Übersicht über einige Richtungen und Probleme der Theorie Elliptischer Gleichungen

W.Masja

Foreign Member of the Georgian National Academy of Sciences
Honorary Senior Fellow, Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool

Dieser Artikel ist ein Überblick über meine Arbeiten zur Analysis und elliptischen partiellen Differentialgleichungen, die zwischen 1960 und 1975 veröffentlicht wurden.
Im Jahr 1960 habe ich meinen Hochschulabschluss an der Fakultät für Mathematik und Mechanik an der Leningrader Universität absolviert.
Im Jahre 1975 hielt ich auf einem Symposium der Mathematischen Gesellschaft der DDR in Halle, das dem 30. Jahrestag der Befreiung von der NS - Herrschaft gewidmet war, einen Plenarvortrag. Der Text meines Vortrags wurde an eine Druckerei in Berlin geschickt, wo er in einem Sonderheft (1/1975) der Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR nachgedruckt wurde. Nach ein paar Monaten wurde ich von meinen deutschen Kollegen informiert, daß es in der Druckerei zu einem Brand gekommen sei, wobei die Sonderausgabe mit Vorträgen sowjetischer Kollegen verbrannt wäre. Soviel ich weiß, wurde mein Vortrag nirgends gefunden, und selbst wenn einige Kopien davon erhalten geblieben wären, scheinen sie unzugänglich zu sein.
Obwohl seitdem fast ein halbes Jahrhundert vergangen ist, sind einige der in dem Vortrag von 1975 behandelten Themen immer noch von Interesse. Die meisten Probleme, die ich in den 1970-er Jahren formuliert habe, können noch einmal vorgetragen werden.
Aus diesem Grund habe ich beschlossen, den vorliegenden Überblick noch einmal zu veröffentlichen, und ich hoffe, dass er nicht nur aus historischer Sicht von Interesse sein könnte.
Es gibt noch einen weiteren, persönlichen Grund für meinen Wunsch, dieses Material zu veröffentlichen. Vor 50 Jahren, im Herbst 1971 war ich zum ersten Mal in Tiflis auf einem Symposium für Kontinuumsmechanik und verwandte Analysisprobleme, das anlässlich des 80. Jubiläums von N.I.Muskhelischwili veranstaltet wurde. Während dieses unvergesslichen Treffens stellte mich S.G.Michlin Alexander (Jascha) Khvoles vor. Bald wurde er und seine wunder-

volle Familie meine lieben Freunde. Jetzt fühle ich mich geehrt, diesen Artikel in liebevoller Erinnerung an Jascha zu veröffentlichen.
Partielle Differentialgleichungen elliptischen Typs sind bereits über ein Jahrhundert klassisches Forschungsobjekt. Die Theorie dieser Gleichungen war ein Entwicklungsstimulus und Prüfstein für viele allgemeine Methoden der mathematischen Physik, der Theorie der Differentialgleichungen und der Funktionalanalysis. Eine außerordentliche Rolle spielen die elliptischen Gleichungen in verschiedenen Gebieten der Physik, insbesondere in der Kontiniumsmechanik .
Es ist schwer, ein anderes Spezialgebiet der mathematischen Physik zu finden, zu dessen Ausarbeitung so viele Mathematiker Beitrag leisteten und leisten. Dank deren Anstrengungen wurde auf dem im XIX. Jahrhundert gelegten Fundament die weitverzweigte und dabei doch einheitliche elliptische Theorie aufgebaut, die ständig weiter entwickelt und überarbeitet wird.
Ziel dieses Vortrages ist es, eine Vorstellung über einige sich intensiv entwickelnde Richtungen diese Theorie zu vermitteln und auf gewisse ungelöste Probleme hinzuweisen.
Der Inhalt des Vortrages wird in wesentlichem Maße von den Interessen des Autors bestimmt. Die zu den einzelnen Paragraphen gegebenen Literaturhinweise sind bewußt unvollständig.

§1. Analytizität und Differenzierbarkeit der Lösungen elliptischer Gleichungen beliebiger Ordnung

Nach der Hilbertschen Hypothese (19.Problem) ist die Lösung des regulären Variationsproblems erster Ordnung mit analytischem Integranden analytisch. Im 20. Hilbertschen Problem wird die Frage gestellt, ob nicht jedes reguläre Variationsproblem eine Lösung gestattet, wenn man den Begriff der Lösung nötigenfalls im erweiterten Sinne auffasst. Diese Probleme waren Gegenstand konzentrierter Aufmerksamkeit, beginnend mit den Arbeiten Bernsteins, die dem Fall zweier unabhängiger Veränderlicher gewidmet waren und deren erste vor 70 Jahren erschien. In den letzten Jahren ist die Lösung in hinreichender Allgemeinheit auch im mehrdimensionalen Fall erzielt worden (*s.* [10], [11]).
Es war zu hoffen, dass die von Hilbert vorausgesehenen Gesetzmäßigkeiten nicht auf Variationsprobleme erster Ordnung beschränkt sind. Was die Frage nach den Existenz verallgemeinerter Lösungen regulärer Variationsprobleme beliebiger Ordnung betrifft, so hat sich diese Hoffnung tatsächlich als gerechtfertigt erwiesen, sogar für allgemeinere als die Eulersche Gleichung quasilinearer gleichmäßig elliptischer Gleichungen (s. z.B.[1]). Dagegen hat sich aber vor noch nicht allzu langer Zeit herausgestellt, dass die natürlich anmutende Annahme über Glattheit und Analytizität dieser Lösungen im allgemeinen nicht wahr ist. Die bei quasilinearen elliptischen Gleichungen (insbesondere Eulerschen Gleichungen für Variationsprobleme erster Ordnung) mit glatten oder analytischen Koeffizienten vorliegende Situation erwies sich als Ausnahme. Es sind Beispiele für nichtglatte (unstetige) Lösungen gleichmäßig elliptischer Gleichungen der Ordnung $2l, l > 1$, oder Systeme zweiter Ordnung kon-

struiert worden ([3], [12]). Wir führen eines dieser Beispiele an [12]: Der Gleichung

$$(n-2)\,\Delta^2 u + \Delta\left\{\varphi\left[(\nabla u)^2\right] u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}\right\} +$$

$$\left\{\varphi\left[(\nabla u)^2\right] u_{x_i} u_{x_j} \Delta u\right\}_{x_i x_j} + \left\{\varphi^2\left[(\nabla u)^2\right] u_{x_i} u_{x_j} u_{x_k} u_{x_l} u_{x_i x_j}\right\}_{x_i x_j} = n \qquad (1)$$

genügt die Funktion $u(x) = |x|$, wie immer auch die in die Koeffizienten eingehende Funktion φ gewählt sei. Wenn für $t \geq 0$ die Funktion $\varphi(t)$ nach oben beschränkt ist, ist die Gleichung (1) gleichmäßig elliptisch.
Analog ist die Situation bei der Eulerschen Gleichung des Variationsproblems für reguläre Funktionale der Gestalt

$$\int \sum_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x, u, \cdots, \nabla_k)\, D^\alpha u D^\beta u\, dx,$$

wo

$$l > 1, k \leq l-1, D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \nabla_k = \{D^\alpha\}, |\alpha| = k$$

und $a_{\alpha\beta}$ beschränkte analytische Funktionen sind. Man kann zeigen, daß die erste Variation des Funktionals

$$\int \left\{(n-2)(\Delta u)^2 + 2\varphi\left[(\nabla u)^2\right] u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} \Delta(u) + \varphi^2\left[(\nabla u)^2\right]\left(u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}\right)^2\right\} dx$$

für $u(x) = |x|$ verschwindet [12]. Es erhebt sich die Frage, ob diese Beispiele in einem gewissen Sinne lediglich Ausnahmen von der Regel darstellen, oder ob sie eine Gleichungen höherer Ordnung eigene Gesetzmäßigkeit widerspiegeln. Des weiteren steht das Problem der Beschreibung einer Klasse nichtlinearer elliptischer Gleichungen, deren verallgemeinerte Lösungen ausschließlich glatte Funktionen sind. Soweit dem Autor bekannt, sind diese Fragen bislang unbeantwortet.
Für breite Klassen quasilinearer elliptischer Systeme höherer Ordnung ist die Glattheit der verallgemeinerten Lösungen auf einer Teilmenge vollen n-dimensionalen Maßes bewiesen [4]. Mehr noch: die Menge, auf der die Singularitäten der Lösung konzentriert sind, ist vom Maße Null für ein Hausdorffsches Maß einer gewissen Dimension kleiner n ([5]).
Elliptische Gleichung von höherer Ordnung unterscheiden sich noch in einer weiteren Hinsicht von **??**en an weiter Ordnung. Wir betrachten lineare gleichmäßig elliptische Gleichungen der Form

$$D^\alpha\left(a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u\right) = 0 \qquad |\alpha| = |\beta| = l \qquad (2).$$

Für stetige Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ folgt aus bekannten Abschätzungen von Agmon-Douglis-Nirenberg (vgl.[6]) die Hölderstetigkeit der $(l-1)$−ten Ableitungen einer Lösung aus dem Sobolewschen Raum W_2^{l-1}. (Aus dieser Tatsache folgt (s.[6]), daß bei quasilinearen elliptischen Gleichungen beliebiger Ordnung mit

unendlich oft differenzierbaren Koeffizienten Lösungen, die eine gewisse a-priori-Glattheit besitzen, in Wirklichkeit unendlich oft differenzierbar sind). Es erhebt sich die Frage, ob für die Gültigkeit dieser Aussage über die Verbesserung der Eigenschaften der verallgemeinerten Lösungen die Forderung nach der Stetigkeit der Koeffizienten wesentlich ist.
Für $l = 1$ ist einem bekannten Satz von DeGiorgi nach diese Bedingung überflüssig: Wenn die Koeffizienten der gleichmäßig elliptischen Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$$

nur beschränkt und meßbar sind, so ist jede verallgemeinerte Lösung dieser Gleichung hölderstetig ([7], [8]).
Völlig anders liegen die Dinge bei Gleichungen der Ordnung höher als zwei.
Für $2l < n$ sind Beispiele von Gleichungen des Typs (2) bekannt, deren Koeffizienten beschränkt und mit Ausnahme eines Punktes überall unendlich oft differenzierbar sind, die jedoch Lösungen aus dem Raum W_2^l besitzen, welche in einer beliebigen Umgebung jenes Punktes unbeschränkt sind ([9], [12]). Wir führen ein solches Beispiel an: man überprüft unschwer, daß der gleichmäßig elliptischen Gleichung

$$\nu\Delta^2 u + \kappa\Delta\left(\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)u_{x_i x_j} + \kappa\left(\frac{x_i x_j}{|x|^2}\Delta u\right)_{x_i x_j} + \mu\left(\frac{x_i x_j x_k x_l}{|x|^4}u_{x_i x_j}\right)_{x_k x_l} = 0,$$

wo $\kappa = n(n-2), \mu = n^2, \nu = (n-2)^2 + \varepsilon, \varepsilon > 0$, die Funktion $u(x) = |x|^{a(\varepsilon)}$ mit $a(\varepsilon) = 2 - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[4(n-1)^2 + \varepsilon\right]^{-\frac{1}{2}}$ genügt.
Diese Lösung besitzt ein endliches Energie-Integral und strebt für $x \to 0$ gegen Unendlich.

Literatur zu §1

[1] J.Leray, J.L. Lions, Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull.Soo. Math. France 93(1965), 97-107.
[2] J. Nečas, Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires d'ordre 2k en deux variables, Ann.ao.Norm.Super.Pisa, 21 (1967), 427-457.
[3] E.Giusti, M.Miranda, Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni, Boll. Unione mat. Ital.II(1968)
[4] C.B-Morrey, Partial regularity results for non-linear elliptic systems, Univ.of California, June 1967, 1-34
[5] E.Giusti, M.Miranda, Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari, Arch. Rat. Mech.Anal.31 N3 (1968), 173-184
[6] S.Agmon, A.Douglis, L.Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary values. I.Comm.Pure Appl.Math.12(1959), 623-727.

[7] De Giorgi, Sulla differenziabilita' e l'analiticita' delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem.Acc.Sci.Torino 3(1957) 1-19
[8] J.Nash, Continuity of solutions parabolic and elliptic equations, Amer.J.Math.80,4(1958), 931-954
[9] De Giorgi, Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico, Boll. Unione mat.Ital. I (1968), 135-137
[10] O. Ladyzhenskaya, N. Uraltseva, Linear and quasilinear elliptic equations, Acad Press, 1973
[11] Collection of articles "Hilbert's problems", Moscow, 1969
[12] V.G. Maz'ya, Examples of nonregular solutions of quasilinear elliptic equations with analytic coefficients. Functional Analysis and Its applications, v.2, 3, 1968, 53-57
[13] I.V.Skrypnik, Higher order nonlinear elliptic equations. Kiev, 1973

§2. Nichtkoerzitive Randwertaufgaben und das Problem der Richtungsabteilung

In dem n-dimensionalen Gebiet Ω mit glattem Rand $\partial\Omega$ sei eine elliptische Gleichung $A(x,D)u = f$ der Ordnung $2l$ mit den Randbedingungen $A_j(x,D)u = f_j$ $(j = 1,\cdots l)$ gegeben. (Hier betrachten wir nur Operatoren mit glatten Koeffizienten).

Noch vor zehn Jahren wurden in der Theorie der Randwertaufgaben elliptischer Gleichungen von hoher Ordnung nur sogenannte koerzitive Aufgaben untersucht. Koerzitivität bedeutet das Erfülltsein einer gewissen algebraischen Bedingung bezüglich der homogenen Hauptteile der Polynome (in ξ) $A(x,\xi), A_1(x,\xi),\cdots, A_l(x,\xi)$ für alle $x \in \partial\Omega$ (s. [1],[2]). Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß die höchsten Ableitungen der Lösung der Randwertaufgabe im Raum $L_2(\Omega)$ liegen, wenn nur die Norm von f in $L_2(\Omega)$ und die entsprechenden Normen der Funktionen f_j endlich sind. Des weiteren ist die Koerzitivität äquivalent der Gültigkeit dre Noetherschen Sätze für den Operator

$$(A, A_1,\cdots, A_l) : H^s(\Omega) \to H^{s-2l}(\Omega) \times H^{s-m_1-\frac{1}{l}}(\partial\Omega) \times \cdots \times H^{s-m_l-\frac{1}{l}}(\partial\Omega)$$

wo $s > max\left\{m_j + \frac{1}{2}\right\}, m_j$ die Ordnung des Operators A_j und $H^s(\partial\Omega)$ dem Raum von Aronszajn- Slobodezki auf $\partial\Omega$ bezeichnen.

Eine der Methoden zur Untersuchung von Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen besteht in der Überführung der Randwertaufgabe in ein System von Pseudodifferentialgleichungen auf dem Rand des Gebietes. Die Koerzitivität der Aufgabe ist gleichbedeutend der Elliptizität des entsprechenden Pseudodifferentialoperators auf dem Rand. Die Untersuchung nichtkoerzitiver Aufgaben steht deshalb in engem Zusammenhang mit dem Studium „entarteter" elliptischer Pseudodifferentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand. In den letzten Jahren sind in der Theorie solcher Operatoren wesentliche Fortschritte erzielt werden (Härmander [3], Nirenberg/Treves [5], Treves [6], Wainberg/Gruschin [15], Jegorov [9], Vischik/Gruschin [10], Eskin

[11], Masja/Panejach [12]-[14]). Eine der ersten in der Theorie nichtkoerzitiven Aufgaben war der Arbeit von Kohn und Nirenberg [7], die nicht unmittelbar mit entarteten elliptischen Operatoren zusammenhängt. Diese Untersuchungen
wurden in starkem Maße durch Interesse an zwei konkreten Randwertaufgaben stimuliert, gemeint sind das sogenannte $\overline{\partial}$- Problem Neumanns (s. [8]) und das Problem der Richtungableitung. Letzteres wird folgenderweise gestellt:

$$A(x,D_x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x)$$

sei ein elliptischer Operator mit reellen Koeffizienten und α eine glatte, nirgends Null werdende Vektorfunktion auf $\partial\Omega$. Gesucht ist die Lösung der Gleichung $Au = f$ unter der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \varphi$ auf $\partial\Omega$. Im zweidimensionalen Fall ist diese Aufgabe immer koerzitiv, für $n > 2$ ist sie es genau dann, wenn das Feld α in keinem Punkt tangential zum Rand $\partial\Omega$ ist. Unter dieser Voraussetzung hat die Aufgabe den Index Null, aus der allgemeinen Theorie der koerzitiven Randwertaufgaben folgen exakte Abschätzungen der Lösung in verschiedenen Normen, und mit Hilfe des Maximum-Prinzips lassen sich unschwer Bedingungen für eindeutige Lösbarkeit angeben.
Wenn das Feld α auf einer gewissen Teilmenge des Randes $\partial\Omega$ selbigen tangiert, so erweist sich das Poincare–Problem im allgemeinen als nicht korrekt gestellt. Die ersten Ergebnisse über das nichtkoerzitive Poincare–Problem erzielte Bisadze (s.[16]), korrekte Aufgabenstellungen wurden zuerst von Malutow [17] und Jegorow/Kondratjew [18] vorgeschlagen. In den Arbeiten von Hörmander [3], Jegorow [9], Wischik/Gruschin [10], Eskin [11] und Masja/ Panejach [12]-[14] über nichtkoerzitive Randwertaufgaben und nichtelliptische Pseudodifferentialoperatoren sind auch Informationen über das Problem der Richtungsableitung im nichtkoerzitiven Fall enthalten.
Die Resultate der aufgeführten Arbeiten sollen hier weder näher analysiert noch miteinander verglichen werden. Sie unterschieden sich voneinander sowohl in den Formulierungen als auch in den Beweismethoden. Die grundlegenden Ergebnisse wurden unter der Voraussetzung erzielt, daß das Feld α den Rand auf einer $(n-2)$-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit Γ_0 (ohne Rand) tangiert, zu Γ_0 selbst aber in keinem Punkt tangential ist. Dann zerfallen die Komponenten von Γ_0 in natürlicher Weise in die drei Klassen des "Eintretens" (des Feldes α in Ω) , des "Austretens" und des "status quo". Grob gesprochen läßt sich die Situation wie folgt beschreiben. Die Komponenten des "Eintretens" erzeugen eine Überbestimmtheit der Aufgabe, die der "Austretens" eine Unterbestimmtheit, und die Komponenten, in deren Umgebung das Feld auf einer Seite von $\partial\Omega$ bleibt, haben keinen Einflüß auf die Lösbarkeit (natürlich in entsprechenden Funktionenklassen). Für die Korrektheit der Aufgabenstellung ist es also hinreichend, die Lösung in einer Klasse von Funktionen zu suchen, die auf der Mannigfaltigkeit des "Eintretens" vorgegebene Werte annehmen und auf der Mannigfaltigkeit des "Eintretens" Sprünge erster Art haben können. In der Arbeit [14] wurden notwendig und hinreichende Bedingungen

für das Fehlen solcher Sprünge beschreiben und eine Asymptotik der Lösung in der Nähe der Sprungstelle angegeben.
Das Nichttangieren des Feldes α an der Teilmannigfaltigkeit Γ_0 bedeutet, daß diese Mannigfaltigkeit nicht charakteristisch ist für die dem Problem der Richtungsableitung entsprechende Pseudodifferentialgleichung auf $\partial\Omega$. Diese Forderung wurde in der Arbeit [19] aufgehoben und durch folgende Bedingung ersetzt: Auf $\partial\Omega$ sei eine Folge von Teilmannigfaltigkeiten ohne Rand $\Gamma_0 \sqsupset \Gamma_1 \sqsupset \cdots \sqsupset \Gamma_s$ gegeben, das Feld α tangiere die Mannigfaltigkeit $\Gamma_i\,(i = 0, \cdots, s-1)$ in den Punkten von Γ_{i+1} (und nur in diesen), tangiere aber nicht Γ_s. Unter dieser Vorausetzung wurde ein Satz über die eindeutige Lösbarkeit des Problems der Richtungableitung und die Vollstetigkeit des inversen Operators bewiesen. Obwohl jetzt die Punkte des "Eintretens" und "Austretens" in einer Komponente der Mannigfaltigkeit des Entartens liegen können, hat es sich gezeigt, daß die Aufgabe lösbar wird, wenn man sie nur in einer gewissen verallgemeinerten Form betrachtet, die neben der zusätzlichen Randbedingung $u = 0$ des "Austretens" die Möglichkeit eines Sprunges der Lösungen in den Punkten des "Eintretens" einschließt. Die bezüglich des Feldes α formulierte Bedingung schließt die Möglichkeit aus, wo das Feld den Rand längs einer Kurve tangiert, zu welcher es ebenfalls tangential ist. Im Falle der Verletzung dieser Bedingung ist der inverse Operator der Aufgabe nicht mehr vollstetig.
Diese Ergebnisse werden mit Hilfe einer gewissen Modifikation der Energiemethode erzielt, jene gestattet Abschätzungen der Lösungen in schwachen Normen. Genaueres ist über das Verhalten der Lösung in der Nähe der Punkte des "Eintretens" und "Austretens" nicht bekannt. Es stellt eine interessante und offenbar schwierige Aufgabe dar, derartige Informationen zu erhalten.
Im Unterschied zum Problem der Richtungsableitung ist für allgemeine nichtkoerzitive Aufgaben der Fall, wo ein Teil der Mannigfaltigkeit des Entartens des entsprochenden Pseudodifferentialoperators charakteristisch ist, nicht untersucht.

