Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации

Волгоградский Государственный Университет

На правах рукописи

УДК 517.95

Ткачев Владимир Геннадьевич

ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

(01.01.01. – математический анализ)

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Волгоград 1998

Оглавление

Глава 0

Введение

А. Общая характеристика работы

По своей проблематике диссертационная работа выполнена на стыке нескольких разделов анализа: теории функций, теории уравнений в частных производных и геометрии "в целом". Основным объектом исследования являются поверхности нулевой средней кривизны (или минимальные подмногообразия) в евклидовом пространстве, а также их обобщение — p-минимальные поверхности. По своим теоретико-функциональным характеристикам поверхности данного класса можно рассматривать как подходящие обобщения комплексно аналитических множеств. Рассматриваемый круг задач и используемые методы большей частью принадлежат теории функций.

Актуальность темы. В исследованиях последних десятилетий была отмечена глубокая связь между классическими проблемами теории функций, теорией решений эллиптических уравнений в частных производных и внешней геометрией римановых многообразий, погруженных в евклидово пространство. Один из основных классов задач относится к минимальным поверхностям и рассматривался в работах С.Н. Бернштейна, Э. Бомбиери, Э. Джусти, Й. Ниче, Р. Оссермана, Л. Саймона, Р. Финна, А.Т. Фоменко, Ю.А. Аминова, А.А. Борисенко, В.М. Миклюкова, И.Х. Сабитова, Е.В. Шикина и других математиков.

В работе [7] Бомбиери, Де Джорджи и Джусти исследовали качественные свойства минимальных поверхностей, относящиеся к известной проблеме Бернштейна, исходя из внутренних свойств таких поверхностей. Основой их рассуждений служило то обстоятельство, что сужением координатных функций погружения и гауссова отображения на минимальную поверхность являются (суб)гармонические функции. Такой подход позволяет рассматривать минимальные поверхности как римановы многообразия, на которых a priori определен запас (суб)гармонических функций, отражающих геометрическую структуру погруженного многообразия. С другой стороны, вопросы существования гармонических и субгармонических функций приводят к задачам, родственным проблеме униформизации римановой поверхности, а также задачам, связанным с поиском подходящих обобщений на римановы многообразия таких теорем классической теории функции, как теоремы сравнения решений эллиптических уравнений, теоремы Лиувилля, Данжуа-Альфорса и др. Решение подобных вопросов тесно переплетается с внутренней геометрией и топологией изучаемого класса многообразий. Такой подход реализуется в работах Л. Альфорса, Ю.Г. Решетняка, А.В. Погорелова, Ш.Т. Яо, И. Холопайнена, С.К. Водопьянова, А.А. Григорьяна, и др.

Значительный в последние годы прогресс теории *двумерных* минимальных поверхностей был связан с тем, что для таких поверхностей существует естественная параметризация в терминах голоморфных функций, называемая представлением Эннепера-Вейерштрасса. С этой точки зрения, многие, подходящим образом переформулированные, вопросы двумерной теории решаются с помощью применения методов классической теории функций. С другой стороны, в работах Й. Ниче, Р. Финна, В.М. Миклюкова был развит метод решения задач двумерной теории, не опирающийся на представление Эннепера-Вейерштрасса и основанный на использовании модульно-емкостной техники и обобщения понятия конформного типа поверхности.

В 1915 г. С.Н. Бернштейн [6] доказал свою знаменитую теорему о минимальных графиках. Именно, если $f(x, y)$ — решение уравнения минимальных поверхностей, определенное во всей плоскости (т.е. *целое* решение), то $f(x, y)$ — линейная функция. Развитие многомерной теории минимальных поверхностей прежде всего было связано с попытками обобщить теорему Бернштейна на случай бо́льших размерностей. В 1968 г. Дж. Саймонзом было доказано, что в своей первоначальной формулировке теорема Бернштейна верна только для значений размерности, меньших 8. В остальных случаях, как отмечается в [**56**], вопрос о тривиальности целых решений должен рассматриваться в более широком классе, например, в классе функций, имеющих полиномиальный рост. Глубокие результаты теории многомерных минимальных подмногообразий в евклидовом и римановых пространствах, базирующиеся на геометрической теории меры, получены в работах Л. Саймона, А.Т. Фоменко, Э. Джусти.

Хорошо известно также, что произвольное комплексное подмногообразие в $\mathbf{C}^n$ является (вообще говоря, локально) минимальным подмногообразием четной вещественной размерности. Специфика данного подкласса минимальных подмногообразий состоит в возможности применения прямых методов теории функций многих комплексных переменных. Изучению комплексно-аналитических множеств в их связи с геометрией посвящены работы Б. Лоусона, Дж. Саймонза, Г. Федерера, Е.М. Чирки, Ш.Т. Яо и др.

Методика исследования. В основе используемого метода лежит устанавливаемая связь вводимых нами понятий проективного и логарифмического объемов для минимальных многообразий с компактным краем. Отметим, что логарифмический объем отвечает за такие геометрические свойства минимального многообразия как скорость рост объема на бесконечности, а также асимптотические конформные характеристики многообразия; важным свойством данной величины является ее устойчивость к локальным изменениям многообразия. Проективный объем, по своей структуре, является величиной, учитывающей интегрально-геометрические свойства погруженного многообразия "в целом". Наряду с введением новых понятий, в работе также широко применяются модульные и емкостные методы, а также геометрический метод сравнения, подходящим образом адаптированные к разрабатываемой тематике. Значительный вклад в разработку модульной техники применительно к теории пространств с конформной и квазиконформной структурой внесли Ф. Геринг, Ю. Вяйсяля, Дж. Дженкинс, О. Мартио, С. Рикман, Б.В. Шабат, П.П. Белинский, В.А. Зорич, П.М. Тамразов, В.В. Асеев, А.В. Сычев.

Научная новизна и практическая значимость. В настоящей работе предлагается новый подход к изучению геометрических и топологических свойств погруженных минимальных подмногообразий произвольной размерности, основанный на введении двух инвариантов — проективного и логарифмического объемов таких подмногообразий; получена равномерная оценка числа концов минимальной поверхности произвольной размерности и коразмерности погружения в терминах некоторых ее интегрально-геометрических средних; установлена ограниченность индекса координатных функций на двумерных минимальных поверхностях произвольной коразмерности. Техника оценок логарифмического объема позволяет решить ряд задач для минимальных подмногообразий с компактным краем (так называемыми концами). Подчеркнем, что логарифмический и проективный объем тесно связаны с ростом объема поверхности на бесконечности; при этом применение первых характеристик позволяют более гибко решать задачи об оценках объема минимальных поверхностей. В частности, мы распространяем известную оценку роста объема минимальных графиков (Бомбиери, Альмгрен, Джусти) на широкий класс минимальных поверхностей с компактным краем, которые не являются глобально минимальными; для графиков полученная нами оценка значительно улучшает уже известные. С помощью введенного нами понятия вектор-потока минимальной трубки решена задача оценки времени существования двумерных минимальных трубок произвольного топологического типа. Указываются другие применения рассмотренных понятий в дифференциально-геометрических вопросах теории многомерных минимальных и p-минимальных поверхностей.

Структура диссертации. Диссертация содержит 162 страниц и состоит из введения и шести глав. Главы разделяются на параграфы и пункты с подчиненной нумерацией. Библиография содержит 105 наименований.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в работах [46]–[48], [62], [72]–[84] и докладывались на российских и международных конференциях: Всесоюзной конференции по геометрии и анализу (Новосибирск, 1989), Всесоюзной математической школе "Теория потенциала"(Киев, 1991), Международной конференции по неевклидовой геометрии (Казань, 1992), Международном симпозиуме по применениям голоморфных функций (Варшава, 1994), Международном математическом конгрессе (Цюрих, 1994), Геометрической конференции Тихоокеанского побережья (Сингапур, 1994), Международной конференции по геометрии в целом (Черкасск, 1995), Международной конференции по дифференциальной геометрии (Будапешт, 1996), Международной конференции по стохастическому и глобальному анализу (Воронеж, 1997), II-й Школе "Алгебра и анализ"(Казань, 1997); а также в разное время – на семинарах по теории функций и дифференциальной геометрии при Харьковском университете (рук. акад. А.В. Погорелов), МГУ (рук. акад. А.Т. Фоменко), Банаховском математическом центре (Варшава), Институте математики им. Стеклова (Москва), Национальном Сингапурском университете (рук. проф. Л. Саймон), Институте математики СО РАН (рук. проф. Ю.Г. Решетняк). Все результаты подробно докладывались на семинаре "Нелинейный анализ"ВолгГУ (рук. проф. В.М. Миклюков).

За цикл работ по теории минимальных поверхностей автору присуждена 1-я премия Межвузовской конференции молодых ученых Волгоградской области (1995).

Охарактеризуем кратко содержание работы.

После того как в параграфе 1 излагаются определения емкости и модуля конденсатора, в § 2 вводится понятие конца (или бесконечно удаленной точки) некомпактного риманова многообразия. Главным отличием вводимого понятия от простых концов по Каратеодори состоит в требовании связности элементов цепей, порождающих конец многообразия. В предложении 1.2 и лемме 1.1 проясняется геометрический смысл данной терминологии.

Дальнейшая часть первой главы посвящена распространению теорем типа Лиувилля, Данжуа-Альфорса для субгармонических функций на общих римановых многообразиях. Метод доказательства основывается на специальных оценках интеграла Дирихле субгармонических функций с использованием понятия взвешенной основной частоты. Последняя характеристика является подходящим обобщением первого собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа-Бельтрами. Емкостная техника широко применялась и применяется в теории уравнений с частными производными и теории функций (см. В.А. Кондратьев [33], Е.М. Ландис [37], В.Г. Мазья [41], Решетняк [61] и цитированную там литературу). В случае евклидова пространства данный подход был реализован в работах В.М. Миклюкова [42], [44]. В настоящей главе мы следуем методу, развиваемому в совместной работе [48].

