Ю. А. Алхутов, В. Г. Мазья

$L^{1,p}$ – коэрцитивность и оценки функции Грина задачи Неймана в выпуклой области

Резюме

Рассматривается задача Неймана для уравнения Пуассона в произвольной выпуклой n-мерной области. Результаты работы:
(i) коэрцитивная оценка решения задачи Неймана и ее однозначная разрешимость в соболевском пространстве $L^{1,p}$;
(ii) неулучшаемые поточечные оценки функции Грина и градиента решения этой задачи;
(iii) описано собственное подпространство, соответствующее наименьшему положительному собственному числу $\lambda = n-1$ оператора Неймана-Лапласа в выпуклой подобласти единичной $(n-1)$-мерной сферы.

§1. Введение

Пусть Ω – выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $L^{1,p}(\Omega)$ – соболевское пространство обобщенных функций v, интегрируемых в Ω, таких, что $\nabla v \in L^p(\Omega)$, снабженное полунормой $\| \nabla v \|_{L^p(\Omega)}$.

В настоящей работе доказана однозначная разрешимость в $L^{1,p}(\Omega)$ для уравнения Пуассона при любой правой части из сопряженного пространства $(L^{1,p'}(\Omega))^*$, $p' + p = p'p$ и получена оценка обратного оператора. (Теорема 3.)

Доказательство этого результата основано на представляющих самостоятельный интерес оценках функции Грина $G(x, y)$ задачи Неймана для оператора Лапласа в области Ω, имеющих вид

$$|\nabla_y G(x,y)| \leq c(n,\Omega)|x-y|^{1-n} \quad \text{для всех } x, y \in \Omega,\ x \neq y \tag{1.1}$$

и

$$|\nabla_x \nabla_y G(x,y)| \leq c(n,\Omega)|x-y|^{-n} \quad \text{для всех } x, y \in \Omega,\ x \neq y, \tag{1.2}$$

Эти оценки содержатся в теореме 1.

Из (1.1) следует поточечная оценка градиента решения u задачи Неймана для уравнения Пуассона справой частью $f \in L^1(\Omega)$

$$|\nabla u(x)| \leq c(n,\Omega) \int\limits_{\Omega} |x-y|^{1-n} |f(y)|\, dy \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.3}$$

которая усиливает оценки модуля градиента в $L^\infty(\Omega)$, полученные в работах [1], [2]

Кроме того, установлены новые факты о первом собственном числе λ задачи Неймана для оператора Лапласа-Бельтрами в выпуклой подобласти единичной полусферы. (Теорема 2.) А именно, дано описание собственного подпространства, соответствующего собственному числу $\lambda = n - 1$.

Дополнительную библиографию, относящуюся к задаче Неймана для оператора Лапласа в выпуклых областях можно найти в работе [2]. Для выпуклых областей оценки констант липшица решений задачи Неймана для квазилинейных уравнений и систем уравнений, обобщающих p-лапласиан, недавно получены в работах [3] и [4].

§2. Определения. Лемма о знаке нормальной производной

Обозначим через F линейный функционал на пространстве $L^{1,p'}(\Omega)$, $p+p'=pp'$. Под обобщенным решением задачи Неймана для уравнения Пуассона $-\Delta u = F$ будем понимать функцию $u \in L^{1,p}(\Omega)$, ортогональную единице в Ω и удовлетворяющую равенству

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = F(\psi) \tag{2.1}$$

для всех функций $\psi \in L^{1,p'}(\Omega)$.

Как известно (см., например [5], теорема 1.1.15/1), любой линейный функционал F на $L^{1,p'}(\Omega)$ можно представить в виде

$$F(\psi) = \int\limits_{\Omega} \vec{f} \cdot \nabla \psi \, dx, \tag{2.2}$$

где $\vec{f} \in L^p(\Omega)$, причем

$$\| F \| = \inf \| \vec{f} \|_{L^p(\Omega)},$$

где точная нижняя грань берется по всем вектор-функциям $\vec{f}$, для которых равенство (2.2) имеет место при любом $\psi \in L^{1,p'}(\Omega)$.

Пусть $\psi \in L^{1,p}(\Omega)$ и $\mathrm{tr}\ \psi$ означает след ψ на $\partial\Omega$. Как известно, множество $\{\mathrm{tr}\ \psi\}$ образует пространство $B^{1/p,p'}(\partial\Omega)$ (см., например [6]). Введем пространство распределений $B^{-1/p,p}(\partial\Omega)$, сопряженное к $B^{1/p,p'}(\partial\Omega)$. Ясно, что отображение

$$L^{1,p'}(\Omega) \ni \psi \longrightarrow \int\limits_{\partial\Omega} h(x) \mathrm{tr}\ \psi(x) \, ds_x$$

где $h \in B^{-1/p,p}(\partial\Omega)$ и $h \perp 1$ на $\partial\Omega$, является линейным функционалом. Если $h \in B^{-1/p,p}(\partial\Omega)$, то частным случаем задачи (2.1) является задача

$$\Delta u = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = h, \quad u \in L^{1,p}(\Omega),$$

где ν означает внешний единичный вектор нормали к границе $\partial\Omega$.

В силу теорем вложения С.Л. Соболева (см., например [5], теорема 1.4.5) отображение

$$L^{1,p'}(\Omega) \ni \psi \longrightarrow \int\limits_{\Omega} f_0(x)\psi(x) \, dx + \int\limits_{\partial\Omega} h(x)\ \mathrm{tr}\ \psi(x) \, ds_x$$

является линейным функционалом, если $f_0 \in L^{np/(n+p)}(\Omega)$, $h \in L^{p(n-1)/n}(\partial\Omega)$ при $p' < n$ и $f_0 \in L^q(\Omega)$ для любого $q > 1$ при $p' = n$, $f_0 \perp 1$ в Ω, $h \perp 1$ на $\partial\Omega$.

При помощи этого функционала корректно определяется обобщенное решение из $L^{1,p}(\Omega)$ задачи

$$-\Delta u = f_0 \text{ в } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = h. \tag{2.3}$$

При $p' > n$ то же самое можно сказать, если правая часть f_0 уравнения (2.3) принадлежит пространству $(C(\overline{\Omega}))^*$, сопряженному пространству функций, непрерывных в замыкании Ω, имеет компкатный носитель в Ω и ортогональна единице в Ω.

В дальнейшем важную роль играет функция Грина $G(x, y)$ задачи Неймана в области Ω, которая определяется следующим образом. Пусть $y \in \Omega$ и $p \in (1, n/(n-1))$. Функция $\Omega \ni x \longrightarrow G(x, y)$, ортогональная единице в Ω, является $L^{1,p}(\Omega)$-решением задачи Неймана

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) - |\Omega|^{-1} \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.4}$$

где $|\Omega|$ означает n-мерную меру области Ω. Как известно, эта функция допускает равномерную оценку (см., например [7], теорема 3)

$$\| \nabla_x G(x, y) \|_{L^p(\Omega)} \leq c(n, p, \Omega). \tag{2.5}$$

Для областей Ω с гладкой границей из результата §9 главы 3 книги [8] о повышении регулярности обобщенных решений эллиптических уравнений следует, что функция $\Omega \ni x \longrightarrow G(x, y)$ принадлежит соболевскому пространству $W^{l,p}(\Omega \setminus \overline{O}_y)$ для любой окрестности O_y точки $y \in \Omega$ при всех $p \in (1, \infty)$ и любых целых l.