Literatur zu §2

[1] . S.Agmon, A.Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Comm, Pure Appl, Math.,12(1959), 623-727;II ibid.,17(1964), 35-92
[2]. L.Hörmander, Linear partial differential operators, 1963
[3]. - Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann.of Math, N1(1966), 129-209
[4]. L.Nirenberg, P.Treves, On local solvability of linear partial differential equations. Part I: Necessary conditions, Comm. Pure Applied Math., 23(1970), p.1-38
[5]. - On local solvability of linear partial differential equations. Part II: Sufficient conditions, Comm.Pure Applied Math., 23(1970),p.p.459-510, correction; Comm.Pure Applied Math., 24(1971),
[6]. P.Treves, Hypoelliptic partial differential equations of principal type. Sufficient conditions and necessary conditions, Comm. Pure App. Math.,24(1971)N5,631-670.

[7]. J.J.Kohn, L.Nirenberg, Non-coercive boundary value problems, Comm.Pure App. Math.,18,N3(1965), 443-492.
[8].G.B.Polland, J.J.Kohn, The Neumann-Problerm for Cauchy-Riemann Complex, Ann.of Math.Studies, 75, 1972
[9]. Yu. V. Egorov, "Subelliptic pseudodifferential operators", Dokl. Akad. Nauk SSSR, **188**:1 (1969), 20–22
[10]. M.I. Vishik , V.V. Grushin, "Elliptic boundary value problems which degenerate on a submani- fold of the boundary,-Dokl. Almd. Nauk SSSR, 190, No. 2,255-258 (1970).
[11]. G.I.Eskin, Degenerate elliptic pseudodifferential equations of principal type, Math. Sbornik., 82/124/1970, 585-628
[12]. V. G. Maz'ya, B. P. Paneah, Degenerate elliptic pseudodifferential operators on a smooth manifold without boundary., Funktsional. Anal. i Prilozhen., 3,2 (1969),91–92
[13]. V. G. Maz'ya, B. P. Paneah, Coercive estimates and regularity of the solution of degenerate elliptic pseudodifferential equations, Functional Analysis,4, 1970, 41-56
[14]. V. G. Maz'ya, B. P. Paneah. Degenerate elliptic pseudo-differential operators and the problem with oblique derivative,, Tr. Mosk.Mat. Obs., 31, MSU, M., 1974.
[15]. B.R.Vainberg, V. V. Grushin, Uniformly nonelliptic problems. I, Math. USSR-Sb., 1:4 (1967), 543–568
[16]. A.V.Bitsadze, Boundary value problems for elliptic equations of second order] Izdat. Nauka", Moscow, 1966
[17].M.B. Maljutov, Poincaré's boundary value problem. (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obšč. ***20*** 1969 173–204.
[18]. Ju.V.Egorov, V.A. Kondrat'ev, The oblique derivative problem. (Russian) Mat. sb. (N.S.) ***78 (120)*** *1969 148–176.*
[19]. V. G. Maz'ya, On a degenerating problem with directional derivative, Matematicheskii Sbornik., 87, N.3, 1972,417-454

§ 3. Die Theorie der Kapazitäten und elliptische Gleichungen

Noch in jüngster Vergangenheit waren die Anwendungen der Potentialtheorie fast ausschließlich auf lineare elliptische Gleichungen zweiter Ordnung beschränkt. In den letzten Jahren wurden die Ideen und Methoden dieser Theorie immer mehr auch auf lineare und quasilineare Gleichungen beliebiger Ordnung ausgedehnt. Eine andere Tendenz ist die immer breitere Anwendung des Kapazitätbegriffs in der Theorie der elliptischen Randwertaufgaben.

Schon das von Wiener gefundene Kriterium für die Lösbarkeit des klassischen Dirichlet-Problems zeigte, daß für die vollständige Beschreibung der metrischen Eigenschaften des Randes, die die Eigenschaften der Randwertaufgabe bestimmen, die gewöhnlichen geometrischen Begriffe – Länge, Fläche, Krümmung usw. - nicht ausreichend sind. Formuliert ist der Wienersche Satz mit Hilfe des Begriffes der harmonischen Kapazität, des mathematischen Analogons der elektrostatischen Kapazität eines Körpers.

Charakterisierungen von Mengen mit Hilfe von Kapazitäten treten in natürlicher Weise auch bei der Lösung von Problemen auf, die oft von der Aufgabenstellung her nicht miteinander zusammenhängen und mit verschiedenen Methoden gelöst werden. Wir verweisen auf die von Keldysch und Lavrentjev 1937 gefundene notwendige und hinreichende Bedingung für die Stabilität des klassischen Dirichlet-Problem bei Variation des Gebietes, das von Moltschanov 1952 angegebene Kriterium für die Diskretheit des Spektrums des Dirichlet-Problem für einen elliptischen Operator zweiter Ordnung und die von Deny (1950) und Deny/Lion (1953) entwickelte Theorie der präzisierten Beppo-Levi-Funktionen.
Obwohl also die wichtige Rolle der harmonischen Kapazität in einigen Fragen schon relativ lange bekannt ist, zeigte sich doch erst jetzt die universelle Bedeutung vielfältiger kapazitätiver Charakterisierungen von Mengen für die elliptische Theorie. Völlig natürlich ist zum Beispiel die (ein breites Forschungsprogramm einschließende) Frage nach solchen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Rand des Gebietes, die gewährleisten, dass jene Eigenschaften der Randwertsaufgaben oder Funktionalräume erhalten bleiben, die früher unter der Vorausetzung einer hinreichenden Glattheit des Randes gefunden worden waren.
Zum gegenwärtigen Zeitpunkt sind viele Probleme dieser Art gelöst, und es zeigte sich, daß die Antwort häufig mit Hilfe verschiedener Kapazitätsbergriffe gegeben werden kann. Das betrifft notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingungen für Randwertaufgaben in verschiedenen Aufgabenstellungen; beispielsweise Kriterium für die Beschränktheit, Kompaktheit oder für die Möglichkeit der Abschließung von Einbettungsoperatoren für Funktionalräume; Beschreibung des Randverhaltens der Lösungen, der Struktur des Spektrums elliptischer Operatoren, hebbarer Singularitäten und Eindeutigkeitsmengen; das Problem der Approximation von Funktionen durch Lösungen elliptischer Gleichungen u.a.
Hier soll (im wesentlichen am Material eigener Arbeiten des Autors) die Rolle einer der Varianten der Kapazitäten – der sogenannten(p,l)-Kapazität - in einigen der genannten Fragen illustriert werden.

1. Kapazitäten, die mit Klassen l-mal differenzierbarer Funktionen zusammenhängen

Es sei e eine beliebige kompakte Teilmenge des Gebietes $\Omega \subset R^n$ .Wir führen die Funktionenklasse
$\mathfrak{W}(e,\Omega) = \left\{u \in C_0^\infty(\Omega), \mathrm{u} = 1 \text{ in einer Umgebung von } e\right\}$
ein und bezeichnen als (p,l)-Kapazität von e bezüglich des Gebietes Ω die Zahl

$$(p,l)\text{-}cap(e,\Omega) = inf\left\{\int_\Omega |D_l u|^p dx : u \in \mathfrak{W}(e,\Omega)\right\}$$

wo $p \geq 1$. Im Falle Ω=R^n wird der Hinweis auf Ω in den Bezeichnungen $\mathfrak{W}(e,\Omega), (p,l)\text{-}cap(e,\Omega)$ usw. weggelassen.

Für $p = 2, l = 1, \Omega = R^n$ fällt diese Mengenfunktion bis auf einen Faktor mit der Wienerschen Kapazität zusammen.
Mit Hilfe der Fuktionenklasse

$$\mathfrak{N}(e) = \{u \in C_0^\infty(R^n) : u \geq 1 \; auf \;\; e\}$$

definieren wir eine weitere Funktion kompakter Mengen:

$$cap_{p,l}(e) = inf\left\{\int_{R^n} |D_l u|^p dx; u \in \mathfrak{N}(e)\right\}$$

die offensichtlich nicht grösser als (p,l)-$cap(e,\Omega)$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß $(p,1)$-$cap(e,\Omega) = cap_{p,1}(e)$; ferner zeigte sich ([15],[16]), daß bei $p > 1$ für alle $l = 2, 3, \cdots$ die Ungleichung

$$(p,l)\text{-}cap(e,\Omega) \leq const cap_{p,l}(e) \tag{1}$$

gilt, wobei die positive Konstante c nur von n, p abhängt. (Ein entsprechendes Resultat wurde in [1] auch für gebrochene Werte von l erzielt). Die sich für $p = 2$ die Kapazität $cap_{2,l}(e)$ nur durch einen Faktor von der Kapazität der Ordnung $2l$ von M.Riesz unterscheidet, so folgt aus (1), daß die l-harmonische Kapazität $(2,l)$-cap und die Kapazität der Ordnung $2l$ von M.Riesz äquivalent sind in dem Sinne, daß ihr Quotient für alle kompakte e nach beiden Seiten durch zwei positive Konstanten, die nur von n abhängen, abgeschätzt werden kann. Der Beweis der Ungleichungen (1) und einer anderer Eigenschaften der (p,l)-Kapazität benutzt wesentlich die Theorie nichtlinearer Potentiale $\int_{R^n}\left[\int_{R^n}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{n-l}}\right]^{\frac{1}{p-1}}\frac{dy}{|x-z|^{n-l}}$ (für $p = 2$ gehen diese Potentiale von M-Riesz über). Wichtige Folgerung dieser Theorie sind exakte Sätze über den Zusammenhang von (p,l)-Kapazität und Hausdorffschen Maßen, die bekannte Resultate dieser Art für die Kapazität von M.Riesz verallgemeinern.

1. Wenn das Hausdorffsche Maß der Dimension $n - pl$ einer Menge $e \subset R^n$ endlich ist, so gilt (p,l)-$cap(e) = 0$ ([2],[17],[18]).

2. Wenn das Hausdorffsche h-Maß der Menge e positiv ist und die Funktion h der Ungleichung
$$\int_e \left[t^{lp-n}h(t)\right]^{\frac{1}{p-1}}\frac{dt}{t} < \infty$$

genügt, so gilt (p,l)-$cap(e) > 0$ ([17],[18]).
Eine nützliche Modifikation des Begriffs der (p,l)-Kapazität sind verschiedene Funktionale, die auf Klassen von mit der Menge e zusammenhängenden Funktionen definiert sind. Zum Beispiel wurde in den Arbeiten [19] und [20] die Mengenfunktion

$$(p,l,q)\text{-}\Lambda(e,B_d) = inf\left\{\frac{\sum_{j=1}^{l} d^{p(j-l)}\left\|D_j u\right\|_{L_p(B_d)}^p}{\|u\|_{L_q(B_d)}^p} : u \in C_0^\infty(B_d), dist(suppu, e) > 0\right\},$$

für $p = q = 2$ eingeführt (e ist hier eine kompakte Teilmenge der Kugel $B_d = \{x : |x| \le d\}$) und bei der Untersuchung von Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für elliptische Gleichungen der Ordnung $2l$ angewendet. Die Funktionen (p,l)-cap und $(p,l,q)-\Lambda$ erwiesen sich als eng zusammenhängend. Bevor wir das entsprechende Resultat formulieren, geben wir zwei Definitionen.

Definition I
Das Kompaktum e heißt (p,l)-unwesentliche Teilmenge der Kugel B_d, wenn für eine hinreichend kleine, nur von n, p und l abhängende Konstante γ die Ungleichung

$$(p,l)\text{-}cap\,(e, B_{2d}) \le \gamma d^{n-pl}$$

erfüllt ist, andernfalls nennen wir die Menge e eine (p,l)-wesentliche Teilmenge der Kugel B_d.

Definition II
Wir fixieren die Kugel B_d und bezeichnen mit $\mathcal{B}_\delta$ eine beliebige abgeschlossene Kugel mit dem Durchmesser δ, die in B_d enthalten ist. G sei eine offene Teilmenge von B_d. Die kleinste obere Grenze all der δ, für welche die Menge der Kugeln, die mit $\mathcal{B}_\delta \setminus G$ einen (p,l)-unwesentlichen Durchschnitt haben, nicht leer ist, heißt (p,l)-innerer Durchmesser von G bezüglich der Kugel B_d und wird mit $\delta_{p,l}(G, B_d)$ bezeichnet. Im Grenzfall $B_d = R^n$ werden wir $\delta_{p,l}(G)$ schreiben und von (p,l)-inneren Durchmesser von G sprechen.
Die im weiteren benutzte Schreibweise $a \sim b$ soll ausdrücken, daß zwei positive Konstanten C_1, C_2 existieren, die nur von den „dimensionslosen" Parametern n, p, l abhängen, so daß a und b der zweiseitigen Abschätzung $C_1 a \le b \le C_2 a$ genügen.
In der Arbeit [21] wurde das folgende Ergebnis erzielt:

$$(p,l,q)\text{-}\Lambda(e, B_d) \sim \begin{cases} d^{-np/q}\,(p,l) - cap(e, B_{2d}) & \text{für } (p,l)- \text{ unwesentliche Mengen } e \subset B_d \\ \left[\delta_{p,l}(B_d \setminus e, B_d)\right]^{n-pl-np/q} & \text{für } (p,l)- \text{ wesentliche Mengen } e \subset B_d \end{cases}$$

Andere Verallgemeinerungen des Wienerschen Kapazitätsbegriffs wurden von Anger [7] und Wildenhain [8] vorgeschlagen. Wildenhain zeigte in der Arbeit [9], daß die Klassen der Mengen der Kapazität Null nach M.Riesz beziehungsweise im Sinne des Buches [8] zusammenfallen. Hinweise auf Literatur zur Entwicklung des Begriffes der (p,l)-Kapazität kann man in [18] finden.

2. Kapazitäten und Integralungleichungen. Anwendung auf das Dirichlet-Problem

Die eben angegebene äquivalente Beschreibung der Funktion $(p,l,q)-\Lambda(e, B_d)$ mittels der (p,l)-Kapazität oder des (p,l)-inneren Durchmessers ist im Wesen ein Satz über die beste Konstante in der Ungleichung

$$\|u\|^p_{L_q(B_d)} \le C \sum_{j=1}^{l} d^{p(j-l)} \left\|D_j u\right\|^p_{L_p(B_d)}$$

für alle Funktionen $u \in C^\infty(B_d)$, die in einer Umgebung des Kompaktums $e \subset B_d$ verschwinden. Mit Hilfe derartiger Resultate erhält man notwendige und hinreichende Bedingungen für Beschränktheit und Kompaktheit der Einbettungsoperatoren Sobolevscher Räume.
Es bezeichne $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ die Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty(\Omega)$ in der Metrik $\|D_l u\|_{L_p(\Omega)}$. Wir formulieren Kriterien für die Beschränktheit und Kompaktheit des Einbettungsoperators von $\mathring{L}_p(\Omega)$ in $L_q(\Omega)$ für $n > pl$.

Satz 1 ([21]-[23])
Es sei $q \in \left[p, \frac{pn}{n-lp}\right)$. Die Ungleichung

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \le C\|D_l u\|_{L_p(\Omega)} \tag{2}$$

gilt genau dann für alle $u \in C_0^\infty(\Omega)$, wenn für ein gewisses $d > 0$

$$\inf_{B_d} (p,l)\text{-}cap\left(B_d \bigcap R^n \setminus \Omega\right) > 0 \tag{3}$$

gilt, was gleichbedeutend mit der Endlichkeit des (p,l)-inneren Durchmessers der Menge Ω ist.

Satz 2 ([22], [23])
Es sei $p \ge 1$ und $q \in \left[p, \frac{pn}{n-lp}\right)$. Eine beliebige in $\mathring{L}_p^l(\Omega)$ beschränkte Menge von Funktionen $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ist genau dann relativ kompakt in $L_q(\Omega)$, wenn für alle $d > 0$ die Ungleichung

$$\lim_{\rho\to\infty} \inf_{\{B_d\}} (p,l)\text{-}cap\left(B_d \bigcap R^n \setminus \Omega\right) \; > kd^{n-p}$$

erfüllt ist. ($\{\mathcal{B}_d\}$ ist die Menge der Kugeln vom Radius d, die außerhalb der Kugel $\{x : |x| \le \rho\}$ liegen).
Im Fall $p = 2$ enthalten die formulierten Sätze offensichtlich notwendige und hinreichende Bedingungen für die strikte Positivität und Diskretheit des Spektrums des Dirichlet-Problems für den Operator Δ^l. Unter der Voraussetzung, daß das Spektrum diskret ist, erhielt G.W. Rosenblum mit Hilfe des Begriffs der $(2,l)-$Kapazität formulierte Abschätzungen für die Verteilungsfunkton $N(\lambda)$ der Eigenwerte dieses Problems (s.[24]).
Als weitere Anwendung von Satz 1 geben wir ein Kriterium für die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für die quasilineare Gleichung

$$\sum_{|\alpha|=l} D^\alpha (a_\alpha(x, D_l(u))) = f(x). \tag{4}$$

Die Funktionen a_α seien für fast alle $x \in \Omega$ stetig bezüglich der Gesamtheit der restlichen Veränderlichen und für alle Werte dieser Veränderlichen meßbar bezüglich x. Für jeden Vektor $v = \{v_\alpha\}$ mögen für ein gewisses $p > 1$ die Ungleichungen

$$\sum_\alpha a_\alpha(x,v)\, v_\alpha \ge |v|^p, \sum_\alpha |a_\alpha(x,v)| \le \lambda |v|^{p-1} \tag{5}$$

für $\lambda = const > 0$ gelten. Weiters sei die Gültigkeit der folgenden „Monotoniebedingung“ vorausgesetzt, daßfür $w \neq v$ gilt die Umgleichung

$$\sum_{\alpha} [a_\alpha (x, v) - a_\alpha (x, w)] (v_\alpha - w_\alpha) > 0. \tag{6}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist, wie in [25] gezeigt, die Ungleichung (2) notwendig und hinreichend für die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (4) für alle $f \in L_{\frac{q}{q-1}} (\Omega)$. Satz 1 gibt also eine explizite notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung in der Terminologie der (p, l)–Kapazität.
Wir bezeichnen mit $\mathring{L}_p^l (\Omega, \nu)$ die Vervollständigung des Raumes $C_0^\infty (\Omega)$ in der Norm

$$\|D_l u\|_{L_p(\Omega)} + \left(\int_\Omega |u|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei ν ein Maß in Ω ist. Der folgende, in der Arbeit [26] bewiesene, Satz gibt ein Kriterium für die Beschränktheit und Kompaktheit des Einbettungsoperators von $\mathring{L}_p^l (\Omega, \nu)$ in $L_p (\Omega)$.

Satz 3

1. Die Ungleichung $\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L_p^l(\Omega)}$ gilt genau dann für alle $u \in C_0^\infty (\Omega)$, wenn eine positive Konstante d existiert, so daß für alle Kugeln B_d, die einen (p, l)– unwesentlichen Durchschnitt mit $R^n \setminus \Omega$ haben, und für alle (p, l)–unwesentliche Kompakta $e \subset B_d$ gilt

$$\nu (B_d \setminus e) \geq const > 0$$

2. Die Menge

$$\left\{ u \in C_0^\infty (R^n) : \|u\|_{\mathring{L}_p^l(\Omega, \nu)} \leq 1 \right\}$$

ist genau dann in $L_p (\Omega)$ relativ kompakt, wenn außer der Bedingung aus dem ersten Teil des Satzes für die gegen Unendlich strebende Kugel $\mathcal{B}_d$ (d ist eine feste positive Zahl), die mit $R^n \setminus \Omega$ einen (p, l)–unwesentlichen Durchschnitt hat, die Grenzbeziehung

$$\inf_{\{e\}} \nu (\mathcal{B}_d \setminus e) \to \infty$$

erfüllt ist, wobei das Infimum über alle (p, l)–unwesentlichen Teilmengen von $\mathcal{B}_d$ zu erstrecken ist.
Das letzte Resultat stellt eine Verallgemeinerung eines bekannten Kompaktheitskriteriums von Moltschanov ([27]) dar.
In Arbeit ([26]) des Autors wurde gezeigt, daß der Einheitsoperator auf $C_0^\infty (\Omega)$ betrachtet als Operator aus $L_p (\Omega)$ in $L_p^l (\Omega, \nu)$, genau dann eine Abschließung gestattet, wenn das Maß ν absolut stetig ist bezüglich der (p, l)–Kapazität.

In Falle $p = 2$ enthält der formulierte Satz notwendige und hinreichende Bedingungen für die strikte Positivität und Diskretheit des Spektrums des gleichmäßig elliptischen selbstadjungierten Operators, der durch die quadratische Form

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|=l} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta \overline{u} dx + \int_\Omega |u|^2 d\nu \ , u \in C_0^\infty(\Omega) \ ,$$

erzeugt wird.
In Arbeiten des Autors (s.[15], [28]-[30]) ist Äquivalenz gewisser Integralungleichungen und isoperimetrischer Ungleichungen, die einen Zusammenhang zwischen Maßen und Kapazitäten herstellen, bewiesen worden. Wir führen einen solchen Satz an.

Satz 4 ([28])
Es sei v ein Maß in dem Gebiet $\Omega \subset R^n$.