В §§ 3,4 изучаются свойства асимптотических трактов субгармонических функций на римановых многообразиях. Из доказываемых там результатов упомянем обобщение теоремы Ченга и Яо о нижней оценке первого собственного значения α-оператора Лапласа. В § 6 мы даем точную нижнюю оценку первого собственного значения на многообразиях с предписанной средней кривизной, которая является точной для минимальных подмногообразий.

В главе 2 вводятся понятия проективного и логарифмического объема концов минимальных поверхностей. Логарифмический объем является аналогом плотности поверхности в окрестности бесконечно удаленной точки и относится к числу характеристик внутренней геометрии поверхности. В определении же проективного объема участвуют параметры внешней геометрии поверхности. Показывается, что оба понятия являются инвариантами минимальной поверхности относительно группы гомотетий и движений объемлющего пространства. Основой для дальнейших приложений служит устанавливаемое равенство этих характеристик для полных минимальных поверхностей. В этой же главе приведены примеры вычисления проективного объема для некоторых классов минимальных поверхностей. Упомянем также свойство мёбиусовой инвариантности логарифмического объема. Мы не акцентируем данное свойство в тексте диссертации, так как в настоящий момент мы не можем получить достаточно глубокие следствия из этого наблюдения.

В главе 3 изучаются минимальные подмногообразия конечного логарифмического объема. В частности, показывается, что такие многообразия всегда имеют конечное число концов. С другой стороны, разрабатываемая в этой главе техника оценок проективного объема в терминах различных интегрально-геометрических характеристик поверхности позволяет связывать количество концов минимальной поверхности и ее внешне-геометрические характеристики.

Заключительная часть главы 3 посвящена приложению основных результатов первой главы к оценкам индекса координатных функций на двумерных минимальных поверхностях конечного проективного объема. Доказаны оценки числа "горбушек которые можно срезать с двумерной минимальной поверхности произвольной коразмерности. Как демонстрацию действенности полученных результатов, мы приводим новую версию доказательства теоремы Бернштейна, а также даем оценки топологических характеристик поверхности в терминах кратности проекции на двумерные плоскости.

В главе 4 на основе применения модульной техники и вводимого автором инварианта минимальных трубок (вектор-потока) решается задача о времени существования двумерной минимальной трубчатой поверхности. Постановка такой задачи в общем виде была сделана в работе Ниче [53]; с другой стороны, актуальность данной задачи мотивируется интерпретацией минимальных трубок как евклидовых аналогов релятивистских струн. Вектор-поток трубки в этом случае соответствует импульсу струны. Мы показываем, что для трубок конечной интегральной кривизны время существования конечно при условии ненулевого угла наклона вектор-потока к оси времени. Условие конечности интегральной кривизны существенно, как показывают примеры, построенные в параграфе 3. В параграфе 4 мы получаем оценку на величину гауссова образа сечений многомерных минимальных трубок. Как приложение, мы даем другое доказательство предыдущего результата, не опирающееся на представление Эннепера-Вейерштрасса.

В главе 5 мы вводим и исследуем класс p-минимальных поверхностей, т.е. поверхностей, у которых одна из координатных функций является p-гармонической во внутренней метрике поверхности. Естественность данного класса основывается на следующих соображениях. Во-первых, мы доказываем (теорема 5.2), что гауссово отображение двумерных p-минимальных поверхностей является $(p-1)$-квазиконформным (в частности, при $p=2$ получаем известное свойство конформности гауссова отображения минимальных поверхностей). В этом смысле вводимый класс конструктивно описывает поверхности с квазиконформным гауссовым отображением, которые ранее изучались в работах Р. Оссермана, Л. Саймона, В.М. Миклюкова, В.М. Кессельмана, хотя конкретные примеры таких поверхностей никогда не рассматривались.

С другой стороны, некоторые факты из геометрии "в целом"минимальных поверхностей могут быть продолжены на класс p-минимальных поверхностей. В этом русле мы получаем ряд новых результатов и для минимальных поверхностей. Характерная особенность доказываемых нами результатов состоит в том, что справедливость утверждение зависит не от величины параметра p, а от дроби $\beta = \frac{n-1}{p-1}$. Основной прием, используемый в этой главе — это геометрический принцип сравнения. С помощью этого же метода в параграфе 6 мы доказываем обобщение теоремы Йоргенсона-Калаби-Погорелова о выпуклых решениях нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с квазипостоянными коэффициентами.

Последняя глава посвящена звездным минимальным поверхностям. Поверхности данного класса обладают конечным проективным объемом, и, используя результаты предыдущих глав, мы получаем, как следствие, утверждения, характеризующие их геометрическое и асимптотическое строение. Отметим, что между звездными минимальными поверхностями и активно изучаемыми в последнее время минимальными графиками существует глубокая взаимосвязь. В частности, в процессе исследования вопроса существования нетривиальных звездных минимальных поверхностей, асимптотически вписанных в конусы Саймонза, мы показываем, что критическая размерность существования звездных минимальных поверхностей, совпадает с аналогичной величиной для минимальных графиков. Одним из сложных в теории минимальных графиков является вопрос о справедливости гипотезы полиномиального роста целых решений уравнения минимальных поверхностей. Недавние результаты Саймона относительно эквивариантных графиков [67], [68] дали точную нижнюю грань показателя роста целых решений. Мы показываем, что скорость выхода на асимптотический конус построенных нами примеров отличаются от последней величины на целочисленную константу.

Сделаем замечания относительно обозначений, принятых в работе. Через M мы обозначаем некоторое p-мерное ориентированное некомпактное многообразие; через $\mathscr{M} = (M; x)$ – поверхность, задаваемую C^2-гладким погружением $x : M \to \mathbf{R}^n$. Через $M_a(r)$ обозначена часть поверхности $\mathscr{M}$, расположенная внутри шара $\{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| < r\}$; $M_a(r; R) = M_a(R) \setminus \overline{M_a(r)}$. Символами ∇, div и Δ обозначены операторы ковариантной производной, дивергенции и внутренний лапласиан. Символами cap_p и mod_p обозначаются конформные емкость и модуль конденсатора на поверхности. Интегрирование по многообразию рассматривается в смысле индуцированной меры Лебега; при этом обозначение дифференциала мы не используем, если это не приводит к двусмысленности. Через ω_n и Ω_n мы обозначаем меры Лебега сферы и шара единичного радиуса в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Пользуясь случаем, автор хотел бы выразить глубокую благодарность за полезные обсуждения и замечания по теме настоящей работы В.М. Миклюкову, А.Г. Лосеву и своим коллегам по семинару "Нелинейный анализ".

B. Результаты, выносимые на защиту.

Все утверждения сохраняют принятую в основном тексте нумерацию.

Глава 1 "Оценки интеграла Дирихле на римановых многообразиях". а) Пусть M — многообразие с возможно непустым компактным краем ∂M. Семейство непустых связных открытых подмножеств $\{\mathscr{O}_i\}$ с компактными границами называется *цепью*, если

(i) $\overline{\mathscr{O}_{i+1}} \subset \mathscr{O}_i$ и $\overline{\mathscr{O}_i} \bigcap \partial M = \varnothing$;

(ii) пересечение замыканий $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\mathscr{O}_i}$ пусто.

Пусть $\{F_i\}$ — исчерпание многообразия M семейством компактных множеств $F_i \subset \mathrm{int} F_{i+1}$, $\bigcup_i F_i = M$. Тогда показывается, что многообразие M имеет конечное число концов тогда и только тогда, когда для любого исчерпания конечна величина $\sup_i q(F_i)$, при этом

$$\ell(M) = \sup_i q(F_i) = \lim_{i\to\infty} q(F_i),$$

где $\ell(M)$ — число концов многообразия M, $q(F)$ означает число различных компонент связности множества $M \setminus F$, имеющих некомпактное замыкание.

б) Пусть $h(m) : M \to (0; h_0)$ — непрерывная функция класса $C^\infty(M \setminus \Sigma_0)$, где через Σ_0 обозначено множество нулей $h(m)$. Введем для данного $t \in (0; h_0)$

$$B_h(t) = \{m \in M : h(m) < t\}, \qquad \Sigma_h(t) = \{m \in M : h(m) = t\}.$$

Функция $h(m)$ называется *функцией исчерпания* на M, если $B_h(t)$ — предкомпакт для любого $t \in (0; h_0)$, $|\nabla h(m)| > 0$ почти всюду в M и $\lim_{k\to\infty} h(m_k) = h_0$ вдоль любой последовательности $m_k \in M$, не имеющей точек накопления на $M \cup \partial M$.

Пусть $f(m)$ — некоторая непрерывная функция, отличная от тождественной постоянной, удовлетворяющая принципу максимума, то есть для любого открытого множества $U \subset M$ с компактным замыканием выполнено

$$\max_{m\in\partial U} f(m) = \max_{m\in\overline{U}} f(m).$$

Через $\mathscr{Z}(f)$ обозначим множество точек m, для которых $\nabla f(m) = 0$.

Назовем семейство областей $\{D(\tau) : \tau \in (\alpha, \beta)\}$ на M *асимптотическим трактом* функции $f(m)$ если: (i) для любого $\tau \in (\alpha, \beta)$ область $D(\tau)$ есть непустая компонента множества $\{m \in M : f(m) > \tau\}$; (ii) $D(\tau_1) \supset D(\tau_2)$ для всех $\tau_1 < \tau_2$ из интервала (α, β); (iii) или $\beta = +\infty$, или для некоторого $\tau \in (\alpha, \beta)$

$$D(\tau) \cap \{m \in M : f(m) > \beta\} = \emptyset.$$

Из определения следует, что каждая область $D(\tau)$ имеет некомпактное замыкание.