Лемма 1. *Если выпуклая область Ω имеет гладкую границу и функция w, гладкая вблизи $\partial\Omega$, удолетворяет условию Неймана*

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.6}$$

то

$$\frac{\partial |\nabla w|^2}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} \leq 0. \tag{2.7}$$

Доказательство основано на тождестве, восходящем при $n = 2$ к работе С.Н. Бернштейна [9] (см. также [10] и [11]). Мы приводим вывод этого тождества для удобства читателя.

Пусть $x \in \partial\Omega$ и $\vec{\tau}_1, \dots \vec{\tau}_{n-1}$ – ортонормированная система, состоящая из векторов, касающихся тех кривых на $\partial\Omega$, которые определяют главные нормальные кривизны поверхности $\partial\Omega$ в точке x. Кривую на $\partial\Omega$, определяемую направлением $\vec{\tau}_i$, будем считать параметризованной естественным параметром s_i. Для гладкой вблизи границы $\partial\Omega$ функции $\vec{v}$, которую будем рассматривать на $\partial\Omega$, положим

$$\vec{v} = \vec{v}_\tau + v_\nu \vec{\nu}, \quad \vec{v}_\tau = \sum_{k=1}^{n-1} v_k \vec{\tau}_k,$$

где $\vec{\nu}$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке x и $v_i = \vec{v}\cdot\vec{\tau}_i$. Имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial|\vec{v}|^2}{\partial\nu} = 2\sum_{j,k=1}^{n-1} v_j\Big(\frac{\partial v_k}{\partial s_j}\vec{\tau}_k\cdot\vec{\nu} + v_k\frac{\partial\vec{\tau}_k}{\partial s_j}\cdot\vec{\nu}\Big) + 2\Big(\sum_{j=1}^{n-1} v_j\frac{\partial v_\nu}{\partial s_j} + v_\nu\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial s_j}\cdot\vec{\nu}\Big) + \\ +2v_\nu\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial v_k}{\partial\nu}\vec{\tau}_k\cdot\vec{\nu} + v_k\frac{\partial\vec{\tau}_k}{\partial\nu}\cdot\vec{\nu}\Big) + 2v_\nu\Big(\frac{\partial v_\nu}{\partial\nu} + v_\nu\frac{\partial\vec{\nu}}{\partial\nu}\cdot\vec{\nu}\Big).\end{gathered} \tag{2.8}$$

Так как $\vec{v}$ – произвольная функция, то (см. (2.6)) требуемое утверждение будет доказано, если в предположении, что $v_\nu\equiv 0$ на $\partial\Omega$, будем иметь

$$\frac{\partial|\vec{v}|^2}{\partial\nu}\le 0.$$

В случае $v_\nu = 0$ равенство (2.8) можно переписать в виде

$$\frac{\partial|\vec{v}|^2}{\partial\nu} = 2\sum_{j,k=1}^{n-1} v_j v_k\frac{\partial\vec{\tau}_k}{\partial s_j}\cdot\vec{\nu}.$$

Так как $\vec{\tau}_k\cdot\vec{\nu} = 0$, то $\vec{\nu}\cdot\dfrac{\partial\vec{\tau}_k}{\partial s_j} = -\vec{\tau}_k\cdot\dfrac{\partial\vec{\nu}}{\partial s_j}$. Имеем $\dfrac{\partial\nu}{\partial s_j} = \dfrac{1}{R_j}\vec{\tau}_j$, где R_j – радиус главной нормальной кривизны в направлении $\vec{\tau}_j$. Поэтому $\dfrac{\partial\vec{\tau}_k}{\partial s_j} = \delta_{jk}\dfrac{1}{R_j}\vec{\tau}_j$, что дает тождество

$$\frac{\partial|\vec{v}|^2}{\partial\nu} = -2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{v_j^2}{R_j}.$$

Лемма доказана.

§3. Оценки функции Грина

Теорема 1. *Если Ω является выпуклой ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$ и $n\ge 2$, то для функции Грина $G(x,y)$ задачи Неймана имеют место оценки (1.1) и (1.2)*

Доказательство. Доказательству этой теоремы предпошлем следующее вспомогательное утверждение. Сначала будем предполагать, что область Ω имеет гладкую границу и установим (1.1), (1.2) с постоянными, не зависящими от гладкости $\partial\Omega$. Предварительно при $n>2$ покажем неравенство

$$|G(x,y)|\le c(n,\Omega)|x-y|^{2-n}. \tag{3.1}$$

Будем использовать вытекающую из (2.5) оценку

$$\int\limits_\Omega |G(x,y)|^p\,dx\le c(n,p,\Omega),\quad p\in(1,n/(n-1)). \tag{3.2}$$

Зафиксируем $y\in\Omega$ и, обозначив через $B^y_{r_0}$ открытый шар радиуса r_0 с центром в y, покажем, что

$$\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}}|G(x,y)|\le c(n,r_0,\Omega). \tag{3.3}$$

Положим $v(x)=G(x,y)+w(x)$, где

$$-\Delta w = |\Omega|^{-1} \text{ в } \Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0},\ \ w\Big|_{\Omega\cap\partial B^y_{r_0}}=0,\ \ \frac{\partial w}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega\setminus B^y_{r_0}}=0,$$

и заметим, что

$$\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}} |w(x)|\le c_1(n,r_0,\Omega). \tag{3.4}$$

Доказательство неравенства (3.4) основано на итерационнной технике Мозера (см. [12]) и повторяет рассуждения, приведенные в книге [13], где аналогичная оценка в теореме 8.15 показана для случая, когда функция $w(x)$ удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на границе области $\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}$.

Так как $G(x,y)=v(x)-w(x)$, то оценка (3.3) будет установлена, если

$$\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}} |v(x)|\le c_1(n,r_0,\Omega). \tag{3.5}$$

Данное неравенство в силу (3.2) и (3.4) является следствием оценки вида

$$\sup_{x\in\Omega\setminus\overline{\Omega}\cap B_{r_0/4}} |v(x)|\le c(n,q)(\Big(\frac{1}{|\Omega\cap B_{r_0/2}|}\int\limits_{\Omega\cap B_{r_0/2}} |v(x)|^q\,dx\Big)^{1/q} \tag{3.6}$$

в шаре $B_{r_0/2}$ с центром в произвольной точке замыкания области $\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}$. Если $q=2$ и функция $v(x)$ удовлетворяет однородному условию Дирихле на границе области $\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}$, то мы имеем оценку Мозера из [12], которая обобщается (см., например [13], теорема 8.17) на случай произвольного показателя $q\in(1,2)$. Если $v(x)$ удовлетворяет на границе $\Omega\setminus\overline{B}^y_{r_0}$ однородному условию Неймана, то доказательство (3.6) ничем не отличается от случая, когда на границе выполнено однородное условие Дирихле. Таким образом (3.5), а вместе с тем и неравенство (3.3) можно считать доказанными.