1. Wenn eine Konstante A existiert, so daß für alle Kompakta $e \subset \Omega$ die Ungleichung
$$[\nu(e)]^{\alpha p} \le A(p,1)\text{-}cap(e,\Omega) \tag{7}$$
mit $\alpha > 0, \alpha p \le 1, p \ge 1$, erfüllt ist, dann genügen alle Funktionen $u \in C_0^\infty(\Omega)$ der Abschätzung
$$\left(\int_\Omega |u|^q d\gamma(x)\right)^{p/q} \le \int_\Omega |Du|^p dx \tag{8}$$
für
$$q = \alpha^{-1}, K \le p^p(p-1)^{1-p}A \quad (Du = gradu).$$
2. Wenn für eine beliebige Funktion $u \in C_0^\infty(\Omega)$ die Abschätzung (8) erfüllt ist, wobei $q > 0$ und die Konstante K nicht von u abhängt, dann gilt für alle Kompakta $e \subset \Omega$ die Ungleichung (7) mit $\alpha = q^{-1}$ und $A \le K$.

Insbesondere folgt aus (7) und der isoperimetrischen Eigenschaft der $(p,l)-$Kapazität (von allen Körpern eines gegebenen Volumens hat die Kugel die größte $(p,l)-$Kapazität bezüglich R^n) unmittelbar die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(R^n)} \le p(n-p)^{-\frac{p-1}{p}} \omega_n{}^{-\frac{1}{n}} n^{\frac{p-n}{pn}} \|Du\|_{L_p(R^n)},$$

die bis auf Konstante mit einer Sobolevschen Ungleichung übereinstimmt.
Beim Beweis des Satzes 4 wird die folgende Behauptung benutzt, die auch für sich von Interesse ist.

Lemma([28])
Sei u eine beliebige Funktion aus $C_0^\infty(\Omega)$ und $M_t = \{x : \|u(x)\| \ge t\}$. Dann gilt

$$\int_0^\infty (p,1)\text{-}cap(M_t,\Omega)\, t^{p-1} dt \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1} \int_\Omega |Du|^p dx.$$

Es wäre äußerst interessant, diese Ungleichung auf den Fall zu verallgemeinern, wo Du durch $D_l u$ und die $(p,1)$–Kapazität durch die (p,l)–Kapazität ersetzt sind. Dem Autor gelang dies nur für $p > 1, l = 2, \Omega = R^n$ (s.[28]).
Für $p = 2$ fand Satz 4 Anwendungen in der Theorie des Schrödingeroperators, der durch die quadratische Form

$$S[u,u] = \int_\Omega |Du|^2 dx - \int_\Omega |u|^2 d\nu(x) \ , u \in C_0^\infty(\Omega)$$

erzeugt wird. Mit seiner Hilfe lassen sich Bedingungen für die Positivität und Halbbeschränktheit wie auch Bedingungen für die Diskretheit und Endlichkeit des negativen Spektrum des Operators angeben ([31]). Zum Beispiel ist die Bedingung

$$\lim_{\varepsilon \to +0} sup \left\{ \frac{\nu(e)}{(2,1)\text{-}cap(e,\Omega)} : e \subset \Omega, \mathrm{diam}(e) < \varepsilon \right\} < \frac{1}{4}$$

hinreichend für die Halbbeschränktheit der Form $S[u,u]$ in $L_2(\Omega)$. Als notwendige Bedingung ergab sich, daß selbiger Grenzwert nicht größer als Eins ist.

3. Das Neumann-Problem in Gebieten mit nichtregulärem Rand

Kriterien von Typ (6) für Einbettungsoperatoren sind nicht nur in Räumen solcher Funktionen bewiesen, die auf dem Rand verschwinden. Wir betrachten einen Spezialfall, der zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Lösbarkeit im Energieraum des Neumann-Problem für einen gleichmäßig elliptischen Operator zweiter Ordnung führt. Es handelt sich dabei um Resultate der Arbeit [32] .
Es sei Ω ein beschränktes Gebiet im R^n und $f \in L_p(\Omega)(p \geq 1)$ eine gegebene Funktion, die in Ω orthogonal zu Eins ist. Wir betrachten den Differenzialoperator

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

wobei a_{ij} in Ω meßbare und beschränkte Funktionen sind, die für jeden Vektor $\xi \in R^n$ mit $|\xi| = 1$ der Bedingung

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > const > 0$$

genügen.
Das Neumann-Problem für die Gleichung $Au = f$ mit homogener Randbedingung wird in folgender Weise gestellt. Gesucht ist eine Funktion $u \in L_2^1(\Omega)$ ($u \in L_p^1(\Omega)$ bedeutet $u \in D'(\Omega)$ und $\|Du\|_{L_p(\Omega)} < \infty$.), die der Bedingung

$$\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_\Omega f v dx \qquad (9)$$

für eine beliebige Funktion $v \in L_2^1(\Omega) \bigcap L_\infty(\Omega)$ genügt. Es ist klar, daß diese Aufgabe genau dann für jede zur Eins orthogonale Funktion $f \in L_p(\Omega)$ lösbar ist, wenn für alle $v \in L_2^1(\Omega)$ die Poincaresche Ungleichung

$$\inf_{\{c\}} \|v - c\|_{L_q(\Omega)} \leq K \|Dv\|_{L_2(\Omega)} \tag{10}$$

mit $q = p(p-1)^{-1}$ erfüllt ist. ($\{c\}$ ist der Unterraum der Konstanten).
Für die Gültigkeit der Ungleichung (10) wurde in [32] eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden, die das Gebiet Ω charakterisiert. Um diese Bedingung zu formulieren, definieren wir die sogenannte Leitfähigkeit.

Definition III.
Es seien F eine in Ω abgeschlossene und G eine offene Teilmenge von Ω, dabei gelte $F \subset G$. Die Menge $K = G \diagdown F$ nennen wir „Leiter“. $V(K)$ bezeichne die Funktionenklasse $V(K) = \{f \in C^\infty(\Omega) : f = 1 \text{ auf } F; f = 0 \text{ außerhalb von } G\}$.
„Leitfähigkeit“ des Leiters K heißt die Größe

$$cond(K) = inf \left\{ \int_\Omega |Du|^2 \, dx : f \in V(K) \right\}$$

In [32] wurde gezeigt, daß die Ungleichung (10) für $q \geq 2$ genau dann gilt, wenn die Bedingung

$$\sup_{\{K\}} \frac{[mes_n(F)]^{\frac{2}{q}}}{cond(K)} < \infty \tag{11}$$

erfüllt ist, wobei mes_n das Lebesgue Maßund $\{K\}$ die Menge der Leiter $K = G \diagdown F$ bezeichnet, die der Bedingung $2mes_n(G) \leq mes_n(\Omega)$ genügen. Für die Gültigkeit der Bedingung (11) ist es hinreichend, wenn die leichter zu überprüfende Ungleichung

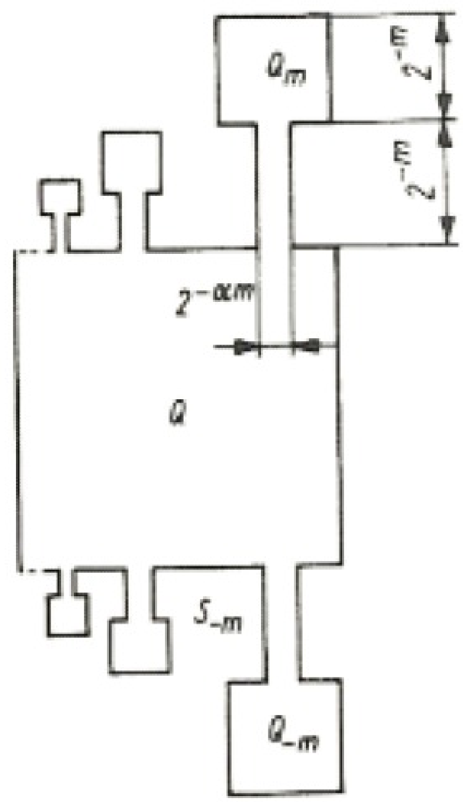
$$\sup_{\{G\}} \frac{[mes_n(G)]^{\frac{2+q}{2q}}}{H_{n-1}(\Omega \bigcap \partial\Omega)} < \infty \tag{12}$$

erfüllt ist, wobei $\{G\}$ die Gesamtheit aller offener Mengen $G \subset \Omega$ bezeichnet, für welche $\Omega \bigcap \partial G$ eine Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist und die der Bedingung $2mes_n(G) \leq mes_n(\Omega)$ genügen: mit $H_{n-1}(\Omega \bigcap \partial\Omega)$ wird das $(n-1)-$dimensionale Maß der Fläche $\Omega \bigcap \partial\Omega$ bezeichnet.
Die Frage nach der Diskretheit des Spektrums des Neumann-Problems für den Operator $-\Delta$ wird durch ein bekanntes Lemma von Rellich auf die Frage nach der Kompaktheit des Einbettungsoperators des Sobolevschen Raumes $W_2^1(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ zurückgeführt. Die in [32] erhaltene notwendige und hinreichende Bedingung für die Kompaktheit dieses Operators hat die Form

$$\sup_{\{K : mes_n(G) \leq M\}} \frac{mes_n(F)}{cond(K)} \underset{M \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{13}$$

Bedingungen von Typ (11) - (13) gestatten in konkreten Fällen eine effektive Überprüfung.

Wir führen ein solches Beispiel an. Das Gebiet $\Omega \subset R^2$ sei die Vereinigung des Quadrates $Q = \{(x,y) : 0 < x < 2, -1 < y < 1\}$ mit den symmetrisch angeordneten Quadraten Q_m, Q_{-m} und den verbindenden „Hälsen“ S_m, S_{-m} (s.Abb).
Die Seltenlänge der QuadrateQ_m, Q_{-m} und die Höhe der „Hälse“ S_m, S_{-m} sei 2^{-m} und die Breite der Hälse $2^{-\alpha m}$, $\alpha = const > 1$, $(m = 1, 2 \cdots)$.



Dieses Gebiet wurde für $\alpha = 4$ in der Monographie von Courant und Hilbert „Methoden der mathematischen Physik“(Bd.2, M.-L. 1951) als Beispiel für ein Gebiet eingeführt, für welches die Poincaresche Ungleichung (10) mit $q = 2$ nicht gilt. In [32] wurde gezeigt, daß die Poincaresche Ungleichung genau dann gilt (und folglich das Neumann-Problem für die Gleichung $-\Delta u = f \ in \ L_2^1(\Omega)$ bei beliebiger zur Eins orthogonalen rechten Seite aus $L_2(\Omega)$ lösbar ist), wenn gilt $\alpha \leq 3$. Die Diskretheit des Spektrums des Neumann-Problems für den Operator $-\Delta$ ist der strengen Ungleichung $\alpha < 3$ äquivalent.
An die Arbeit [32] schließt sich der Artikel [33] an, in dem das Problem der Lösbarkeit im Energieraum und der Diskretheit des Spektrums des Neumann-

Problems für elliptische Operatoren beliebiger Ordnung unter schwachen Voraussetzungen über Gebiet und Koeffizienten untersucht wird.
In der Terminologie der Leitfähigkeit kann man ebenfalls Bedingungen angeben, die die Beschränktheit der Normen der Lösung des Problems für den Operator A in den Räumen $L_\infty(\Omega), L_p(\Omega), L_p^1(\Omega)$ gewährleisten. Wir formulieren eines dieser Resultate.
Es existiert eine Konstante C, die nur von der Elliptizitätskonstanten des Operators A abhängt, so daß

$$\operatorname*{osc}_{\Omega} u \le C \int_0^\infty N(f,t)\, t^{-2} dt$$

gilt, wobei $N(f,t) = sup \int_F |f| dx$ auf der Menge der Leiter $K = G \setminus F$ ist, die den Bedingungen $cond(K) \le t$ und $2mes_n(G) \le mes_n(\Omega)$ genügen (unveröffentlicht).

4. Über Koerzitivität und den Index der Abschließung des Operators für das Dirichlet-Problem in Gebieten mit nichtregulärem Rand
Mit Hilfe der Begriffe der harmonischen Kapazität und der mittleren Krümmung einer Teilmenge des Randes kann man in gewissem Sinne exakte hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der Gleichung $\Delta u = f$ für alle $f \in L_2(\Omega)$ im Raum $W_2^2(\Omega)$ angeben.

Satz 5
Es sei $\partial\Omega$ eine Fläche der Klasse C^1, die außerhalb einer gewissen abgeschlossenen Teilmenge F, $H_{n-1}(\mathrm{F}) = 0$, zweimal differenzierbar sei. Weiters wird vorausgesetzt, daß die Fläche in einer gewissen Umgebung von F konvex nach innen (bzgl. Ω) ist. Unter der Bedingung

$$\lim_{\varepsilon \to +0} sup \left\{ \frac{\int_e \chi(x) H_{n-1} dx}{(2,1)\text{-}cap(e)} : e \subset \partial\Omega, \operatorname{diam}(e) < \varepsilon \right\} < \frac{\omega_n (n-2)}{4}, \tag{14}$$

wo $n > 2$ und $\chi(x)$ die Summe der Hauptnormalkrümmungen im Punkt $x \in (\partial\Omega) \setminus F$ sowie ω_n den Flächenhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet, liegt jede verallgemeinerte Lösung $u \in W_l^1(\Omega)$ der Randwertaufgabe

$$\Delta u = f, f \in L_l(\Omega), u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{15}$$

im Raum $W_l^2(\Omega)$ und genügt der Abschätzung

$$\|D_2 u\|_{L_2(\Omega)} \le C \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Die Bedingung (14) ist im folgenden Sinne exakt: es existiert ein Gebiet, für welches in (14) das Gleichheitszeichen steht und wo für eine gewisse Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$ die zweiten Ableitungen der verallgemeinerten Lösung des Problems (15) nicht quadratisch summerbar sind (s.[38]).

Wenn das Gebiet Ω bis auf Bedingung (14) allen Voraussetzungen von Satz 5 genügt, dann folgt aus der Konvergenz des Integrals

$$\int_0^1 Q(t)\, t^{-2} dt$$

für die Funktion $Q(t) = sup\left\{\int_e \chi(x) H_{n-1} dx : e \subset \partial\Omega, (2,1)\text{-}cap(e) \leq t\right\}$ für die Lösung der Randwertaufgabe (15) die Abschätzung

$$sup|Du| \leq C\|f\|_{L_p(\Omega)}, p > n.$$

Dieses Kennzeichen für die Beschränktheit des Gradienten der Lösung des Dirichlet-Problems ist im selben Sinne wie Bedingung (14) exakt.
Der Begriff der Leitfähigkeit erwies sich als nützlich bei der Untersuchung der Frage nach dem Index der Abschließung des Operators für das Dirichlet-Problem in Gebieten mit nicht regulären Grenzen.
Es sei Ω ein Teilgebiet des R^2 mit der kompakten Abschließung $\overline{\Omega}$ und der Jordankurve $\partial\Omega$ als Rand, sei $z = x_1 + ix_2 \in \overline{\Omega}$ und O ein Punkt des Randes. Wir betrachten in Ω den elliptischen Operator

$$A = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a,$$

wo die Funktionen a_{ij} in Ω einer Lipschitzbedingung genügen und eine positiv-definite Matrix bilden und die Funktionen a_i und a meßbar und beschränkt sind. *O.B.d.A.* können wir voraussetzen, daß $\left\|a_{ij}(0)\right\|$ die Einheitsmatrix ist.
Wir definierenden den Operator A auf dem Raum $W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2(\Omega)$ und bezeichnen mit $\overline{A}$ seine Abschließung in $L_2(\Omega)$. A^* sei der in $L_2(\Omega)$ zu A adjungierte Operator, $\tilde{A}$ die Friedrichssche Erweiterung und $ind\tilde{A} = dimkerA^* - dimker\overline{A}$. Weiters bezeichne Ω_ρ die Menge $\{z \in \Omega: |z| < \rho\}$ und $cond\left(K_\rho\right)$ die Leitfähigkeit des Leiters $K_\rho = \Omega_\delta \setminus \Omega_\rho$, wo δ eine fixierte kleine positive Zahl und $\rho \in (0, \delta)$ ist.
Wenn der Rand $\partial\Omega$ eine Kurve der Klasse C^2 ist, so gilt bekanntlich $A = \overline{A} = \tilde{A}$ und $ind\overline{A} = 0$. Wenn die Kurve $\partial\Omega$ mit Ausnahme des Punktes 0 überall stetig ist, so folgt die Gleichung $ind\overline{A} = 0$ aus der Divergenz des Integrals

$$\int_0^\delta exp\left(\frac{2\pi}{cond\left(K_\rho\right)}\right)\rho d\rho \tag{16}$$

Die Divergenz dieses Integrals erweist sich als notwendig für die Gleichung $ind\overline{A} = 0$, wenn

$$\Omega_\delta = \left\{z = \rho e^{i\varphi} : 0 < \rho < \delta, 2\left|\varphi - \Psi(\rho)\right| < \Theta(\rho)\right\}$$

gesetzt wird, wobei die Funktionen Ψ und Θ auf dem Segment $[0, \delta]$ stetig und auf jedem abgeschlossenen Teil des halboffenen Intervalls $(0, \delta]$ absolut stetig sind und den Grenzbeziehungen $\rho\Psi'(\rho) \to 0, \rho\,\Theta'(\rho) \to 0$ für $\rho \to +0$ genügen. Wenn das Integral (16) konvergiert, so gilt $ind\overline{A} = 1$ ([39]),([40]).

5. Das Randverhalten der Lösungen quasilinearer elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung

Viel Aufmerksamkeit wurde in den letzen Jahren einem Kreis von Fragen gewidmet, die sich um das klassische Wienersche Kriterium für die Regularität eines Randpunktes bezüglich des Dirichlet-Problems für den Laplace-Operator gruppieren. Eine Beschreibung dieser Untersuchungen und eine Bibliographie findet man in den Buch [34] E.M.Ländis. Littman, Stampsochin und Weinberger bewiesen in der Arbeit [10], daß für lineare elliptische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{17}$$

Mit meßbaren beschränkten Koeffizienten die regulären Randpunkte mit den regulären Punkten für die Laplacegleichung zusammenfallen. Mit Hilfe des Kapazitätsbegriffes formulierte Abschätzungen für den Stetigkeitsmodul der Lösungen linearer und quasilinearer elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung erhielt der Autor in den Arbeiten [35], [36]. Wir formulieren die Resultate von [36].
Betrachtet wird die Gleichung (4) zweiter Ordnung:

$$div\left(\overrightarrow{a}(x, Du)\right) = 0, \tag{18}$$

deren Koeffizienten den Bedingungen (5) und (6) genügen mögen. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß die Funktion $v \to \overrightarrow{a}(x,v)$ ungerade und positiv homogen von Grade $p-1$ ist. Spezialfälle sind die Gleichung

$$div\left(|Du|^{p-2}Du\right) = 0$$

und die lineare gleichmäßig elliptische Gleichung (17) mit meßbaren Koeffizienten. Das Dirichlet-Problem wird in folgender Weise gestellt: Gesucht ist eine Funktion $u \in L_p^1(\Omega)$, die für alle $\varphi \in \mathring{L}_p^1(\Omega)$ der Beziehung

$$\sum_{|\alpha|=1}\int_\Omega a_\alpha(x, Du)\, D^\alpha \varphi dx = 0$$

und für eine gegebenen Funktion $h \in L_p^1(\Omega)$ der Bedingung $(u-h) \in \mathring{L}_p^1(\Omega)$ genügt.

Satz 6 ([36])
Für $p < n$ gilt für die Lösung u des Dirichlet-Problems der Gleichung (18) die Abschätzung

$$\underset{B_\Gamma \bigcap \Omega}{\operatorname{osc}} u \ \leq \underset{B_\rho \bigcap \mathrm{K}\partial\Omega}{\operatorname{osc}} h + c \cdot \underset{\partial\Omega}{\operatorname{osc}} h\, exp\left(-k\int_r^\rho \left[\varphi_p(t)\right]^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t}\right), \tag{19}$$

wo $B_\Gamma = \{x : |x| \leq r\}, \varphi_p(r) = r^{p-n}(p,1) - cap\,(B_\Gamma \bigcap R^n \setminus \Omega), 0 \in \partial\Omega, r < \rho$.
Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Konstruktion einer speziellen „Barriere“, die mit dem „Kapazitätspotential“ der quasilinearen Gleichung (18) zusammenhängt.

Folgerung 1
Wenn (für $p < n$) das Integral

$$\int_0 \left[\varphi_p(t)\right]^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} \tag{20}$$

divergiert, so ist die Lösung des Dirichlet-Problems für die Gleichung (18) im Punkt 0 stetig.

Folgerung 2
Es sei $p < n, h \in C^\delta\left(\overline{\Omega}\right) \bigcap L_p^1(\Omega)$ und es gelte die Bedingung

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\log\frac{1}{r}} \int_r^1 [\varphi(t)]^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} > 0. \tag{21}$$

Dann ist die Lösung des Dirichlet-Problems für die Gleichung (18) in Punkt 0 hölderstetig.
Der Divergenz des Integral (20) bzw. der Bedingung (21) sind folgende Bedingungen äquivalent:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (2^{(n-p)\nu}(p,l)\text{-}cap\Big(B_{2^{-\nu}} \bigcap (R^n \setminus \Omega)\Big))^{\frac{1}{p-1}} = \infty (20*)$$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \left[2^{(n-p)\nu}(p,l)\text{-}cap\left(B_{2^{-\nu}} \bigcap (R^n \setminus \Omega)\right)\right]^{\frac{1}{p-1}} > 0 \quad (21*)$$

Für alle lineare Gleichungen (17) fällt die Bedingung (20*) mit dem Wienerschen Kriterium für die Regularität eines Randpunktes zusammen. In der Arbeit [35] wurde für die Lösung der Gleichung (17) eine zu (19) analoge, aber exaktere Ungleichung bewiesen:

$$[u(x) - h(0)]_\pm \leq \omega^\pm(\beta|x|) + c\int_{|x|}^{\infty} exp\left(-k\int_{|x|}^{t} \varphi_2(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right) d\omega^\pm(t),$$

Wo $\omega^\pm = \max_{|x|\leq t}[h(x) - h(0)]_\pm$ und $\beta = const > 0$.
Ob die Divergenz des Integrals (20) für die Regularität des Randpunktes bezüglich der nichtlineare Gleichung (18) notwendig ist, bleibt ungeklärt.

