,\Gamma}+|(1-\psi)f|_{p,\Gamma}$$
$$\le c\left(\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}+\|\varphi^{(2-n)/p}f\|_{L_p(\Gamma)}\right) \tag{5}$$

и оценки, которые получаются из (4), (5) заменой $\{\cdot\}_{p,\Gamma}$ на $(\cdot)_{p,\Gamma}$. Отметим также, что имеет место (7.2/19). Таким образом,

$$\|f\|\sim\|\varphi^{(2-n)/p}f\|_{L_p(\Gamma)}+\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}+(\psi f)_{p,\Gamma}+|\psi f|_{p,\Gamma},$$

$$|\!|\!|f|\!|\!|\sim\|\varphi^{(2-n)/p}f\|_{L_p(\Gamma)}+\|f\|_{W_p^{1-1/p}(\sigma)}+\{\psi f\}_{p,\Gamma}+|\psi f|_{p,\Gamma}.$$

По лемме 7.5/2

$$(\psi f)_{p,\Gamma}+|\psi f|_{p,\Gamma}\sim\{\psi f\}_{p,\Gamma}+|\psi f|_{p,\Gamma},$$

и правая часть (2) эквивалентна правой части (3).

2^o. На этом этапе мы установим неравенство

$$|\!|\!|f|\!|\!|\le c\,\|f\|_{TW_p^1(\Omega)}. \tag{6}$$

Пусть $u\in W_p^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega}=f$. Положим $V=\{x\in U : z>0\}$. Оценка (7.3/8) вытекает из замечания 7.2/4, а оценка (7.3/11) является следствием теоремы 3.1.1. Неравенство

$$\int_\Gamma \varphi(z)^{2-n}|f(x)|^p ds_x\le c\,\|u\|^p_{W_p^1(V\cap\Omega)} \tag{7}$$

доказывается точно так же, как неравенство (7.3/7) в теореме 7.3. Из неравенств (7.3/8), (7.3/11) и теоремы 7.2 вытекает включение

$f \in TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$. Без ограничения общности можно считать, что $u \in W_p^1(\mathbf{R}^n)$ и

$$\|u\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \tag{8}$$

(последнее утверждение вытекает также из теоремы 4.7.1).

Обратимся к доказательству оценки

$$\{f\}_{p,\Gamma} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{9}$$

Ввиду леммы 7.5/1 и оценки (8) достаточно проверить (9), когда Γ является круговой поверхностью, определяемой правой частью (7.5/1). Пусть $y = (\varrho, \theta)$ – сферические координаты в $\mathbf{R}^{n-1}$. Предположим, что $|\zeta - z| > M(z,\zeta)$ и зафиксируем $\theta \in S^{n-2}$. Тогда

$$c\,|f(\varphi(z)\theta, z) - f(\varphi(\zeta)\theta, \zeta)|^p \leq \left(\int_{\varphi(z)}^{|\zeta-z|} |u_\varrho(\varrho,\theta,z)|d\varrho\right)^p +$$

$$+\left|\int_z^\zeta u_t(|\zeta - z|,\theta,t)dt\right|^p + \left(\int_{\varphi(\zeta)}^{|\zeta-z|} |u_\varrho(\varrho,\theta,\zeta)|d\varrho\right)^p.$$

Полагая $K(z,\zeta) = |\zeta - z|^{n-2-p}$, найдем, что

$$\{f\}_{p,\Gamma}^p = \int\limits_{S^{n-2}} d\theta \iint\limits_H K(z,\zeta)|f(\varphi(z)\theta,z) - f(\varphi(\zeta)\theta,\zeta)|^p dz d\zeta \leq c\,(I_1 + I_2),$$

где $H = \{(z,\zeta) : z, \zeta \in (0,1),\ |\zeta - z| > M(z,\zeta)\}$,

$$I_1 = \int_{S^{n-2}} d\theta \iint_H K(z,\zeta)dzd\zeta \left|\int_z^\zeta u_t(|\zeta - z|,\theta,t)dt\right|^p,$$

$$I_2 = \int_{S^{n-2}} d\theta \iint_H K(z,\zeta)dzd\zeta \left(\int_{\varphi(z)}^{|\zeta-z|} |u_\varrho(\varrho,\theta,z)|d\varrho\right)^p.$$

Величина I_1 имеет мажоранту

$$c\int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{z-\varphi(z)} (z-\zeta)^{n-2-p} d\zeta \left(\int_\zeta^z |u_t(z-\zeta,\theta,t)|dt\right)^p.$$

Замена переменных $\zeta = z - h, t = z - h\tau$ и неравенство Гёльдера дают

$$I_1 \leq c\int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^z h^{n-2}dh \int_0^1 |u_z(h,\theta,z-\tau h)|^p d\tau.$$

Расширяя пределы интегрирования, получаем

$$I_1 \le c \int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 h^{n-2} dh \int_{\mathbf{R}^1} |u_z(h,\theta,z)|^p dz \le$$
$$\le c\, \|\nabla u\|^p_{L_p(\mathbf{R}^n)} \le c\, \|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}.$$

Обратимся к оценке величины I_2. Имеем

$$I_2 \le c \int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 h^{n-2-p} dh \bigg(\int_{\varphi(z)}^h |u_\varrho(\varrho,\theta,z)| d\varrho \bigg)^p.$$

Применяя неравенство Харди (1.1.2/3), найдем, что

$$I_2 \le c \int_{S^{n-2}} d\theta \int_0^1 dz \int_{\varphi(z)}^1 |u_\varrho(\varrho,\theta,z)|^p \varrho^{n-2} d\varrho \le c\, \|u\|^p_{W^1_p(\Omega)}.$$

Таким образом, установлено неравенство (9). Объединяя (7.3/8), (7.3/11), (7) и (9), приходим к оценке (6).

3^o. Докажем неравенство, противоположное (6). Пусть f – функция на $\partial\Omega$, для которой $|\!|\!| f |\!|\!| < \infty$. Требуется построить продолжение $u \in W^1_p(\Omega)$ функции f, такое, что

$$\|u\|_{W^1_p(\Omega)} \le c\, |\!|\!| f |\!|\!|.$$

С помощью теоремы 3.1.1 и срезающей функции ψ, описанной в п. 1^o (см. также (4) и (7.2/19)), построение упомянутого продолжения сводится к случаю

$$|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma} < \infty \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} f \subset \{x \in \partial\Omega \cap U : z \le 1/4\}.$$

Пусть G – круговой пик, определенный в (7.5/2). Положим

$$v(x) = (E_\delta f)(x), \quad x \in G,$$

где E_δ – оператор продолжения, заданный формулой (7.2/14) при $\delta = 1/4$. Как было отмечено в замечании 7.2/2, выполнены условия $v \in W^1_p(G)$, $v|_\Gamma = f$ и

$$\|v\|_{W^1_p(G)} \le c\, |f|_{p,\Gamma}. \tag{10}$$

Пусть S – поверхность (7.5/1). Если $g = v|_S$, то из леммы 7.5/1 следует, что

$$c\,\{g\}_{p,S} \le \|\nabla v\|_{L_p(G)} + \{f\}_{p,\Gamma} \le c\,\big(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\big).$$

Применяя теорему 7.2 по отношению к G и S, получим

$$|g|_{p,S} \le c\,\|v\|_{W_p^1(G)},$$

где $|\cdot|_{p,S}$ – полунорма, определенная в (7.2/4–5) для функций на поверхности S. Отсюда

$$|g|_{p,S} + \{g\}_{p,S} \le c\,\bigl(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\bigr). \tag{11}$$

Продолжим функцию g с поверхности S во внешность области G. Отметим, что $v(x) = 0$ при $z > 1/4 + \varphi(1/4)$ (см. замечание 7.2/3), значит, $g(x) = 0$ при $z > 1/2$. Пусть $\overline{g}(z)$ задается формулой (7.5/9) и E – оператор продолжения с поверхности S на $\mathbf{R}^n$, построенный в лемме 7.3 (см. также замечание 7.3). Положим

$$v(x) = \bigl(F\,\overline{g}\bigr)(x) + \bigl(E(g-\overline{g})\bigr)(x), \quad x \in V \setminus \overline{G},$$

где F – оператор, введенный в лемме, предшествующей теореме, и $V = \{x \in U : z > 0\}$. Согласно лемме 7.5/3

$$\int_0^1\!\int_0^1 \frac{|\overline{g}(z) - \overline{g}(\zeta)|^p dz d\zeta}{(M(z,\zeta) + |\zeta - z|)^{2-n}|\zeta - z|^p}$$

$$+|g - \overline{g}|^p_{p,S} + \int_S \varphi(z)^{1-p}|g(x) - \overline{g}(z)|^p ds_x \le c\,(|g|_{p,S} + \{g\}_{p,S})^p\,.$$

Это неравенство, лемма 7.3 и лемма настоящего раздела позволяют заключить, что функция v является продолжением функции g с поверхности S внутрь области $V \setminus \overline{G}$, причем

$$c\,\|\nabla v\|_{L_p(V\setminus\overline{G})} \le |g|_{p,S} + \{g\}_{p,S}.$$

Объединяя последнюю оценку с (10), (11) и принимая во внимание, что $v(x) = 0$ в окрестности $z = 1$, получаем $v \in W_p^1(V)$ и

$$\|v\|_{W_p^1(V)} \le c\,\bigl(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\bigr).$$

Пусть

$$\lambda \in C_0^\infty(U), \quad \lambda(y,z) = 1 \;\text{ при }\; |z| \le 1/4, \quad |y| \le \varphi(1/4).$$

Обозначим через $\tilde{v}$ четное продолжение функции v из V на U. Определим функцию u на $\mathbf{R}^n$ следующим образом: $u = \lambda\tilde{v}$ на U и $u = 0$ во внешности U. Тогда $u \in W_p^1(\mathbf{R}^n)$, $u\big|_{\partial\Omega} = f$ и

$$\|u\|_{W_p^1(\mathbf{R}^n)} \le c\,\bigl(|f|_{p,\Gamma} + \{f\}_{p,\Gamma}\bigr).$$

Таким образом, u есть требуемое продолжение функции f. Доказательство теоремы закончено.