Будем говорить, что два асимптотических тракта различны, если существуют такие $\tau_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$ и $\tau_2 \in (\alpha_2, \beta_2)$, что $D(\tau_1) \cap D(\tau_2) = \emptyset$.

Пусть $h(m)$ — некоторая функция исчерпания на M и $\{D(\tau) : \tau \in (\alpha, \beta)\}$ — асимптотический тракт $f(m)$. Тракт $\{D(\tau)\}$ называется *регулярным*, если существует $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$ и система непересекающихся интервалов $\triangle_k \subset (0, h_0)$, сходящаяся к h_0 $(h_0 \in \cup_k \overline{\triangle_k})$ такая, что множество $D(\tau_0) \cap \Sigma_h(t)$ не содержит ни одного цикла (компактного подмногообразия без края) для всех значений $t \in \cup_k \Delta_k$.

Назовем компактное множество U простым, если оно является конечной системой попарно непересекающихся $(p-1)$-мерных компактных подмногообразий $\mathscr{O}_j$ в Σ с краем или без. Заметим, что h-сфера $\Sigma_h(t)$ является простой для любого регулярного значения t функции исчерпания $h(m)$.

Пусть U — простое множество, состоящее только из компонент $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \dots, \mathscr{O}_k$ с непустым краем и θ — положительная функция на U. Будем говорить, что липшицева функция φ *допустима* для U, или $\varphi \wedge U$, если для каждой компоненты $\mathscr{O}_j$ выполнено равенство $\varphi|_{\partial \mathscr{O}_j} = 0$. В этом случае величина

$$\lambda_{\alpha,\theta}(U) = \inf_{\varphi \wedge U} \left[\frac{\int_U |\nabla \varphi|^\alpha \theta^{-1}}{\int_U |\varphi|^\alpha \theta^{\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{1}$$

называется *(взвешенной) фундаментальной α-частотой* простого множества U с весовой функцией θ. В случае, когда простое множество U содержит хотя бы одну замкнутую компоненту с пустым краем, полагаем $\lambda_{\alpha,\theta}(U) = 0$.

Наиболее подходящей весовой функцей для многообразия с функцией исчерпания $h(m)$ является функция $\theta(m)$ равная сужению модуля градиента $|\nabla h(m)|$ на $\Sigma(\tau)$. Для краткости будем обозначать $\lambda_{\alpha,h}(\mathscr{O})$ вместо $\lambda_{\alpha,|\nabla h|}(\mathscr{O})$.

Для данного открытого подмножества $\mathscr{O} \subset \Sigma$ и целого $N \geq 1$ полагаем

$$\lambda(\mathscr{O}, N) \equiv \lambda_{\alpha,\theta}(\mathscr{O}; N) = \inf \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{\alpha,\theta}(\mathscr{O}_i),$$

где точная нижняя грань берется по всем системам $\{\mathscr{O}_i\}_{i=1}^N$, состоящих из N попарно неналегающих простых множеств $\mathscr{O}_i \subset \mathscr{O}$ с непустым краем. Величина $\lambda(\mathscr{O}, N)$ называется *N-средним фундаментальной частоты* множества $\mathscr{O}$.

Следующее утверждение обобщает теорему Ченга и Яо [101].

Лемма 1.4. *Пусть $\alpha > 1$ и $f(m) > 0$ — функция класса $C^2(U)$ такая, что $\mathscr{Z}(f) = \emptyset$. Тогда*

$$(\lambda_{\alpha,\theta}(U))^\alpha \geq \inf_{m \in U} \left[-\frac{1}{(f\theta)^{\alpha-1}} \operatorname{div} \frac{|\nabla f|^{\alpha-2} \nabla f}{\theta} \right]. \tag{2}$$

Здесь ∇ и div рассматриваются по отношению к внутренней метрике U.

в) Пусть $f(m)$ — α-субгармоническая функция на M. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.1. *Пусть $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\tau_0)$ — регулярная компонента асимптотического тракта $\{\mathscr{D}(\tau)\}$ функции f. Тогда для любых t_1, t_2 из $(h(\mathscr{D}), h_0)$*

$$\int_{\mathscr{D} \cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \leq \left(\int_{\mathscr{D} \cap B_h(t_2)} |\nabla f|^\alpha \right) \exp \left(-c(\alpha) \int\limits_{(t_1,t_2) \cap \Delta} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D}) dt \right).$$

Сформулируем как следствия из данного результата следующие теоремы типа Лиувилля.

Следствие 1.2. *Пусть M — многообразие с функцией исчерпания $h(m)$ такое, что для некоторого целого $N \geq 1$ и $h_1 < h_0$ выполнено*

$$\int\limits_{h_1}^{h_0} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t); N)\, dt = +\infty. \tag{3}$$

Тогда каждая α-субгармоническая функция $f(m)$ с конечным интегралом Дирихле

$$\int\limits_M |\nabla f|^\alpha < \infty$$

имеет не более $(N-1)$ различных регулярных асимптотических трактов.

Следствие 1.3. *Пусть M — многообразие с функцией исчерпания $h(m)$ такое, что*

$$\int\limits_{h_1}^{h_0} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t); 2) dt = +\infty. \tag{4}$$

Тогда единственными α-гармоническими функциями на M с конечными интегралами Дирихле являются константы.

Подчеркнем, что существенным отличием приводимых утверждений от аналогичных результатов типа теоремы Лиувилля является отсутствие требования полноты многообразия. Мы строим пример, показывающий, что условия (3), (4) не влекут полноту многообразия.

Следующая теорема является аналогом теоремы Данжуа-Альфорса для римановых многообразий и применяется далее для оценок индекса гармонических функций на минимальных поверхностях.

Теорема 1.2. *Пусть $f(m)$ — α-субгармоническая функция и для некоторого целого $N \geq 1$ выполнено*

$$\liminf_{t,\xi \to h_0} M^{\alpha}(\xi) \operatorname{cap}_{\alpha,h}(t,\xi) \exp\left(-c(\alpha)\int\limits_{t_1}^{t} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t), N)dt\right) = 0,$$

где $c(\alpha)$ некоторая постоянная, $M(t) = \max_{\Sigma_h(t)} f^+(m)$; $t_1 > 0$ фиксировано и t, ξ стремятся к h_0, причем $t_1 < t < \xi$. Тогда $f(m)$ имеет не более $(N-1)$ различных регулярных асимптотических трактов.

г) Пусть $\mathscr{D}$ — открытая подобласть в M и a — точка в $\mathbf{R}^N$. Положим

$$k_a(\mathscr{D}) = \inf_{m\in\mathscr{D}} \langle x(m) - a, H(m)\rangle,$$

где H — вектор средней кривизны поверхности $(M;x)$. В частности, если $\mathscr{M}$ — минимальная поверхность, то $k_a(\mathscr{D}) = 0$. Обозначим через $\lambda(\mathscr{D})$ первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа подмножества $\mathscr{D}$.

Обозначим через a и $\rho(\mathscr{D})$ центр и радиус шара в $\mathbf{R}^n$, описанного около $x(\mathscr{D})$. Заметим, что в силу изометричности погружения, справедливо неравенство $\rho(\mathscr{D}) \leq d(\mathscr{D})$, где через $d(\mathscr{D})$ обозначен радиус наименьшего геодезического шара, содержащего $\mathscr{D}$.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная поверхность в $\mathbf{R}^N$ и $\mathscr{D} \subset M$ — произвольное открытое множество такое, что $\rho(\mathscr{D}) < \infty$ и $k_a(\mathscr{D}) \geq -(p-1)$, где a — центр шара, описанного около $\mathscr{D}$. Тогда имеет место оценка*

$$\lambda(\mathscr{D}) \geq \frac{\mu(\nu)}{\rho^2(\mathscr{D})}, \tag{5}$$

где $\nu = p + [k_a(\mathscr{D})]$, $\mu(\nu)$ — основная частота единичного ν-мерного евклидового шара и квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Отметим, что, по сравнению с известными результатами [96] и [35], наша оценка дается в терминах внешней геометрии и является более точной. С другой стороны, из следующего утверждения видно, что в случае минимальных подмногообразий данная выше оценка является неулучшаемой.

Следствие 1.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^N$. Тогда для любого открытого множества $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}$*

$$\lambda(\mathscr{D}) \geq \frac{\mu(p)}{\rho^2(\mathscr{D})}.$$

При этом равенство достигается лишь в случае p-мерной плоскости в $\mathbf{R}^N$, проходящей через центр шара, описанного около $\mathscr{D}$.

Глава 2 "Проективный объем минимального подмногообразия". а) Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность и $B_a(R) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x-a| < R\}$ — открытый шар радиуса $R > d_{\mathscr{M}}(a)$, где

$$d_{\mathscr{M}}(a) = \max_{m\in M} |x(m) - a|. \tag{6}$$

Тогда $x(\partial M) \subset B_a(R)$. Зафиксируем $r > d_{\mathscr{M}}(a)$ и положим

$$V_p(\mathscr{M}; a) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\ln R} \int\limits_{M_a(r,R)} \frac{1}{|x(m) - a|^p}. \tag{7}$$

Величина $V_p(\mathscr{M}; a)$ называется *логарифмическим объемом* поверхности $\mathscr{M}$ относительно точки a. Подчеркнем, что в силу своего определения, величина $V_p(\mathscr{M}; a)$ не зависит от выбора r.

Обозначим через $\alpha_m(v)$ угол между вектором $v \in \mathbf{R}^n$ и касательным пространством $T_m M$. Следующий, вообще говоря, несобственный интеграл

$$Q_p(\mathscr{M}; a) = \int_M \frac{\sin^2 \alpha_m(x(m) - a)}{|x(m) - a|^p} \tag{8}$$

называется *проективным объемом* поверхности $\mathscr{M}$ относительно точки a.