6. Hebbare Singularitäten der Lösungen elliptischer Gleichungen

Das Problem der hebbaren Singularitäten harmonischer Funktionen kann man wie folgt definieren: es sei eine kompakte Teilmenge des beschränkten Gebietes $\Omega \subset R^n$ und $\mathfrak{A}$ bezeichne eine gewisse Klasse in $\Omega \diagdown e$ harmonischer Funktionen. Gesucht sind solche Bedingungen für e, unter denen jede Funktion aus der Klasse $\mathfrak{A}$ eine in ganz Ω harmonische Fortsetzung besitzt. Mengen, die diese Eigenschaft haben, heißen hebbar für die Klasse $\mathfrak{A}$ .Wenn $\mathfrak{A}$ einer der Rüme $L_\infty(\Omega), C(\Omega), W_2^1(\Omega)$ ist, so ist das Kompaktum e bekanntlich genau dann hebbar, wenn es die harmonische Kapazität Null hat (s.[10]). Dieses klassische Resultat wurde in den letzten Jahren auf die Lösungen linearer und quasilinearer elliptischer Gleichungen beliebiger Ordnung andere Funktionenklassen ausgedehnt (s. z.B. [1], [12],-[16], [19], [37]). Wir führen ein Resultat für die Lösung der polyharmonischen Gleichung an.
Satz 7 . Das Kompaktum e ist genau dann für die Gleichung $\Delta^l u = 0$ und die Klasse $W_p^s(\Omega)(p < \infty, s = 0, 1, \cdots, l)$ hebbar, wenn es der Bedingung $(q, 2l - s)\text{-}cap\,(e, \Omega) = 0, q = p(p-1)^{-1}$ genügt (was für $q(2l - s) > M$ bedeutet, daß e die leere Menge ist).
Diese Behauptung beweist man fast genau so wie das Lemma 5.3 aus der Arbeit [14], welches den Fall $\mathfrak{A} = L_p(\Omega)$ betrifft.
Ein anderer Satz über hebbare Singularitäten, der hier angeführt werden soll, betrifft die allgemeine quasilineare Gleichung beliebiger Ordnung $l \geq 2$ und verallgemeinert eines der Resultate von Serrin (s.[12]) für Gleichungen zweiter Ordnung.
Wir betrachten die Gleichung

$$\sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, u(x), D_1 u(x), \cdots, D_l u(x)) = 0 \tag{22}$$

Die Funktionen $a_\alpha\left(x, \xi_0, \overrightarrow{\xi}_1, \cdots, \overrightarrow{\xi}_l\right)$ seien für alle $x \in \Omega$ bezüglich $\xi = \left(\xi_0, \overrightarrow{\xi}_1, \cdots, \overrightarrow{\xi}_l\right)$ stetig und für alle $\overrightarrow{\xi}$ bezüglich x meßbar. Weiters wird die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\sum_{|\alpha|=k} \left| a_\alpha\left(x, \overrightarrow{\xi}\right)\right| \leq 1 + \sum_{m=1}^{l} |\xi_m|^{\frac{pl-m}{m}},$$

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\left(x, \overrightarrow{\xi}\right)\xi_\alpha \geq \lambda \left|\overrightarrow{\xi}_l\right|^p - \mu \sum_{m=1}^{l-1} \left|\overrightarrow{\xi}_m\right|^{\frac{pl}{m}} - \nu,$$

$k = 0, 1, \cdots, l, \quad \lambda, \mu, \nu = const > 0, \quad \mu-$ genüglich klein. vorausgesetzt. Die verallgemeinerte Lösung der Gleichung (22) auf einer offenen Teilmenge des Gebietes Ω wird wie gewöhnlich mit Hilfe einer Integralidentität definiert.

Satz 8 ([16])
Aus $(p, l)\text{-}cap\,(e, \Omega) = 0$, folgt daß jede Funktion $u \in L_\infty(\Omega)$, die in $\Omega \diagdown e$ verallgemeinerte Lösung der Gleichung (22) ist, dieser Gleichung in ganz Ω genügt.

Für die Gleichung (18) zweiter Ordnung, deren Koeffizienten den Bedingungen (5) und (6) genügen, ist die im Satz gegebene Bedingung nicht nur eine hinreichende, sondern auch notwendige Hebbarkeitsbedingung für die Klasse der gleichmäßig beschränkten Funktionen. Ebenfalls notwendig und hinreichend ist sie für alle Hebbarkeit der Singularitäten der beschränkten Lösungen der Gleichung

$$\Delta^{\frac{l}{2}}\left(\left|\Delta^{\frac{l}{2}}u\right|^{p-2}\Delta^{\frac{l}{2}}u\right)=0,$$

wo l für $p=2$ eine gerade und für $p\neq 2$ eine beliebige natürliche Zahl ist, $pl<n$. Was jedoch die in Satz 8 betrachtete allgemeine Gleichung betrifft, so ist die Frage nach der Notwendigkeit der Bedingung $(p,l)\text{-}cap\,(e,\Omega)=0$ unbeantwortet.

Die Beweise der in diesem Punkt formulierten Resultate benutzen wesentlich die Äquivalenz der Kapazitäten (p,l)-cap und $cap_{p,l}$, wovon in Punkt t die Rede war.

Abschließend bemerken wir noch, daß mit Hilfe des Begriffs der (p,l)-Kapazität auch Teilmengen $e\subset\partial\Omega$ beschrieben worden sind, die vernachlässigbar sind in dem Sinne, daß auf $(\partial\Omega)\setminus e$ vorgegebene Randbedingungen eindeutig beschränkte Lösungen einer quasilinearen elliptischen Gleichung der Ordnung $2l$ definieren (s.[25]). Derartige Behauptungen lehnen sich an den bekannten Satz über die Eindeutigkeit einer beschränkten harmonischen Funktion an, deren Randwerte außerhalb einer Menge von der Wienerschen Kapazität Null vorgegeben sind.

Literatur zu §3

[1] D.R.Adams, T.C.Polking, The equivalenze of two definitions of capacity, Prec.of the Amer. Math.Soc. v37, Nr. 2, 1973

[2] N.Meyers, A theory of capacities for potentials of functions in lebesgue classes. Math.Jorn. 22, Nr. 2(1972), 169-197

[3] D.R.Adams, N.G.Meyers , Thinness and Wiener criteria for non-linear potentials, Indiana Univ. Math. Journal, v22, Nr. 2(1972), 169-197

[4] Bessel potential. Insolution relations aweng classes of exzeptional sets, Indiana Univ.,Math.Jornal, v 22, Nr. 9 (1973), 873-905

[5] D.R.Adams, Traces of potentials II. Indiana Univ.,Math.Jornal, v 22, Nr. 10 (1973), 907-918

[6] L.I. Hedberg, Non-linear potentials and approximation in the mean by analytic functions, Math.Zeitschrift 129 (1972), 299-319

[7] G. Anger, Funktionalanalytische Betrachtungen bei Differentialgleichungen unter Verwendung von Methoden der Potentialtheorie, I, Berlin, Akademie-Verlag 1967

[8] G.Wildenhain, Potentialtheorie linearer elliptischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Berlin, Akademie-Verlag, 1968

[9] - Vergleich verschiedener Kapazitätsbegriffe, ins „Elliptische Differenzialgleichungen“, Bd.I, Berlin, Akademie-Verlag, 1970, 179-190

[10] W.Littman, G. Stampacchia, H. F. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 17 (1963), 45-79
[11] L.Carleson, Selected problems on exceptional sets, 1967
[12] J.Serrin, Removable singularities of solutions of elliptic equations, Arch. Rat.Mech.Anal., 17,N1,91964), 67-78
[13] W.Littman ,Regular sets and removable singularities of partial differential equations, Archiv. Math., 7,N1,(1967), 1-9
[14] R.Harvey, J.C, Polking, A notion of capacity which characterizes removable singularities,Trans. Amer. Math. Soc.196, (1972), 183-195
[15] V. G. Maz'ya, Classes of sets and measures that are connected with imbedding theorems, Ïmbedding theorems and their applications", Proceedings of the symposium on imbedding theorems, Baku, 1966,142-159,Izdat Nauka",Moscow,1970
[16] V. G. Maz'ya, The removable singularities of bounded solutions of quasilinear elliptic equations of arbitrary order", Sb. "Boundary value problems of mathematical physics and related problems of the theory of functions, 2, Notes of scientific seminars, (LOMI), 27,1972,116-130
[17]. V. G. Maz'ya, V. P. Havin, "A nonlinear analogue of the Newtonian potential, and metric properties of (p,l)-capacity", Dokl. Akad. Nauk SSSR, **194**:4 (1970), 770-773
[18] V. G. Maz'ya, V. P. Havin, Non-Linear Potential Theory.Russian Mathematical Surveys, Volume 27, Issue 6,1972, pp.67-138
[19] V. A. Kondrat'ev, "On the solvability of the first boundary-value problem for elliptic equations", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **136**:4 (1961), 771–774
[21] V. G. Maz'ya, The connection between two forms of capacity.(Russian) Vestnik Leningrad, ?7, 1974,33-40
[22] V. G. Maz'ya, "The Dirichlet problem for elliptic equations of arbitrary order in unbounded regions", Dokl. Akad. Nauk SSSR, **150**:6 (1963), 1221–1224
[23] V. G. Maz'ya, A certain embedding operator, and set functions of the type of $ 150(p,l)$ 150-capacity, Comment. Math., Univ. Carolinae,13, 3(1972), 535-552
[24] G. V. Rozenblum, "On the eigenvalues of the first boundary value problem in unbounded domains", Math. USSR-Sb., **18**:2 (1972), 235–248
[25] V. G. Maz'ya, Applications of certain integral unequalities to the theory of quasi-linear elliptic equations. (Russian) ?omment. Math. Univ. Carolinae, vol. 13, 3 (1972),. 535-552
[26] V. G. Maz'ya, The (p,l)-capacity, inbedding theorems and the spectrum of selfadjoint elliptic operators, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 37,1973,356-385
[27] A. M. Molchanov, "On conditions for discreteness of the spectrum of self-adjoint differential equations of the second order", Tr. Mosk. Mat. Obs., **2**, GITTL, Moscow, 1953, 169–199
[28] V. G. Maz'ya, Certain integral inequalities for functions of several variables. (Russian*)* Problems of mathematical analysis, No. 3: Integral and diffe-

rential operators, Differential equations (Russian), *pp. 33–68.* Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, *1972.*
[29] V. G. Maz'ya, The continuity and boundedness of functions in S. L. Sobolev spaces. *(Russian)* Problems of mathematical analysis, No. 4: , *pp. 46–77, 143.* Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, *1973.*
[30] V.G.Maz'ja, The summability of functions belonging to Sobolev spaces. (Russian*)* Problems of mathematical analysis, No. 5: Linear and nonlinear differential equations, Differential operators (Russian), *pp. 66–98.* Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad, *1975.*
[31] V. G. Maz'ya, "On the theory of the higher-dimensional Schroödinger operator", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **28**:5 (1964), 1145–1172
[32] V. G. Maz'ya, "The Neumann problem in regions with nonregular boundaries", Sibirsk. Mat. Zh., **9**:6 (1968), 1322–1350; Siberian Math. J., **9**:6 (1968), 990–1012
[33] V. G. Maz'ya, The Neumann problem for elliptic operators of arbitrary order in domains with nonregular boundaries, Vestnik Leningrad.Univ, ?1, 1972,26-33
[34]E.M. Landis, Second order equations of elliptic and parabolic type. Moscow, 1971
[35] V. G. Maz'ya, V.G. Behavior, near the boundary, of solutions of the Dirichlet problem for a second-order elliptic equation in divergent form. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 2**,** 610–617 (1967)
[36] V. G. Maz'ya, On the continuity at a boundary point of solutions of quasilinear elliptic equations, Vestnik Leningrad. Univ**.**, ?13, 1970, 42-54, erratum: Vestnik Leningrad, 27: 1, 1972,160
[37] V. G. Maz'ya, V. P. Havin, "Use of (p,l)-capacity in problems of the theory of exceptional sets", Mat. Sb. (N.S.), **90**(**??**):4 (1973), 558–591;
[38] V. G. Maz'ya, "The coercivity of the Dirichlet problem in a domain with irregular boundary", Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1973, no. 4, 64–76
[39] V. G. Maz'ya, On the self-adjointness of the Laplace operator, Ïmbedding theorems and their applications", Proceedings of the symposium on imbedding theorems, Baku, 1966, "Nauka", 1970, 160-162
[40] V. G. Maz'ya, The index of closure the operator of the Dirichlet problem in a domain with nonregular boundary, Problems of math. Analysis, no. 5, 1975

§4. Das Cauchy–Problem für elliptische Gleichungen (Eindeutigkeit, Approximation, Normalität)

1. Eindeutigkeit

Es sei Ω ein Gebiet im R^n mit kompakter Abschließung $\overline{\Omega}$, O liege auf dem Rand $\partial\Omega$. Wir setzen voraus, daß für ein gewisses $\delta > 0$ der Durchschnitt des Randes $\partial\Omega$ mit der Kugel $B_\delta = \{x : |x| < \delta\}$ in der Hyperebene $x_n = 0$ enthalten ist.

Bekanntlich ist eine in Ω harmonische und in $\overline{\Omega}$ zusammen mit ihres Gradienten stetige Funktion u identisch Null, wenn auf der Menge $B_\delta \cap \partial\Omega$ die Bedingung $u = \partial u/\partial x_n = 0$ erfüllt ist. Dies ist die einfache Form des Eindeutigkeitssatzes für die Lösung der Cauchy-Problems zur Laplace-Gleichung *. Es existieren aber auch Sätze, die feinere Bedingungen angeben. Landis erhielt folgendes Resultat (s.[7]): sei u eine glatte Lösung der homogenen elliptischen Gleichung zweiter Ordnung mit glatten Koeffizienten. Wenn u und $\partial u/\partial x_n$ für $x \to \infty, x \in B_\delta \cap \partial\Omega$ schneller als $exp(-|x|^{-c})$ gegen Null streben (c ist eine gewisse positive Konstante), so ist u identisch Null in Ω **.
Für harmonische Funktionen sind notwendige und hinreichende Bedingungen über die Majorante der Summe $|u(x)| + |\partial u/\partial x_n| (x \in B_\delta \cap \partial\Omega)$ bekannt, welche gewährleisten, daß die Funktion u in Ω verschwindet ([10], [11]). Es bezeichne v eine Funktion aus der Klasse $C^1(0,\delta)$ die der Bedingung $\frac{tv'(t)}{v(t)} \uparrow +\infty$ bei $t \downarrow 0$ genügt.

Satz1 ([10])

1. Sei u eine in Ω harmonische Funktion aus $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, sie genüge für alle $x \in B_\delta \cap \partial\Omega$ den Abschätzungen

$$|u(x)| \le c_k |x|^k \, (k = 1, 2 \cdots) \;\; und \;\; \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right| \le v(|x|) \tag{1}$$

Wenn gilt

$$\int_0^1 \log v(t)\, dt = -\infty \tag{2}$$

so ist u identisch Null in Ω.

2. Im Falle $\int_0^1 \log v(t)\, dt > -\infty$ existiert eine in Ω harmonische Funktion $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, $u \not\equiv 0$, die der Ungleichung (1) genügt. *

Aus diesem Ergebnis folgt unmittelbar, daß in dem oben zitierten Satz von Landis als Konstante c jede Zahl größer Eins gewählt werden kann $c = 1$ taugt bereits nicht mehr.
Beim Beweis dieses Satzes (und anderer Resultate der Arbeit [10], auf die weiter unten eingegangen werden wird) wird eine Zerlegung nach sphärischen Funktion angewendet, mit deren Hilfe die Reduktion auf gewisse Aufgaben durchgeführt wird, die mit dem eindimensionalen Potenzmomentenproblem zusammenhängen.

---

*Eine Übersicht über Arbeiten, die verschiedenen Verallgemeinerungen dieses klassischen Resultates gewidmet sind, kann man in dem Artikel [6] von Landis und in der Monographie [1] von Hörmander finden.

**Verbesserungen dieses Satzes sind in [8] and [9] angegeben.

*Der hier formulierte Satz folgt aus einem allgemeinerem Theorem der Arbeit [10], wo die Bedingungen (1) in Integralform auftreten und $u(x)$ für $x \to 0, x \in \partial\Omega$, nicht gleich schnell gegen Null streben muß auf allen Strahlen, die vom Nullpunkt ausgehen, es kann sogar sein, daß $u(x)$ apriori nicht gegen Null strebt auf Strahlen, die die Einheitskugel außerhalb einer gewissen Teilmenge positiven Maßes schneiden.

Die Anwendung dieses Apparates stützt sich wesentlich auf die spezifischen Eigenschaften des Laplace-Operators und auf die Tatsache, daß die Cauchy-Bedingung auf einem ebenen Teil des Randes definiert sind. Es versteht sich, daß für $n = 1$ der formulierte Eindeutigkeitssatz mit Hilfe quasikonformer Abbildungen sofort auf eine breite Klasse von Gebieten und elliptischen Gleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt werden kann. Unbekannt ist, ob im Fall $n > 1$ eine solche Verallgemeinerung ebenfalls möglich ist. Der oben zitierte Satz von Landis gibt Veranlassung, auf eine positive Beantwortung dieser Frage zu hoffen.
Völlig ungeklärt ist das Problem der Charakterisierung der sogenannten „Eindeutigkeitsmengen“ für verschiedene Klassen harmonischer Funktionen in n-dimensionalen Gebieten ($n > 2$). Eine Menge $\mathfrak{M} \subset \partial\Omega$ heißt Eindeutigkeitsmenge für die harmonische Funktionen einer gewissen Klasse $\mathcal{X}$, wenn jede Funktion $u \in \mathcal{X}$, für welche die (in irgendeinem, dann aber festen Sinne verstanden) Randwerte des Gradienten für alle $x \in \mathfrak{M}$ verschwinden, in Ω identisch Null ist.
Hier liegt eine auffallende Diskrepans zwischen dem zwei- und mehrdimensionalen Fall vor. Für $n > 2$ ist sogar die „grobe“ Frage unbeantwortet, ob jede Menge $\mathfrak{M} \subset \partial\Omega$ positiven $(n-1)$-dimensionalen Maßes Eindeutigkeitsmenge für alle auf Ω unendlich oft differenzierbaren harmonischen Funktionen ist. Im zweidimensionalen Fall gibt es hier keine Probleme. Die positive Antwort folgt aus der Endlichkeit des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \left|\log\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right|\right| d\theta$$

für jede analytische Funktion f, die im Kreis $U = \{z : |z| < 1\}$ beschränkt ist. Für verschiedene Klassen analytischer Funktionen sind wesentlich feinere Eindeutigkeitsbedingungen bekannt (s.[2],[3],[4],[12]). Wir formulierten einen in [12] bewiesenen Eindeutigkeitssatz für analytische Funktionen der Klasse $L_p^1(U)$.

Satz 2
Sei $\mathfrak{M}$ eine Borelsche Teilmenge der Einheitssphäre ∂U und Δ eine Menge einander nicht Überschneidender Bögen $\delta \subset U$ der Länge $l(\delta)$. Wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $p > 2,\ \sum_{\delta\in\Delta} \log l(\delta) \log l(\delta) \ = -\infty, \mathfrak{M} \cap \delta = \emptyset$ für jeden Bogen $\delta \in \Delta$
2. $p = 2, \sum_{\delta\in\Delta} l(\delta) \log\left[l(\delta) \log \frac{2l(\delta)}{C_{log}(\mathfrak{M}\cap\delta)}\ \right] = -\infty$
3. $1 < p < 2, \sum_{\delta\in\Delta} l(\delta) \log \frac{l(\delta)}{(p,1)-cap(\mathfrak{M}\cap\delta)} = -\infty$

(C_{log} bezeichnet den transfiniten Durchmesser (s.[13], Seite 210), $(p,1)-cap$ die $(p,1)$-Kapazität bzgl. R^2), dann ist jede in U analytische Funktion $f \in L_p^1(U)$

identisch Null, wenn sie der Bedingung

$$\lim_{r\to 1-0} rf\left(re^{i\theta}\right) = 0$$

für jedes $\theta \in \mathfrak{M}$ genügt.
Aus diesem Satz folgt die Existenz abgeschlossener Mengen $\mathfrak{M} \subset \partial U$, die Eindeutigkeitsmengen für analytische Funktionen aus $L_p^1(U)$ sind und für die bei beliebigem $\alpha > 0$ $C_\alpha(\mathfrak{M}) = 0$ gilt (C_α ist die vom Rieszschen Potential mit dem Kern $\left|x-y\right|^{-\alpha}$ erzeugte Kapazität).