Формулируемое ниже утверждение позволяет записать соотношение (2) в несколько упрощенном виде.

Следствие 1. *В условиях теоремы соотношение* (2) *остается верным, если сумму первых двух слагаемых в фигурных скобках в правой части заменить на* $\|f\|^p_{L_p(\Pi)}$, *где* Π – *измеримое подмножество* $\partial\Omega$ *положительной площади.*

Доказательство. Определим полунорму $\langle f\rangle$ так, что $\langle f\rangle^p$ есть сумма двух последних слагаемых в фигурных скобках в правой части (2). Пусть $\langle f\rangle + \|f\|_{L_p(\Pi)} < \infty$ и пусть $\overline{f}$ – среднее значение функции f на поверхности $U \cap \partial\Omega = \Gamma$. Тогда

$$\int_\Gamma |f(x) - \overline{f}|^p \varphi(z)^{2-n} ds_x \le c \iint_{\Gamma\times\Gamma} |f(x) - f(\xi)|^p \varphi(z)^{2-n} ds_x ds_\xi.$$

Обозначим через $g(x,\xi)$ подынтегральную функцию в последнем интеграле. Если $r < M(z,\zeta)$, то $c\,g(x,\xi)$ мажорируется подынтегральнй функцией в последнем интеграле в (2). Если же $r > M(z,\zeta)$, то $c\,g(x,\xi)$ не превосходит подынтегральной функции во втором интеграле в правой части (2). Отсюда

$$\int_\Gamma |f(x) - \overline{f}|^p \varphi(z)^{2-n} ds_x \le c\,\langle f\rangle^p. \tag{12}$$

Заметим еще, что выражение $c\,\|f - \overline{f}\|^p_{L_p(\partial\Omega)}$ не больше последнего интеграла в (2). Объединяя сказанное с (2) и (12), получаем

$$\|f - \overline{f}\|_{TW^1_p(\Omega)} \le c\,\langle f\rangle. \tag{13}$$

Пусть $E : TW^1_p(\Omega) \to W^1_p(\Omega)$ – ограниченный оператор продолжения. Положим $u = \overline{f} + E(f - \overline{f})$. Тогда $u|_{\partial\Omega} = f$, а из (13) следует оценка

$$\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \le c\,\langle f\rangle.$$

По теореме 1.5.2 имеем

$$c\,\|u\|_{W^1_p(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_p(\Pi)},$$

и значит,

$$c\,\|u\|_{W^1_p(\Omega)} \le \|f\|_{L_p(\Pi)} + \langle f\rangle.$$

Последняя оценка вместе с (2) приводят к неравенству

$$\|\varphi^{(2-n)/p} f\|_{L_p(\Gamma)} + \|f\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c\left(\|f\|_{L_p(\Pi)} + \langle f\rangle\right),$$

чем и заканчивается доказательство следствия.

Теорема настоящего раздела и следствие 1 позволяют сформулировать такое утверждение.

Следствие 2. *Пусть Ω – та же область, что и в теореме. Если $p > n-1$, то*

$$\|f\|_{TL_p^1(\Omega)} \sim \langle f\rangle, \tag{14}$$

где $\langle f\rangle^p$ есть сумма двух последних слагаемых в фигурных скобках в правой части (2), *а полунорма $\|\cdot\|_{TL_p^1(\Omega)}$ определена в* (3.1.1/2).

Доказательство. Ввиду теоремы 1.5.2 левая часть (14) эквивалентна $\|f-\overline{f}\|_{TW_p^1(\Omega)}$, где $\overline{f}$ имеет тот же смысл, что и в следствии 1. Принимая во внимание (2) и (13), получаем требуемый результат.

В заключение сформулируем одно замечание относительно функций класса $W_p^1(\mathbf{R}^n)$.

Замечание. Пусть $n > 2$ и $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – область с внутренним пиком. Установленные в настоящей главе теоремы о следах показывают, что пространство $TW_p^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $TW_p^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega})$ при всех $p \in [1,\infty)$. Отсюда вытекает, что пространство следов функций из $W_p^1(\mathbf{R}^n)$ на $\partial\Omega$ совпадает с $TW_p^1(\Omega)$ и, таким образом, может быть охарактеризовано теоремами 7.1.2, 7.3, 7.4.2 и 7.6.

7.7 Комментарии к главе 7

Содержание разд. 7.1 взято из работы авторов [47].

В случае $p = 2$ теоремы 7.2, 7.3 и 7.4.2 были доказаны в работе В. Г. Мазья [39] с использованием аппарата преобразования Фурье. В разд. 7.2–7.6 изложение следует работе авторов [49]. Основные результаты главы 7 были анонсированы в заметке авторов [122].

При $p > 1$ граничные значения функций класса $W_p^1(\Omega)$ в областях с пиками были также получены в работе М. Ю. Васильчика [15]. В указанной работе применялась подходящая заменой переменной, сводящая описание пространства следов функций из $W_p^1(\Omega)$, сосредоточенных в окрестности вершины пика, к исследованию граничных следов функций из некоторого весового класса W_p^1 в стандартном цилиндре (или его внешности).

Глава 8

Приложения к краевым задачам для эллиптических уравнений

В этой главе мы рассмативаем приложения теорем вложения и теорем о граничных следах функций к некоторым краевым задачам для уравнений в частных производных.

Глава состоит из трех разделов. В разд. 8.1 исследуется разрешимость задачи Неймана для эллиптических уравнений порядка $2l$, $l \geq 1$, с однородным краевым условием. Показано, что при некоторых ограничениях на область Ω и коэффициенты уравнения разрешимость задачи Неймана с правой частью из $L_q(\Omega)$, $q \in (1, \infty)$, равносильна непрерывности оператора вложения: $W_2^l(\Omega) \to L_{q'}(\Omega)$, $1/q + 1/q' = 1$. Отсюда и из результатов разд. 5.1 выводится необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Неймана в области с внешним пиком.

В разд. 8.2 изучаются условия разрешимости задачи Неймана для уравнений второго порядка с неоднородным краевым условием. Выясняется, что разрешимость задачи Неймана с любыми граничными данными из $L_q(\partial\Omega)$ равносильна непрерывности оператора граничного следа: $C(\overline{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega) \to L_{q'}(\partial\Omega)$, где $1/q + 1/q' = 1$. Теоремы разд. 5.4 позволяют сформулировать явные условия разрешимости задачи Неймана для области с внешним пиком.

В разд. 8.3 формулируются необходимые и достаточные условия на граничную функцию, при которых задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в области с пиком однозначно разрешима в классе $W_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

8.1 Задача Неймана для эллиптических уравнений с однородным краевым условием

В этом разделе Ω означает ограниченную область в $\mathbf{R}^n$, $n > 1$. Предположим, что l – натуральное число и $a_{\alpha\beta}$ – вещественные функции из $L_\infty(\Omega)$, где α, β – произвольные мультииндексы размерности n, удовлетворяющие условию $|\alpha| = |\beta| = l$. Пусть $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ и пусть существует такая постоянная $\nu > 0$, что для всех $u \in L_2^l(\Omega)$ верна оценка

$$\int_\Omega \left(\sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \, D^\beta u \right) dx \geq \nu \, \|\nabla_l u\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (1)$$

Далее через $W^l_{p,q}(\Omega)$ обозначается пространство $L_p^l(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W^l_{p,q}(\Omega)} = \|\nabla_l u\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_q(\Omega)}, \quad p, q \geq 1.$$

Так как пространство $W^l_{p,q}(\Omega)$ банахово, то банаховым является и фактор-пространство $\dot{W}^l_{p,q}(\Omega) = W^l_{p,q}(\Omega)/\mathcal{P}_{l-1}$, снабженное нормой

$$\|\dot{v}\|_{\dot{W}^l_{p,q}(\Omega)} = \inf\left\{\|v - P\|_{L_q(\Omega)} : P \in \mathcal{P}_{l-1}\right\} + \|\nabla_l v\|_{p,\Omega}, \quad v \in W^l_{p,q}(\Omega),$$

где $\dot{v} = \{v - P : P \in \mathcal{P}_{l-1}\}$. Известно, что фактор-пространство $\dot{L}^l_p(\Omega) = L^l_p(\Omega)/\mathcal{P}_{l-1}$ с нормой

$$\|\dot{v}\|_{\dot{L}^l_p(\Omega)} = \|\nabla_l v\|_{p,\Omega}$$

также является банаховым (см, например, В. Г. Мазья [40, 1.1.13]).