Имеют место

Теорема 2.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ с возможно непустым краем ∂M. Тогда величина логарифмического объема $V_p(\mathscr{M}, a)$ не зависит от выбора точки $a \in \mathbf{R}^n$ и, более того, верхней предел (7) может быть заменен на обычный предел.*

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ с возможно непустым краем ∂M. Тогда для любого $a \notin x(M)$ выполнено*

$$V_p(\mathscr{M}, a) = p\, Q_p(\mathscr{M}, a) + c(\partial M; a), \tag{9}$$

где $c(\partial M; a)$ — конечная величина такая, что $c(\varnothing; a) = 0$.

Из доказанных теорем вытекает в частности следующая важная связь между логарифмическим и проективным объемами, имеющая близкий аналог в случае аналитических комплексных множеств [102, Лемма 3.6].

Следствие 2.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края и $a \notin x(M)$. Тогда обе величины $Q_p(\mathscr{M}, a)$ и $V_p(\mathscr{M}, a)$ не зависят от выбора a и выполнено*

$$V_p(\mathscr{M}, a) = p\, Q_p(\mathscr{M}, a). \tag{10}$$

Заметим, что условие минимальности для поверхности $\mathscr{M}$ является инвариантом относительно группы Π_n параллельных переносов и гомотетий объемлющего евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. В этом смысле предыдущая теорема показывает, что как проективный объем $Q_p(\mathscr{M}, a)$, так и логарифмический объем $V_p(\mathscr{M}, a)$ суть инварианты минимальных поверхностей относительно подгруппы параллельных переносов и вращений в Π_n. Что касается инвариантности характеристик $Q_p(\mathscr{M}, a)$ и $V_p(\mathscr{M}, a)$, относительно подгруппы гомотетий, то это свойство следует из их определения и формулы замены переменной.

В дальнейшем мы опускаем параметр a в обозначении логарифмического объема, а также в обозначении проективного объема, если в последнем случае $a \notin \mathscr{M}$:

$$V_p(\mathscr{M}) \equiv V_p(\mathscr{M}, a); \qquad Q_p(\mathscr{M}) \equiv Q_p(\mathscr{M}, a).$$

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда для любой точки $a \in x(M)$*

$$Q_p(\mathscr{M}, a) = \frac{1}{p}\big(V_p(\mathscr{M}, a) - \omega_p \cdot a\#\mathscr{M}\big), \tag{11}$$

где $a\#\mathscr{M}$ — алгебраическая кратность погружения x (т.е. полное число прообразов $x^{-1}(a)$ в M).

Будем говорить, что p-мерная минимальная поверхность является *тривиальной*, если она совпадает с некоторой p-мерной плоскостью. Имеет место

Следствие 2.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная нетривиальная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда*

$$V_p(\mathscr{M}, a) > \omega_p. \tag{12}$$

Следующее утверждение связывает понятие проективного объема с конформными инвариантами поверхности.

Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная минимальная поверхность конечного проективного объема. Тогда $\mathscr{M}$ имеет параболический конформный тип и, для достаточно большого r, имеет место оценка

$$\limsup_{R\to\infty} \operatorname{mod}_p \Gamma(r;R) \cdot \ln^{p-1}(R/r) \le V_p(\mathscr{M}),$$

где $\Gamma(r;R)$ — семейство кривых в $M_0(r;R)$, соединяющие граничные компоненты $\partial M_0(r;R)$.

б) В следующих случаях проективный объем может быть вычислен явно.

(1) Пусть $\mathscr{M}$ — внутренне полная двумерная минимальная поверхность конечной тотальной кривизны $G(\mathscr{M}) = \int_{\mathscr{M}} |K(m)|\, dm$, где $K(m)$ — гауссова кривизна $\mathscr{M}$. Тогда проективный объем $\mathscr{M}$ равен: $Q_2(\mathscr{M}) = \frac{1}{4}G(\mathscr{M})$. В частности, как следует из результатов Оссермана, $Q_2(\mathscr{M})$ является целым кратным π. Более того, в этом случае $Q_2(\mathscr{M}) = \pi\ell(\mathscr{M})$, где $\ell(\mathscr{M})$ — число концов $\mathscr{M}$.

(2) Проективный объем $\mathbf{R}^p$ равен $Q_p(\mathbf{R}^p) = \Omega_p$, где Ω_p — p-мерная мера Лебега единичного p-мерного шара в $\mathbf{R}^p$.

(3) Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная минимальная поверхность конечного проективного объема $V_p(\mathscr{M})$. Тогда $\mathscr{S} \equiv \mathscr{M} \times \mathbf{R}^k$ — также является минимальной поверхностью с конечным проективным объемом и

$$\frac{Q_{p+k}(\mathscr{S})}{\Omega_{p+k}} = \frac{Q_p(\mathscr{M})}{\Omega_p}.$$

в) Далее мы формулируем утверждения, связывающие число концов минимальной поверхности, ее проективный объем и интегрально-геометрические характеристики.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная связная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ с краем ∂M или без, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов $\ell(\mathscr{M})$ и выполнено*

$$\ell(\mathscr{M}) \le \frac{2^p}{\omega_p} V_p(\mathscr{M}).$$

Как следствие, получается соответствующая оценка числа концов в терминах проективного объема.

г) Будем говорить, что внешне полная n-мерная поверхность $\mathscr{M}$, заданная в $\mathbf{R}^{n+1}$, является s-графиком относительно некоторой гиперплоскости Π, если выполнены следующие условия:

(1) отображение проекции $\mathrm{Pr} : \mathscr{M} \to \Pi$ собственное, т.е. прообраз $(\mathrm{Pr} \circ x)^{-1}(F)$ любого компакта $F \subset \Pi$ является компактом в M;

(2) количество точек-прообразов $(\mathrm{Pr} \circ x)^{-1}(a)$ для любой точки $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ не превосходит s.

Нетрудно видеть, что при $s = 1$, в силу собственности погружения, понятие s-графика совпадает с обычным определением графика функции, заданной над Π.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — внешне полная минимальная поверхность, возможно с непустым компактным краем, являющаяся s-графиком. Тогда*

$$V_n(\mathscr{M}) \le s k_n\, \omega_n, \tag{13}$$

где

$$k_n = \frac{1 + a_n^2(n-1)^2}{2a_n(n-1)}, \qquad a_n = \frac{\pi\Gamma(n-1)}{2^{n-1}\Gamma^2(n/2)} \tag{14}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Следствие 3.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — n-мерная непараметрическая минимальная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$ (т.е. $s = 1$). Тогда*

$$1 < \frac{V_n(\mathscr{M})}{\omega_n} \le k_n. \tag{15}$$

Проиллюстрируем полученную оценку следующей таблицей:

Таблица 1.

n	k_n
2	1.1037
3	1.2500
4	1.3903
5	1.5208
6	1.6424
7	1.7563
8	1.8636
9	1.9653
10	2.0621

Заметим, что при $n \ge 8$ существуют нетривиальные минимальные графики и, таким образом, оценка (15) становится содержательной даже для минимальных графиков. Сравнение с известными результатами Алларда [1], Бомбьери и Джусти [7] показывает, что доказанная нами оценка проективного объема дает скорость роста объема для минимальных графиков, в значительной степени улучшающую имеющиеся оценки в этих работах. Более того, методы, используемые в упомянутых работах, работают только в предположении, что поверхность не имеет края, а кратность проекции поверхности в точности равна 1. Явные вычисления даже для двумерных минимальных поверхностей коразмерности, большей 1, заданных в непараметрической форме, показывают, что проективный объем может быть бесконечным.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — минимальная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$, являющаяся s-графиком относительно некоторой гиперплоскости. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов $\ell(\mathscr{M})$ и*

$$\ell(M) \le 2^n k_n s, \tag{16}$$

где k_n — постоянная из (14).

д) Предположим теперь, что $\mathscr{M}$ является гиперповерхностью в $\mathbf{R}^n$. Тогда, фиксируя точку $b \in \mathbf{R}^n \setminus x(M)$, можно ввести *считающую функцию* $\mathscr{N}(e,b)$ для кратности радиальной проекции относительно b, полагая для каждого направления $e \in \mathbf{R}^n$, $|e| = 1$,

$$\mathscr{N}(e,b) = \sum_{a \in L_b(e)} a\#\mathscr{M} \ \equiv \#L_b(e) \cap x(M),$$

где $L_b(e)$ — луч с началом в b и направлением e и $\#L_b(e) \cap x(M)$ означает алгебраическое число точек пересечения луча $L_b(e)$ с поверхностью $\mathscr{M}$. Число $\mathscr{N}(e,b)$ может быть также интерпретировано как полная кратность центральной проекции

$$\pi_b : \ \mathscr{M} \to S^{n-1}, \quad \pi_b(y) = \frac{y-b}{|y-b|}, \tag{17}$$

в точке e.

Пусть теперь $\operatorname{codim}\mathscr{M} > 1$. Тогда образ $\mathscr{M}$ при проекции (17) имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру на S^{n-1} и второе определение величины $\mathscr{N}(e,b)$ несодержательно. Мы приводим приложение первого определения к случаю произвольной коразмерности.