2. Approximation
In engem Zusammenhang mit Satz 1 steht ein Approximationsproblem, welches man als das der Näherungslösung des Cauchy-Problem für die Laplace-Gleichung mit beliebigen Anfangswerten auffassen kann.
Es sei Γ eine der $(n-1)$-dimensionalen Kugel homomorphe, hinreichend glatte Fläche im R^n und f_1, f_2 Funktionen auf $\partial\Omega$. Mergeljan zeigte ([8], siehe auch [14]), daß für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein harmonisches Polynom H von n Veränderlichen existiert, der Gestalt, daß für alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$|f_1(x) - H(x)| + \left|f_2(x) - \frac{\partial H}{\partial \nu}(x)\right| < \varepsilon$$

(hier wie im Weiteren bezeichnet $\nu(x)$ die Richtung der Normalen an Γ im Punkte x). Das Problem des Auffindens einer Funktion, die in einer Umgebung der Fläche Γ harmonisch ist und den Randbedingungen $u = f_1$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2$ genügt, ist im allgemeinen unlösbar. Der Satz von Mergeljan zeigt aber, daß diese Aufgabe näherungsweise lösbar ist.
Es sei jetzt Γ eine Fläche ohne Rand (z.B.diffeomorph dem Rand S^n der n-dimensionalen Kugel). Für solche Flächen gilt kein Analogen des Satzes von Mergeljan. Letzterer bewies aber Folgendes: $W(x)$ sei eine auf $\Gamma = S^n$ nichtnegative stetige Funktion, sie sei mit Ausnahme des Punktes $x_0 \in S^n$ überall positiv und strebe für $x \to x_0$ hinreichend schnell gegen Null. Dann existiert für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein harmonisches Polynom H, so daß für alle $x \in S^n$ die Abschätzung

$$\left[|f_1(x) - H(x)| + \left|f_2(x) - \frac{\partial H}{\partial \nu}(x)\right|\right] W(x) < \varepsilon$$

gilt. In der Arbeit [8] wurde die Frage nach exakten Bedingungen bezüglich der Gewichtsfunktion $W(x)$ gestellt, unter denen die Möglichkeit einer solchen Approximation gewährleistet ist. Unter der Voraussetzung, daß Gebiet Ω den Bedingungen von Satz 1 genügt, wird in dem folgenden beiden Sätzen eine Antwort auf diese Frage gegeben.

Satz 3 ([10])
Sei v die in den Bedingungen von Satz 1 figurierende Funktion. Mit w bezeichnen wir eine auf $\partial\Omega$ stetige und für $x \in \partial\Omega \setminus \{0\}$ positive Funktion, die den

Bedingungen

$$w(x) \leq c_k |x|^k, k = 1, 2, \cdots, \ x \in \partial\Omega$$

genügt. Dann lässt sich für jedes Paar auf $\partial\Omega$ stetiger Funktionen f_1, f_2 und beliebiges $\varepsilon > 0$ ein harmonisches Polynom H (von v Veränderlichen) angeben, so daß für alle $x \in \partial\Omega$ gilt

$$v(|x|)\,|f_1(x) - H(x)| + w(x)\left|f_2(x) - \frac{\partial H}{\partial \nu}(x)\right| < \varepsilon$$

Satz 4
M sei eine stetige nichtnegative Funktion auf der Halbachse $[0, \infty)$ mit

$$\int_0^1 \log M(t)\, dt > -\infty$$

Dann existieren zwei auf $\partial\Omega$ stetige Funktionen f_1, f_2, so daß die Ungleichung

$$\underset{H}{inf} \ \underset{x \in \partial\Omega}{sup} \ M(|x|)\left[|f_1(x) - H(x)| + \left|f_2(x) - \frac{\partial H}{\partial \nu}(x)\right|\right] \ > 0$$

erfüllt ist (das Infimum wird über die Menge aller harmonischer Polynome H genommen).
Die Sätze 3 und 4 sind dual einer gewissen Behauptung über die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-Problems (Satz 1), sie werden aus dem Eindeutigkeitssatz mit Hilfe der Untersuchung linearer Funktionale über dem Raum der Cauchy-Vorgaben mit Gewichtsnorm abgeleitet. Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse auf allgemeinere elliptische Gleichungen zweiter (oder höherer) Ordnung sind nicht bekannt.
Die Eindeutigkeitssätze für die Lösung des Cauchy-Problem werden benutzt, um die Möglichkeit der Approximation im Mittel durch harmonische Funktionen zu beweisen. Zum Beispiel wurde in [15] das folgende Ergebnis erzielt:

Satz 5
Das Gebiet Ω genüge den Voraussetzungen von Satz 1 und G sei ein in Ω enthaltenes beschränktes Teilgebiet des R^n. Die Funktion v aus Satz 1 genüge der Gleichung (2). Ferner gelte für beliebiges $\rho > 0$ die Ungleichung

$$mes_n\Big(B_\rho \cap (G \setminus \Omega)\Big) \leq v(\rho).$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und jede in $G \setminus$F harmonische Funktion $\varphi \in L_p(G)$ in G harmonische Funktionen $\psi \in L_p(G)$, so daß

$$\int_{G \setminus \Omega} |\varphi - \psi|^p dx < \varepsilon$$

gilt (F bezeichnet eine kompakte Teilmenge von Ω).

Dieser Satz verallgemeinert ein von Schaginjan in [16] für $n = 2$ erzieltes Resultat *. Die Bedingung (2) ist im formulierten Satz exakt.

3. Normalität

Zum Abschlüß dieses Paragrafen gehen wir noch kurz auf eine Frage ein, die eng mit Eindeutigkeitssätzen (von Typ des Satzes 1) zusammenhängt. Es handelt sich um das von Mergeljan ([8]) gestellte Problem des Aufsuchen solcher „bester" Majoranten für die Cauchy-Vorgaben einer Familie harmonischer Funktionen, welche die Normalität dieser Familie gewährleisten (d.h. des Gebietes Ω). Für solche Gebiete, wie am Anfang dieses Paragraphen betrachtet, ist diese Aufgabe von Chawin und dem Autor in der Arbeit [10] gelöst worden. Für die Formulierung dieses Resultates benötigen wir den Begriff der verallgemeinerten Normalenableitung, den wir zu diesem Zwecke kurz erläutern. $\mathfrak{h}(\Omega)$ bezeichne die Menge der in Ω harmonischen Funktionen, die als potentiale der einfachen Belegung mit einer gewissen, auf $\partial\Omega$ konzentrierten Ladung ** darstellbar sind. Jeder Funktion $u \in \mathfrak{h}(\Omega)$ entspricht in natürlicher Weise einer auf $\partial\Omega$ konzentrierte Ladung N_u, die sogenannte verallgemeinerte Normalenableitung der Funktion u auf $\partial\Omega$. Wenn die Funktion u zusammen mit ihrem Gradienten auf $\overline{\Omega}$ stetig ist, so hat diese Ladung die Dichte $\frac{du}{d\nu}$ auf $\partial\Omega$ (bzgl. des $(n-1)$-dimensionalen Maßes auf $\partial\Omega$). Die Funktionen aus der Klasse $\mathfrak{h}(\Omega)$ haben fast überall auf $\partial\Omega$ endliche Randwerte.

Satz 6

(v bezeichnet wieder die für Satz 1 definierte Hilfsfunktion). Eine Familie von Funktionen aus $\mathfrak{h}(\Omega)$, die für beliebiges $q > 0$ der Ungleichung

$$\int_{\partial\Omega\setminus B_\rho} |u(x)| H_{n-1}(dx) + |N_u|\left(\partial\Omega\setminus B_\rho\right) \leq \frac{1}{v(\rho)}$$

genügen, ist genau dann nicht normal in Ω, wenn die Bedienung (2) erfüllt ist (H_{n-1} ist das $(n-1)$-dimensionale Maß auf der Fläche $\partial\Omega\setminus B_\rho$).

Dieser Satz folgt aus allgemeineren, aber umständlich zu formulierenden Sätzen der Arbeit [10], in denen $|u|$ und $|N_u|$ verschiedenen Wachstumsbedingungen unterworfen sind. Seine Ausdehnung auf allgemeinere Fälle stellt offenbar eine interessante Aufgabe dar.

Literatur zu §4

[1] L. Hörmander, Linear partial diggerential operators, 1963

[2] L.Carleson, Seits of Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle, Acta Math. 87, N3-4, 1952, 325-345

*Dem Problem der Approximation im Mittel durch analytische Funktionen ist eine umfassende Literatur gewidmet. Wir verweisen nur auf die jüngeren Arbeiten [5] und [12], wo man weitere Literaturhinweise findet.

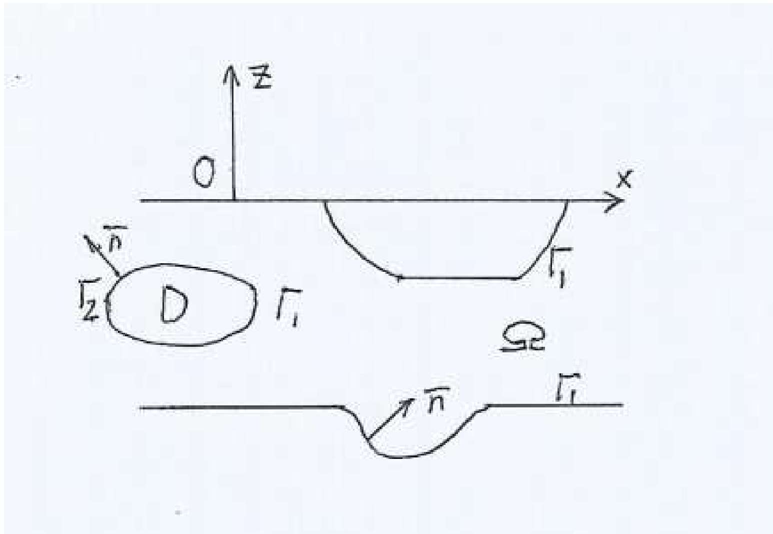
**„Ladung" bezeichnet hier ein Maß im weiteren Sinne (d.h. nicht notwendig positiv). Anw.d.Übersetzers.

[3] - A representation formula for the Dirichlet integrals, Math.Z., 73, N3 (1960), 190-196
[4] H. Shapire, A. Shields, On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Z., 80, N2, 1962, 217-229
[5] J.E. Brennan, Invariant subspaces and rational approximation, Univ, of Kentucky, preprint, 1971
[6] E.M.Landis, Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations, Russ. Math. Surv., 1963, XVIII, ?1, 3-62
[7] E.M.Landis, On some properties of solutions of elliptic equations. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) 107 (1956), 640–643.
[8] S. N. Mergelyan, "Harmonic approximation and approximate solution of the Cauchy problem for the Laplace equation", Uspekhi Mat. Nauk, **11**:5(**??**) (1956), 3–26
[9] M.M. Lavrent'ev, On the problem of Cauchy for linear elliptic equations of the second order. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)* **112** (1957), 195–197.
[10] V. G. Maz'ya, V. P. Havin, "The solutions of the Cauchy problem for the Laplace equation (uniqueness, normality, approximation)", Tr. Mosk. Mat. Obs., **30**, MSU, M., 1974, 61–114
[11V. Rao, A uniqueness theorem for harmonic functions, Mathematical Notes, 1963, 3 # 3, 247-252
[12] V. G. Maz'ya, V. P. Havin, "Use of (p,l)-capacity in problems of the theory of exceptional sets", Mat. Sb. (N.S.), 90(**??**):4 (1973), 558–591;
[13] N.S.Landkof, Foundations of modern potential theory.Moscow,1966
[14] M.M.Lavrent'ev, Some Improperly Posed Problems of Mathematical ,Physics,Springer,1967
[15] V. G. Maz'ya, V. P. Havin, "Approximation in the mean by harmonic functions", Investigations on linear operators and function theory. Part III, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **30**, Nauka", Leningrad. Otdel., Leningrad, 1972, 91–105
[16] A.L.Šaginyan, On approximation in the mean by harmonic polynomials. (Russian) Akad. Nauk Armyan. SSR. Dokl. **19,** (1954). 97–103.

§5. Elliptische Randwertaufgaben in Gebieten mit unendlichem Rand

Das Problem des Lösbarkeit elliptischer Randwertaufgaben in Gebieten mit unendlichem Rand ist sowohl von rein mathematischem als auch von anwendungsorientiertem Standpunkt aus von Interesse. Wir führen zwei konkrete Beispiele aus der Theorie der Öberflächenwellen an.

Wir betrachten zuerst das stationäre Problem des Aufsuchens des Potentials $v(x,y,z,t) = Re\left\{e^{-i\omega t}u(x,y,z)\right\}$ für die Geschwindigkeiten kleiner Schwingungen einer schweren inkompressiblen Flüssigkeit. Die Flüssigkeit fülle das Gebiet Ω im Halbraum $R^3 = \{(x,y,z); z < 0\}$ aus, der Rand bestehe aus den Oberflächen des Grundes und des Hindernisses (Γ_1) und aus der freien Oberfläche Γ_2 (s. Abb.1).



Gesucht ist eine in Ω harmonische Funktion $u(x,y,z)$, die den Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi_1 \quad auf\ \Gamma_1, \frac{\partial u}{\partial z} - \nu u = \varphi_2 \quad auf \quad \Gamma_2 \tag{1}$$

genügt ($\overrightarrow{n}$ ist die Normale an $\Gamma_1, \varphi_1, \varphi_2$ sind gegebene Funktionen, $\nu = \omega^2/g$, g wie üblich die Erdbeschleunigung). Die Lösung soll weiterhin der Bedingung des Ausstrahlens im Unendlichen genügen; wenn das Gebiet Ω in einer Umgebung von Unendlich mit der Schicht $0 < z < -h$ zusammenfällt, so hat diese Bedingung die Form $u = O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right), \frac{\partial u}{\partial r} - i\lambda_0 u = O\left(r^{-\frac{1}{2}}\right)$ für $r = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} \to \infty$, wo λ_0 die positive Wurzel der Gleichung $\lambda \tanh(\lambda h) = \nu$ bezeichnet.
Schwingungen einer Flüssigkeit unendlicher Tiefe bei Vorhandensein eines vollständig, untergetauchten Körpers wurden von Kotschin ([12], [13]) untersucht, welcher die Lösbarkeit der Aufgabe für große und kleine Werte des Parameters ν bewies. In einer Reihe von Arbeiten ([1]-[4] u.a.) untersuchte Ursell dieselbe Aufgabe für einen vollständig untergetauchten oder nur teilweise eingetauchten Kreiszylinder. Zum Beispiel wurde in der Arbeit [1] für beliebige Werte des Parameters ν die eindeutige Lösbarkeit des ebenen Problems für einen Kreiszylinder bewiesen, der in eine Flüssigkeit unendlicher Tiefe eingetaucht ist. Unlängst erhielt M.L. Livschiz ein (noch unveröffentlichtes) analoges Resultat für das achsensymmetrische Problem der Schwingungen einer Kugel.
In der Arbeit [3] entdeckte Ursell einen interessanten Effekt - die Existenz nichttrivialer, gegen Unendlich exponentiell fallender Lösungen der homogenen Gleichung für die Schwingungen eines in einen Kanal getauchten Kreiszylinders mit hinreichend kleinem Radius. Derartige Bewegungstypen werden

in [3] als „trapping modes“ bezeichnet, weil in diesen Fällen die Energie nicht ins Unendliche ausgestrahlt wird. Die Existenz von Lösungen des Typs „trapping modes“ zeigt, daß die Bedingung des Ausstrahlens im allgemeinen für den Eindeutigkeitssatz nicht hinreichend ist. Im weiteren fand Jones mit Hilfe einer anderen Methode, daß nichttriviale Lösungen mit endlicher Energie auftreten können, wenn in den Kanal ein Zylinder beliebigen Querschnitts getaucht ist oder wenn auf dem Grund des Kanals ein Hindernis vorspringt.
Einen Satz über die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung für die Schwingungen einer Flüssigkeitsschicht konstanter Tiefe bei teilweise eingetauchten Hindernis bewies John in der Arbeit [6]. Dort wird vorausgesetzt, daß die Oberfläche des Hindernisses der folgenden, die Eindeutigkeit garantierenden Bedingung genügt: Keine vertikale Gerade, die durch einen beliebigen Punkt der Oberfläche des Hindernisses verläuft, schneidet die freie Oberfläche der Flüssigkeit. Eine weitere (in dem in [6] bewiesenen Eindeutigkeitssatz benutzte) Beschränkung der Form des Hindernisses verlangt, daß dessen Oberfläche in jedem Punkt der Wasserlinie zur freien Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht ist. Diese Bedingung wurde von Kuznezow und dem Autor in der Arbeit [14] durch die schwächere Forderung des Nichttangierens von freier Oberfläche der Flüssigkeit und Oberfläche des Hindernisses in allen Punkten der Wasserlinie ersetzt.
Das ebene Problem der Schwingungen einer Flüssigkeitsschicht veränderlicher Tiefe wurde von Kreisel in der Arbeit [7] betrachtet. Er bewies einen Satz über die eindeutige Lösbarkeit für den Fall, wo das Gebiet, welches von der Flüssigkeit ausgefüllt wird, durch eine konforme Abbildung, die sich im bekannten Sinne wenig von der identischen Abbildung unterscheidet, in einen Streifen überführt werden kann. Für die dreidimensionale Variante derselben Aufgabe bewiesen Weinberg und der Autor (s. [15]) die eindeutige Lösbarkeit unter der Voraussetzung, daß die Oberfläche des Grundes einer der folgenden beiden Bedingungen genügt:

1. der Durchschnitt von $\overline{\Omega}$ mit einer beliebigen horizontalen Fläche $z = -h, h > 0$, ist sternförmig bezüglich des Punktes $(0, 0, -h)$ oder

2. das Gebiet Ω ist sternförmig bezüglich eines gewissen Punktes, der in der Tiefe h für $h\nu \leq 1$ gelegen ist.

In analoger Weise werden Beschränkungen für die Kurve Γ_1 im zweidimensionalen Fall formuliert.
Als ein weiteres Beispiel aus der Hydrodynamik für lineare Randwertaufgaben mit unendlichen Grenzen diene folgendes: Ein Körper bewege sich gleichmäßig unter der freien Oberfläche einer Flüssigkeit. Gesucht ist das Potential für die Geschwindigkeit der durch den Körper hervorgerufenen Bewegung.
Es sei Ω der Durchschnitt des unteren Halbraumes R^3_- mit dem Komplement der Abschließung des beschränkten Gebietes $G, G \subset R^3_-$. Gesucht ist eine in Ω harmonische Funktion $u(x, y, z)$, die den Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{v}\cos(n,x) \quad auf \quad \Gamma_1 \quad und \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad auf \quad \Gamma_2 \tag{2}$$

genügt ($\nu = g/\mathrm{v}^2$, v bezeichnet die Geschwindigkeit der Körpers). Weiterhin wird gefordert, daß der Gradient der Lösung im Unendlichen gegen Null strebt, und zwar vor dem Körper schneller als hinter diesem (in Fall des ebenen Problems muß der Gradient überall beschränkt sein und für $x \to +\infty$ gegen Null streben).

Dieser Aufgabe ist, genau wie der Aufgabe (1), eine Vielzahl von Untersuchungen gewidmet, die jedoch zum größten Teil praktischen Charakters sind (eine Bibliographie findet man in [16]. Kotschin untersuchte in [17] die Integralgleichung der Potentialtheorie für die Aufgabe (2) und bewies ihre eindeutige Lösbarkeit für größe und kleine Werte des Parameters ν. Weinberg und der Autor untersuchen in der Arbeit [16] das Bewegungsproblem für beliebige Werte des Parameters ν. Für den drei- und zweidimensionalen Fall zeigten sie die Eindeutigkeit der Lösung mit endlicher Energie unter der zusätzlichen Voraussetzung über Γ_1, daß $x\cos(n,x) \geq 0$ auf Γ_1. Unter ebendieser Voraussetzung wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit des ebenen Problems gefunden. Unbekannt ist, ob diese Voraussetzung immer erfüllt ist oder ob Gebiete existieren, für welche sie verletzt wird.

In einer unveröffentlichen Arbeit zeigten M.L. Liwschiz und Autor die eindeutige Lösbarkeit des Bewegungsproblem für den Kreiszylinder für beliebige Wertes des Parameters $\nu > 0$.

Über die Lösbarkeit anderer konkreter linearer stationärer Aufgaben aus der Theorie der Oberflächenwellen (Bewegung eines Schiffes bei Seegang [8], Schwingung einer Flüssigkeit bei Berücksichtigung der Oberflächenspannung [9] u.a.) ist wesentlich weniger bekannt. Dasselbe gilt für beliebige elliptische Operatoren in Gebieten mit unendlichem Rand und mehr oder weniger beliebige Randbedingungen. Eine Ausnahme stellen lediglich elliptische Randwertaufgaben für Operatoren mit konstanten Koeffizienten im Halbraum dar ([10], [18]) .

Was die Aufgaben (1) und (2) betrifft, so kann man sagen, daß trotz einer beachtlichen Anzahl einzelner Resultate die Verhältnisse noch unklar sind, es liegt keine allgemeine Theorie vor. Die bekannten Bedingungen bezüglich der Fläche $\boldsymbol{\Gamma_1}$, die die Eindeutigkeit der Lösung gewährleisten, sind von den Beweismethoden diktiert, es ist unbekannt, inwieweit sie der Natur der Aufgabe entsprechen.