Определение. Пусть $1 < q < \infty$. Оператор A_q задачи Неймана для дифференциального оператора

$$u \mapsto (-1)^l \sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta} D^\beta u\right)$$

задается условиями

1) $u \in W^l_{2,q}(\Omega),\ A_q u \in L_{q'}(\Omega),\ 1/q + 1/q' = 1;$

2) для всех $v \in W^l_{2,q}(\Omega)$ верно равенство

$$\int_\Omega vA_q udx = \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u\ D^\alpha v\right) dx.$$

Легко проверить, что отображение

$$W^l_{2,q}(\Omega) \supset D(A_q) \ni u \mapsto A_q u \in L_{q'}(\Omega)$$

замкнуто и множество значений $\mathrm{Im}(A_q)$ оператора A_q содержится в множестве $L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1}$ функций из $L_{q'}(\Omega)$, ортогональных пространству $\mathcal{P}_{l-1}$. Следующая лемма дает достаточное условие разрешимости уравнения $A_q u = f$ для любой функции $f \in L_{q'}(\Omega)$, ортогональной пространству $\mathcal{P}_{l-1}$.

Лемма 1. *Если неравенство*

$$\inf\left\{\|v - P\|_{L_q(\Omega)} : P \in \mathcal{P}_{l-1}\right\} \le C\,\|\nabla_l v\|_{L_2(\Omega)}, \quad C = \mathrm{const} > 0, \quad (2)$$

верно для всех $v \in L^l_2(\Omega)$, то

$$\mathrm{Im}(A_q) = L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1}. \quad (3)$$

Более того, если $A_q u = f$, то имеет место оценка

$$\|\nabla_l u\|_{L_2(\Omega)} \le C\nu^{-1} \|f\|_{L_{q'}(\Omega)}, \quad (4)$$

в которой ν и C – постоянные из (1) и (2) соответственно (следовательно, u определяется единственным образом с точностью до слагаемого из $\mathcal{P}_{l-1}$).

Доказательство. Пусть $f \in L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1},\ v \in L^l_2(\Omega)$. Из (2) вытекает, что

$$\left|\int_\Omega vfdx\right| \le C\,\|f\|_{L_{q'}(\Omega)} \|\nabla_l v\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5)$$

Таким образом, функционал $L^l_2(\Omega) \ni v \mapsto \int_\Omega vfdx$ непрерывен в $L^l_2(\Omega)$ и может быть представлен в виде $[u, v]$, где $u \in L^l_2(\Omega)$ и

$$[u, v] = \int_\Omega \Big(\sum\nolimits_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u\, D^\alpha v\Big) dx \quad (6)$$

(последнее следует из того, что фактор-пространство $\dot{L}_2^l(\Omega)$ гильбертово со скалярным произведением элементов $\dot{u}$, $\dot{v}$, определяемым правой частью (6)). По лемме 1.5.3 пространство $L_2^l(\Omega)$ вложено в $L_q(\Omega)$, откуда $u \in W_{2,q}^l(\Omega)$ и $f = A_q u$. Проверим оценку (4). Так как $[u,v] = \int_\Omega fvdx$ для всех $v \in L_2^l(\Omega)$, то

$$[u,u]^{1/2} = \sup\left\{\left|\int_\Omega fvdx\right| : v \in L_2^l(\Omega),\ [v,v]=1\right\}.$$

Применяя (1) и (5), получаем

$$\nu^{1/2}\|\nabla_l u\|_{L_2(\Omega)} \le [u,u]^{1/2} \le C\nu^{-1/2}\|f\|_{L_{q'}(\Omega)},$$

что приводит к (4). Доказательство леммы 1 закончено.

Следующее утверждение частично обращает лемму 1.

Лемма 2. *Если верно равенство* (3), *то* (2) *выполнено для всех* $v \in W_{2,q}^l(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $v \in W_{2,q}^l(\Omega)$, $\quad \|\nabla_l v\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Линейный функционал

$$L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1} \ni f \mapsto F_v(f) = (f,v) = \int_\Omega fvdx$$

может быть представлен в виде $F_v(f) = [u,v]$, где билинейная форма $[\cdot,\cdot]$ определена в (6), а u – некоторый элемент из $L_2^l(\Omega)$. Отсюда

$$|F_v(f)| \le [u,u]^{1/2}[v,v]^{1/2} \le C\,[u,u]^{1/2}, \quad C = \text{const},$$

и множество $\{F_v(f)\}$ ограничено для каждой фиксированной функции $f \in L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1}$. Таким образом, $\|F_v\| \le \text{const}$.

Установим следующую оценку снизу для $\|F_v\|$:

$$\|F_v\| \ge \inf\left\{\|v-P\|_{L_q(\Omega)} : P \in \mathcal{P}_{l-1}\right\}. \tag{7}$$

В самом деле, по теореме Хана–Банаха функционал F_v может быть продолжен до линейного непрерывного функционала на $L_{q'}(\Omega)$ с той же нормой, т.е. существует такой элемент $w \in L_q(\Omega)$, для которого $\|w\|_{L_q(\Omega)} = \|F_v\|$ и

$$(f,w) = (f,v) \quad \text{при всех} \quad f \in L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1}.$$

Проверим, что $v-w\in\mathcal{P}_{l-1}$. Пусть $\{P_\alpha\}_{|\alpha|<l}$ – базис $\mathcal{P}_{l-1}$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$. Положим

$$\Pi g=\sum\nolimits_{|\alpha|<l}(g,P_\alpha)P_\alpha.$$

Тогда $(\Pi g,h)=(g,\Pi h)$ для всех $g\in L_q(\Omega)$ и $h\in L_{q'}(\Omega)$. В частности, если $g=v-w$, то

$$(g-\Pi g,h)=(g,h-\Pi h)=0 \ \text{ при всех } \ h\in L_{q'}(\Omega),$$

так как $\big(h-\Pi h\big)\perp\mathcal{P}_{l-1}$. Отсюда $g=\Pi g\in\mathcal{P}_{l-1}$. Итак,

$$\|F_v\|=\|v-P\|_{L_q(\Omega)}$$

для некоторого $P\in\mathcal{P}_{l-1}$, и оценка (7) установлена. Отсюда

$$\inf\{\|v-P\|_{L_q(\Omega)}:P\in\mathcal{P}_{l-1}\}\le\text{const},$$

и (2) верно для всех $v\in W^l_{2,q}(\Omega)$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Если множество $W^l_{2,q}(\Omega)$ плотно в $L^l_2(\Omega)$, то равенство* (3) *имеет место тогда и только тогда, когда непрерывен оператор вложения: $L^l_2(\Omega)\to L_q(\Omega)$.*

Доказательство. В силу лемм 1, 2 и 1.5.3 достаточно вывести неравенство (2) для всех $v\in L^l_2(\Omega)$ при условии, что (2) верно для всех $v\in W^l_{2,q}(\Omega)$.

В самом деле, пусть (2) верно для любого элемента $v\in W^l_{2,q}(\Omega)$. Тогда

$$\|\dot v\|_{\dot L^l_2(\Omega)}\le\|\dot v\|_{\dot W^l_{2,q}(\Omega)}\le(1+C)\|\dot v\|_{\dot L^l_2(\Omega)} \tag{8}$$

при всех $\dot v\in\dot W^l_{2,q}(\Omega)$ с той же постоянной C, что и в (2). Поскольку пространство $W^l_{2,q}(\Omega)$ плотно в $L^l_2(\Omega)$, то $\dot W^l_{2,q}(\Omega)$ плотно в $\dot L^l_2(\Omega)$. Отсюда и из (8) следует, что $\dot L^l_2(\Omega)=\dot W^l_{2,q}(\Omega)$. Таким образом, второе неравенство (8) выполнено для всех $\dot v\in\dot L^l_2(\Omega)$ и, значит, (2) верно для всех $v\in L^l_2(\Omega)$.

Замечание. В связи с требованием плотности множества $W^l_{2,q}(\Omega)$ в $L^l_2(\Omega)$ в теореме 1, отметим, что оно автоматически выполнено при $l=1$ для любой ограниченной области (см. [40, 3.1.2]). Однако, как показано в работе [121] (см. также [125, 2.3]), это, вообще говоря, не так в случае $l>1$.

Пусть $a \in L_\infty(\Omega)$, $a \geq \text{const} > 0$ почти всюду в Ω. Введем оператор

$$u \mapsto B_q u = A_q u + au$$

с областью определения $D(A_q) \cap W_2^l(\Omega)$ и рассмотрим задачу Неймана $B_q u = f$ с правой частью из $L_{q'}(\Omega)$. Если $1 < q \leq 2$, то ее разрешимость вытекает из непрерывности функционала

$$v \mapsto \int_\Omega fv dx$$

в пространстве $W_2^l(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[u, v] + \int_\Omega a(x)uv dx,$$

где $[\cdot,\cdot]$ – билинейная форма (6). В случае $q > 2$ те же рассуждения, что в леммах 1, 2 и теореме 1 приводят к такому результату.

Теорема 2. *Если множество $W_{2,q}^l(\Omega)$ плотно в $W_2^l(\Omega)$, то непрерывность оператора вложения: $W_2^l(\Omega) \to L_q(\Omega)$ равносильна однозначной разрешимости уравнения $B_q u = f$ при всех $f \in L_{q'}(\Omega)$.*

Здесь опять условие плотности автоматически выполнено при $l = 1$ [40, 3.1.2]. Вопрос о дискретности спектра оператора B_2 сводится к изучению компактности вложения $W_2^l(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Именно, B_2 имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда указанное вложение компактно (см., например, М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк [10], теорема 10.2.5).