Пусть $G_n^p(b)$ — грассманово многообразие всех неориентированных $(n-p)$-мерных линейных многообразий (далее — плоскостей) γ, проходящих через b. Тогда $G_n^p(b)$ может быть оснащено единственной мерой Хаара $d\gamma$, которая инвариантна относительно действия группы движений, сохраняющих b, нормализованной условием

$$\int\limits_{G_n^p(b)} d\gamma \ = \ 1.$$

Пусть $R > 0$. Тогда для $d\gamma$-почти всех плоскостей $\gamma \in G_n^p(b)$ множество прообразов $x^{-1}(x(M) \cap \gamma \cap B_b(R))$ дискретно. Обозначим через $\mathscr{N}(b,\gamma;R)$ мощность соответствующего множества. Величина

$$\mathscr{N}(b;R) = \int\limits_{G_n^p(b)} \mathscr{N}(b,\gamma;R) d\gamma$$

может быть интерпретирована как средняя кратность пересечений $(n-p)$-мерных плоскостей с частью $\mathscr{M}$, удаленной от b не далее, чем на R. Ясно, что $\mathscr{N}(b;R)$ является неубывающей функцией аргумента R и, таким образом, существует конечный или бесконечный предел

$$\mathscr{N}(b) = \lim_{R \to \infty} \mathscr{N}(b;R).$$

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная собственно погруженная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края и $b \notin \mathscr{M}$. Тогда*

$$Q_p(\mathscr{M}) \le \frac{1}{2}\mathscr{N}(b)\omega_{p+1}, \tag{18}$$

где ω_{p+1} — p-мерная лебегова мера единичной сферы S^p.

Следствие 3.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно погруженная p-мерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края. Предположим, что для некоторой точки $b \in \mathbf{R}^n$ мощность множества точек пересечения (с учетом кратности) любой плоскости $\gamma \in G^p_n(b)$ и $x(M)$ не превышает k. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов и*

$$\ell(M) \le kc_p,$$

где

$$c_p = \frac{2^{p-1}p\omega_{p+1}}{\omega_p} = 2^{p-1}(p+1)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{p+3}{2}\right) \tag{19}$$

и Γ — гамма-функция Эйлера.

Следствие 3.5. *Пусть $\mathscr{M}$ — звездная p-мерная минимальная гиперповерхность. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов $\ell(M)$ и*

$$\ell(M) \le 2c_p,$$

где постоянная c_p из (135).

e) Пусть e — регулярное направление и Π_1, Π_2 — некоторые гиперплоскости, ортогональные e. Обозначим через $N(\Pi_1;\Pi_2)$ число компонент связности дополнения $\mathscr{M} \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, лежащих вне параллельного слоя с границей $\Pi_1 \cup \Pi_2$.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная собственно погруженная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ конечного логарифмического объема $V_2(\mathscr{M})$. Пусть e — регулярное направление. Тогда для любой пары гиперплоскостей Π_1 и Π_2 ортогональных e выполнено*

$$N(\Pi_1;\Pi_2) \ \le \ \frac{V_2(\mathscr{M})}{\pi}. \tag{20}$$

Далее мы демонстрируем применения неравенства (20) для получения верхней оценки индекса Морса координатных функций двумерных минимальных поверхностей конечного топологического типа. Последнее означает, что $\mathscr{M}$ может быть реализована собственным погружением некоторого компактного двумерного многообразия M конечного рода g с конечным числом ℓ удаленных точек. В нашей терминологии эти точки соответствуют концам поверхности $\mathscr{M}$.

Пусть $f(m)$ — некоторая функция, гармоническая на M. Следуя [51], определим *индекс* $f(m)$ в критической точке $m_0 \subset \mathscr{Z}(f)$ как целое положительное число

$$\operatorname{ind}(m_0) = \frac{\sigma}{2} - 1,$$

где σ — число континуумов множества: $\{m \in M : f(m) = f(m_0), m \ne m_0\}$ и m достаточно близко к m_0. Как показано в [51], приведенное определение корректно и $\operatorname{ind}(m_0) > 0$, если f не является постоянной.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная собственно погруженная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ конечного топологического типа, e — регулярное направление и x_1 — ассоциированная с ним координатная функция. Если $V_2(\mathscr{M}) < +\infty$, то множество критических точек $\{a_j\}$ функции $x_1(m)$ конечно и выполнено неравенство*

$$\sum_j \operatorname{ind}(a_j) \le \frac{V_2(\mathscr{M})}{\pi} - \chi(M),$$

где $\chi(M)$ — Эйлерова характеристика поверхности M и суммирование производится по всем критическим точкам.

Данный результат обобщает имеющийся в [43], где рассмотрен случай когда M гомеоморфно сфере с ν выброшенными точками.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathscr{M}$ — минимальный s-график, полученный собственным погружением некоторой компактной римановой поверхности рода g с l выброшенными точками. Если найдется регулярное направление e, лежащее в гауссовом образе $\sigma(\mathscr{M})$ и имеющее алгебраическую кратность m, то выполнено неравенство*

$$sk_2 \ge 2 - 2g - l + m, \tag{21}$$

где $k_2 = 1.1037$.

Заметим, что как следствие последнего неравенства получается новая версия доказательства теоремы Бернштейна.

Глава "Время существования минимальных трубок". а) p-мерная поверхность $\mathscr{M} = (M, X)$ заданная C^2-погружением $X : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ называется *трубкой* (или *трубчатой поверхностью*) с интервалом существования $\tau(\mathscr{M}) \subset Ox_{n+1}$, если

(i) для любого $\tau \in \tau(\mathscr{M})$ сечения $\Sigma_\tau = f(\mathscr{M}) \cap \Pi_\tau$ гиперплоскостями $\Pi_\tau = \{x \in \mathbf{R}^{n+1}_1 : x_{n+1} = \tau\}$ — непустые компактные множества;

(ii) для любых $\tau', \tau'' \in \tau(\mathscr{M})$ порция $\mathscr{M}$ расположенная между двумя различными гиперплоскостями $\Pi_{\tau'}$ и $\Pi_{\tau''}$ является также компактным множеством. В этом случае прямая Ox_{n+1} будет называться *осью* трубки $\mathscr{M}$.

Длина $|\tau(\mathscr{M})|$ интервала проекции называется *временем существования* трубки. В случае, когда $|\tau(\mathscr{M})| = +\infty$, будем называть трубку *бесконечной*. При этом a priori допускается, что сам интервал существования такой трубки может быть лучом. Если $|\tau(\mathscr{M})| < +\infty$ и $\mathscr{M}$ не является частью никакой бесконечной трубки, то $\mathscr{M}$ называется *конечной* трубкой.

Пусть $e^\top \equiv e^\top(m)$ означает ортогональную проекцию вектора $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ на касательное пространство к поверхности $\mathscr{M}$ в точке m и $\tau \in \tau(\mathscr{M})$ — регулярное значение координатной функции $u_{n+1}(m)$ (то есть $e^\top_{n+1} \ne 0$). Множество Σ_τ распадается в конечный набор компактных $(p-1)$-мерных подмногообразий $\mathscr{M}$ без края, оснащенных полем внутренних единичных нормалей $\nu = e^\top_{n+1}/|e^\top_{n+1}|$, ориентированных в направлении e_{n+1}.

Вектор-потоком $J(\mathscr{M}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ минимальной трубки $\mathscr{M}$ называется вектор с координатами

$$J_k = \int\limits_{\Sigma_\tau} \langle e^\top_k, \nu \rangle, \qquad 1 \le k \le n+1.$$

Через $\alpha(\mathscr{M})$ обозначим угол между вектором $J(\mathscr{M})$ и вектором e_{n+1}.

Основной результат главы 4 заключен в следующем достаточном признаке конечности величины $\tau(\mathscr{M})$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная минимальная трубка произвольного топологического типа в $\mathbf{R}^3$ с вектор-потоком $J(\mathscr{M})$. Тогда если абсолютная интегральная гауссова кривизна $G(\mathscr{M})$ конечна и $\alpha(\mathscr{M}) > 0$, то время существования $|\tau(\mathscr{M})|$ поверхности $\mathscr{M}$ конечно и*

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq \frac{G(\mathscr{M})\|J(\mathscr{M})\| \cos\alpha(\mathscr{M})}{16\, \alpha^2(\mathscr{M})}. \tag{22}$$

Как следствие, для трубок с s-листным гауссовым отображением, получаем оценку

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq \frac{\pi s\|J(\mathscr{M})\| \cos\alpha(\mathscr{M})}{4\, \alpha^2(\mathscr{M})}.$$

Заметим, что использование полной кривизны дает более гибкий подход, чем использование кратности гауссова отображения. Действительно, конечность интегральной гауссовой кривизны a priori не влечет конечности кратности самого гауссова отображения. Отметим также, что в случае трубок бесконечного времени существования и ненулевого угла наклона вектор-потока к оси времени неравенство (22) можно проинтерпретировать как равномерную линейную оценку снизу на интегральную гауссову кривизну любой порции трубки, заключенной в параллельном слое в терминах ширины этого слоя.

Наконец, важно также подчеркнуть, что в отличие от большинства работ, касающихся минимальных поверхностей конечной интегральной кривизны, мы не предполагаем внутренней полноты поверхности. Более того, как следует из результатов Миикса и Фанга [87], двумерная трубка с конечным временем существования и конечной интегральной кривизной не может быть (внутренне) полной поверхностью.

Пример. Рассмотрим голоморфную функцию

$$g_\lambda(z) = z \exp \lambda(z + \frac{1}{z}),$$

где $\lambda \geq 0$ — некоторое вещественное число. Пусть $\mathscr{M}_\lambda$ — минимальная двусвязная трубка, полученная в результате представления Эннепера-Вейерштрасса с функцией $g_\lambda(z)$. Тогда $\mathscr{M}_\lambda$ конформно эквивалентна $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и

$$\operatorname{tg} \alpha(\mathscr{M}_\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{k!(k-1)!}.$$

Таким образом, варьируя $\lambda \in (0; +\infty)$, будем получать двусвязные минимальные трубки $\mathscr{M}_\lambda$ с бесконечным интервалом существования и с произвольным углом наклона вектор-потока к оси Ox_3.

б) Далее рассматривается случай минимальных трубок произвольных размерностей погружения.