Genau genommen geht es um Bedingungen für das Fehlen der Punkte des diskreten Spektrums auf dem stetigen (wenn man $\boldsymbol{\nu}$ als Spektralparameter auffaßt). Nach einem bekannten Satz v. Neumans sind sowohl der diskrete als auch der stetige Teil des Spektrums instabil und beide können bei Störung mit einem vollstetigen Operator beliebig kleiner absoluter Norm ineinander übergehen. Allein schon diese Tatsache zeigt, daß es eine schwierige Aufgabe ist, solche Werte des Parameters $\boldsymbol{\nu}$ zu bestimmen, für welche „trapping modes“ möglich ist.

Aus der Menge der Fragen, die im Zusammenhang mit den Aufgaben (1) und (2) auftreten, wurde hier nur auf ein Problem, daß der eindeutigen Lösbarkeit, eingegangen. Dem Leser, der an der Problematik der Theorie der Oberflächenwellen stärker interessant ist, sei der Arbeit [11] von Wehausen und Laitone empfohlen, die einen ausführlichen Überblick über die bis 1960 erschiene Literatur gibt.
Zum Abschluß dieses Paragraphen weisen wir darauf hin, daß sich bei exakter Aufgabenstellung die Probleme aus der Theorie der Oberflächenwellen als Aufgaben mit nichtlinearen, auf einer unbekannten freien Oberfläche vorgegebenen Randbedingungen darstellen. Bei der Untersuchung ebener Probleme dieser Art werden funktionentheoretische Methoden angewendet (s., z.B. [19]). Im dreidimensionalen Fall gibt es offenbar vorläufig nicht ein einziges strenges Resultat. Die in den Arbeiten zur Hydromechanik angewendeten formalen Zerlegungen nach kleinen Parametern sind nicht begründet.

Literatur für §5

[1] F.Ursell, Surface waves on deep water in the presence of a submerged circular cylinder. I, II – Proc.Cambr. Phill.soc. 46, p. 1 (1950), 141- 152, 153-158
[2] F.Ursell, Discrete and continuous spectra in the theory of gravity waves. U. S. National Bureau of Standards, Gravity Waves, NBS Circular 521 (1952), 1-5
[3] F.Ursell, Trapping modes in the theory of surface waves, Proc.Cambr. Phill. Soc. 47, N2 (1951), 347-358
[4] F.Ursell, Water waves generated by oscillating bodies, Quart. Jorn. Mech.Appl. Math. 7. P.4 (1954), 427-437
[5] D.S. Jones, The eigenvalues of $\Delta^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains, Proc. Cambridge Phill.Soc.49, N4 (1953), 668-684
[6] F. Jon, On the motion of floating bodies, II, Comm.Pure Appl. Math.3, N.1 (1950), 45-101
[7] G. Kreisel, Surface waves, Quart. of Appl. Math.7, N1 (1949), 21-24
[8] A.S. Peters, J.J.Stoker The motion of a ship, as a floating rigid body, in a seaway, Comm Pure Appl. Math.10 (1957), 399-490
[9] D.V. Evans, The influence of surface tension on the reflection of water waves by a plane vertical barrier, Proc.Cambr.Phil. Soc. 64 (1968), 795-810
[10] S. Agmon, A.Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary values, I.CPAM, 12 (1959), 623-727, II.CPAM, 17 (1964), 35-92
[11] J.V. Wehausen, E.V.Laitone, Surface waves, Encyclopedia of Physics, LX, (1960), 446-778, Springer-Verlag, Berlin
[12] N.E.Kotchin, ,The two-dimensional problem of the steady oscillations of bodies under the free surface of a heavy incompressible liquid. Technical and Research Bulletin No. 1-9, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, (1952).
[13] N.E.Kotchin, The theory of waves generated by oscillations of a body under the free surface of a heavy incompressible fluid. Technical and Research

Bulletin No. 1-10, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, (1952). 39 pp
[14] N.G.Kuznecov, V. G. Maz'ja, On the problem of the steady-state oscillations of a layer of fluid in the presence of an obstacle. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **216** (1974), 759–762
[15] B. R. Vainberg, V. G. Maz'ya, "On the problem of the steady oscillations of a layer of fluid of variable depth", Tr. Mosk. Mat. Obs., **28**, MSU, M., 1973, 57–74
[16] B. R. Vainberg, V. G. Maz'ya, "On the plane problem of the motion of a solid immersed in a fluid", Tr. Mosk. Mat. Obs., **28**, MSU, M., 1973, 35–56
[17] N.E.Kotchin, On the wave-making resistance and lift of bodies submerged in water. Technical and Research Bulletin No. 1-8, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, *(1951)*.
[18] G.V. Dikopolov, G.E. Šilov, Well-posed boundary problems for partial differential equations on a half-space. (Russian*)* Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **24,** 1960 ,369–380.
[19] The theory of surface wave, Collection of articles (N.N.Moiseev Ad.), IL,1959, 5-27

§**6. Elliptische Randwertaufgaben mit unstetigen Koeffizienten in Gebieten mit stückweise glattem Rand**

1. Die Theorie elliptischer Randwertsaufgaben mit glatten Koeffizienten in Gebieten mit glattem Rand hat heute eine im wesentlichen vollkommene Gestalt angenommen. Für die Lösungen solcher Aufgaben wurden verschiedene Abschätzungen aufgestellt, die Noetherschen Sätze bewiesen und die Eigenschaften der Fundamentallösungen untersucht.
Wenn auf dem Rand des Gebietes oder in den Koeffizienten des Problems Singularitäten auftreten, so sind die für das Studium des regulären Falls entwickelten Methoden nicht mehr unmittelbar anwendbar und viele bekannte Resultate verlieren ihre Gültigkeit. In den letzten Jahren wurden lediglich einzelne Ergebnisse für konkrete Aufgaben mit unstetigen Koeffizienten oder Singularitäten auf dem Rand erzielt. Hinreichend gut untersucht sind Randwertaufgaben in ebenen Gebieten, die durch Kurven mit endlicher Anzahl von Eckpunkten begrenzt werden (s. [1]-[6], [35],[36]). Allgemeine Randwertaufgaben in solchen Gebieten untersuchte Eskin [6],[7]. Elliptische Aufgaben für eine Gleichung der Ordnung $2m$ in einem n-dimensionalen Gebiet mit „konischen Punkten" auf dem Rand wurden ausführlich von Kondratjev in der Arbeit [8] und später vom Masja und Plamenewski [9],[10] untersucht.

2. Konische Punkte

Wir beschreiben kurz die Resultate, die zum gegenwärtigen Zeitpunkt über Probleme mit einer endlichen Anzahl von konischen Randpunkten bekannt sind.
Es sei G eine offene Teilmenge des R^n mit der kompakten Abschließung $\overline{G}$ und dem Rand ∂G. Auf ∂G sei ein „konischer" Punkt O ausgezeichnet, so daß

$\partial G \diagdown O$ eine glatte $(n-1)$-dimensilonale Teilmannigfaltigkeit der R^n ist. Weiters wird die Existens einer Umgebung U des Punktes O in R^n und ein Diffeomorphismus $U \bigcap \overline{G} \approx D^n \cap K^n$ vorausgesetzt, wobei D^n die offene Einheitskugel und K^n einen abgeschlossenen n-dimensionalen Kegel bezeichnet. Der Mittelpunkt der Kugel und die Spitze des Kegels fallen mit dem Punkt O zusammen. Es sei vorausgesetzt, daß der Kegel K^n aus der Kugeloberfläche $S^{n-1} = \partial D^n$ ein Gebiet Ω mit glattem Rand ausschneidet. Auf den Fall eines singulären Punktes beschränken wir uns nur wegen der Einfachheit der Darlegung. Der Fall einer endlichen Anzahl solcher Punkte ruft keine zusätzlichen Schwierigkeiten hervor.

Es sei P ein skalarer Differentialoperator der Ordnung m mit Koeffizienten aus $C^\infty\left(\overline{G} \diagdown O\right)$. Im Weiteren werden nur solche Operatoren betrachtet, die in einer Umgebung des Punktes O die Darstellung

$$p\left(x, D_x\right) = \sum_{|\gamma| \le m} P_\gamma(x) D_x^\gamma, \quad P_\gamma(x) = r^{|\gamma|-m} p_\gamma^{(0)}(r, \omega)$$

gestatten, wobei (r, ω) lokale sphärische Koordinaten mit dem Anfangspunkt in O sind, γ ist ein Multiindex, und die Funktionen $p_\gamma^{(0)}(r,\omega)$ genügen den Bedingungen

$$r^k D_r^k D_\omega^\mu p_\gamma^{(0)}(r,\omega) \in C([0,\delta] \times \Omega),\ k = 0, 1, \cdots;\ |\mu| = 0, 1, \cdots;\ \delta > 0 \qquad (1)$$

Hauptteil P^0 des Operators P im Punkt 0 heißt der Operator im Kegel K^n, den man aus dem Operator P durch Austausch der Koeffizienten $P_\gamma(x)$ gegen $r^{|\gamma|-m} p_\gamma^{(0)}(0,\omega)$ erhält. Mit L und B werden die Matrix-Differenzialoperatoren der Dimension $k \times k$ bzw. $m \times k$ mit dem Elementen L_{hj} bzw. B_{hj} bezeichnet, $ordL_{hj} \le s_h + t_j,\ ordB_{hj} \le \sigma_h + t_j;\ \ s_h, \sigma_h, t_j$ sind ganze Zahlen mit $s_1 + t_1 + \cdots + s_k + t_k = 2m$. Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$(Lu)(x) = f(x), x \in G; (Bu)(x) = g(x), x \in \partial G \diagdown O, \qquad (2)$$

wo $u = \{u_1, \cdots, u_k\}, f = \{f_1, \cdots, f_k\}, g = \{g_1, \cdots, g_k\}$.

Es wird vorausgesetzt, daß der Operator L auf $\overline{G} \diagdown O$ im Sinne von Douglis-Nirenberg elliptisch ist und daß die Randbedingungen L auf $\partial G \diagdown O$ vorgegeben sind.

Wir schreiben die Operatoren $L_{hj}^{(0)}$ und $B_{hj}^{(0)}$ im Kegel K^n in der Form $L_{hj}^{(0)} = r^{-(s_h+t_j)} L_{hj}(\omega, rD_r, D_\omega), B_{hj}^{(0)} = r^{-(\sigma_h+t_j)} B_{hj}(\omega, rD_r, D_\omega)$ und führen die Schar $\mathfrak{A}(\lambda) = \{L(\lambda), B(\lambda)\}$ der Randwertaufgabe mit Parameter im Gebiet Ω ein; hierbei ist

$$L(\lambda) = \left\| L_{hj}\left(\omega, \lambda - it_j, D_\omega\right) \right\|, \quad B(\lambda) = \left\| B_{hj}\left(\omega, \lambda - it_j, D_\omega\right) \right\|.$$

Der Operator $\mathfrak{A}(\lambda)$ soll im Sinne von Agranowitsch-Wischik elliptisch sein.

Mit $V^s_{p,\beta}(G), 1 < p < \infty$ wird der Raum der Funktionen auf G mit endlicher Norm

$$\left\|\rho^{\beta} u\right\|_{W^s_p(G)} + \left\|\rho^{\beta-s} u\right\|_{L_p(G)},$$

bezeichnet, wobei ρ der Abstand zum Punkt 0 ist, $W^s_p(G)$ der Sobolewsche Raum. Weiter führen wir die Vervollständigung $C^{(s,\alpha)}_{\beta}(G), 0 \le \alpha < 1$ der Menge der glatten Funktionen mit Trägern in $\overline{G}\setminus O$ nach der Norm

$$\|u\|_{C^{(s,\alpha)}_{\beta}(G)} = \left\|\rho^{\beta} u\right\|_{C^{(s,\alpha)}(\overline{G})} + \left\|\rho^{\beta-s-\alpha} u\right\|_{C(\overline{G})}$$

ein. Mit $\partial V^{\beta}_{p,s}(G)$ wird der Raum der Spuren auf ∂G der Funktion aus $V^{\beta}_{p,s}(G)$ bezeichnet. Genau so wie $C^{(s,\alpha)}_{\beta}(G)$ wird der Raum $C^{(s,\alpha)}_{\beta}(\partial G)$ definiert. Für $\alpha = 0$ werden wir an Stelle von $C^{(s,0)}_{\beta}$ einfach C^s_{β} schreiben.
Ausgangspunkt der in [8] durchgeführten Untersuchungen ist der Beweis der eindeutigen Lösbarkeit der Aufgabe mit „eingefrorenen“ Koeffizienten in K^n für den Hauptteil des Operators der Ausgangs-Randwertaufgabe. Dieser Beweis gründet sich darauf, daß nach Anwendung der Mellintransformation auf die Modellaufgabe der Operator $\mathfrak{A}(\lambda)$ der Randwertaufgabe mit komplexem Parameter im Gebiet Ω auftritt. Letztere ist eindeutig lösbar für alle Werte des Parameters mit Ausnahme einer diskreten Menge (λ_k).
Daraus erhält man mit Hilfe der inversen Mellintransformation die Lösung der Modellaufgabe im Kegel. Die Parsevalsche Gleichung für die Mellintransformation gestattet es, die Zugehörigkeit der Lösung des Problems im Kegel zum Raum $\prod_{j=1}^{k} V^{(s+t_j)}_{2,\beta}(R^n)$ zu beweisen , wenn nur die rechte Seite dem Raum

$$\prod_{i=1}^{k} V^{(s-s_i)}_{2,\beta}(K^n) \times \prod_{h=1}^{m} \partial V^{(s-\sigma_h)}_{2,\beta}(K^n)$$

angehört und für alle j , $Im\lambda_j = \beta + \frac{n}{2} - s$ gilt.
Auf dem üblichen Weg – Konstruktion eines Regularisators – werden aus diesem Resultat die Noetherschen Satze für den Operator $\{L, B\}$ abgeleitet, der auf dem Raum

$$\prod_{j=1}^{k} V^{(s+t_j)}_{2,\beta}(G)$$

definiert ist. Einen wesentlichen Platz nimmt in der Arbeit von Kondratjew die Klärung des asymptotischen Verhaltens der Lösung in der Nähe eines konischen Punktes und auch der Beweis der Noetherschen Sätze in Sobolewschen Räumen ein.
Abschätzungen der Fundamentallösungen und asymptotische Formeln für diese wurden in der Arbeit [9] angegeben. Es existiere eine Lösung $\Gamma(x,y)$ der Aufgabe

$$L(x,D_x)\Gamma(x,y) = \delta(x-y)I;\ x,y \in G; B(x,D_x)\Gamma(x,y) = 0, x \in \partial G\setminus O,\ y \in G;$$

$\Gamma(x,y) = \left\|\Gamma_{hj}(x,y)\right\|$, der Gestalt, daß $(1-\eta_v(x))\Gamma_{hj}(x,y) \in C_{\beta+p}^{(s+t_i+p,\alpha)}$ für alle $p \geq 0$, wobei $\eta_y(x) \in C_0^\infty(G), \eta_y(x) = 1$ in einer Umgebung des Punktes y.
Wir setzten voraus, daß auf jeder der Geraden $Im\lambda = \tau_+$ und $Im\lambda = \tau_-$ wenigstens ein Eigenwert der Schar $\mathfrak{A}(\lambda)$ gelegen ist, wobei $\tau_- < \beta - s - \alpha < \tau_+$ und in dem Streifen $\tau_- < Im\lambda < \tau_+$ kein Punkt des Spektrums von $\mathfrak{A}(\lambda)$ liegt. Mit κ_+, κ_- werden die höchsten Vielfachheiten der auf den Geraden $Im\lambda = \tau_+$ bzw. $Im\lambda = \tau_-$ gelegen Eigenwerte bezeichnet.

Satz 1
Es gelten die Abschätzungen

$$\left|D_x^\gamma D_y^\beta \Gamma_{hj}(x,y)\right| \leq C \begin{cases} \dfrac{|x|^{-\tau_-+t_j-|\gamma|}\left(\ln\frac{|y|}{|x|}\right)^{\kappa_-}}{|y|^{-\tau_-+n-s_n+|\beta|}}, wenn\ 2|x| \leq |y| \\ \dfrac{|y|^{\tau_+-n+s_n-|\beta|}\left(\ln\frac{|x|}{|y|}\right)^{\kappa_+}}{|x|^{\tau_+-t_j+|\gamma|}}, wenn\ 2|y| \leq |x| \end{cases}$$

Für $\frac{1}{2}|x| \leq y \leq 2|x|$ gelten für $\Gamma(x,y)$ dieselben Abschätzungen, wie in den Arbeiten von Solonnikov:Trudy mat. Just.im Steklova, 110 (1970), 107-145;116 (1971), 181- 216.
Ein skalarer Operator P der Ordnung m heißt zulässig, wenn für seine Koeffizienten $p_\gamma(x)$ in einer Umgebung des Punktes 0 die Darstellung

$$p_\gamma(x) = r^{|\gamma|-m} p_\gamma^{(0)}((0,\omega)) + r^{|\gamma|-m+\delta} p_\gamma^{(1)}(r,\omega), \delta > 0\,,$$

gilt, wobei die Funktion $p_\gamma^{(1)}(r,\omega)$ den Bedingung (1) genügen. In diesem Punkt werden Matrixoperatoren L und B mit zulässigen Elementen betrachtet.
Die auf den Geraden $Im\lambda{=}\tau_+$ und $Im\lambda = \tau_-$ gelegenen Eigenwerte von $\mathfrak{A}(\lambda)$ seien mit $\lambda_{+,1}, \cdots, \lambda_{+,p}$ bzw. $\lambda_{-,1}, \cdots, \lambda_{-,q}$ bezeichnet. Mit $\kappa_{+,j}$ bezeichnen wir die algebraische Vielfachheit der Zahlen $\lambda_{+,j}$ und mit $\varphi_{+,j}^{(0,\mu)}, \cdots, \varphi_{+,j}^{\left(\kappa_{+,j}^{(\mu)}-1,\mu\right)}, \mu = 1, \cdots .M_{+,j}$
die Jordanschen Ketten der Schar $\mathfrak{A}(\lambda)$, die den Eigenwerten $\lambda_{+,j}$ entsprechen, $\kappa_{+,j}^{(1)} + \cdots + \kappa_{+,j}^{(M_{+,j})} = \kappa_{+,j}$. Analoge Bezeichnungen führen wir für die Ketten ein, die den Zahlen $\lambda_{-,k}$ entsprechen. Es sei $\mathfrak{A}^*(\lambda)$ das Büschel, das zu $\mathfrak{A}(\lambda)$ konjugiert ist bezüglich der Greenschen Formel in Ω, die durch die Greensche Formel in G erzeugt wird. Mit $\Psi_{+,j}^{(0,\mu)}, \cdots, \Psi_{+,j}^{\left(\kappa_{+,j}^{(\mu)}-1,\mu\right)}$ werden die Jordanschen Ketten von $\mathfrak{A}^*(\lambda)$ bezüglich der Zahl $\lambda_{+,j}$ bezeichnet. Diese Ketten kann man so auswählen, daß sie der Bedingung der „Biothogonalität“ genügen.
Es läßt sich zeigen, daß die homoge Aufgabe (2) $\kappa_{+,j} + \cdots \kappa_{+,p}$ nichttriviale Lösungen $u_{s,r}^{(t,j)}(x)$ besitzt, $r = 0, \cdots, \kappa_{+,j}^{(s)} - 1, s = 1, \cdots, M_{+,j}, j = 1, \cdots, p$ die auf

$\overline{G} \setminus O$ glatt sind und für $x \to 0$ die folgende Asymptotik haben:

$$u_{s,r}^{(t,j)}(x) = |x|^{i\lambda_{+,j}+\overrightarrow{t}} \sum_{h=0}^{r} \frac{1}{h!}\left(i\ln\frac{1}{|x|}\right)^h \varphi_{+,j}^{(r-h,s)}\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(|x|^{-\tau_+ +\delta+t}\right),$$

$t = \{t_1, \cdots, t_k\}, |x|^{\overrightarrow{t}} v = \left\{|x|^{t_1} v_1, \cdots, |x|^{t_k} v_k\right\}$, $O\left(|x|^{-\tau_+ +\delta+\overrightarrow{t}}\right)$ bezeichnet den Vektor mit Komponenten $O\left(|x|^{-\tau_+ +\delta+t_\nu}\right), \nu = 1, \cdots, k; \delta > 0$.

Satz 2
Für $y \to 0$ und bei festem x gilt

$$\Gamma_\nu(x,y) = \sum_{j=1}^{p} \left|y\right|^{i\left(\lambda_{+,j}+i\left(n-\overrightarrow{s}\right)\right)} \sum_{s=1}^{M_{+,j}} \sum_{r=1}^{\kappa_{+,j}^{(\lambda)}} \left[u_{s,r}^{(t,j)}(x)\right]_\nu \times \sum_{h=0}^{\kappa_{+,j}^{(s)}-r-1} \frac{1}{h!} \times \left(i\ln\frac{1}{|y|}\right)^h \times \Psi_{+,j}^{\left(\kappa_{+,j}^{(s)}-r-1-h,s\right)}\left(\frac{y}{|y|}\right) + O\left(\left|y\right|^{\tau_+ - n + \overrightarrow{s} + \delta}\right).$$

Hierbei ist $\Gamma_\nu(x,y)$ der Vektor mit den Komponenten $\left[\Gamma_{\mu,\nu}(x,y)\right]_{\mu=1}^{k}, [v]_\nu$, bezeichnet die ν-te Komponente des Vektors v.
Eine entsprechende Formel kann man auch festes y und $x \to 0$ angeben.
Analoge Resultate gelten auch für die Poissonschen Kerne des Problems $\{L, B\}$.
Mit Hilfe der oben angeführten Abschätzung für die Fundamentallösungen werden die Noetherschen Sätze für das Problem $\{L, B\}$ in Banachräumen bewiesen.