В заключение рассмотрим три примера.

Пример 1. *Задача Неймана в области с внешним пиком.* Пусть Ω имеет вид (5.1.3/1), где ω и φ обладают описанными в начале разд. 5.1.3 свойствами, причем $\omega \in C^{0,1}$. Из леммы 4.5.1/1 и теоремы 1.4/2 вытекает, что множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ (и тем более $W_{2,q}^l(\Omega)$) плотно в $L_2^l(\Omega)$ при любых $q \in (1, \infty)$ и $l = 1, 2, \ldots$ Объединяя теоремы 1, 2 с теоремами 5.1.3, 5.1.5, приходим к следующим результатам.

Пусть A_q и B_q – определенные выше операторы задачи Неймана при $l \geq 1$, $q \in (1, \infty)$. Если $q \leq 2$, то уравнение $A_q u = f$ разрешимо единственным образом с точностью до полиномиального слагаемого из $\mathcal{P}_{l-1}$ для всех $f \in L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1}$, $q' = q/(q-1)$, а уравнеие $B_q u = f$ однозначно разрешимо для любой функции $f \in L_{q'}(\Omega)$.

Если $q > 2$, то те же утверждения верны тогда и только тогда, когда при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$

$$\sup_{z\in(0,1)} \left\{ \left(\int_0^z \varphi(t)^{n-1}(z-t)^{(l-1)q(1-\gamma)}dt \right)^{1/q} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_z^1 \varphi(t)^{1-n}(t-z)^{2\gamma(l-1)}dt \right)^{1/2} \right\} < \infty.$$

Кроме того, спектр оператора B_2 дискретен.

Пример 2. *Задача Неймана в срезанном пике.* Пусть

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : z \in (\varepsilon, 1), |y| < \varphi(z)\}, \quad n \geq 2,$$

где $\varphi(z) = c\,z^\lambda$, $\lambda > 1$, а ε – малый положительный параметр. Пусть A_q – описанный выше оператор задачи Неймана при $l \geq 1$, $q \in (1,\infty)$. Предположим, что $2l < n$. Так как $\Omega^{(\varepsilon)} \in C^{0,1}$, то в силу теоремы Соболева и теоремы 1 уравнение $A_q u = f$ разрешимо для всех $f \in L_{q'}(\Omega^{(\varepsilon)}) \ominus \mathcal{P}_{l-1}$ при $q \in (1, 2n/(n-2l)]$. Кроме того, согласно лемме 1 и следствию 5.3.1 верна оценка

$$\|\nabla_l u\|_{L_2(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c(n,l,q)\max\{1,\varepsilon^\mu\}\nu^{-1}\|f\|_{L_{q'}(\Omega^{(\varepsilon)})},$$

где $\mu = l - (\lambda(n-1)+1)(p^{-1} - q^{-1})$ и ν – константа из неравенства (1). В частности, при $q = 2n/(n-2l)$ получаем априорную оценку

$$\|\nabla_l u\|_{L_2(\Omega^{(\varepsilon)})} \leq c(n,l)\varepsilon^{-l(\lambda-1)(n-1)/n}\nu^{-1}\|f\|_{L_{q'}(\Omega^{(\varepsilon)})},$$

где $q' = 2n/(n+2l)$.

Пример 3. *Задача Неймана в области специального вида.* Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ изображенная на рис. 10. Эта область является объединением цилиндра

$$Q = \{x = (y,z) \in \mathbf{R}^n : y \in \mathbf{R}^{n-1},\ |y| < 1/2,\ z \in (-1,0)\},$$

последовательности цилиндров

$$Q_k = \{(y,z) \in \mathbf{R}^n : y \in B^{(k)} \subset \mathbf{R}^{n-1},\ z \in (\delta_k, 2\delta_k)\}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

и последовательности соединяющих Q с Q_k перешейков

$$S_k = \{(y,z) \in \mathbf{R}^n : y \in \mathcal{B}^{(k)} \subset \mathbf{R}^{n-1},\ z \in [0,\delta_k]\}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

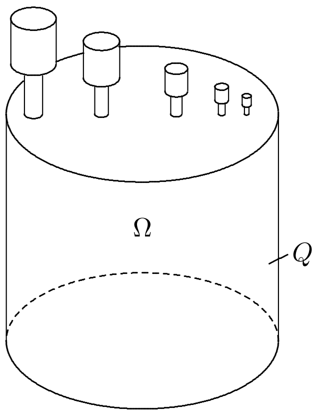

Рис. 10

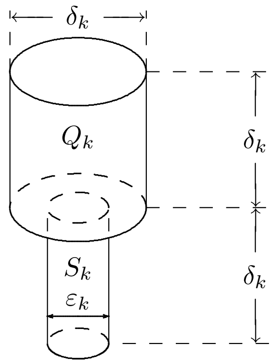

Рис. 11

где $B^{(k)}$ – открытый шар в $\mathbf{R}^{n-1}$ диаметра δ_k и $\mathcal{B}^{(k)}$ – открытый концентрический с $B^{(k)}$ шар диаметра ε_k, $\varepsilon_k < \delta_k$ (см. рис. 10, 11). Мы предполагаем, что замыкания всех шаров $B^{(k)}$ расположены в шаре $\{y \in \mathbf{R}^{n-1} : |y| < 1/2\}$, и при любом $N \geq 1$ объединение шаров $\cup_{k=1}^{N} B^{(k)}$ находится на положительном расстоянии от объединения остальных шаров $B^{(N+1)}, B^{(N+2)}, \ldots$ В частности,

$$\{\delta_k\}_{k\geq 1} \subset (0,1), \quad \sum_{k\geq 1} \delta_k^{n-1} < \infty.$$

Наконец, положим $\varepsilon_k = \delta_k^{\lambda}$, где $\lambda > 1$.

Убедимся, что множество $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ плотно в $L_p^l(\Omega)$ при $l = 1, 2, \ldots$, $p \in [1, \infty)$. В самом деле, пусть

$$\Omega_0 = Q, \quad \Omega_N = \Omega_{N-1} \cup S_N \cup Q_N, \ N = 1, 2, \ldots$$

Введем ограниченный оператор продолжения

$$E : V_p^l(Q) \to V_p^l(\mathbf{R}^n).$$

Для заданной функции $u \in L_p^l(\Omega)$ определим u_N на Ω: $u_N = u$ на Ω_N и $u_N = E(u|_Q)$ на $\Omega \backslash \Omega_N$. Ясно, что $u_N \to u$ в $L_p^l(\Omega)$ при $N \to \infty$. Фактически равенство $u_N = E(u|_Q)$ определяет функцию u_N в некотором цилиндре $D_N \times (0, 2)$, содержащем $\Omega \setminus \Omega_N$ и удаленном от $\overline{Q}_k \cup \overline{S}_k$ при $k \leq N$. При этом можно считать, что область $D_N \subset$

$B^{(n-1)}_{1/2}$ принадлежит классу $C^{0,1}$. Следовательно, u_N принадлежит пространству $V^l_p(G_N)$ для области $G_N = \Omega_N \cup (D_N \times [0,2)) \in C^{0,1}$, $\Omega \subset G_N$. Остается аппроксимировать u_N в $V^l_p(G_N)$ функциями из $C^\infty(\overline{G}_N)$ по теореме 1.4/2. Те же рассуждения показывают, что множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W^l_p(\Omega)$ при $l = 1, 2, \ldots, p \in [1, \infty)$.

Нетрудно проверить, что область Ω удовлетворяет λ-условию Джона (см. описание этого класса областей в разд. 1.7). Согласно О. В. Бесову [6, 7], для такой области пространство $L^l_2(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_q(\Omega)$, если $q \in (2, \infty)$ и

$$l - (1 + \lambda(n-1))/2 + n/q \geq 0. \tag{9}$$

Убедимся, что для рассматриваемой области условия (9) и необходимы для непрерывности оператора вложения: $L^l_2(\Omega) \to L_q(\Omega)$. С этой целью введем функцию f со свойствами

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}^1), \quad f|_{(-\infty,1/3)} = 0, \quad f|_{(2/3,\infty)} = 1, \quad 0 \leq f \leq 1, \tag{10}$$

и определим последовательность $\{u_k\}$ гладких в Ω функций, положив

$$u_k(y,z) = \begin{cases} f(z/\delta_k) & \text{на } Q_k \cup S_k, \\ 0 & \text{в остальных точках } \Omega. \end{cases}$$

Из непрерывности упомянутого вложения следует оценка

$$\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \leq c\,\|\nabla_l u_k\|_{L_2(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad q \in [1, \infty),$$

с константой c, не зависящей от k. Поэтому

$$[\mathrm{mes}_n(Q_k)]^{1/q} \leq c\,\delta_k^{-l}[\mathrm{mes}_n(S_k)]^{1/2},$$

откуда следует (9).

Из достаточности условия (9) для непрерывности оператора вложения: $L^l_2(\Omega) \to L_q(\Omega)$ и теоремы 1.8/1 вытекает, что если неравенство (9) строгое при некотором $q \in [2, \infty)$ то указанный оператор вложения компактен.