Назовем *циклом* Σ в Σ_τ произвольное несвязное объединение $\bigsqcup_{i=1}^k \Sigma_i$ компонент связности $\Sigma_i \subset \Sigma_\tau$ с сохранением их ориентаций. Цикл называется *простым*, если он бордантно эквивалентен нулю, т.е. является краем некоторого компактного многообразия [95, стр. 221].

Пусть S^{n-1} — стандартная единичная евклидова сфера в $\mathbf{R}^n$ и $d(E)$ — диаметр подмножества $E \subset S^{n-1}$, подсчитанный в сферической метрике. Обозначим через $\gamma : M \to S^{n-1}$ гауссово отображение поверхности $\mathscr{M}$, сопоставляющее каждой точке $m \in M$ нормальный вектор $\gamma(m)$, и для данного подмножества $E \subset M$ через $\gamma(E)$ — его гауссов образ.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — минимальная трубка в $\mathbf{R}^n$, $\Sigma \subset \Sigma(\tau)$ — некоторая простая связная компонента с вектор-потоком $J(\Sigma)$. Тогда диаметр гауссова образа $\gamma(\Sigma)$ компоненты Σ удовлетворяет неравенству*

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2\alpha(\Sigma)\,, \tag{23}$$

где $\alpha(\Sigma)$ — угол между $J(\Sigma)$ и e_n.

В случае $\dim M = 2$ гауссово отображение минимальной трубки конформно и последнее замечание влечет, что поверхность $\mathscr{M}$ должна иметь гиперболический конформный тип.

Глава 5 "p-минимальные поверхности и принцип сравнения". а) Пусть $p > 1$. Функция f называется *p-гармонической функцией*, если она удовлетворяет уравнению

$$\Delta_p f \equiv \mathrm{div}|\nabla f|^{p-2}\nabla f = 0. \tag{24}$$

Следствие 5.1. *Пусть поверхность $\mathscr{M} = (M, x)$ удовлетворяет условию*

$$H(m) = -(p-2)k_e(m), \tag{25}$$

где $k_e(m)$ – кривизна поверхности $\mathscr{M}$ в направлении $e^\top$. Тогда координатная функция f является p-гармонической.

Легко проверить, что, на самом деле, условие (25) является необходимым и достаточным для того чтобы $f(m)$ была бы p-гармонической, если исключить из рассмотрения класс цилиндрических поверхностей.

Пусть $\mathscr{M}$ — погруженная поверхность в евклидовом пространстве и для некоторого направления $e \in \mathbf{R}^n$ выполнено соотношение (25). Тогда такую поверхность будем называть *p-минимальной*. Заметим, что данное определение в случае $p = 2$ приводит к обыкновенным минимальным поверхностям.

Можно проверить, что p-гармоничность одной из координатных функций при $p \neq 2$ уже не переносится на остальные, т.к. p-оператор Лапласа не является линейным. В некотором смысле это означает, что в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ выделено некоторое направление (отвечающее градиенту p-гармонической координатной функции). Данная ситуация, однако вполне естественна в случаях, когда в исследуемой задаче уже есть отмеченные направления. Например, в случае трубчатых поверхностей таким направлением является вектор, направленный параллельно оси трубки. С другой стороны, в пространстве Минковского $\mathbf{R}^{n+1}_1$ выделенной является ось времени Oe_{n+1}.

В параграфе 2 строятся примеры p-минимальных поверхностей вращения, имеющие следующее представление

$$x_{n+1} = \rho_0 \Phi_\beta(\frac{1}{\rho_0}\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}) \tag{26}$$

где $x_{n+1} = f(\rho)$, $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ и

$$\Phi_\beta(t) \equiv \int_1^t (\tau^{2\beta} - 1)^{-1/2} d\tau, \qquad c(\beta) \equiv \Phi_\beta(+\infty).$$

Отметим, что вид профильной функции зависит только от отношения $\beta = \frac{n-1}{p-1}$.

б) Следующее утверждение обобщает теорему Миикса и Хоффмана на случай n-мерных p-минимальных гиперповерхностей.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно погруженная n-мерная p-минимальная (относительно направления координатного вектора e_{n+1}) гиперповерхность с параметром $p \geq n$. Если $\mathscr{M}$ содержится в полупространстве с границей $x_{n+1} = c$, тогда $\mathscr{M}$ — плоскость.*

Как показывают примеры поверхностей вращения, ограничение на значения параметра p в сформулированном утверждении является точным.

в) Обозначим для данной поверхности $\mathscr{M}$ в $\mathbf{R}^3$ через $\gamma(m) : \mathscr{M} \to S^2$ ее гауссово отображение, относящее каждой точке поверхности точку на единичной сфере равную нормальному вектору в ней. Тогда классический результат Гаусса гласит, что для минимальных поверхностей гауссово отображение конформно. Мы обобщаем данное свойство на p-минимальные поверхности.

Отбражение $F : M_1 \to M_2$ двух двумерных гладких многообразий M_1 и M_2 называется *квазиконформным* ([2], [15]) если его якобиан $\det d_x F$ не меняет знака на M_1 и для почти всех $x \in M_1$ выполнено

$$\max |d_x F(E)| \leq K_m \min |d_x F(E)| \tag{27}$$

где min и max берутся по множеству всех единичных касательных векторов касательного пространства $T_x M_1$. Число $K = \sup_{m \in M_1} K_m$ в этом случае называется *коэффициентом квазиконформности* отображения F.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная p-минимальная поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда гауссово отображение является $K(p)$-квазиконформным, где*

$$K(p) = \max\{p - 1; \frac{1}{p-1}\}. \tag{28}$$

Л. Саймон в [65] установил, что любая целая двумерная заданная непараметрическим образом поверхность с квазиконформным гауссовым отображением является плоскостью. Как следствие этого результата, получаем следующую версию теоремы Бернштейна.

Следствие 5.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — целый (т.е. заданный над всем $\mathbf{R}^2$) p-минимальный график в $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathscr{M}$ — плоскость.*

г) Пусть $\mathscr{M}$ — n-мерная p-минимальная трубка в $\mathbf{R}^{n+1}$. Обозначим через $\Omega(\tau)$ проекцию выпуклой оболочки сечения $\Sigma(\tau)$ на гиперплоскость $\Pi_0 = \{x_{n+1} = 0\}$. В теореме 5.3 доказывается, что семейство $\{\Omega(\tau) : \tau \in \tau(\mathscr{M})\}$ выпуклое по Лейхтвейсу. Как следствие, является выпуклой функция $R(\tau)$, равная радиусу шара, описанного около сечения $\Sigma(\tau)$.

Введем обозначение

$$\sigma(E) = \min_{y \in S^{n-1}} \max_{b \in \partial B \cap E} \frac{\langle b - \xi, y \rangle}{R},$$

где через B, R и ξ обозначены шар описанный около E, его радиус и центр соответственно. Можно показать, что $0 \leq \sigma(E) \leq 1$ и $\sigma(E) = 0$ тогда и только тогда когда пересечение граничной сферы $S = \partial B$ с множеством E лежит в некоторой экваториальной гиперсфере из S.

Имеет место

Теорема 5.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная трубчатая погруженная гиперповерхность в $\mathbf{R}^{n+1}$ такая, что*

$$\sigma(\Sigma(\tau)) \geq \epsilon > 0, \qquad \forall \tau \in \tau(\mathscr{M}). \tag{29}$$

Тогда $\xi(\tau)$ является δ-выпуклой кривой по переменной τ. Другими словами, каждая координатная функция $\xi_k(\tau)$ допускает разложение

$$\xi_k(\tau) = \varphi_k(\tau) - \psi_k(\tau),$$

где $\varphi_k(\tau)$, $\psi_k(\tau)$ — выпуклые функции.

Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная трубка, удовлетворяющая условию (29) и $\beta = (n-1)/(p-1)$. Тогда $R(\tau)$ и $\xi(\tau)$ удовлетворяют дифференциальному неравенству

$$R(\tau)R''(\tau) \geq \beta(1 + R'(\tau)^2) + |\xi'(\tau)|^2 \min\{\beta; 1\}$$

почти всюду в $\tau(\mathscr{M})$.

Следствие 5.6. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная погруженная трубчатая гиперповерхность такая, что $\dim \mathscr{M} = n > p > 1$. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное время существования $|\tau(\mathscr{M})|$. Более того*

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq 2c_\beta r(\mathscr{M}), \quad \beta = \frac{n-1}{p-1}$$

где

$$r(\mathscr{M}) \equiv \min_{\tau \in \tau(\mathscr{M})} R(\tau) > 0,$$

и

$$c_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^{2\beta})^{1/2}}. \tag{30}$$

Теорема 5.6. *Пусть $\mathscr{M}$ – n-мерная собственно погруженная связная p-минимальная (относительно вектора e_{n+1}) гиперповерхность, лежащая в параллельном слое ширины Δ с граничными гиперплоскостями, ортогональными вектору e_{n+1}. Преположим, что $n > p > 1$, а проекция $\mathscr{M}$ на граничные гиперплоскости слоя выпускает открытый шар радиуса R. Тогда $R \leq \frac{\Delta}{2c_\beta}$, где c_β из (30).*

Постоянная в правой части неравенства (30) неулучшаема как показывают примеры p-минимальных поверхностей вращения.

Если поверхность минимальная, т.е. $p = 2$, то условие ортогональности граничных гиперплоскостей вектору e_{n+1} может быть опущено.

Данную оценку можно также интерпретировать как ограничение на существование "слишком широких"дыр у поверхностей нулевой средней кривизны. Тем не менее несложно построить примеры минимальных поверхностей расположенных в слое, у которых указанная выше проекция является неограниченным множеством.