Satz 3
Die Operator Randwertaufgabe

$$\{L, B\} : \prod_{j=1}^{k} V_{p,\beta}^{\left(s+t_j\right)}(G) \to \prod_{i=1}^{k} V_{p,\beta}^{(s-s_i)}(G) \times \prod_{h=1}^{m} \partial V_{p,\beta}^{(s-\sigma_h)}(\partial G)$$

ist genau dann ein Noetherscher Operator, wenn auf der Geraden $Im\lambda = p + \frac{h}{p} - s$ keine Eigenwerte der Schar $\mathfrak{A}(\lambda)$ liegen.

Satz 4
Die Operator der Randwertaufgabe
$\{L, B\} : \prod_{j=1}^{k} C_\beta^{\left(s-t_j,\alpha\right)}(G) \to \prod_{i=1}^{k} C_\beta^{(s-s_i,\alpha)}(G) \times \prod_{h=1}^{m} C_\beta^{\left(s-\sigma_{h,\alpha}\right)}(\partial G)$ ist genau dann ein Noetherscher Operator, wenn auf der Geraden $Im\lambda = \beta - s - \alpha$ keine Eigenwerte des Operators $\mathfrak{A}(\lambda)$ liegen.
Eine weitere Anwendung von Satz1 ist die folgende Verallgemeinerung des bekannten Maximumprinzips von K.Miranda und Agmon auf Gebiete mit konischen Randpunkten:

Satz 5 ([9])

Es sei P ein skalarer elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$ und $\mathfrak{A}(\lambda)$ ein Operatorbüschel, erzeugt durch das Dirichlet-Problem für den Operator P im Gebiet G (wir setzen $t_1 = 2m, s_1 = 0$ $usw.$).
Wenn auf der Geraden $Im\lambda = \beta + m + 1$ keine Eigenwerte von $\mathfrak{A}(\lambda)$ liegen, so gilt für die Lösung $u \in C_\beta^{m-1}(G)$ der homogenen Gleichung $P(x, D_x)u(x) = 0$ die Abschätzung

$$\|u\|_{C_\beta^{m-1}(G)} \le C\left\{\|u\|_{C^{m-1}(\partial G)} + \left\|\eta u\right\|_{L_2(G)}\right\}, \tag{3}$$

wobei η eine glatte Funktion bezeichnet, die in einer Umgebung des Punktes 0 verschwindet. Wenn das Dirichlet-Problem in der Klasse C_β^{m-1} nicht mehr als eine Lösung besitzt, so kann der letzte Summand in der Ungleichung (3) weggelassen werden.
Die in der Arbeit [8] (s.auch [37]) gefundene asymptotische Formel für die Lösung in der Nähe eines konischen Punktes hat die Gestalt

$$u \sim \sum_{j,k,\mu} C_{\mu,k}^{(j)} |x|^{i\lambda_j + \overrightarrow{t}} \sum_{h=1}^{k} \frac{1}{h!}\left(i \ln \frac{1}{|x|}\right)^h \varphi_j^{(k-h,\mu)}\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Die rechte Seite ist eine Linearkombination von Funktionen, die durch das Verhalten des Randes des Gebietes und die Koeffizienten der Randwertaufgabe in die Nähe der Singularität bestimmt werden. Die Abhängigkeit der Asymptotik vom Gebiet G und den Vorgaben der Aufgabe im Ganzen kommt nur in den Werten $C_{\mu,k}^{(j)}$ zum Ausdruck. In der Arbeit [10] sind Formeln für diese Koeffizienten angegeben:

$$C_{\mu,k}^{(j)} = \left(Lu, \xi_{\mu,k}^{(j)}\right) + \sum_{h=1}^{m} \left\langle B_h u,\ T_h \xi_{\mu,k}^{(j)}\right\rangle_{\partial G}$$

T_h sind die Differentialoperatoren aus der Greenschen Formel

$$(Lu, v) + \sum_{h=1}^{m} \langle B_h u,\ T_h v\rangle_{\partial G} = (u, L^* v)_G + \sum_{h=1}^{m} \langle S_h u,\ C_h v\rangle_{\partial G}$$

und $\xi_{\mu,k}^{(j)}$ gewisse Lösungen des Problems

$$(L^* v)(u) = 0,\ x \in G; (C_h v)(x) = 0\ , x \in \partial G \setminus O, 1 \le h \le m\ ,$$

die eindeutig definiert sind durch die Asymptotik in der Nähe des Punktes O.

3. Singuläre Punkte des Typs „Nullspitze“

Die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Lösung in der Nähe solcher Punkte erweist sich als schwieriger als im Fall „konischer“ Punkte. Die Frage nach der Asymptotik der Lösung in der Nähe konischer Punkte wird

durch die Transformation $t = ln|x|$ auf die Frage nach dem asymptotischen Verhalten für $t \to \infty$ der Lösung einer gewissen elliptischen Randwertaufgabe im Zylinder $\Omega \cap R_1, t \in R_1$, zurückgeführt. Asymptotische Formeln für die Lösungen des Problems im Zylinder mit Koeffizienten, die nicht von t abhängen, wurden von Agmon und Nirenberg in der Arbeit [37] erzielt. Den Einfluß von exponentiell (für $t \to -\infty$) fallenden Störungen der Koeffizienten auf die Asymptotik der Lösungen klärte Kondratjev [8] (s. auch [38]). Es zeigte sich, daß der Hauptteil der Asymptotik bei solchen Störungen unverändert bleibt.
Auf dem Rand ∂G möge nun eine ins Außengebiet von G gerichtete Spitze vorliegen. Obige logarithmische Koordinatentransformation führt zu einer Aufgabe in einem „quasizylindrischen“ Gebiet. Dieses Gebiet kann mit Hilfe einer anderen Abbildung in ein zylindrisches überführt werden, aber die Koeffizienten der Randwertaufgabe im Zylinder sind gegen Unendlich langsam stabilisierend. Die allgemeine Theorie aus [37],[38] ist also nicht anwendbar.
Operatorgleichungen mit Koeffizienten, die sich langsam stabilisieren, sind die Arbeiten [11] - [14] gewidmet. Die Resultate dieser Arbeiten ermöglichen die Beschreibung der Asymptotik der Lösungen elliptischer Randwertaufgaben in der Nähe singulärer Punkte der folgenden Typen:

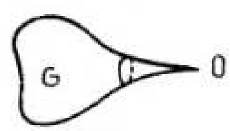


Abb.1: Nullspitze

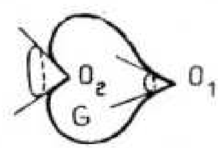


Abb.2. Der Rand strebt langsam gegen einen Konus

Und in einigen Fällen auch in der Nähe des unendlichen fernen Punktes.
Wir führen eines der Beispiele dieser Art an. Betrachtet wird ein n-dimensionales quasizylindrisches Gebiet G, jeder Schnitt Ω_t dessen mit der Hyperfläche $x_n = t > 1$ durch eine Ähnlichkeitsformation mit dem Koeffizienten t^α $(-\infty < \alpha < 1)$ aus Ω_1 hervorgeht (s.Abb)

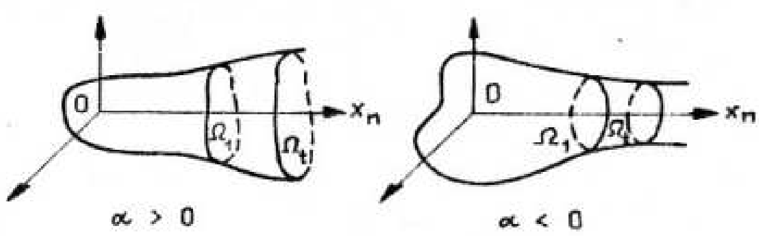


Abb.3

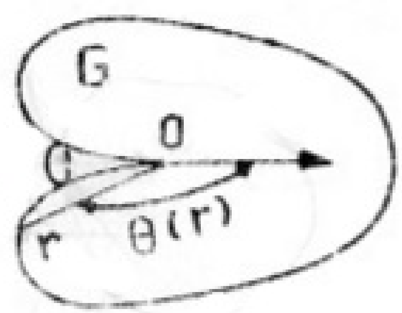
Es sei $\left\{L\left(D_x, D_{x_n}\right), B_h\left(D_x, D_{x_n}\right)\right\}$ der Operator einer elliptischen Randwertaufgabe im Gebiet G, L ist ein skalarer Operator der Ordnung $2m$. Die Eigenwerte der Operatorschar $\{L(D_x,\lambda), B_h(D_x,\lambda)\}$ im $(n-1)$-dimensionalen Gebiet Ω_1 liegen auf den Geraden $Im\lambda = \tau_k, k = 0, +1, \cdots, \tau_{k-1} < \tau_k$. Wir setzen voraus, daß auf einer gewissen Geraden $Im\lambda = \tau_k$ nur ein einfacher Eigenwert τ_h gelegen ist. Wenn

$$L\left(D_x, D_{x_n}\right)u = 0 \; in \; G, B_h\left(D_x, D_{x_n}\right)u = 0 \; auf \; \partial G$$

für hinreichend große x_h und $u(x, x_n) = o\left(exp\left(\frac{\tau}{\alpha-1}x_n^{1-\alpha}\right)\right)$ für ein gewisses $\tau \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$, so gilt die asymptotische Formel

$$u(x, x_n) \sim C x_n^{\gamma} exp\left(\frac{i\lambda_0}{1-\alpha}x_n^{1-\alpha}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j\left(\frac{x}{x_n^{\alpha}}\right)x_n^{1-\alpha}.$$

Hierbei ist φ_0 die Eigenfunktion der Schar $\{L(D_x,\lambda), B_h(D_x,\lambda)\}$ zum Eigenwert λ_0, γ ist eine gewisse Konstante und φ_j sind glatte Funktionen auf Ω_1.
Wir verweisen auf die Arbeit [25] von Feigin, die die Noetherschen Sätze für allgemeine Randwertaufgaben in Gebieten mit nach außen gerichteten Spitzen enthält.
Für allgemeine Randwertaufgaben ist die Asymptotik der Lösungen in der Nähe derartiger Spitzen, die nach innen gerichtet sind, noch unbekannt. Ein Ergebnis für harmonische Funktionen erzielten Verzhbinskii und Masja [15] (s. auch [16]).
Das Gebiet G sei in der Umgebung des Punktes $0 \in \partial G$ ein Rotationskörper: $\{x = (r, \vartheta) : 0 < r < 1, 0 \le \vartheta < \vartheta(r)\}$, $\vartheta(r) \to \pi$ bei $r \to +0$ (s. Abb.4).



Unter gewissen Voraussetzungen bezüglich der Funktion $\vartheta(r)$ existiert eine in G harmonische Funktion u, die auf der Menge $\partial G \cap \{x : 0 < r < 1\}$ verschwindet und für welche die folgende asymptotische Darstellung bei $r \to +0$ gilt:

$$u(r,\theta) = r^{-1} exp\left(-\frac{1}{2}\int_r^1 \frac{d\rho}{\rho ln(\pi - \theta(\rho))}\left\{1 - \frac{\ln\cos\frac{\vartheta}{2}}{\ln\cos\frac{\vartheta(r)}{2}} + o(1)\right\}\right).$$

4. Aufgaben mit mehrdimensionalen Singularitäten

Wir setzen voraus, daß der Rand ∂G eine glatte s-dimensionale „Kante“ enthält und daß eine Umgebung in G eines beliebigen Punktes der Kante diffeomorph $K^{(n-s)} \times R^s$ ist, K^{n-s} ist ein $(n-s)$-dimensionaler Kegel.
Nach Fouriertansformation längs der „Kante“ R^s geht die Aufgabe mit eingefrorenen Koeffizienten in eine Aufgabe im Kegel $K^{(n-s)}$ mit inhomogenen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten über. Man kann unschwer die Funktionalräume angaben, in denen die Noetherschen Sätze für diese Aufgabe gelten ([17]), aber das ist noch nicht hinreichend dafür, daß die Ausgangsaufgabe im Gebiet G ein Noetherschen Problem ist. Die Ursache hierfür besteht darin, daß das Vorhandensein eines nichttriviale Kerns (oder Kokerns) der Aufgabe in R^{n-s} zu einem unendlichdimensionalen Kern (oder Kokern) der Modellaufgabe im Gebiet $K^{n-s} \times R^s$ führt.
Unendliche viele glatte, im Unendlichen verschwindende Lösungen

$$u(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(izt - \sqrt{t^2+1}\,x\right) g(t)\,dt,\ g \in C^\infty\left(R^1\right),$$

hat zum Beispiel das folgende Problem im Ebenenkeil;

$$G = \left\{(x,y,z) : z \in R^1, x > 0, \left|y\right| < x\right\}:$$

$$-\Delta u + u = 0\ in\ G, \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ auf\ \partial G.$$

Zu einigen Fällen sind Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit auch für inhomogene Operatoren bekannt. Dies betrifft, zum Beispiel, das Dirichlet-Problem. Die Eigenschaften der verallgemeinerten Lösungen dieses Problems in einem n-dimensionalen Gebiet mit $(n-2)$-dimensionalen Kanten wurden von Kondratjew [18] untersucht. Für ein ebensolches Gebiet wurden in der Arbeit [17] Bedingungen angegeben, unter denen die verallgemeinerte Lösung einer stark-elliptischen Randwertaufgabe für eine Gleichung der Ordnung $2m$ dem Sobolewschen Raum $H_{2m}(G)$ eingehört. Explizite Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit des Problems der Richtungsableitung für einen elliptischen Operator zweiter Ordnung in einem Gebiet mit $(n-2)$-dimensionalen kanten fanden Masja und Plamenewski in der Arbeit [19].
Wir führen einen der in [19] formulierten Sätze an. Sei G eine offene Teilmenge des n-dimensionalen Riemannschen Raumes R der Klasse C^∞. G habe eine kompakte Abschließung $\overline{G}$ und werde durch die $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ∂G begrenzt. Auf dem Rand ∂G sei eine abgeschlossene Teilmenge M ausgezeichnet, die eine glatte $(n-2)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von R ist und für welche die Menge $\partial G \setminus M$ ebenfalls eine glatte Teilmannigfaltigkeit von R darstellt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Menge $\overline{G}$ in einer Umgebung eines jeden Punktes aus M einem n-dimensionalen Ebenenkeil diffeomorph ist.

Für jeden Punkt $z \in M$ sind zwei zu ∂G tangentiale $(n-1)$-dimensionale Halbräume $T^{\pm}(z)$ und eine zweidimensionale zu M normale Fläche $\Pi(z)$ definiert. Mit $\mathfrak{A}(\lambda y)$ bezeichen wir den Winkel in der Fläche $\Pi(y)$ (von der Seite des Innengebietes aus betrachtet), der von den Strahlen $T^{\pm}(z) \cap \Pi(z)$ eingeschlossen wird.
Es seien (r, ω) die Polarkoordinaten in der Euklidischen Ebene (y_1, y_2),

$$\mathcal{D} = \left\{(z, y) : z \in R^{n-2}, y = (y_1, y_2), |2\omega| < \alpha\right\}.$$

Wir setzen

$$\langle u \rangle_{k,\beta}^2 = \sum_{|k_1|+|k_2|=k} \iint_{\mathcal{D}} r^{2\beta} \left| D_z^{k_1} D_y^{k_2} u \right|^2 dy dz,$$

wobei$D^q = D_{z_1}^{q_1} \cdots D_{z_{n-2}}^{q_{n-2}}, D_{z_j} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_j}$, q ist ein Multiindex, $|q| = q_1 + \cdots q_{n-2}$, und führen den Raum $H_{m,\beta}(\mathcal{D})$ der Funktionen $u(z, y)$ mit der Norm

$$\|u\|_{H_{m,\beta}(\mathcal{D})} = \left(\sum_{k=0}^{m} \langle u \rangle_{m-k,ß-k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein. Mit $H_{m-\frac{1}{2},\beta}(\mathcal{D})$ bezeichnen wir den Raum der Spuren auf $\partial\mathcal{D}$ der Funktionen aus $H_{m,\beta}(\mathcal{D})$. Mit Hilfe einer Zerlegung der Einheit werden die Räume $H_{m,\beta(z)}(G), H_{m-\frac{1}{2},\beta(z)}(\partial G)$ mit dem Gewicht $D^{\beta(z)}$ eingeführt, dabei bezeichnen $r(x)$ den Abstand des Punktes $x \in G$ zur Mannigfaltigkeit M, z den zu x nächstgelegenen Punkt von M und $\beta(z)$ eine glatte Funktion auf M. Außerhalb einer Umgebung von M ist die Norm in $H_{m,\beta(z)}(G)$ äquivalent der Norm in dem Raum von Sobolew-Slobodezki.
In jedem Punkt $z \in M$ führen wir die Einheitsvektoren $\tau^{\pm} \in T^{\pm}(z) \cap \Pi(z)$ ein und bezeichnen mit $\alpha(z)$ den Wert des Winkels zwischen diesen (von der Menge G aus gesehen), $\nu^{\pm}(z)$ seien die äußeren Normalen zu den Schenkeln dieses Winkels.
Auf $\partial G \setminus M$ sei ein nichtentartendes stetiges Vektorfeld $l(\xi)$ definiert, daß nirgends tangential zu ∂G und in das Außengebiet von G gerichtet ist. In jedem Punkt $z \in M$ mögen die Grenzwerte $l^{\pm}(z)$ der Funktion $l(\xi)$ existieren, wenn ξ gegen z strebt von einer der beiden Seiten, in die ∂G lokal durch M getrennt wird. Wir fordern weiters, daß die Vektoren $l^{\pm}(z)$ mit $\nu^{\pm}(z)$ spitze Winkel einschließen. Mit $\lambda^{\pm}(z)$ bezeichnen wir die Projektionen auf $\Pi(z)$ der Vektoren $l^{\pm}(z)$ und mit $\gamma^{\pm}(z)$ die Winkel zwischen $\nu^{\pm}(z)$ und $\nu^{\pm}(z)$ (in dieser Richtung gerechnet), $-\pi < 2\gamma^{\pm}(z) < \pi$. Schließlich setzen wir noch $\sigma(z) < \gamma^{+}(z) + \gamma^{-}(z)$.
Es sei Δ der Laplace-Operator, der der Riemanschen Struktur in G entspricht, $Pu = \left\{-\Delta u + \lambda u, \frac{\partial u}{\partial l}\right\}$, λ ist eine hinreichend große positive Zahl.

Satz 6
Wenn für alle $z \in M$ eine der Bedingungen

$$1 - \frac{\sigma(z)}{\alpha(y)} < \beta(z) < 1, \quad 1 < \beta(z) < 1 - \frac{\sigma(z)}{\alpha(y)}$$

erfüllt ist, so stellt der Operator P einen Isomorphismus

$$H_{m,\beta(z)}(G) \approx H_{0,\beta(z)}(G) \times H_{\frac{1}{2},\beta(z)}(\partial G)$$

dar.

In Fall s-dimensionaler Kanten ($s \leq n-2$) wurde das Problem der Richtungsableitung von Masja in [20] untersucht.

Eine allgemeine Randwertaufgabe für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit komplexen Koeffizienten in einem Gebiet, dessen Rand glatte, $(n-2)$-dimensionale durchschnittsfremde Kanten enthält, wurde von Kometsch in der jüngeren Arbeit [21] untersucht. Dort wird vorausgesetzt, daß das Gebiet in einer Umgebung der Kante einem konvexen Ebenenkeil diffeomorph ist. Diese Bedingung der Konvexität ist wesentlich für die Methode der Arbeit [21], die auf der analytischen Fortsetzung bezüglich zweier komplexer Veränderlicher beruht und automorphe Funktionen benutzt. Eine ähnliche Aufgabe für Gleichungen mit reellen Koeffizienten wurde von Masja und Plamenewski in [22] betrachtet. Die in dieser Arbeit angewendete Methode erlaubt es, Gebiete in die Betrachtungen einzubeziehen, die in einer Umgebung der Kante einem beliebigen Ebenenkeil diffeomorph sind. Die Untersuchung des Modelloperators der Randwertaufgabe im Ebenenkeil wird auf das Studium des Kopplungsproblems mit unstetigen Koeffizienten für analytische Funktionen einer Veränderlichen zurückgeführt. Im Prinzip wird damit die Überprüfung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Noetherschen Sätze für jede Ausgangaufgabe auf die Berechnung einiger Integrale reduziert. Ausführlicher wurde in [22] das Problem mit Randbedingungen erster Ordnung betrachtet. Dieser Teil der genannten Arbeit verallgemeinert Resultate des Artikels [19], der dem Problem der Richtungsableitung gewidmet ist – hier wird nicht vorausgesetzt, daß die Koeffizienten in den Randbedingungen reell sind.

Die Theorie der Randwertaufgaben in Gebieten mit glattem Rand und mit Randbedingungen, in denen Unstetigkeiten erster Art längs $(n-2)$-dimensionaler Teilmannigfaltigkeiten des Randes auftreten, wurde von Wischik und Eskin [23] und [24] entwickelt.

Feigin fand Bedingungen für die Gültigkeit der Noetherschen Sätze (in Räumen mit Gewicht) bei allgemeinen elliptischen Aufgaben in einem Gebiet, dessen Rand $(n-2)$-dimensionale Kanten mit nach außen gerichteten Spitzen enthält [26]. Aufgaben von Sobolewschen Typ in Gebieten mit mehrdimensionalen Singularitäten studierte Sternin [27].