Пусть теперь $x\in B^y_{r_0}$, $B^y_{r_0}\subset\Omega$. Положим $F(x,y)=G(x,y)-\Gamma(x-y)$, где $\Gamma(x-y)=c(n)|x-y|^{2-n}$ – фундаментальное решение оператора Лапласа. Ясно, что $\Delta_x F(x,y)=|\Omega|^{-1}$ в $B^y_{r_0}$ и в силу (3.3) по принципу максимума приходим к требуемой оценке (3.1).

Осталось рассмотреть случай, когда точка $y\in\Omega$ расположена вблизи границы $\partial\Omega$. Свяжем с точкой $x_0\in\partial\Omega$ локальную систему координат $z_1,z_2,\dots,z_n$ с началом в x_0, так, что первые $(n-1)$ базисных вектора расположены в касательной к $\partial\Omega$ гиперплоскости, а область Ω находится в полупространстве $z_n<0$. Ясно, что часть границы $\partial\Omega$, расположенную в шаре $B^{x_0}_{R_0}$, где $R_0=R_0(\partial\Omega)$, можно задать уравнением $z_n=h(z_1,\dots,z_n)$, правая часть которого является липшицевой функцией. Сделаем замену переменных

$$\zeta_n=z_n-h(z_1,\dots,z_n),\quad \zeta_i=z_i,\ i=1,\dots n-1,$$

отображающую $\partial\Omega\cap B^{x_0}_{R_0}$ в часть гиперплоскости $\zeta_n=0$, и преобразующую оператор Лапласа в равномерно эллиптический оператор вида

$$L=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Big(\ a_{ij}(\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\Big), \tag{3.7}$$

с коэффициентами

$$a_{nn}(\zeta) = 1 + |\nabla h(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1})|^2, \ a_{nj}(\zeta) = a_{jn}(\zeta) = -h_{\zeta_j}(\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}) \text{ при } j \neq n,$$

$$a_{ij}(\zeta) = \delta_{ij} \text{ при } i, j = 1, \dots n-1,$$

где δ_{ij} означает символ Кронекера.

Пусть B_{ρ_0} – шар с центром в начале координат и $\xi \in B_{\rho_0/2}$, где ξ – образ точки y. Радиус ρ_0 считаем столь малым, что полушар $Q_{\rho_0} = B_{\rho_0} \cap \{\zeta : \ \zeta_n < 0\}$ содержится в образе области $\partial\Omega \cap B^{x_0}_{R_0}$. Образ функции Грина $G(\zeta, \xi)$ удовлетворяет в Q_{ρ_0} уравнению $L_\zeta G(\zeta, \xi) = -\delta(\zeta - \xi) + |\Omega|^{-1}$ и конормальная производная $G(\zeta, \xi)$ по переменной ζ обращается в нуль на плоской части границы Q_{ρ_0}. Продолжим коэффициенты оператора (3.7) из полушара Q_{ρ_0} в шар B_{ρ_0} следующим образом: коэффициенты $a_{in}(\zeta)$ и $a_{in}(\zeta)$ при $i \neq n$ продолжим нечетно относительно гиперплоскости $\tilde{z}_n = 0$, а все остальные коэффициенты четно. Если функцию $G(\zeta, \xi)$ продолжить четно относительно гиперплоскости $\zeta_n = 0$ из полушара Q_{ρ_0} в шар B_{ρ_0}, то она будет удовлетворять в B_{ρ_0} уравнению

$$L_\zeta G(\zeta, \xi) = -\delta(\zeta - \xi) - \delta(\zeta - \xi') + |\Omega|^{-1},$$

где ξ' – точка, симметричная ξ относительно гиперплоскости $\zeta_n = 0$. Продолжим коэффициенты оператора L из шара B_{ρ_0} на все пространство $\mathbb{R}^n$, положив $a_{ij}(\zeta) = \delta_{ij}$ при $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_0}$. Обозначим через $\Gamma(\zeta, \zeta_0)$ фундаментальное решение во всем пространстве оператора L с полюсом в точке ζ_0 и положим $g(\zeta) = G(\zeta, \xi) - \Gamma(\zeta, \xi) - \Gamma(\zeta, \xi')$. Согласно [14],

$$c_1 |\zeta - \zeta_0|^{2-n} \le \Gamma(\zeta, \zeta_0) \le c_2 |\zeta - \zeta_0|^{2-n} \tag{3.8}$$

с постоянными c_1, c_2, зависящими только от размерности пространства n и постоянных, участвующих в условии равномерной эллиптичности для оператора L. Функция g удовлетворяет в B_{ρ_0} уравнению $Lg(\zeta) = |\Omega|^{-1}$, а поскольку $\xi \in B_{\rho_0/2}$, то в силу (3.3) и (3.8) на границе шара B_{ρ_0} выполнено неравенство $|g(\zeta)| \le c(n, \rho_0, \Omega)$. Отсюда по оценке максимума модуля решения (см., например [13], теорема 8.16) следует, что $\sup\limits_{B_{\rho_0}} |g(\zeta)| \le c(n, \rho_0, \Omega)$. Таким образом, $|G(\zeta, \xi)| \le c(n, \rho_0, \Omega) |\zeta - \xi|^{2-n}$ при $\zeta \in Q_{\rho_0}$. Переписывая это неравенство в исходных координатах, придем к (3.1).

Покажем (1.1) при $n > 2$. Фиксируя $x_0, y \in \Omega$, рассмотрим шар $B^{x_0}_{r/4}$, где $r = |x_0 - y|$. Полагая $v(x, y) = |\nabla_x G(x, y)|^2$, заметим, что

$$\Delta v = 2 \sum_{i,j=1}^{n} G^2_{x_i x_j} \ge 0 \quad \text{в } \Omega \cap B^{x_0}_{r/2}.$$

Кроме того, в силу однородного краевого условия Неймана на $\partial\Omega$ для $G(x, y)$, выпуклости области Ω и леммы 1 выполнено неравенство

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega \cap B^{x_0}_{r_0/2}} \le 0. \tag{3.9}$$

Так как $v(x)$ является гладкой неотрицательной субгармонической в $\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}$ функцией и удовлетворяет (3.9), то

$$\int\limits_{\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}} \nabla v\cdot\nabla\psi\,dx\le 0, \tag{3.10}$$

для всех неотрицательных функций $\psi\in W^{1,2}(\Omega\cap B^{x_0}_{r/2})$, равных нулю вблизи сферической части границы области $\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}$. Выберем в (3.10) $\psi(x)=v^\beta(x)\eta^2(x)$, где $\beta\ge 1$, а $\eta\in C_0^\infty(B^{x_0}_{r/2})$ – срезающая функция. Тогда итерационный процесс Мозера приводит к неравенству

$$v^2(x_0)\le \sup_{x\in\Omega\cap B^{x_0}_{r/8}} v^2(x)\le c(n)r^{-n}\int\limits_{D\cap B^{x_0}_{r/4}} v^2(x)\,dx. \tag{3.11}$$