д) Пусть $S_k(A)$ означает k-ую главную симметрическую функцию собственных значений матрицы A, т.е.

$$\det(A+tI)=\sum_{k=0}^{n} S_k(A)t^{n-k}.$$

Хорошо известна следующая теорема (см. Йоргенс [25], Э. Калаби [27], А.В. Погорелов [59]): *Пусть $f(x)$ – выпуклая, определенная во всем $\mathbf{R}^n$ функция, удовлетворяющая уравнению $S_n(\mathrm{Hess} f)\equiv\det(\mathrm{Hess} f)=1$, где $\mathrm{Hess} f$ – гессиан функции $f(x)$. Тогда f является многочленом второй степени.*

Рассмотрим уравнение

$$L(f)\equiv\sum_{k=0}^{n} a_k(x)S_k(\mathrm{Hess} f)=0. \tag{31}$$

Недавно А.А.Борисенко в [8] доказал теоремы типа Лиувилля для специальных случаев оператора L

$$L(f)=S_n(\mathrm{Hess} f)-S_1(\mathrm{Hess} f)=\det(\mathrm{Hess} f)-\Delta f=0, \tag{32}$$

и

$$L(f)=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-1)^k S_{2k+1}(\mathrm{Hess} f)=0. \tag{33}$$

Как следует из [8], *единственные целые выпуклые решения уравнений (32) и (33) с линейным асимптотическим ростом на бесконечности суть линейные функции.* Техника доказательства этого утверждения основывается на специальных интегральных оценках. При этом указывается, что решения (32) и (33) описывают специальные лагранжевые многообразия, задаваемые в непараметрическом виде.

Далее мы формулируем утверждение, обобщающее [8] в различных направлениях и отвечающую на поставленный выше вопрос в случае, когда коэффициенты оператора $L(f)$ непрерывны и удовлетворяют условию квазипостоянности

(Q) либо $a_k(x)\equiv 0$ на $\mathbf{R}^n$, либо существуют строго положительные постоянные μ_1,μ_2 такие, что: $\mu_1\le|a_k(x)|\le\mu_2$.

Имеет место

Теорема 5.7. *Пусть $f(x)$ целое выпуклое решение класса C^2 уравнения (31). Пусть выполнено (Q) и*

$$\limsup_{|x|\to\infty}\frac{|f(x)|}{|x|^2}=0. \tag{34}$$

Тогда $f(x)$ линейная функция.

Приводится также пример, показывающий, что существуют операторы L для которых выполняется предположение (Q) и решение $f(x)\sim|x|^2$ отлично от квадратичного полинома. Таким образом, (34) является оптимальным условием в этом смысле.

Глава 6. Звездные минимальные поверхности. а) Собственно вложенная n-мерная поверхность $\mathscr{M}$ называется *звездной* (по отношении к точке $a \in \mathbf{R}^{n+1}$) если она является графиком относительно единичной сферы с центром в a.

Формулируемое далее утверждение показывает, что класс нетривиальных звездных минимальных поверхностей непуст.

Пусть $k \geq 1$ — некоторое целое число, $n = 2k$. Обозначим через C_k минимальный гиперконус Саймонза $C_k = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 = x_{k+1}^2 + \ldots + x_{2k}^2\}$ [21]. Будем говорить, что вложенная поверхность $\mathscr{M}$ вписана в конус C_k, если она содержится в одной из компонент связности множества $\mathbf{R}^n \setminus C_k$ и для любой последовательности точек $z_i \in \mathscr{M}$, не имеющей точек накопления на поверхности $\mathscr{M}$, выполнено: $\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(z_i; C_k) = 0$ (здесь через $\operatorname{dist}(x; C)$ обозначено расстояние от множества C до точки x). Пусть $\beta = \frac{1}{2}\big(n - 5 - \sqrt{n^2 - 10n + 17}\big)$.

Теорема 6.1. *Для всякого целого $k \geq 4$ существует единственная с точностью до гомотетии пространства $\mathbf{R}^n$, $n = 2k$, звездная минимальная поверхность $\mathscr{M}_k$, вписанная в конус C_k. Более того, скорость асимптотического приближения поверхности $\mathscr{M}_k$ к конусу Саймонза C_k выражается следующей формулой*

$$\operatorname{dist}(x; C_k) = c|x|^{-\beta} + o(|x|^{-\beta}), \qquad |x| \to \infty.$$

Заметим, что размерность k не может быть уменьшена. Более того, если рассматривать размерность n пространства как непрерывный параметр, то критическое значение размерности объемлющего евклидова пространства, при переходе через которое появляются звездные минимальные поверхности, вписанные в конусы Саймонза, равно $n_0 = 5 + 2\sqrt{2} = 7.828\ldots$ и совпадает с критической размерностью нетривиальных минимальных графиков [90, с. 216]. С другой стороны, как доказано в [67], все примеры n-мерных минимальных графиков имеют полиномиальный рост с показателем равным или большим значения $\beta + 2$. Отметим также, что наш метод доказательства отличен от применяемого в [90] и не использует никаких предположений относительно устойчивости минимальной поверхности.

Интересно также отметить, что если рассматривать значение размерности евклидова пространства $n = 2k$ как непрерывный параметр, то критическое значение, при котором могут существовать звездные минимальные поверхности, вписанные в конусы Саймонза, в точности совпадает с константой n_0.

б) Рассмотрим звездную поверхность $\mathscr{M}$, задаваемую ^{2}-гладким отображением

$$x(\theta) = a + \theta e^{u(\theta)}, \tag{35}$$

над открытым связным подмножеством $\Omega \in \mathbf{S}^n$ единичной сферы $\mathbf{S}^n \in \mathbf{R}^{n+1}$, где θ пробегает точки $\Omega \in \mathbf{S}^n$. Далее мы рассматриваем только внешне полные поверхности, т.е. поверхности, для которых отображение x является собственным в топологическом смысле. Данное свойство эквивалентно выполнению следующего граничного условия

$$\lim_{\theta\to\partial\Omega} u(\theta) = +\infty. \tag{36}$$

В сделанных предложениях можно показать, что если $x(\theta) = a + \theta e^{u(\theta)}$ – собственно вложенная звездная минимальная поверхность, заданная над областью $\Omega \subset \mathbf{S}^n$, то $u(\theta)$

удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}=\frac{n}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{37}$$

Говорят [21], что открытое множество $E\subset \mathbf{S}^n$ имеет *конечный периметр* (по Каччополи) $\mathscr{C}(E)$ если характеристическая функция $\varphi_E(\theta)$ имеет ограниченную в существенном вариацию. Другими словами,

$$\mathscr{C}(E)\equiv \sup\int_E \operatorname{div} X(\theta)\, d\theta<\infty, \tag{38}$$

где точная верхняя грань берется по всем гладким векторным полям X с носителем в E таким, что $|X(\theta)|\le 1$.

Теорема 6.2. *Пусть $u(\theta)$ – целое решение уравнения (37) в Ω. Тогда Ω имеет конечный периметр $\mathscr{C}(\Omega)$. Более того, справедлива оценка*

$$\mathscr{C}(\Omega)\le n\int_\Omega \frac{d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{39}$$

В частности, периметр всегда меньше, чем объем n-мерной единичной сферы ω_n.

Теорема 6.3. *Пусть Ω — допустимая область с гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда для любого целого решения $u(\theta)$ в Ω выполнено*

$$\mathscr{C}(\Omega)=n\mu(u)=n\int_\Omega \frac{d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \tag{40}$$

Теорема 6.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно вложенная звездная минимальная гиперповерхность, заданная над $\Omega\subset\mathbf{S}^n$ уравнением (35). Тогда*

$$V_n(\mathscr{M})=n\mu(u), \tag{41}$$

где $V_n(\mathscr{M})$ — проективный объем $\mathscr{M}$.

Отсюда, применением ранее доказанных свойств проективного объема, мы получаем частичный ответ на вопрос о структуре целых решений.

Следствие 6.1. *Если Ω совпадает с полусферой $\mathbf{S}^n_+$, то единственными звездными минимальными поверхностями, расположенными над Ω являются гиперплоскости.*

Другим следствием является равномерная оценка числа $\ell(\partial\Omega)$ компонент связности границы допустимой области $\partial\Omega$

$$\ell(\partial\Omega)\le\frac{n\omega_{n+1}2^{n-1}}{\omega_n}=2^{n-1}(n+1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n+2/2)}{\Gamma(n+3/2)}.$$

в) Алгебраические минимальные поверхности. Пусть $f=f(x_1,\dots,x_k)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция в $\mathbf{R}^k$. Введем следующий дифференциальный оператор

$$L[f]=|\overline{\nabla}\, f|^2\Delta f-\sum_{i,j=1}^k f''_{ij}f'_if'_j, \tag{42}$$

где $\overline{\nabla}\, f=(f'_1,\dots,f'_k)$ — градиент f и f'_i означает частную производную по x_i. Тогда известно [21], что если $L[f]=0$ и для некоторой точки $a\in\mathbf{R}^k$ выполнено $\overline{\nabla}\, f(a)\ne 0$, то в окрестности точки y поверхность, задаваемая уравнением $f(x) = f(a)$ имеет нулевую среднюю кривизну.

Нерешенной в настоящее время проблемой является задача описания многомерных алгебраических минимальных гиперповерхностей в евклидовом пространстве. Не известно даже — в этом заключается так называемая проблема Саймона [68] — существуют ли минимальные поверхности, которые могут быть заданы в виде $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, где f — некоторый полином. Однако, несложно показать, что в последнем случае задача сводится к отысканию однородных полиномов $F(x)$ таких, что для них выполнено $L[F] = 0$.