Можно показать [59], что пространство $L^l_2(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_2(\Omega)$ и в том случае, когда (9) превращается в равенство при $q = 2$, т.е. при $\lambda = 1 + 2l/(n-1)$. Проверим однако, что в этом случае вложение $W^l_2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ некомпактно. Пусть f – функция со свойствами (10). Положим при $k = 1, 2, \ldots$

$$v_k(y,z) = \begin{cases} \delta_k^{-n/2} f(z/\delta_k), & \text{если } (y,z) \in Q_k \cup S_k, \\ 0 & \text{в остальных точках } \Omega. \end{cases}$$

Тогда $v_k \in C^\infty(\Omega)$,

$$\|v_k\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\nabla_l v_k\|^2_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \delta_k^{-n}\mathrm{mes}_n(Q_k \cup S_k) + c\delta_k^{-n-2l}\mathrm{mes}_n(S_k) \le c,$$

и последовательность $\{v_k\}$ ограничена в $W^l_2(\Omega)$. В то же время

$$\|v_k - v_i\|^2_{L_2(\Omega)} \ge \|v_k\|^2_{L_2(Q_k)} + \|v_i\|^2_{L_2(Q_i)} = 2\mathrm{mes}_{n-1}(B^{(n-1)}_{1/2})$$

при $k \ne i$. Поэтому не существует подпоследовательности $\{v_k\}$, сходящейся в $L_2(\Omega)$.

Пусть A_q – оператор задачи Неймана в области Ω для эллиптического дифференциального оператора порядка $2l$, описанный в начале раздела. Объединяя вышесказанное с теоремой 1, приходим к следующему утверждению: если $q \in [2, \infty)$, то неравенство (9) есть необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения

$$A_q u = f$$

для всех

$$f \in L_{q'}(\Omega) \ominus \mathcal{P}_{l-1}, \quad q' = q/(q-1).$$

Пусть B_q – оператор задачи Неймана, определенный перед теоремой 2. Тогда то же неравенство необходимо и достаточно для однозначной разрешимости уравнения $B_q u = f$, $q \in [2, \infty)$, с любой правой частью $f \in L_{q'}(\Omega)$. Оператор B_2 имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда $\lambda < 1 + 2l/(n-1)$.

8.2 Задача Неймана с неоднородным краевым условием для уравнений второго порядка

Ниже мы даем условие разрешимости задачи Неймана, где граничные данные принадлежат классу $L_q(\partial\Omega)$, поэтому нам понадобится $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа на $\partial\Omega$. Напомним определение меры Хаусдорфа.

Пусть E – подмножество $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим при $\varepsilon > 0$ всевозможные покрытия E счетными семействами шаров с радиусами $\le \varepsilon$. Для $s \ge 0$ положим

$$\sigma_s(\varepsilon) = v_s \inf \sum_i r_i^s,$$

где r_i – радиус i-го шара, $v_s > 0$ и инфимум берется по всем указанным покрытиям. Ввиду монотонности функции σ_s существует предел (конечный или бесконечный)

$$H_s(E) = \lim_{\varepsilon \to +0} \sigma_s(\varepsilon).$$

Этот предел называется *s-мерной мерой Хаусдорфа* множества E. Если s – натуральное число, то полагают $v_s = \mathrm{mes}_s(B_1^{(s)})$, в противном случае v_s – любая положительная константа. Например, можно считать $v_s = \pi^{s/2}/\Gamma(1+s/2)$ для произвольного $s \geq 0$. В случае натурального s, $s \leq n$, мера Хаусдорфа H_s совпадает с s-мерной площадью s-мерного гладкого многообразия в $\mathbf{R}^n$. В частности, $H_n(E) = \mathrm{mes}_n(E)$ для измеримых по Лебегу множеств $E \subset \mathbf{R}^n$ (см.,например, Земер [144, 1.4.2]).

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $H_{n-1}(\partial\Omega) < \infty$. Положим

$$W = C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$$

и обозначим через $\tilde{W}_2^1(\Omega)$ замыкание множества W в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Рассмотрим краевую задачу

$$-\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)\big|_{\partial\Omega} = g. \tag{2}$$

Предполагается, что при $i, j = 1, 2, \ldots, n$ функции a_{ij} и функция a принадлежат классу $L_\infty(\Omega)$ и удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji}$, выполнено условие эллиптичности

$$\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c\,|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbf{R}^n,\ x \in \Omega,$$

где $c = \mathrm{const} > 0$ и $a(x) \geq \mathrm{const} > 0$ почти везде в Ω. Кроме того, ν – единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали в точке $x \in \partial\Omega$. Относительно g предположим $g \in L_1(\partial\Omega)$.

Функция $u \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ называется решением задачи (1), (2), если для всех $v \in W$ верно равенство

$$[u, v] = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)ds_x,$$

где $s = H_{n-1}$ и

$$[u, v] = \int_\Omega \left(\sum\nolimits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x)uv \right) dx. \tag{3}$$

Таким образом, разрешимость задачи (1), (2) равносильна непрерывности функционала

$$\tilde{W}_2^1(\Omega) \supset W \ni v \mapsto \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)ds_x. \tag{4}$$

При этом решение указанной задачи единственно.

Лемма. *Пусть* $1 \le q' \le \infty$ *и* $1/q + 1/q' = 1$. *Задача* (1), (2) *разрешима при всех* $g \in L_{q'}(\partial\Omega)$ *тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная* c, *что для всех* $v \in W$ *верна оценка*

$$\|v\|_{L_q(\partial\Omega)} \le c\,\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \tag{5}$$

т.е. оператор сужения не границу $W \ni v \mapsto v|_{\partial\Omega}$ *допускает единственное продолжение до непрерывного оператора:* $\tilde{W}_2^1(\Omega) \to L_q(\partial\Omega)$.

Доказательство. Пусть (5) имеет место для всех $v \in W$. По неравенству Гёльдера

$$\left| \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)ds_x \right| \le \|g\|_{L_{q'}(\partial\Omega)} \|v\|_{L_q(\partial\Omega)},$$

а так как последний сомножитель не больше $c\,\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$, то функционал (4) непрерывен для всех $g \in L_{q'}(\partial\Omega)$.

Пусть задача (1), (2) разрешима для всех $g \in L_{q'}(\partial\Omega)$. Положим $V = \{v \in W : \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \le 1\}$ и при $v \in V$ определим функционал

$$L_{q'}(\partial\Omega) \ni g \mapsto \Phi_v(g) = \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)ds_x.$$

Для любого элемента $g \in L_{q'}(\partial\Omega)$ существует функция $u \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$, такая, что

$$\Phi_v(g) = [u, v], \quad v \in V,$$

где $[\cdot,\cdot]$ – билинейная форма (3). Поэтому для любой функции $v \in V$ имеем

$$|\Phi_v(g)| \le \mathrm{const} \cdot [u, u]^{1/2}.$$

Таким образом, функционалы $\Phi_v(\cdot)$ точечно ограничены, и, значит, их нормы ограничены в совокупности, т.е.

$$\|v\|_{L_q(\partial\Omega)} \le \mathrm{const}, \quad v \in V.$$

Последнее означает, что оценка (5) имеет место для всех $v \in W$. Доказательство леммы закончено.

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика в смысле определения 4.1.1, где $\omega \in C^{0,1}$. Из леммы 4.5.1/1 и теоремы 1.4/2 вытекает, что множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_2^1(\Omega)$. В частности, верно равенство $\tilde{W}_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$. Объединяя лемму настоящего раздела с теоремами 5.4.1, 5.4.2, приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$ с вершиной внешнего пика на границе. Если $q' > 2$, то задача Неймана* (1), (2) *разрешима для всех $g \in L_{q'}(\partial\Omega)$ тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^1 \left[\int_0^z \varphi(t)^{n-2} dt \left(\int_z^1 \frac{dt}{\varphi(t)^{n-1}} \right)^{q-1} \right]^{\frac{2}{2-q}} \frac{dz}{\varphi(z)^{n-1}} < \infty,$$

где $1/q + 1/q' = 1$. В случае $1 \le q' \le 2$ разрешимость задачи Неймана для всех $g \in L_{q'}(\partial\Omega)$ равносильна выполнению условия

$$\sup_{r\in(0,1)} \left(\int_0^r \varphi(z)^{n-2} dz \right)^{1/q} \left(\int_r^1 \varphi(z)^{1-n} dz \right)^{1/2} < \infty, \quad 1/q + 1/q' = 1.$$

Пример. Для степенного пика

$$\Omega = \{(y,z) : z \in (0,1), |y| < c\, z^\lambda\}, \quad \lambda > 1,$$

задача Неймана (1), (2) разрешима при всех $g \in L_r(\partial\Omega)$ в следующих случаях:

1) $1 < \lambda \le 2, \;\; r \ge 2(\lambda(n-2)+1)/(\lambda(n-3)+3)$;

2) $2 < \lambda < 3, \;\; n = 2, \;\; r > 2/(3-\lambda)$;

3) $\lambda > 2, \;\; n > 2, \;\; r > 2(\lambda(n-2)+1)/(\lambda(n-3)+3)$.