Далее, так как

$$\Delta_x G(x,y)=|\Omega|^{-1}\text{ в }\Omega\cap B^{x_0}_{r/2},\ \left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu_x}\right|_{\partial\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}}=0,$$

то

$$\int\limits_{B^{x_0}_{r/2}}\nabla_x G(x,y)\cdot\nabla\psi(x)\,dx=-|\Omega|^{-1}\int\limits_{B^{x_0}_{r/2}}\psi(x)\,dx$$

для функций $\psi\in W^{1,2}(B^{x_0}_{r/2})$, равных нулю вблизи сферической границы области $\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}$. Полагая $\psi(x)=G(x,y)\eta^2(x)$, где $\eta\in C_0^\infty(B^{x_0}_{r/2})$ – срезающая функция, равная единице в $B^{x_0}_{r/4}$, будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega\cap B^{x_0}_{r/4}} v^2(x)\,dx=\int\limits_{\Omega\cap B^{x_0}_{r/4}}|\nabla_x G(x,y)|^2\,dx\le\\ \le c(n,\Omega)\Big(r^{-2}\int\limits_{\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}} G^2(x,y)\,dx+\int\limits_{\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}}|G(x,y)|\,dx\Big).\end{gathered} \tag{3.12}$$

В силу (3.1)

$$\int\limits_{\Omega\cap B^{x_0}_{r/2}} G^2(x,y)\,dx\le c(n,\Omega)r^{4-n} \tag{3.13}$$

и из (3.11), (3.12), (3.13) приходим к оценке

$$|\nabla_x G(x_0,y)|\le c(n,\Omega)|x_0-y|^{1-n}.$$

Отсюда (1.1) вытекает из произвольности $x_0\in\Omega$ и симметрии функции Грина.

Для доказательства (1.2) заметим, что при фиксированном значении $y\in\Omega$ каждая из компонент $F(x,y)$ вектора $\nabla_y G(x,y)$ при $x\ne y$ является гармонической в Ω функцией, удовлетворяющей однородному условию Неймана на $\partial\Omega$. Пусть $x_0\ne y$ и $r=|x_0-y|$. Рассмотрим в области $\Omega\cap B^{x_0}_{r_0}$ функцию $v(x)=|\nabla_x F(x,y)|^2$.

Нетрудно видеть, что $\Delta v = 2 \sum\limits_{i,j=1}^{n} F^2_{x_i x_j}$. Кроме того, в силу однородного краевого условия Неймана по свойству (2.7) имеет место неравенство (3.9). Теперь, дословно повторяя для v рассуждения, использованные при выводе оценки (1.1) (см. (3.10), (3.11)), будем иметь

$$v^2(x_0) \le \sup_{x \in \Omega \cap B^{x_0}_{r/8}} v^2(x) \le c(n) r^{-n} \int\limits_{D \cap B^{x_0}_{r/4}} v^2(x)\, dx. \tag{3.14}$$

Поскольку

$$\Delta_x F(x,y) = \text{ в } \Omega \cap B^{x_0}_{r/2}, \ \ \frac{\partial F(x,y)}{\partial \nu_x}\Big|_{\partial\Omega \cap B^{x_0}_{r/2}} = 0,$$

то

$$\int\limits_{B^{x_0}_{r/2}} \nabla_x F(x,y) \cdot \nabla \psi(x)\, dx = 0$$

для функций $\psi \in W^{1,2}(B^{x_0}_{r/2})$, равных нулю вблизи сферической границы области $\Omega \cap B^{x_0}_{r/2}$. Если положить $\psi(x) = F(x,y)\eta^2(x)$, где $\eta \in C_0^\infty(B^{x_0}_{r/2})$ – срезающая функция, равная единице в $B^{x_0}_{r/4}$, то получим

$$\int\limits_{\Omega \cap B^{x_0}_{r/4}} v^2(x)\, dx = \int\limits_{\Omega \cap B^{x_0}_{r/4}} |\nabla_x F(x,y)|^2\, dx \le c(n,\Omega) r^{-2} \int\limits_{\Omega \cap B^{x_0}_{r/2}} F^2(x,y)\, dx,$$

и, пользуясь здесь для $F(x,y)$ доказанной оценкой (1.1), найдем, что

$$\int\limits_{\Omega \cap B^{x_0}_{r/4}} v^2(x)\, dx \le c(n,\Omega) r^{-n}.$$

Таким образом, из (3.14) приходим к оценке

$$|v(x_0)| = |F(x_0,y)| \le c(n,\Omega)|x_0 - y|^{-n},$$

которая из-за произвольности точки $x_0 \in \Omega$ доказыааeт (1.2).

Пусть теперь Ω – любая ограниченная выпуклая область. Аппроксимируем ее последовательностью $\{\Omega_m\}$, $m \ge 1$, выпуклых областей с гладкими границами, предполагая, что $\Omega_m \supset \overline{\Omega}$. Это можно сделать, например, аппроксимируя $\partial\Omega$ эквидистантными поверхностями и сглаживая их малыми возмущениями нормалей. Пусть $G_m(x,y)$ – функция Грина задачи Неймана в области Ω_m и $y \in \Omega$. Из (2.5)вытекает, что последовательность $\{x \longrightarrow G_m(x,y)\}$ слабо компактна в $L^{1,p}(\Omega)$ и из нее можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, предел которой является решением аналогичной задачи в Ω, то есть является функцией Грина $G(x,y)$ задачи Неймана в области Ω. Так как последовательность $\{x \longrightarrow G_m(x,y)\}$ слабо компактна, то по теореме Банаха-Сакса из нее можно извлечь подпоследовательность средних арифметических, которая сходится сильно в $L^{1,p}(\Omega)$ и, в частности, почти всюду в Ω. Так как в силу (1.1) и симметрии функции Грина при $x, y \in \Omega$ и $x \neq y$ имеет место оценка $|\nabla_x G_m(x,y)| \leq c|x-y|^{1-n}$ с постоянной c, не зависящей от m, то аналогичная оценка будет иметь место и для функции $G(x,y)$ в области Ω.