In der Arbeit [28] wird eine gewisse Klasse von Mannigfaltigkeiten eingeführt, die mehrdimensionale Singularitäten recht allgemeiner Natur besitzen. Die Notwendigkeit der Konstruktion einer solchen Klasse trat bei der Untersuchung elliptischer Randwertaufgaben mit „unstetigen“ Koeffizienten in Gebieten mit „stückweise-glatten“ Rändern auf. In [28] wurde der Versuch unternommen, diesen Begriffen eine exakte Bedeutung zu geben. Als Singularitäten werden auf dem Rand „Kanten“ verschiedener Dimensionen und alle möglichen

Überschneidungen dieser Kanten zugelassen, eine ebensolche Menge wird als Träger für die Sprünge der Koeffizienten angenommen. In [29] wird die Theorie der Randwertaufgaben für elliptische (im Sinne von Duglas-Nirenberg) Systeme von Gleichungen auf den in [28] definierten Mannigfaltigkeiten aufgebaut. Das Problem der Beschreibung von Kern und Kokern der Modellaufgabe im Kegel wird in [29] nicht untersucht, die Bedingung der Trivialität dieser endlich dimensionalen Unterräume geht dort in die Voraussetzungen ein.
Explizite Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit des Problem der Richtungsableitung in Gebieten vom Typ des Polyeders sind in der Arbeit [30] angegeben.

5. Quasilineare Gleichungen

In [31] wird Asymptotik der Lösung allgemeiner elliptischer quasilinearer Aufgaben in der Nähe konischer Punkte beschrieben. A priori wird vorausgesetzt, daß die Lösung in der Nähe des konischen Punktes keine allzu starke Singularität hat. Wir führen dieses Resultat an.
Betrachtet wird die Randwertaufgabe

$$\sum_{0\le|\alpha|\le 2m} A_\alpha(x,u,\cdots,D_{2l-1}u)D^\alpha u = F_0(x,u,\cdots,D_{2l-1}u)$$

$$\sum_{0\le|\alpha|\le m_j} B_{\alpha,j}\left(x,u,\cdots,D_{m_j-1}u\right)D^\alpha u = F_j\left(x,u,\cdots,D_{m_j-1}u\right) \tag{4}$$

$(j=1,\cdots,l), D_k u$ ist der Gradient k-ter Ordnung der Funktion u. Mit m bezeichnen wir die höchste Ordnung der Ableitungen von u, die in die Koeffizienten von $A_\alpha, B_{\alpha,j}, F_j$ der Aufgabe (4) eingehen.
Wir machen folgende Voraussetzungen:

1. In der Umgebung eines konische Punktes gilt

$$A_\alpha(x,\xi) = r^{|\alpha|-2m}\left\{A_\alpha^0(\omega,\xi) + \sum_{k=1}^{M} r^{\mu_k}A_\alpha^{(k)}(\omega,\log r,\xi) + r^{\mu_{M+1}}A_\alpha^{(M+1)}(r,\omega,\xi)\right\}$$

Dabei ist $0 < Re\mu_1 \le \cdots \le Re\mu_M < Re\mu_{M+1}$ und $A_\alpha^{(k)}(\omega,t,\xi)$ ein Polynom in t, dessen Koeffizienten glatte Funktionen der Argumente ξ und ω sind, $\omega \in \overline{\Omega}, \xi \in U, U = \{\xi : |\xi| < \delta, \delta = const > 0\}$. Bezüglich der Funktionen $A_\alpha^{(M+1)}(r,\omega,\xi)$ wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $(rD_r)^k D_\omega^{\alpha_M} A_\alpha^{(M+1)}(r,\omega)$ auf $[0,\delta]\times\Omega$ stetig sind und Werte aus $C^\infty(U)$ annehmen.

2. Analoge Darstellungen gelten für die Funktionen $B_{\alpha,j}(x,\xi)$.

3. Die Funktionen F_j sind darstellbar in der Gestalt

$$F_\alpha(x,\xi) = \sum_{k=1}^{L} r^{\nu_{k,j}}F_{k,j}(\omega,\log r,\xi) + r^{\nu_{L+1,j}}F_{L+1,j}(r,\omega,\xi),$$

$$j = 1, \cdots, l; m - m_j < Re\nu_{j,0} \leq Re\nu_{j,1} \leq \cdots \leq Re\nu_{L,j} < Re\nu_{L+1,j}$$

$m_0 = 2l$, $F_{k,j}(\omega, t, \xi)$ sind Polynome in t, deren Koeffizienten glatte Funktionen von $\omega, \xi :\ \omega \in \overline{\Omega}, \xi \in U$ sind; die Funktionen $F_{L+1,j}(r, \omega, \xi)$ genügen denselben Bedingungen wie die $A_\alpha^{(M+1)}(r, \omega, \xi)$.
Wir betrachten die lineare Randwertaufgabe im Kegel K^n

$$\sum_{|\alpha| \leq 2m} r^{|\alpha| - 2m} A_\alpha^0(\omega, 0) D^\alpha w(x) = f_0(x), x \in K^n, \omega = \frac{x}{|x|}$$

$$\sum_{|\alpha| \leq m_j} r^{|\alpha| - m_j} B_{\alpha,j}(\omega, 0) D^\alpha w(x) = f_j(x), \quad x \in \partial K^n \setminus 0, \quad j = 1, \cdots, l \tag{5}$$

und setzen

$$\hat{A}(\omega, rD_r, D_\omega) w = \sum_{|\alpha| \leq 2m} r^{|\alpha|} A_\alpha^{(0)}(\omega, 0) D^\alpha w$$

$$B_{\alpha,j}(\omega, rD_r, D_\omega) w = \sum_{|\alpha| \leq m_j} r^{|\alpha|} B_{\alpha,j}^{(0)}(\omega, 0) D^\alpha w$$

4. Der Operator $\mathfrak{A}(\lambda) = \left\{\hat{A}(\omega, \lambda, D_\omega), B_{\alpha,j}(\omega, \lambda, D_\omega)\right\}$ der Randwertaufgabe mit Parameter λ im Gebiet Ω ist elliptisch im Sinne von Agranovitsch-Wischik.

Satz 7
Es sei u eine solche Lösung des Problems (4), für welche mit einem gewissen $p \in (1, \infty)$ stets $\eta u \in W_p^{2l}(G)$ gilt, wie immer auch die Funktion $\eta \in C^\infty\left(\overline{G}\right)$ mit kompaktem Träger in $\overline{G} \setminus 0$ gewählt werde. Weiters wird vorausgesetzt, daß $u \in C_\beta^{(m,0)}\left(\overline{G}\right), \beta < 0$.
Dann gilt in der Nähe eines konischen Punktes

$$u(x) = \sum_{k=1}^{N} r^{l_k} a_k(\omega, \log r) + r^{Rel_N + \varepsilon} a_{N+1}(r, \omega), \varepsilon = const > 0,$$

hierbei bezeichnen die l_k Linearformen in den Veränderlichen $i\lambda_j, \mu_j, \nu_{k,j}, 1$ mit ganzzahligen nichtnegativen Koeffizienten, und es gilt $Rel_1 \leq \cdots \leq Rel_N$. In jeder Form l_k ist nur eine endliche Anzahl der Koeffizienten von Null verschieden. In der Zerlegung (6) treten nur die Eigenwerte λ_j auf, die der Bedingung $Im\lambda_j < \beta - 2l + 1$ genügen. Mit $Q_k(\omega, t)$ sind Polynome in t bezeichnet, deren Koeffizienten glatte Funktionen von ω sind. Diese Koeffizienten sind Lösungen gewisser (explizit beschriebener) linearer Randwertaufgaben im Gebiet Ω. Die Funktion $Q_{N+1}(r, \omega)$ genügt der Bedingung

$$(rD_r)^k D_\omega^\mu Q(r, \omega) \in C\left([0, \delta] \times \overline{\Omega}\right), \quad k + \left|\mu\right| = 0, 1, \cdots$$

Die asymptotische Formel (6) erhält man im Ergebnis der sukzessiven Linearisierung der Aufgabe (4) und der Anwendung der Resultate der linearen Theorie, die in Punkt 2 beschrieben wurden. Die Möglichkeit einer solchen Linearisierung wird durch die a priori-Voraussetzung über die schwache Singularität der Lösung in einem konischen Punkt gewährleistet.
Das Problem kompliziert sich wesentlich in dem Fall, wo die Lösung in der Nähe eines singulären Punktes schnell wächst. Allgemeine Resultate über die Asymptotik solcher Lösungen liegen bis jetzt noch nicht vor. Wir führen einen Spezialfall an, der die Eigenart der Situation illustriert. Betrachtet wird die quasilineare Gleichung

$$u_{xx} + u_{yy} + au_x^2 + bu_y^2 = 0 \,, \qquad (a, b = const > 0)$$

In dem Halbstreifen $\{(x,y) : x > 1, 0 < y < l\}$ mit dem Randbedingungen $u(x,0) = u(x,l) = 0 \ f \ddot{u} r \ x > 1$. Wenn bezüglich der Lösung von vornherein vorausgesetzt wird, daß die beschränkt ist, so ist sie für $x \to +\infty$ asymptotisch äquivalent einer der Funktionen

$$C \, exp\left(-\frac{k\pi x}{l}\right) \sin\frac{k\pi x}{l} \,,\ k = 1, 2, \cdots$$

(Dies kann aus Satz 7 abgeleitet werden). Wenn die Forderung nach Beschränktheit der Lösung aufgehoben wird, so läßt sich die Existenz von Lösungen der Gestalt

$$u(x,y) = \frac{1}{b}\log\left[e^{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi x}{l}} \sin\frac{\pi y}{l} + \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{b-a}{a}}\left(\frac{\pi y}{l} - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{\cos\left(\sqrt{\frac{b-a}{a}}\,\frac{\pi}{2}\right)} \right] + O\left(e^{-\delta x}\right)$$

zeigen, wo $\delta = const > 0 \,, (b-a)a^{-1} \neq m^2, m = 1, 3, 5, \cdots$.
Hier wird der Hauptteil der Asymptotik sowohl von der linearen als auch nichtlinearen Gliedern der Gleichung bestimmt (unveröffentlicht).
Eine Vielzahl interessanter Aufgaben, die mit der Beschreibung des Verhaltens der Lösungen in der Nähe singulärer Randpunkte zusammenhängen, tritt in Anwendungen auf, insbesondere in der Elastizitätstheorie und in der Hydrodynamik. Eine asymptotische Zerlegung der stetigen Lösung des Dirichlet-Problems für das zweidimensionale System der Navier-Stokes-Gleichungen in der Nähe eines Eckpunktes wurde von Kondratjew [32] angegeben. Abschätzungen in $H_{1+\alpha}(G)$, $\alpha > 0$, der verallgemeinerten Lösung desselben Problems wurden von Oganesjan in der Arbeit [33] abgeleitet (aus diesen Abschätzungen folgt die Stetigkeit der Lösung in G und damit die Gültigkeit der in [32] angegebenen asymptotischen Zerlegung einer Lösung aus $H_1(G)$.
In der Arbeit [34] von Masja und Plamenewski wird die verallgemeinerte Lösung $\overrightarrow{v} \in H_1(G)$ des Problems

$$-\nu\Delta\overrightarrow{v} + \left(\overrightarrow{v}, grad\right)\overrightarrow{v} + grad p = \overrightarrow{f} \quad in \ G \in R^3 \qquad (6)$$

$$div\overrightarrow{v} = 0 \; in \; G \; , \; \overrightarrow{v} \; auf \; \partial G$$

unter der Voraussetzung untersucht, daß der Rand glatte durchschnittsfremde Kanten enthält. Es wurden Abschätzungen der Lösung und des Greenschen Tensors der linearisierten Aufgabe erzielt, aus denen insbesondere folgt, daß für $f \in L_s(G)$, $s > \frac{3}{2}$ die Losung der nichtlinearen Aufgabe (6) hölderstetig ist. Ferner wurde eine asymptotische Zerlegung der Lösung der Aufgabe (6) in der Nähe der Kanten angegeben. Explizit wurde der Hauptteil dieser Zerlegung angegeben, der durch den linearen Teil der Aufgabe bestimmt ist.

Literatur zu § 6

[1] N.I. Muskhelishvili, Singular integral equations.Moscow,, 1962

[2] Birman, M. Š.; Skvorcov, G. E. On square summability of highest derivatives of the solution of the Dirichlet problem in a domain with piecewise smooth boundary. (Russian) Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii *Matematika* 1962 no. 5 (**??**), 11–21

[3] V. V. Fufaev, "On the Dirichlet problem for regions with corners", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 131:1 (1960), 37–39

[4] V. G. Maz'ya, Solvability in $W_2^2(\Omega)$ of the Dirichlet problem in a region with a smooth irregular boundary, Vestnik Leningrad. Univ, 1967, 87 – 95

[5] E. A. Volkov, "Solutions of boundary value problems for Poisson's equation in a rectangle", *Sov. Math. Dokl.*, 147, ?1, 1963, 13-16

[6] G. I. E'skin, "General boundary-value problems for equations of principal type in a planar domain with angle points", *Uspekhi Mat. Nauk*, **18**:3(**??**) (1963), 241–242

[7] G. I. E'skin, "A conjugacy problem for equations of principal type with two independent variables", Tr. Mosk. Mat. Obs., **21**, MSU, M., 1970, 245–292

[8] V. A. Kondrat'ev, "Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points", Tr. Mosk. Mat. Obs., **16**, MSU, M., 1967, 209–292

[9] V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, The fundamental solutions of elliptic boundary value problems, and the Miranda–Agmon maximum principle in domains with conical points. Sakharth. SSSR Mecn. Akad. Moambe, 1974, 73, ?2, 277–280

[10] V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, The coefficients in the asymptotic expansion of the solutions of elliptic boundary value problems near an edge. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 229 (1976), no. 1, 33–36

[11] V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, "On the asymptotic behavior of solutions of differential equations with operator coefficients", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **196**:3 (1971), 512–515

.[12] V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, "On the asymptotic behavior of solutions of differential equations in Hilbert space", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **36**:5 (1972), 1080–1133; *Math. USSR-Izv.*, **6**:5 (1972), 1067–1116

[13] B. A. Plamenevskii, "On the existence and asymptotics of solutions of differential equations with unbounded operator coefficients in a Banach space", *Izv.*

Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **36**:6 (1972), 1348–1401; *Math. USSR-Izv.*, **6**:6 (1972), 1327–1379
[14] B. A. Plamenevskii, “On the asymptotic behavior of solutions of quasielliptic differential equations with operator coefficients”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **37**:6 (1973), 1332–1375; *Math. USSR-Izv.*, **7**:6 (1973), 1327–1370 [15] G. M. Verzhbinskii and V. G. Maz’ya, “Asymptotic behavior of the solutions of Dirichlet’s problem near a nonregular boundary,” Dokl. Akad. Nauk SSSR,176, No. 3, 498–501 (1967)
[16] G. M. Verzhbinskii and V. G. Maz’ya, “Asymptotic behavior of the solutions of second order elliptic equations near a boundary. I,” Sibirsk. Matem. Zh.,12, No. 6, 1217–1249 (1971); II Vol. 13, No. 6, pp. 1239–1271, 1972
[17] Maz’ja, V. G.; Plamenevskiĭ, B. A. Elliptic boundary value problems in a domain with a piecewise smooth boundary. (Russian) *Proceedings of the Symposium on Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis (Tbilisi, 1971), Vol. 1 (Russian)*, pp. 171–181. *Izdat. Mecniereba", Tbilisi*, 1973.
[18] V. A. Kondrat’ev. On the smoothness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic equations of second order in a domain with piecewise-smooth boundary. Differ. Uravn, 6, No.10, 1970, 1831–1843.
[19] V. G. Maz’ya, B. A. Plamenevskii, On the oblique derivative problem in a domain with a piecewise smooth boundary,. Funktsional. Anal. i Prilozhen, 1971, v. 5, 102–103.
[20] V. G. Maz’ya, On the oblique derivative problem in a domain with edges of various dimensions. Vestnik Leningrad Univ.7,1973,34-39
[21] A. I. Komech, “Elliptic boundary value problems on manifolds with a piecewise smooth boundary”, *Mat. Sb. (N.S.)*, **92** (134):1 (9) (1973), 89–134; *Math. USSR-Sb.*, **21**:1 (1973), 91–135
[22] V.G.Maz’ja, V. G.; B.A.Plamenevskiĭ, Boundary value problems for a second order elliptic equation in a domain with ribs. (Russian). Vestnik Leningrad. Univ. 1975, no. 1 Mat. Meh. Astronom. vyp. 1, 102–108, 190.
[23] M.I.Vishik,G.I.Eskin Mixed boundary-value problems for elliptic systems of differential equations”, Proc. Inst. Appl. Math, of the Tbilisi State University no. 2 1969, 31–48
[24] G.I.Eskin. Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations] Izdat. Nauka”, Moscow, 1973. 232 pp.
[25] V.I.Feigin, Boundary value problems for quasielliptic equations in noncylindrical regions. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **197** 1971 1034–1037.
[26] V.I.Feigin, Elliptic equations in domains with multidimensional singularities of the boundary. (Russian) *Uspehi Mat. Nauk* **27** (1972), no. 2 (164), 183–184.
[27] B.JU. Sternin, Sobolev type problems in the case of submanifolds with multidimensional singularities. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **189** 1969 732–735.
[28] V. G. Maz’ya, B. A. Plamenevskii, “A certain class of manifolds with singularities”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1972, no. 11, 46–52
[29] V. G. Maz’ya, B. A. Plamenevskii, “On elliptic boundary value problems with discontinuous coefficients on manifolds with singularities”, *Dokl. Akad.*

Nauk SSSR, **210**:3 (1973), 529–532
[30] V.G.Maz'ya, The problem on the oblique derivative in a domain of polyhedral type. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **211** (1973), 40–43.
[31] V. G. Maz'ya, B. A. Plamenevskii, "On behaviour of solutions of quasilinear elliptic boundary value problems in the neighbourhood of a conic point", *Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory. Part 7*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **38**, Nauka", Leningrad. Otdel., Leningrad, 1973, 94–97
[32] V.A. Kondrat'ev, Asymptotic of solution of the Navier-Stokes equation near the angular point of the boundary. Prikl. Mat. Meh. **31** 119–123 (Russian); translated as J. Appl. Math. Mech. **31** 1967 125–129
[33] L. A. Oganesyan, "Singularities of solutions of Navier–Stokes equations at angular points", Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory. Part 6, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **27**, Nauka", Leningrad. Otdel., Leningrad, 1972, 131–144
[34]. V. G. Maz'ya and B. A. Plamenevskii, "On the asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations near an edge," Dokl. Akad. Nauk SSSR,210, No. 4, 803–806 (1973).
[35] J.Peetre Mixed problems for higher order elliptic equations in two variables, I, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 15, 1961, 337-353, , II, Tome 17, 1963, 1-12.
[36] P.Grisward Alternative de Predholm relative au problème de Dirichlet dans un polyèdre, Bolletino Unione Mat .Ital. Bologna, (4)5, 1972, 132-165
[37] S.Agmon,L. Nirenberg , Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, Conm. Pure Appl.Math., 16,2 (1963), 121-239
[38] A.Pazy , Asymptotic expansonsions of ordinary differential equations in Hilbert space. Arch. Rat., Mech. And Anal., 24, 3 (1967), 193-218

Survey: Certain Directions and Problems in the Theory of Elliptic Equations

Maz'ya V.G.
Foreign Member of the Georgian National Academy of Sciences
Honorary Senior Fellow, Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool

Summary
This paper is a survey of my work in analysis and elliptic partial differential equations published in 1960 - 1975. The main topics in the consideration are the follows:
1. The analyticity and differentiability of the solutions of elliptic equations of any order
2. Non-coercive boundary value problems and the problem of the directional derivatives
3. The theory of capacities and elliptic equations

4. The Cauchy problem for elliptic equations (uniqueness, approximation, normality)
5. Elliptic boundary value problems in regions with infinite boundaries
6. Elliptic boundary value problems with discontinuous coefficients in areas with piecewise smooth boundaries

In 1960 I graduated from the Department of Mathematics and Mechanics of Leningrad University and in May 1975 I gave a plenary lecture in Halle at the meeting of the Mathematical Society of GDR dedicated to the thirtieth anniversary of liberation. The title of my lecture was exactly the title of the present survey. The text was sent to a printing house in Berlin where it was rotaprinted in Sonderheft 1/1975 of Mitteilungen of the Mathematical Society of GDR. In a few months I was informed by German colleagues that fire happened in the printing house and that the run of the special issue with lectures of Soviet mathematicians burned down. As far as I know my lecture was reviewed nowhere and even if some of its copies survived, they seem to be highly inaccessible.
However the themes discussed in that lecture are still interesting, in my opinion, in spite of the half-century that passed. Most of the problems I formulated in 1970s can be stated again.
This is why I decided to publish the present survey and I hope that it can be of interest not only from the historical point of view.
There is also another reason for my wish to publish this material, which is of personal character. 50 years ago, in autumn of 1971 I visited Tbilisi for the first time and spoke about some of these problems at the Symposium on Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis organized to celebrate the 80th anniversary of N.I. Muskhelishvili. During that unforgettable meeting S.G. Mikhlin presented me to Aleksander (Yasha) Khvoles, excellent mathematician and outstanding personality. Soon he and his wonderful family became my dear friends. Now, I am honored to publish this paper in Tbilisi, in Yasha's loving memory.