8.3 Приложение к задаче Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка

Здесь мы рассмотрим очевидное приложение полученных в главе 7 результатов к уравнениям в частных производных.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область и отображение

$$A : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$$

имеет следующие свойства: вектор-функция $\Omega \ni x \mapsto A(x,\xi) \in \mathbf{R}^n$ измерима для всех $\xi \in \mathbf{R}^n$; вектор-функция $\mathbf{R}^n \ni \xi \mapsto A(x,\xi)$ непрерывна при п.в. $x \in \Omega$. Существуют $p \in (1,\infty)$ и такие константы $c_0, c_1 > 0$, не зависящие от x, ξ, что для всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ и п.в. $x \in \Omega$

$$A(x,\xi) \cdot \xi \geq c_0 |\xi|^p, \tag{1}$$

$$|A(x,\xi)| \leq c_1 |\xi|^{p-1}, \tag{2}$$

где $\eta \cdot \xi$ означает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$. Кроме того, для п.в. $x \in \Omega$

$$(A(x,\xi_1) - A(x,\xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) > 0, \quad \text{если} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n, \ \xi_1 \neq \xi_2 \tag{3}$$

и

$$A(x,\lambda\xi) = \lambda|\lambda|^{p-2} A(x,\xi), \quad \lambda \in \mathbf{R}^1, \xi \in \mathbf{R}^n. \tag{4}$$

Предположим еще, что $u_0 \in W_p^1(\Omega)$.

Будем говорить, что функция $u \in W_p^1(\Omega)$ является решением задачи

$$\operatorname{div} A(x, \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$u - u_0 \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega), \tag{6}$$

если выполнено (6) и

$$\int_\Omega A(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla v dx = 0 \ \text{ для всех } \ v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7}$$

Известно, что при ограничениях (1) – (5) указанная краевая задача имеет единственное решение для любой функции $u_0 \in W_p^1(\Omega)$ (см. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева [30, гл. IV, V], Д. Гилбарг, Н. Трудингер [17, гл. 11], Ю. Хейнонен, Т. Кильпеляйнен, О. Мартио [107, гл. 3, 5], М. Ренарди, Р. Роджерс [135, гл. 9]).

Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, $n > 2$, с вершиной внешнего или внутреннего пика в смысле определений 4.1.1 и 4.7.1. Предположим, что область ω в этих определениях односвязна. Рассмотрим в Ω задачу (5) с краевым условием

$$u\big|_{\partial\Omega} = f, \tag{8}$$

где f – некоторая функция на $\partial\Omega$. Ее решением назовем функцию $u \in W_p^1(\Omega)$, имеющую граничный след f и удовлетворяющую тождеству (7). В силу вышесказанного (см. еще замечание 7.1.1/1) задача (5), (8) однозначно разрешима в классе $W_p^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in TW_p^1(\Omega)$, т.е. когда f принадлежит пространству граничных следов функций из $W_p^1(\Omega)$.

Теоремы, доказанные в главе 7, позволяют сформулировать явные необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости упомянутой задачи в пространстве $W_p^1(\Omega)$. Именно, если выполнено одно из следующих условий:

(i) Ω имеет внешний пик и

$$\|f\|^p_{W_p^{1-1/p}(\sigma)} + \iint\limits_{\{x,\xi\in U\cap\partial\Omega:|\zeta-z|<M(z,\zeta)\}} \frac{|f(x)-f(\xi)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}} ds_x ds_\xi < \infty, \tag{9}$$

где σ – произвольное связное открытое подмножество $\partial\Omega$, удаленное на положительное расстояние от вершины пика и содержащее поверхность $\partial\Omega\backslash U$, U – окрестность из определения 4.1.1, $x = (y, z)$, $\xi = (\eta, \zeta)$, $M(z, \zeta) = \max\{\varphi(z), \varphi(\zeta\}$ и ds_x, ds_ξ – элементы площади поверхности $\partial\Omega$;

(ii) $1 < p < n-1$, Ω имеет внутренний пик и

$$\int\limits_{U\cap\partial\Omega} |f(x)|^p \frac{ds_x}{\varphi(z)^{p-1}} + \iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|f(x)-f(\xi)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}} ds_x ds_\xi < \infty, \tag{10}$$

где U – окрестность из определения 4.7.1;

(iii) область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ имеет внутренний пик, $p = n-1$, выполнены условия теоремы 7.4.2 и

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in U\cap\partial\Omega:|x-\xi|>M(z,\zeta)\}} \frac{|f(x)-f(\xi)|^p}{M(z,\zeta)^{2(p-1)}|x-\xi|} \frac{ds_x ds_\xi}{\left(\log\left(1+\frac{|x-\xi|}{M(z,\zeta)}\right)\right)^p} +$$

$$+\int\limits_{U\cap\partial\Omega} \frac{|f(x)|^p ds_x}{(\varphi(z)\log(z/\varphi(z)))^{p-1}} + \iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|f(x)-f(\xi)|^p}{|x-\xi|^{2p-1}} ds_x ds_\xi < \infty; \tag{11}$$

(iiii) область Ω имеет внутренний пик, $p > n-1$ и

$$\iint\limits_{\{x,\xi\in U\cap\partial\Omega:|x-\xi|>M(z,\zeta)\}} \frac{|f(x)-f(\xi)|^p}{(\varphi(z)\varphi(\zeta))^{n-2}} \frac{ds_x ds_\xi}{|x-\xi|^{p+2-n}} +$$

$$+ \int\limits_{U\cap\partial\Omega} \frac{|f(x)|^p ds_x}{\varphi(z)^{n-2}} + \iint\limits_{\partial\Omega\times\partial\Omega} \frac{|f(x)-f(\xi)|^p}{|x-\xi|^{n+p-2}} ds_x ds_\xi < \infty, \tag{12}$$

тогда задача (5), (8) однозначно разрешима в $W_p^1(\Omega)$.

Обратно, если Ω – область с внешним пиком и задача (5), (8) разрешима в пространстве $W_p^1(\Omega)$, то верно неравенство (9). Аналогично, если Ω имеет внутренний пик и задача Дирихле разрешима в $W_p^1(\Omega)$, то справедливо неравенство (10) при $p < n-1$ и неравенства (11), (12) соответственно в случаях $p = n-1$ и $p > n-1$. В случае $p = n-1$ на заострение пика накладываются некоторые дополнительные ограничения, сформулированные в теореме 7.4.2, допускающие, впрочем, степенные заострения.

8.4 Комментарии к главе 8

Теорема 8.1/1 при $l = 1$ доказана в работе В. Г. Мазья [35]. Лемма 8.1/1 при $l \geq 1$ и $q = 2$ имеется в книге Лионса и Мадженеса [32], гл. 2, разд. 9.1. В разд. 8.1 мы следуем работе [58]. Область из примера 8.1/3 взята из статьи С. В. Поборчего [59].

В связи с материалом разд. 8.2 заметим, что равносильность разрешимости задачи Неймана в классе $\tilde{W}_2^1(\Omega)$ при любых граничных данных из $L_{q'}(\partial\Omega)$ и непрерывности оператора граничного следа: $\tilde{W}_2^1(\Omega) \to L_q(\Omega)$ хорошо известна [40, 4.11.6]. В общем случае непрерывность упомянутого оператора следа при $q \geq 2$ оказывается равносильной принадлежности области классу $I_{2,1/q}^{(n-1)}$ [40, 4.11.4], характеризуемому в терминах емкостных “изопериметрических” неравенств.

Литература

[1] *Альфорс Л. В.* Лекции по квазиконформным отображениям.– М.: Мир, 1969. 132 с.

[2] *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций// Успехи Мат. Наук. 1953. Т. 8. С. 111–113.

[3] *Бабич В. М., Слободецкий Л. Н.* Об ограниченности интеграла Дирихле// Докл. АН СССР. 1956. Т. 106. С. 604–607.

[4] *Бесов О. В.* К теории вложения и продолжения классов диффференцируемых функций// Матем. Заметки. 1967. Т. 1. N 2. С. 235–250.

[5] *Бесов О. В.* Интегральное представление функций и теоремы вложения для области с гибким условием рога// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 12–30.

[6] *Бесов О. В.* Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей// Докл. РАН. 2000. Т. 373. С. 131–134.

[7] *Бесов О. В.* Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей// Мат. сб. 2001. Т. 192. N 3. С. 3–26.

[8] *Бесов О. В., Ильин В. П.* Естественное расширение класса областей в теоремах вложения// Матем. сб. 1968. Т. 75. С. 483–495.

[9] *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.–М.: Наука, 1996. 480 с.

[10] *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.–Л., 1980. 264 с.

[11] *Бураго Ю. Д., Мазья В. Г.* Некоторые вопросы теории потенциала и теории функций для областей с нерегулярными границами// Зап. научн. семин. ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1967. Т. 3. С. 1–152.

[12] *Буренков В. И.* Интегральное представление Соболева и формула Тейлора// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1974. Т. 131. С. 33–38.

[13] *Буренков В. И.* Об одном способе продолжения дифференцируемых функций// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1976. Т. 140. С. 27–67.

[14] *Буренков В. И., Горбунов А. Л.* Точные оценки минимальных норм операторов продолжения для пространств Соболева// Изв. РАН. Сер. Мат. 1997. Т. 61. С. 1–44.

[15] *Васильчик М. Ю.* О следах функций из пространств Соболева W_p^1, определенных в областях с нелипшицевой границей// Современные проблемы геометрии и анализа.–Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1989. Т. 14. С. 9–45.