Докажем (1.2). Для этого вновь рассмотрим аппроксимирующую последовательность $\{\Omega_m\}$, $m \geq 1$, выпуклых областей с гладкими границами, определенную ранее. Пусть $G_m(x,y)$ – функция Грина задачи Неймана в области Ω_m и B_r^z – шар с центром в точке $z \in \Omega_m$ радиуса $r = |z-y|$, где $y \in \Omega_m$. В каждой внутренней точке $x \in \Omega_m \cap B_{r/4}^z$ имеет место оценка

$$|\nabla_y \nabla_x G_m(x,y)| \leq c(n,\Omega) r^{-1} \Big(r^{-n} \int\limits_{\Omega_m \cap B_{r/2}^z} |\nabla_\xi G_m(\xi,y)|^2 \, d\xi \Big)^{1/2}. \qquad (3.15)$$

Используя доказанное выше неравенство $|\nabla_\xi G_m(\xi,y)| \leq c|\xi-y|^{1-n}$, после оценки интеграла в правой части (3.15) получим

$$|\nabla_y \nabla_x G_m(x,y)| \leq c r^{-n}. \qquad (3.16)$$

Поскольку средние арифметические $g_m(x,y)$ последовательности функций $\{x \longrightarrow G_m(x,y)\}$ сходятся в $L^{1,p}(\Omega)$ к $G(x,y)$, то последовательность $\{x \longrightarrow \nabla_x g_m(x,y)\}$ сходится к $\nabla_x G(x,y)$. Эта последовательность функций, гармонических на $\Omega \setminus \{y\}$, сходится равномерно к $\nabla_x G(x,y)$ на любом компакте в $\Omega \setminus \{y\}$. Следовательно, числовая последовательность $\{\nabla_x g_m(x,y)\}$ сходится к $\nabla_x G(x,y)$ при всех x и y из Ω, таких, что $x \neq y$. Отсюда, в силу симметрии функции Грина вытекает, что $\{\nabla_y g_m(x,y)\}$ стремится к $\nabla_y G(x,y)$ для любых точек x и y, таких что $x \neq y$. Поскольку функции $x \longrightarrow \nabla_y g_m(x,y)$ гармоничны на множестве $\Omega \setminus \{y\}$, то последовательность $x \longrightarrow \nabla_x \nabla_y g_m(x,y)$ сходится к $\nabla_x \nabla_y G(x,y)$ на $\Omega \setminus \{y\}$. Теперь оценка (1.2) следует из (3.16).

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть Ω – выпулая область с гладкой границей в $\mathbb{R}^2$, $H(x,y)$ – функция Грина трехмерного цилиндра $\Omega \times (-2,2)$ и η – срезающая функция, равная единице на интервале $(-1,1)$ и нулю вне интервала $(-2,2)$. Проинтегрировав произведение $H(x,y)\eta(x)\eta(y)$ по переменным x_3 и y_3 вдоль соответствующих координатных прямых, получим функцию двух переменных $F(x,y)$, которая удовлетворяет однородному условию Неймана на $\partial\Omega$ и уравнению $-\Delta_x F(x,y) = \delta(x-y) + g(x,y)$ в области Ω, где $g(x,y)$ равномерно ограниченная в Ω функция. Кроме того, в силу доказанной оценки для $|\nabla_x H(x,y)|$ будем иметь

$$|\nabla_x F(x,y)| \leq c(n,\Omega)|x-y|^{-1} \quad \text{для всех } x, y \in \Omega, \quad x \neq y. \qquad (3.17)$$

Разность $V(x,y) = F(x,y) - G(x,y)$, где $G(x,y)$ есть функция Грина задачи Неймана области Ω, яляется решением задачи

$$-\Delta_x V(x,y) = g(x,y) - |\Omega|^{-1} \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial V(x,y)}{\partial \nu_x}\Big|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу оценки (1.3) имеем

$$\sup_\Omega |\nabla_x V(x,y)| \leq c(\Omega),$$

и, пользуясь (3.17), придем к (1.1). Доказательство оценки (1.2) ничем не отличается от того, которое было использовано при $n > 2$.

Вывод оценок (1.1) и (1.2) для произвольной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ повторяет рассуждения, использованные при $n > 2$. Теорема доказана.

Приведем следствие теоремы 1.

Следствие 3.1. *Если функция u является решением задачи Неймана в выпуклой области Ω для уравнения $-\Delta u = f$, правая часть которого $f \in L^1(\Omega)$ ортогональна единице в Ω, то имеет место оценка (1.3).*

Доказательство вытекает из интегрального представления решения задачи Неймана при помощи функции Грина и неравенства (1.1).

Оценка (1.3) усиливает результат работы [1], [2], где установлена глобальная оценка решения задачи Неймана для уравнения Пуассона с правой частью $f \in L^p(\Omega)$ при $p > n$:

$$\sup_{\Omega} |\nabla u(x)| \leq c(n, \Omega) \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)} .$$

§4. О первом собственном числе задачи Неймана в сферической области

Использованную при выводе оценок функции Грина лемму 1 можно применить и для оценки первого собственного числа задачи Неймана для оператора Лапласа-Бельтрами в выпуклой области единичной сферы.

Пусть $\mathcal{C}$ – выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, с вершиной в начале координат O и пусть λ – первое положительное собственное число задачи Неймана для оператора Лапласа-Бельтрами в области единичной сферы $D = \mathcal{C} \cap S_1^0$ и $\mu = \frac{1}{2}\left(2 - n + \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda}\right)$, так что $\mu(\mu + n - 2) = \lambda$. Ниже полагается $w(x) = r^\mu \psi(\omega)$, где ψ – соответствующая λ собственная функция задачи Неймана для оператора Лапласа-Бельтрами в области D.

Теорема 2. *Имеет место неравенство*

$$\lambda \geq n - 1 \tag{4.1}$$

и если $\lambda = n - 1$, то функция w может быть только линейной. Более того, в случае $\lambda = n - 1$ имеет место следующая взаимосвязь между кратностью k собственного значения λ и устройством конуса $\mathcal{C}$:

i) *если $k = n$, то $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$;*

ii) *если $k = n - 1$, то $\mathcal{C}$ совпадает с полупространством;*

iii) *если $k < n - 1$, то $\mathcal{C} = R^k \times \mathcal{C}_{n-k}$, где $\mathcal{C}_{n-k}$ – $(n-k)$-мерный открытый выпуклый конус;*

iv) *собственной подобласти единичной сферы с гладкой границей соответствует лишь кратность $k = n - 1$.*

Доказательство. Прежде, чем доказывать теорему, отметим, что оценка (4.1) известна из работ [15] и [2], но была доказана иначе. Сначала будем предполагать границу конуса гладкой. Ясно, что функция w является гладким в $\overline{\mathcal{C}} \setminus \{O\}$ решением задачи

$$\Delta w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\partial\mathcal{C}\setminus\{O\}} = 0.$$

Ниже B_R означает шар радиуса R с центром в начале координат. Так как конус $\mathcal{C}$ выпуклый, то (см. главу 3 монографии [11]) функция $w(x)$ принадлежит соболевскому пространству $W^{2,2}(\mathcal{C} \cap B_R)$. Пусть $\Gamma(x) = |x - x_0|^{2-n}$, где $x_0 \notin \overline{\mathcal{C}}$ – произвольная точка, лежащая на какой-либо прямой, проходящей через O и внутренность $\mathcal{C}$. Через η обозначим срезающую функцию, равную единице в $\mathcal{C} \cap B^0_R$, нулю вне $\mathcal{C} \cap B_{2R}$ и удовлетворяющую неравенству $|\nabla\eta| \le CR^{-1}$. Умножив тождество $\Delta|\nabla w|^2 = 2|\nabla_2 w|^2$ на функцию $\Gamma\eta$, проинтегрируем полученное равенство по частям. Оценим граничные интегралы. Из выпуклости конуса $\mathcal{C}$ и однородного краевого условия Неймана для $w(x)$ из неравенства (2.7) следует, что

$$\frac{\partial|\nabla w|^2}{\partial\nu}\Big|_{\partial\mathcal{C}\setminus\{O\}} \le 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\partial\mathcal{C}\cap B_{2R}} \Gamma\eta \frac{\partial|\nabla w|^2}{\partial\nu}\, ds \le 0.$$

Кроме того, в силу выбора точки x_0 и выпуклости $\mathcal{C}$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\Big|_{\partial\mathcal{C}} \ge 0,$$

что дает

$$-\int\limits_{\partial\mathcal{C}\cap B_{2R}} \eta|\nabla w|^2 \frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\, ds \le 0.$$

Учитывая эти неравенства, после интегрирования по частям получим

$$2\int\limits_{\mathcal{C}\cap B_R} |\nabla_2 w|^2\Gamma\, dx \le \int\limits_{\mathcal{C}\cap B_{2R}} |\nabla w|^2|\nabla\Gamma||\nabla\eta|\, dx + \int\limits_{\mathcal{C}\cap B_{2R}} |\nabla w|^2\Gamma|\Delta\eta|\, dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{C}\cap B_R} |\nabla_2 w|^2\Gamma\, dx \le C(n)R^{-n} \int\limits_{\mathcal{C}\cap B_{2R}} |\nabla w|^2\, dx < \infty.$$

После перехода к пределу при $x_0 \to O$ находим, что

$$\int\limits_{\mathcal{C}\cap B_R} |\nabla_2 w(x)|^2|x|^{2-n}\, dx < c(n,\lambda)R^{-2}. \tag{4.2}$$

В силу (4.2) имеем $\mu \ge 1$, что влечет оценку (4.1).

Пусть $\mathcal{C}$ – выпуклый конус $\{x = (x', x_n),\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n < \alpha(x')\}$, где α – функция, выпуклая положительно однородная степени один, $\alpha \geq 0$. Аппроксимируем $\mathcal{C}$ семейством строго внутренних выпуклых конусов $\mathcal{C}_\varepsilon$, заданных неравенством $x_n < \alpha(x') + \varepsilon|x'|$. Далее, приблизим извне подобласть $S \cap \mathcal{C}$ единичной сферы S выпуклыми сферическими областями, граница которых – сглаженные δ-эквидистанты, где $\delta = \delta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Конусы, соответствующие только что упомянутым сферическим областям, обозначим через $\mathcal{C}_{\varepsilon,\delta}$. Можем считать, что поверхности $S \cap \mathcal{C}_{\varepsilon,\delta}$ расположены строго внутри $S \cap \mathcal{C}$. Поскольку границы поверхностей $S \cap \mathcal{C}_{\varepsilon,\delta}$ удовлетворяют равномерному условию Липшица, то первые положительные собственные числа задачи Неймана для оператора Бельтрами в $S \cap \mathcal{C}_{\varepsilon,\delta}$ стремятся к λ, если перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ (см. [16], где рассмотрена аппроксимация поверхностями, удовлетворяющими равномерному условию Гёльдера). В силу того, что неравенство (4.1) установлено для области $S \cap \mathcal{C}_{\varepsilon,\delta}$ с гладкой границей, оно справедливо и для $S \cap \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – произвольный выпуклый конус.

Пусть теперь $\lambda = n - 1$, или иначе $\mu = 1$, и $\mathcal{C}$ – произвольный выпуклый конус. Покажем, что для функции $w(x) = r\psi(\omega)$ имеет место оценка (4.2). Обозначим через λ_ε первое положительное собственное число задачи Неймана для оператора Бельтрами в области $S \cap \mathcal{C}_{\varepsilon,\delta}$. Введем еще любую из соответствующих собственных функций ψ_ε и положим $w_\varepsilon(x) = r^{\mu_\varepsilon}\psi_\varepsilon(\omega)$, где μ_ε – положительный корень уравнения $\mu(\mu + n - 2) = \lambda_\varepsilon$. Для функции w_ε выполнена оценка (4.2), равномерная по ε, и $w_\varepsilon \to w$ при $\varepsilon \to 0$ в $L^2(\mathcal{C} \cap B_R)$ для любого $R > 0$. Теперь в силу слабой компактности в $W^{2,2}(\mathcal{C} \cap B_R)$ семейства $\{w_\varepsilon\}$ приходим к оценке (4.2) для w.

Покажем, что при $\lambda = n - 1$ функция w, определенная равенством $w(x) = r\psi(\omega)$, является линейной. Предположим противное. Тогда хотя бы одна из вторых производных $w_{x_ix_j}$ не равна нулю тождественно. Из явного вида w вытекает, что $w_{x_ix_j}$ можно записать в виде $w_{x_ix_j}(x) = r^{-1}\phi(\omega)$. Поскольку ϕ является гладкой в D функцией, то $\phi \neq 0$ на множестве положительной $(n-1)$-мерной меры. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathcal{C}\cap B_R} |w_{x_ix_j}(x)|^2(x)|x|^{2-n}\,dx = \infty,$$

что противоречит (4.2).

Перейдем к доказательству оставшейся части теоремы. Рассмотрим открытый выпуклый n-мерный конус $\mathcal{C}$ с вершиной в точке O. Пусть $w_1, \dots, w_k$ – различные линейные функции в $\mathbb{R}^n$ и $w_j(0) = 0$, $j = 1, \dots, k$, удовлетворяющие однородному краевому условию Неймана на $\partial\mathcal{C} \setminus \{O\}$. Ясно, что $w_j(x) = \vec{w}_j \cdot \vec{x}$, где $\vec{w}_j$ – линейно независимые постоянные n-мерные векторы. Поскольку система векторов $\{\vec{w}_j\}_{j=1}^k$ образует базис в $\mathbb{R}^k$, то из нее можно составить k линейных комбинаций $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, каждая из которых является единичным вектором оси Ox_j, $j = 1, \dots, k$. Перейдем в $\mathbb{R}^k$ к новой декартовой системе координат $(y_1, \dots y_k)$ с базисными векторами $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ и дополним ее до ортогональной декартовой системы координат $(y_1, \dots y_n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Докажем, что $\mathcal{C}$ есть прямое произведение R^k на $(n-k)$-мерный конус. Множество внешних нормалей (рассматриваемых не как векторы, а как лучи) к конусу $\mathcal{C}$ образуют двойственный конус $\mathcal{C}^*$. Пространство R^k, будучи ортогональным к

$\mathcal{C}^*$, содержится в $\overline{\mathcal{C}}$. Остается проверить, что если выпуклый конус содержит R^k, то он является прямым произведением конуса на R^k. В самом деле, ортогональное дополнение к R^k в $\overline{\mathcal{C}}$ есть выпуклый конус $\mathcal{C}_{n-k}$. Тогда $\overline{\mathcal{C}}$ есть прямое произведение $R^k \times \mathcal{C}_{n-k}$, потому что $R^k + \mathcal{C}_{n-k} = \overline{\mathcal{C}}$, где знак $+$ означает сумму по Минковскому, т.е. $A + B = \{a + b : \ \forall a \in A, \ \forall b \in B\}$. Теорема доказана.