[16] *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфуллин Т. Г.* Критерий продолжения функций класса L_2^1 из плоских неограниченных областей// Сиб. мат. журнал. 1979. Т. 20. С. 298–301.

[17] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.–М.: Наука, 1989. 463 с.

[18] *Глобенко И. Г.* Некоторые вопросы теории вложения для областей с особенностями на границе// Мат. сб. 1962. Т. 57. С. 201–224.

[19] *Глушко В. П.* Об областях, которые звездны относительно шара// Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. С. 1215–1216.

[20] *Гольдштейн В. М.* Продолжение функций с первыми обобщенными производными из плоских областей// Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. С. 268–271.

[21] *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.–М.: Наука, 1983. 285 с.

[22] *Гольдштейн В. М., Ситников В. Н.* О продолжении функций класса W_p^1 через гёльдеровы границы// Теоремы вложения и их приложения (Труды семин. С. Л. Соболева). Новосибирск. 1982. Т. 1. С. 31–43.

[23] *Ильин В. П.* К теореме вложения для предельного показателя// Докл. АН СССР. 1954. Т. 96. С. 905–908.

[24] *Ильин В. П.* Интегральные представления дифференцируемых функций и их приложения к вопросам продолжения функций класса $W_p^l(G)$// Сиб. мат. журнал. 1967. Т. 8. С. 573–586.

[25] *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.– М.: Наука. 1984. 752 с.

[26] *Кондрашов В. И.* О некоторых свойствах функций из пространства L_p// Докл. АН СССР. 1945. Т. 48. С. 563–566.

[27] *Лабутин Д. А.* Интегральное представление функций и вложение пространств Соболева на областях с нулевыми углами// Матем. Заметки. 1997. Т. 61. N 2. С. 201–219.

[28] *Лабутин Д. А.* Вложение пространств Соболева на гёльдеровых областях// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1999. Т. 227 С. 170–179.

[29] *Лабутин Д. А.* Неулучшаемость неравенств Соболева для области с нерегулярной границей// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 232 С. 218–222.

[30] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.–М.: Наука. 1973. 576 с.

[31] *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.–М.: Наука. 1966. 545 с.

[32] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.–М.: Мир. 1971. 371 с.

[33] *Мазья В. Г.* Классы областей и теоремы вложения функциональных пространств// Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. С. 527–530.

[34] *Мазья В. Г.* P-проводимость и теоремы вложения некоторых функциональных пространств в пространство C// Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. С. 299–302.

[35] *Мазья В. Г.* О задаче Неймана в областях с нерегулярными границами// Сиб. мат. журнал. 1968. Т. 9. С. 1322–1350.

[36] *Мазья В. Г.* Классы множеств и мер, связанные с теоремами вложения// Труды симп. по теоремам вложения в Баку, 1966. М., 1970. С. 142–159

[37] *Мазья В. Г.* О непрерывности и ограниченности функций из пространств Соболева// Проблемы матем. анализа.–Л., 1973. Вып. 4. С. 46–77.

[38] *Мазья В. Г.* О суммируемости функций из пространств С. Л. Соболева// Проблемы матем. анализа.–Л., 1975. Вып. 5. С. 66–98.

[39] *Мазья В. Г.* Функции с конечным интегралом Дирихле в области с вершиной пика на границе// Зап. научн. семин. ленингр. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 126. С. 117–137.

[40] *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева.–Л., 1985. 415 с.

[41] *Мазья В. Г.* Классы областей, мер и емкостей в теории дифференцируемых функций// Энциклопедия математических наук. Анализ III. Т. 26. С. 159–228.

[42] *Мазья В. Г., Нетрусов Ю. В., Поборчий С. В.* Граничные значения функций из пространств Соболева в некоторых нелипшицевых областях// Алгебра и Анализ. 1999. Т. 11. С. 141–170.

[43] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О продолжении функций из пространств Соболева во внешность и внутрь малой области// Вестник ЛГУ. 1984. Вып. 17. N 7. С. 27–32.

[44] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О продолжении функций из пространств Соболева во внешность области с вершиной пика на границе// Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. С. 1066–1069.

[45] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Продолжение функций из классов Соболева во внешность области с вершиной пика на границе I// Чехословацкий мат. журн. 1986. Т. 36. С. 634–661.

[46] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Продолжение функций из классов Соболева во внешность области с вершиной пика на границе II// Чехословацкий мат. журн. 1987. Т. 37. С. 128–150.

[47] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* О следах функций с суммируемым градиентом в области с вершиной пика на границе// Матем. Заметки. 1989. Т. 45. N 1. С. 57–65.

[48] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Следы функций из пространств Соболева на малых и больших компонентах границы// Матем. Заметки. 1989. Т. 45. N 4. С. 69–77.

[49] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Следы функций из пространств Соболева на границе области с пиком// Современные проблемы геометрии и анализа.–Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. 1989. Т. 14. С. 182–208.

[50] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Следы функций из пространств Соболева на границе тонкого цилиндра// Труды Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе. 1995. Т. 99. С. 17–36.

[51] *Мазья В. Г., Поборчий С. В.* Теоремы вложения пространств Соболева в области с пиком и в гёльдеровой области// Алгебра и Анализ. 2005. Т. 17.

[52] *Нетрусов Ю. В.* Множества особенностей функций из пространств Бесова и Лизоркина–Трибеля// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1989. Т. 187. С. 162–177.

[53] *Нетрусов Ю. В.* Метрические оценки емкостей множеств в пространствах Бесова// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1989. Т. 190. С. 159–185.

[54] *Нетрусов Ю. В.* Теоремы о следах и мультипликаторы для функций из пространств Лизоркина–Трибеля// Зап. научн. семин. С-Петербург. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1992. Т. 200. С. 132–138.

[55] *Нетрусов Ю. В.* Свободная интерполяция в пространствах гладких функций// Зап. научн. семин. С-Петербург. отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1993. Т. 206. С. 107–118.

[56] *Никольский С. М.* Свойства некоторых классов функций нескольких переменных на дифференцируемых многообразиях// Мат. сб. 1953. Т. 33. С. 261–326.

[57] *Поборчий С. В.* О следах функций класса L_p^1 на границе тонкого цилиндра// ЛГУ.– Л., 1989. 43 с. Деп. в ВИНИТИ, N 4432-89.

[58] *Поборчий С. В.* О разрешимости задачи Неймана для эллиптических уравнений высокого порядка// Вестник С-Петербург. ун-та. 1998. Вып. 3. N 15. С. 63–66.

[59] *Поборчий С. В.* Некоторые контрпримеры к теоремам вложения для пространств Соболева// Вестник С-Петербург. ун-та. 1998. Вып. 4. N 22. С. 49–58.

[60] *С. В. Поборчий.* О гёльдеровости функций из пространств Соболева// Вестник С-Петербург. ун-та. 2002. Вып. 4. N 25. С. 34–37.

[61] *С. В. Поборчий.* О непрерывности оператора граничного следа: $W_p^1(\Omega) \to L_q(\partial\Omega)$ для области с внешним пиком// Вестник С-Петербург. ун-та. 2005. Сер. 1. Вып. 3. С. 51–60.

[62] *Решетняк Ю. Г.* Некоторые интегральные представления дифференцируемых функций// Сиб. мат. журнал. 1971. Т. 12. С. 420–432.

[63] *Решетняк Ю. Г.* Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей// Сиб. мат. журнал. 1980. Т. 21. N 6. С. 108–116.

[64] *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением.–Новосибирск: Наука, 1982. 285 с.

[65] *Рудин У.* Функциональный анализ.–М.: Мир, 1975. 443 с.

[66] *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5.–М., 1959. 665 с.

[67] *Соболев С. Л.* О некоторых оценках, относящихся к семействам функций, имеющих производные, интегрируемые с квадратом// Докл. АН СССР. 1936. Т. 1. С. 267–270.

[68] *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа// Мат. сб. 1938. Т. 4. С. 471–497.

[69] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.–Л., 1950. 255 с.

[70] *Соболев С. Л.* Плотность финитных функций в пространстве L_p^m// Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4. N 3. С. 673–682.

[71] *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.–М.: Мир, 1973. 342 с.

[72] *Степанов В. Д.* Двухвесовые оценки для интегралов Римана–Лиувилля// Изв. АН СССР. 1990. Т. 54. С. 645–656.

[73] *Успенский С. В.* О теоремах вложения для весовых классов// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 60. С. 282–303.

[74] *Файн Б. Л.* О продолжении функций из анизотропных пространств С. Л. Соболева// Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 248–272.

[75] *Файн Б. Л.* О продолжении функций из пространств Соболева для нерегулярных областей с сохранением показателя гладкости// Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. С. 296–301.

[76] *Шварцман П. А.* Теоремы продолжения с сохранением локально полиномиальных приближений// Яросл. ун-т, Ярославль, 1986. 154 с.– Деп. в ВИНИТИ, N 6457-86.

[77] *Яковлев Г. Н.* Граничные свойства класса W_p^l в областях с угловыми точками// Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. С. 73–76.

[78] *Яковлев Г. Н.* Задача Дирихле для области с нелипшицевой границей// Диффер. уравнения. 1965. Т. 1. N 8. С. 1085–1098.

[79] *Acosta G., Armentano M. G., Duran R. G., Lombardi A. L.* Nonhomogeneous Neumann problem for the Poisson equation in domains with an external cusp// J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 310. N 2. P. 397–411.

[80] *Adams D. R.* Traces of potentials arising from translation invariant operators// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. 1971. V. 25. P. 203–217.

[81] *Adams D. R.* A trace inequality for generalized potentials// Studia Math. 1973. V. 48. P. 99–105.

[82] *Adams D. R., Hedberg L. I.* Function Spaces and Potential Theory.–Berlin a.o.: Springer, 1996.

[83] *Adams R. A.* Sobolev Spaces.–New York: Academic Press, 1975.

[84] *Anzelotti G., Giaquinta M.* BV–functions and traces// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1979. V. 60. P. 1–21.

[85] *Aronszajn N.* Boundary values of functions with finite Dirichlet integral// Conf. partial diff. eq. Studies in eigenvalue problems, Univ. of Kansas. 1955.

[86] *Besicovitch A. S.* A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions// Proc. Cambridge Philos. Soc. I 1945. V. 41. P. 103–110. II 1946. V. 42. P. 1–10.

[87] *Beurling A.* Ensembles exceptionneles// Acta Math. 1940. V. 72. P. 1–13.

[88] *Bojarski B.* Remarks on Sobolev imbedding inequalities// Proceedings of the conference on Complex Analysis, Joensuu, 1987. Lecture Notes in Mathematics 1351.–Berlin a.o.:Springer, 1988. P. 52–68.

[89] *Brudnyi Yu., Shvartsman P.* Generalizations of Whitney's extension theorem// Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 3. P. 129–139.

[90] *Buckley S., Koskela P.* Sobolev–Poincaré implies John// Math. Research Letters. 1995. V. 2. P. 577–594.

[91] *Burenkov V. I.* Sobolev spaces on domains.–Stuttgart-Leipzig: Teubner-Texte zur Mathematik, 1998. B. 137. 312 p.

[92] *Burenkov V. I., Evans W. D.* On compact embeddings of Sobolev spaces and extension operators which preserve some smoothness// Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis. Proc. Conf. Paseky nad Jizerou, September 1995, ed. J. Rákosnik, Prometheus, Prague, 1996. P. 17–26.

[93] *Calderón A. P.* Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions// Partial Differential Equations. Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961. V. 4. P. 33–49.

[94] *Calkin J. W.* Functions of several variables and absolute continuity I// Duke Math. J. 1940. V. 6. P. 170–185.

[95] *Chua S. K.* Extension theorems on weighted Sobolev spaces// Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. P. 1027–1076.

[96] *Chua S. K.* Weighted Sobolev inequalities on domains satisfying the chain condition// Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 117. P. 449–457.

[97] *Deny J., Lions J.-L.* Les espace du type de Beppo Levi// Ann. Inst. Fourier. 1953–1954. V. 5. P. 305–370.

[98] *Douglas J.* Solution of the problem of Plateau// Trans. Amer. Math. Soc. 1931. V. 33. P. 263–321.

[99] *Fraenkel L. E.* Formulae for high derivatives of composite functions// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1978. V. 83. P. 159–165.

[100] *Fukushima M., Tomisaki M.* Construction and decomposition of reflecting diffusions on Lipschitz domains with Hölder cusps// Probability Theory and Related Fields. 1996. V. 106. P. 521–557.

[101] *Gagliardo E.* Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in più variabili// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 284–305.

[102] *Gagliardo E.* Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili// Ric. Mat. 1958. V. 7. P. 102–137.

[103] *Gol'dshtein V. M., Vodop'yanov S. K.* Prolongement des fonctions de classe L_p^l et applications quasi conformes// C. R. Acad. Sci. Paris. 1980. V. 290. P. 453–456.

[104] *Hadamard J.* Sur le principe de Dirichlet// Bull. Soc. Math. France. 1906. V. 24. P. 135–138.

[105] *Hajłasz P., Koskela P.* Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains// J. London Math. Soc. 1998. V. 58. N 2. P. 425–450.

[106] *Hajłasz P., Martio O.* Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains// J. Func. Anal. 1997. V. 143. N 1. P. 221–246.

[107] *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations.: Oxford Univ. Press, 1993.

[108] *Hestenes M. R.* Extension of the range of a differentiable function// Duke Math. J. 1941. V. 8. P. 183–192.

[109] *Hurri R.* The weighted Poincaré inequalities// Math. Scand. 1990. V. 67. P. 145–160.

[110] *Hurri–Syrjänen R.* An improved Poincaré inequality// Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 213–232.

[111] *John F.* Rotation and strain// Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.

[112] *Jones P. W.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces// Acta Math. V. 147. P. 71–88.

[113] *Jonsson A.* Besov spaces on closed subsets of $\mathbf{R}^n$// Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 341. N 1. P. 355–370.

[114] *Jonsson A., Wallin H.* Function Spaces on Subsets of $\mathbf{R}^n$.– London: Harwood Acad. Publ., 1984.

[115] *Kalyabin G. A.* The least norm estimates for certain extension operators from convex plane domains/ Conference in Mathematical analysis and applications in honour of L. I. Hedberg's sixtieth birthday held in Linköping University June 10-15, 1996. Preprint, Linköping Univ., 1996. P. 55–56.

[116] *Kilpeläinen T., Malý J.* Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries// Z. Anal. Anwendungen. 2000. V. 19. N 2. P. 369–380.

[117] *Levi B.* Sul prinzipio di Dirichlet// Rend. Palermo. 1906. V. 22. P. 293–359.

[118] *Lichtenstein L.* Eine elementare Bemerkung zur reelen Analysis// Math. Z. 1929. V. 30. P. 794–795.

[119] *Maz'ya V. G.* Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces// Contemp. Mathem. Amer. Math. Soc. 2003. V. 338. P. 1–34.

[120] *Maz'ya V. G., Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Asimptotische Theorie elliptischer Randwertanfgaben in singulär gestörten Gebieten.–Berlin: Academie Verlag, B.1 1991, B.2 1992.

[121] *Maz'ya V. G., Netrusov Yu. V.* Some counterexamples for the theory of Sobolev spaces on bad domains// Potential Analysis. 1995. V. 4. P. 47–65.

[122] *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* On traces of functions in Sobolev spaces on the boundary of a domain with a peak.–Univ. Maryland, 1988. 7 p. (Preprint/ MD 88–01–VGM–SVP).

[123] *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* Imbedding theorems for Sobolev spaces in domains with cusps.– Linköping University, 1992. 34 p. (Preprint/ LiTH–MAT–R–92–14).

[124] *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* Extension of functions in Sobolev spaces on parameter dependent domains// Math. Nachr. 1996. V. 178. P. 5–41.

[125] *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* Differentiable functions on bad domains.–Singapore a.o.: World Scientific, 1997, 504 p.

[126] *Meyers N. G., Serrin J.* $H = W$// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1964. V. 51. P. 1055–1056.

[127] *Morse A. P.* A behavior of a function on its critical set// Ann. Math. 1939. V. 40. P. 62–70.

[128] *C. B. Morrey.* Functions of several variables and absolute continuity II// Duke Math. J. 1940. V. 6. P. 187–215.

[129] *C. B. Morrey.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations.– Berlin a.o.: Springer, 1966.

[130] *B. Muckenhoupt.* Hardy's inequality with weights// Stud. Math. 1972. V. 44. P. 31–38.

[131] *Nikodým O.* Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet// Fundam. Math. 1933. V. 21. P. 129–150.

[132] *Poborchi S. V.* Sobolev spaces for domains with cusps// Operator Theory. Advances and Applications.–Basel: Berkhäuser Verlag, 1999. V. 109. P. 175–185.

[133] *Prym F.* Zur Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$// J. reine angew. Math. 1871. V. 73. P. 340–364.

[134] *Rellich F.* Ein Satz über mittlere Konvergenz// Math. Nachr. 1930. V. 31. P. 30–35.

[135] *Renardy M., Rogers R. C.* An introduction to partial differential equations.– New York a.o.: Springer, 1992.

[136] *Rogers L. G.* Degree independent Sobolev extension on locally uniform domains.– Cornell University, Ithaca, 2005, 51 p. (Preprint).

[137] *Talenti G.* Osservazione sopra una classe di disuguaglianze// Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. 1969. V. 39. P. 171–185.

[138] *Tomaselli G.* A class of inequalities// Bull. Un. Mat. Ital. 1969. V. 6. P. 622–631.

[139] *Tonelli L.* Sulla quadratura delle superficie, Atti Reale Accad. Lincei. 1926. V 6. P. 633–638.

[140] *Wallin H.* The trace to the boundary of Sobolev spaces on a snowflake// Manuscripta Math. 1991. V. 73. N 2. P. 117–125.

[141] *Wallin H.* Function spaces on fractals// Festschrift in Honour of Lennart Carleson and Yngve Domar, Uppsala, 1993.–Uppsala: Uppsala Univ., 1995. P. 211–226.

[142] *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets// Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63–89.

[143] *Whitney H.* Functions differentiable on the boundaries of regions// Ann. of Math. 1934. V. 35. P. 482–485.

[144] *Ziemer W. P.* Weakly Differentiable Functions.–New York: Springer, 1989.

[145] *Zobin N.* Whitney's problem: extendability of functions and intrinsic metric// C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. V. 320. P. 781–786.

Оглавление