§5. Основной результат

Лемма 2. *Интегральный оператор J, действующий в $\mathbb{R}^n_+ = \{y : \ y_n > 0, \ y = (y', y_n)\}$, $y = (y', y_n)$, с ядром*

$$J(x,y) = \Big(\ |x' - y'| + x_n + y_n \Big)^{-n}$$

ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ для любого показателя $p \in (1, \infty)$.

Доказательство. Обозначим через J_1 и J_2 интегральные операторы с ядрами

$$J_1(x,y) = J(x,y)\theta(y_n - x_n), \quad J_2(x,y) = J(x,y)(1 - \theta(y_n - x_n))$$

соответственно, где $\theta(y_n - x_n)$ означает функцию Хевисайда. Ясно, что

$$J_1(x,y) \le \Big(\ |x' - y'| + y_n \Big)^{-n} \theta(y_n - x_n),$$

$$J_2(x,y) \le \Big(\ |x' - y'| + y_n \Big)^{-n} (1 - \theta(y_n - x_n)).$$

По неравенству Харди

$$\| \ J_1\varphi \ \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int\limits_0^\infty dx_n \Big| \int\limits_{x_n}^\infty dy_n \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varphi(y', y_n)\, dy'}{(|x' - y'| + y_n)^n} \Big|^p \le$$

$$\le p^p \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int\limits_0^\infty x_n^p \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varphi(y', x_n)\, dy'}{(|x' - y'| + x_n)^n} \Big|^p dx_n =$$

$$= p^p \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varphi(y', x_n)\, dy'}{(|x' - y'| + x_n)^n} \Big|^p dx' \cdot x_n^p \, dx_n.$$

L_p-норма отображения в $\mathbb{R}^{n-1}$ с ядром $Z' \to (|z'| + x_n)^{-n}$ не превосходит

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (|z'| + x_n)^{-n} \, dz' = c(n) x_n^{-1},$$

где

$$c(n) = |S|^{n-1} \int\limits_0^\infty (\rho + 1)^{-n} \rho^{n-1} \, d\rho.$$

Следовательно,

$$\| J_1\varphi \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq p^p c(n)^p \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\varphi(x', x_n)|^p \, dx' dx_n = (pc(n))^p \| \varphi \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} . \tag{5.1}$$

Вернемся к оператору J_2:

$$\| J_2\varphi \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} = \int_0^\infty dx_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \Big| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dy'}{(|x'-y'|+x_n)^n} \int_0^{x_n} \varphi(y', y_n)\, dy_n \Big|^p .$$

Оценивая L_p-норму внутреннего отбражения как и выше, получим

$$\| J_2\varphi \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq c(n)^p \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \Big| \int_0^{x_n} \varphi(x', y_n)\, dy_n \Big|^p \frac{dx_n}{x_n^p}\, dx'$$

и по неравенству Харди

$$\| J_2\varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq p' c(n) \| \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} .$$

Сочетая эту оценку с (5.1), найдем

$$\| J\varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq \| J_1\varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} + \| J_2\varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} \leq (p+p')c(n) \| \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^n_+)},$$

что влечет требуемое утверждение. Лемма доказана.

Теорема 3. *Задача Неймана (2.1) однозначно разрешима в пространстве $L^{1,p}(\Omega)$ для любого показателя $p \in (1, \infty)$ и ее решение u удовлетворяет неравенству*

$$\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| F \|_{(L^{1,p'}(\Omega))^*} \tag{5.2}$$

с постоянной C, не зависящей от u и F.

Доказательство. Пусть u – любое $L^{1,p}(\Omega)$ решение задачи Неймана и

$$\int_\Omega \nabla u(y) \cdot \nabla \psi(y)\, dy = \int_\Omega \vec{f}(y) \cdot \nabla \psi(y)\, dy \tag{5.3}$$

для всех $\psi \in L^{1,p}(\Omega)$ и для некоторой вектор-функции $\vec{f} \in L^p(\Omega)$. Пусть еще σ – любая функция из $C_0^\infty(\Omega)$. Положим

$$\psi(y) = \int_\Omega G(x,y)\sigma(x)\, dx.$$

Выделяя особенность ядра G на диагонали, проверяем, что ψ удовлетворяет условию Липшица в $\overline{\Omega}$. Поэтому ее можно подставить в (5.3). Следовательно,

$$\int_\Omega \sigma(x)\, dx \int_\Omega \nabla_y G(x,y) \cdot \nabla u(y)\, dy = \int_\Omega \sigma(x)\, dx \int_\Omega \nabla_y G(x,y) \cdot \vec{f}(y)\, dy. \tag{5.4}$$

Перемена порядка интегрирования была оправдана, потому что в силу (1.1) внутренние интегралы в последнем равенстве принадлежат $L^p(\Omega)$. Заметим, что аппроксимируя любую функцию v из $L^{1,q}(\Omega)$, $q \geq 1$, гладкими в пространстве $L^{1,q}(\Omega)$, мы выводим из определения функции Грина тождество

$$\int\limits_\Omega \nabla_y G(x,y) \cdot \nabla v(y)\, dy = v(x).$$

Отсюда, из (5.4) и из произвольности функции σ следует, что при почти всех $x \in \Omega$

$$u(x) = \int\limits_\Omega \nabla_y G(x,y) \cdot \vec{f}(y)\, dy. \tag{5.5}$$

Это интегральное представление $L^{1,p}(\Omega)$-обобщенного решения дает, в частности, его единственность.

Исходя из неравенства

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq c \int\limits_\Omega \frac{dz}{d(z)^n} \int\limits_{B^z_{d(z)/8}} |\nabla u|^p\, dx,$$

в котором $d(z)$ означает расстояние от точки $z \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$, и пользуясь локальной L^p-оценкой решения, будем иметь

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq c \int\limits_\Omega \frac{dz}{d(z)^n} \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} |\vec{f}|^p\, dx + c \int\limits_\Omega \frac{dz}{d(z)^{n+p}} \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} |u(x) - \bar{u}(z)|^p\, dx,$$

где $\bar{u}(z)$ означает среднее значение функции $u(x)$ по шару $B^z_{d(z)/4}$. Поскольку $\bar{u}(z) = u(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in B^z_{d(z)/3}$, то из интегрального представления (5.5) получаем

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq c \int\limits_\Omega \frac{dz}{d(z)^n} \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} |\vec{f}|^p\, dx +$$

$$+c \int\limits_\Omega \frac{dz}{d(z)^{n+p}} \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} \Big(\int\limits_\Omega |\nabla_y G(x,y) - \nabla_y G(x_0,y)| |\vec{f}(y)|\, dy \Big)^p dx \leq$$

$$c \parallel \vec{f} \parallel^p_{L^p(\Omega)} + c \int\limits_\Omega (I_1^p(z) + I_2^p(z)) \frac{dz}{d(z)^{n+p}},$$

где

$$I_1^p(z) = \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} \Big(\int\limits_{B^z_{d(z)/4}} |\nabla_y G(x,y) - \nabla_y G(x_0,y)| |\vec{f}(y)|\, dy \Big)^p dx,$$

$$I_2^p(z) = \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} \Big(\int\limits_{\Omega \setminus B^z_{d(z)/4}} |\nabla_y G(x,y) - \nabla_y G(x_0,y)| |\vec{f}(y)|\, dy \Big)^p dx.$$

Рассмотрим интегралы, содержащие $I_1^p(z)$ и $I_2^p(z)$. Имеем

$$I_1^p(z) \le c \int\limits_{B^z_{d(z)}} \Big(\int\limits_{B^z_{d(z)}} (|\nabla_y G(x,y)| + |\nabla_y G(x_0,y)|)|\vec{f}(y)|\,dy\Big)^p\,dx \tag{5.6}$$

Как известно [17], L^p-норма интегрального оператора с ядром $K(x,y)$ не превосходит

$$\sup_x \int |K(x,y)|\,dy + \sup_y \int |K(x,y)|\,dx.$$

Оценивая эти величины для интегрального оператора в (5.6), и пользуясь оценкой функции Грина (1.1), получаем

$$\int\limits_{B^z_{d(z)}} (|\nabla_y G(x,y)| + |\nabla_y G(x_0,y)|)\,dy \le$$

$$\le c \int\limits_{B^z_{d(z)}} \left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}} + \frac{1}{|x_0-y|^{n-1}} \right) dy \le c d(z) \quad \text{для всех } x \in B^z_{d(z)}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{B^z_{d(z)}} (|\nabla_y G(x,y)| + |\nabla_y G(x_0,y)|)\,dx \le c d(z) \quad \text{для всех } y \in B^z_{d(z)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} I_1^p(z) \frac{dz}{d(z)^{n+p}} \le c \int\limits_{\Omega} \frac{dz}{d(z)^n} \int\limits_{B^z_{d(z)}} |\vec{f}(\xi)|^p\,d\xi \le c \parallel \vec{f} \parallel^p_{L^p(\Omega)}. \tag{5.7}$$

Оценим оставшийся интеграл

$$I = \int\limits_{\Omega} I_2^p(z) \frac{dz}{d(z)^{n+p}}. \tag{5.8}$$

Здесь в силу оценки функции Грина (1.2) и принадлежности точки x_0 шару $B^z_{d(z)}$ имеем

$$|\nabla_y G(x,y) - \nabla_y G(x_0,y)| \le \frac{c|x-x_0|}{|x-y|^n} \le c\frac{d(z)}{|x-y|^n}$$

для всех $x \in B^z_{d(z)/6}$ и для всех $y \in \Omega \setminus B^z_{d(z)/4}$. Поэтому для интеграла (5.8) имеет место соотношение

$$I \le c \int\limits_{\Omega} \frac{dz}{d(z)^n} \int\limits_{B^z_{d(z)/6}} \Big(\int\limits_{\Omega \setminus B^z_{d(z)/4}} \frac{|\vec{f}(y)|\,dy}{|x-y|^n} \Big)^p\,dx.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\vec{f}$ имеет носитель в малой окрестности V некоторой граничной точки. Можно допустить также, что интегрирование по z распространяется на пересечение Ω с малой окрестностью U той же точки, $\overline{V} \subset U$. Кроме того, можно считать, что $\partial\Omega \cap U$ есть часть гиперплоскости $x_n = 0$.

Предполагая, что $\Omega \cap U \subset \mathbb{R}^n_+$, воспользуемся неравенством

$$|x-y|^{-n} \leq c(|x'-y'| + x_n + y_n)^{-n},$$

в силу которого

$$I \leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} dx \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|\vec{f}(y)|\, dy}{(|x'-y'| + x_n + y_n)^n} \Big)^p.$$

По утверждению леммы 2 будем иметь

$$I \leq c \parallel \vec{f} \parallel_{L^p(\Omega)} .$$

Сопоставляя эту оценку с (5.7), придем к неравенству

$$\parallel \nabla u \parallel_{L^p(\Omega)} \leq C \parallel \vec{f} \parallel_{L^p(\Omega)},$$

что в силу произвольности функции $\vec{f}$ влечет (5.2).

Существование $L^{1,p}(\Omega)$-решения при любой вектор-функции $\vec{f}$ из $L^p(\Omega)$ следует из оценки (5.2) при помощи $L^p(\Omega)$-аппроксимации $\vec{f}$ гладкими вектор функциями. Теорема доказана.

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 12-01-00058-а) и грантом - субсидией Министерства Образования и Науки РФ № 14.B 37.21.0362.

Литература

1. V.G. Maz'ya. The boundedness of the gradient of the solution of the Dirichlet problem in a region with smooth nonregular boundary. (Russian) Vestnik Leningrad. Univ., 1969, v. 24, no. 1, p. 72-79.

2. V. Maz'ya. Boundedness of the gradient of a solution of the Neumann-Laplace problem in a convex domain. J. Math. Sci. (N.Y), 159, no. 1, p. 104-112.

3. A. Cianchi A., V. Maz'ya. Global Lipschitz regularity for a class of quasilinear elliptic equations, Comm. Partial Differential Equations, 36, no. 1, p. 100–133.

4. A. Cianchi A., V. Maz'ya. Global boundedness of the gradient for a class of nonlinear elliptic systems. To appear in Archive for Rational Mechanics and Analysis

5. V. Maz'ya, Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. V. 342. Springer. 2011.

6. О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. Интегральные Представления и Теоремы Вложения. М.: Наука. 1975.

7. В.Г. Мазья. О слабых решениях задач Дирихле и Неймана, труды ММО, 1969, т. 20, с. 137-172.

8. S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I, Comm. Pure Appl. Math., 1959, v.12, p. 623-727.

9. S. N. Bernshtein. Sur la nature analytique des solutions des *é*quations aux d*é*riv*é*es partielles du second ordre, Math. Ann., 1904, v. 59, no. 1-2, p. 20–76.

10. С.Л. Соболев. О почти периодичности решений волнового уравнения. ДАН СССР, 1945, т. 68, no 8., с. 570-573.

11. P. Grisvard. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Pitman Advanced Publishing Program. Boston - London -Melbourne. 1985.

12. J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 1961, v. 14, p. 577-591

13. Д. Гилбарг, Н. Трудингер. Эллиптические Дифференциальные Уравнения с Частными Производными Второго Порядка. М: Наука. 1989.

14. W. Littman, G. Stampacchia, H.F. Weinberger. Regular points for elliptic equation with discontinuous coeffcients, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1963, v. 17, no. 3, p. 43-77.

15. J. F. Escobar. Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and and eugenvalue estimate, Comm. Pure. Appl. Math., 1990, v. 63, p. 857-883.

16. V.I. Burenkov, E.B. Davies. Spectral stability of the Neumann Laplacian. (English summary), J. Differential Equations, 2002, v. 186, no. 2, p. 485–508.

17. С.Г.Михлин, Лекции по Линейным Интегральным Уравнениям, Физматгиз, 1959.

Место работы авторов

Ю.А. Алхутов:
Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых.
В.Г. Мазья:
1. Department of Mathematical Sciences, M&O Building, University of Liverpool, Liverpool L69 7ZL, UK;
2. Department of Mathematics, Linkoeping University, SE-581 83 Linkoeping, Sweden.