Применяя результаты, касающиеся априорных оценок целых решений, доказанные в главе 6, получаем следующее утверждение

Теорема 6.6. *Пусть $F(x)$ — гладкая функция в $\mathbf{R}^{n+1}$ однородная порядка $K \geq 2$ и удовлетворяющая уравнению $L[F] \equiv 0$. Пусть $\overline{\nabla}\, F(x) \neq 0$ при $x \neq 0$ и $\Sigma = \{\theta \in \mathbf{S}^n : F(\theta) = 0\}$. Тогда Σ непусто и всюду на нем выполнено*

$$|\overline{\nabla}\, F(\theta)| = \mathrm{const}. \tag{43}$$

г) Следующее утверждение является версией теоремы Бернштейна для звездных минимальных поверхностей.

Теорема 6.7. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная звездная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathscr{M}$ является плоскостью. В частности, допустимыми областями на двумерной сфере являются только полусферы.*

Пусть $n \geq 3$. Для произвольного единичного вектора $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ введем экватор K_e единичной гиперсферы $\mathbf{S}^n$ так, что $K_e = \{\theta \in \mathbf{S}^n : \langle \theta, e \rangle = 0\}$. Открытую область $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ назовем *дефектной* если для любого направления $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ пересечение множества $\mathbf{S}^n \backslash \Omega$ и экватора K_e не пусто. Другим словами, ни один экватор K_e не содержится целиком в Ω.

Теорема 6.8. *Пусть $n \geq 3$ и Ω — допустимая область. Тогда Ω дефектная.*

Глава 1

Оценки интеграла Дирихле на римановых многообразиях

Первые два параграфа настоящей главы носят вспомогательный характер. Основой для наших дальнейших приложений служат определение и свойства концов римановых многообразий, приводимые в параграфе 2.

Далее в главе доказывается версия классической теоремы Данжуа-Альфорса для числа асимптотических трактов гармонических функций на произвольных (вообще говоря, не обязательно геодезически полных) римановых многообразиях. Ранее, в случае евклидова пространства, в работе В.М. Миклюкова [44] был предложен плодотворный подход к указанной проблеме, базирующийся на специальных оценках основной частоты и ее N-средних для сечений множеств уровня решений обширного класса сублинейных уравнений эллиптического типа. В случае произвольного риманова многообразия необходимы рассуждения, учитывающие топологическое строение многообразия. В §3–§5 данной работы мы следуем подходу, развиваемому в недавней совместной статье В.М. Миклюкова и автора [48].

В параграфе §6 мы доказываем теорему о нахождении точной нижней грани фундаментальной частоты для произвольной минимальной поверхности.

1. Вводные определения

1.1. Пусть M — p-мерное некомпактное ориентируемое риманово многообразие с краем ∂M или без, и пусть $x : M \to \mathbf{R}^n$, $n \geq p+1$, регулярное гладкое погружение. Далее мы обозначаем через $\mathscr{M}$ поверхность (M, x) и считаем, что внутренняя метрика многообразия M и метрика, индуцируемая на M отображением x, совпадают.

Определение 1.1. Поверхность $\mathscr{M}$ (без края) называется *внутренне полной*, если любой расходящийся в M путь имеет бесконечную длину.

Определение 1.2. Поверхность $\mathscr{M}$ называется *внешне полной*, или *собственно погруженной*, если для любой последовательности точек $\{m_i\} \subset M$, не имеющей точек накопления на M, последовательность образов $x(m_i)$ также не имеет точек накопления в $\mathbf{R}^n$.

Обозначим через $T(M)$ и $N(M)$ — касательное и нормальное расслоения над M соответственно; через $T_mM \equiv T_m$ и $N_mM \equiv N_m$ — касательное и нормальное пространства в точке m к погруженному многообразию M. Пусть $T_{x(m)}M \equiv dx_m(T_m)$ — p-мерное линейное подпространство $\mathbf{R}^n$. Далее, чтобы избежать громоздких обозначений, удобно не делать различия между касательным вектором $Y \in T_mM$ и его образом $dx_m(Y)$.

Пусть $\overline{\nabla}$, ∇ — канонические римановы связности в расслоениях $T\mathbf{R}^n$ и TM соответственно; через $\langle\ ,\ \rangle$ обозначим скалярное произведение. Тогда

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X \hat{Y})^\top,$$

где $X \in T_m M$, Y — векторное поле на M и $\hat{Y}$ — произвольное продолжение поля Y в некоторую окрестность точки $x(m)$. Здесь и далее символ $X^\top$ (или $X^\perp$) означает ортогональную проекцию вектора X на касательное (или нормальное) пространство к M в соответствующей точке. Ниже мы сохраняем обозначение Y за $\hat{Y}$.

Пусть X — векторное поле на M. Дивергенцией $\operatorname{div} X$ называется след линейного отображения $E \to \nabla_E X$. Другими словами,

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{p} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle, \tag{44}$$

где $\{E_i\}$ — произвольный ортонормированный базис $T_m M$. Для произвольной гладкой функции $f(m)$ на M определим градиент ∇f как единственное векторное поле такое, что

$$\langle \nabla f(m), E \rangle = df_m(E), \quad \forall E \in T_m M,$$

и оператор Лапласа-Бельтрами Δf, полагая

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Пусть α — некоторое фиксированное действительное число, $\alpha > 1$. Положим всюду, где $\nabla f \neq 0$

$$\Delta_\alpha f = \operatorname{div} |\nabla f|^{\alpha-2} \nabla f. \tag{45}$$

Введенный оператор называется α-лапласианом.

Определение 1.3. Функция, для которой $\Delta_\alpha f = 0$ называется *α-гармонической.* В случае $\alpha = 2$ мы употребляем стандартный термин — гармоническая функция.

1.2. Напомним, что второй квадратичной формой B поверхности $\mathscr{M}$ называется билинейное симметрическое отображение $B : T_m \otimes T_m \to N_m$ вида

$$(\overline{\nabla}_X Y)^\perp = B(X, Y),$$

двойственное к отображению Вейнгартена $A^\xi : T_m \to T_m$, где $\xi \in N_m$. При этом справедливы следующие тождества Гаусса-Вейнгартена

$$(\overline{\nabla}_X \xi)^\top = -A^\xi(X), \qquad \langle A^\xi(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), \xi \rangle.$$

Определение 1.4. *Вектором средней кривизны* H_m поверхности $\mathscr{M}$ в точке m называется след её второй квадратичной формы:

$$H_m = \sum_{i=1}^{p} B(E_i, E_i),$$

где $\{E_i\}$ — ортонормированный базис $T_m M$. Поверхность $\mathscr{M}$ называется *минимальной*, если её вектор средней кривизны тождественно равен нулю.

Основой для большинства дальнейших рассуждений является следующее известное характеристическое свойство минимальных поверхностей в евклидовом пространстве (см. [32], а также главу 5 настоящей работы, предложение 5.1).

Предложение 1.1 ([32]). *Поверхность $\mathscr{M} = (M, x)$ в $\mathbf{R}^n$ является минимальной тогда и только тогда, когда все ее координатные функции $x_i(m)$ гармонические во внутренней метрике, то есть $\Delta x_i(m) \equiv 0$.*

1.3. Пусть P, Q — произвольные непересекающиеся замкнутые подмножества. Тройку $(P, Q; M)$ назовем конденсатором, а точную нижнюю грань

$$\operatorname{cap}_p (P, Q; M) = \inf \int_M |\nabla \varphi|^p \tag{46}$$

по всевозможным локально-липшицевым функциям $\varphi(m)$ таким, что $\varphi(m)|_P \equiv 1, \varphi(m)|_Q \equiv 0$, будем называть *p-емкостью* конденсатора $(P, Q; M)$.Здесь и далее мы, как правило, опускаем обозначение дифференциала в интегралах по многообразию M.

Пусть $(P, Q; M)$ — конденсатор в M. Рассмотрим семейство Γ локально спрямляемых дуг γ, лежащих в M и соединяющих P и Q. Пусть $\rho(m) \geq 0$ измеримая по Лебегу локально ограниченная в существенном функция. Говорят, что $\rho(m)$ допустима для семейства Γ, если для любой $\gamma \in \Gamma$ выполнено

$$\int_\gamma \rho(m)\ |dx(m)| \geq 1. \tag{47}$$

Величина

$$\operatorname{mod}_p (P, Q; M) \equiv \operatorname{mod}_p \Gamma = \inf \int_{M \setminus (P \cup Q)} \rho^p(m)\ , \tag{48}$$

где инфимум берется по всем допустимым для Γ функциям ρ, называется *p-модулем* семейства Γ.

Хорошо известна следующая взаимосвязь емкости и модуля конденсатора

$$\operatorname{mod}_p (P, Q; M) = \operatorname{cap}_p (P, Q; M), \tag{49}$$

доказанная в случае $\mathscr{M} = \mathbf{R}^n$ Фюгледе [91], Цимером [99]. Доказательство в случае, когда $\mathscr{M}$ есть график липшицевой функции, приведено В.М. Миклюковым в [42]. Обсуждение данного вопроса, а также обширная библиография имеется в недавно вышедшей работе [24].

Определение 1.5. Говорят, что многообразие M (или поверхность $\mathscr{M}$) размерности p имеет *параболический конформный тип*, если для любого компакта $F \subset M$ существует исчерпание M открытыми множествами $\mathscr{U}_i \supset F$ такое, что

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{cap}_p (F, M \setminus \mathscr{U}_i; M) = 0. \tag{50}$$

В противном случае говорят, чтоа многообразие имеет *гиперболический* конформный тип.

Данная терминология полностью совпадает с традиционной для двумерного случая и означает, что параболическая поверхность конформно эквивалентна комплексной плоскости. Однако, по известным причинам, для случая $p \geq 3$ собственно проблема конформной униформизации является гораздо более обширной, нежели проблема определения конформного типа. С другой стороны, условие параболичности типа для любого $p \geq 2$ эквивалентно выполнению теоремы Лиувилля для ограниченной p-субгармонической функции.

2. Определение концов многообразия

2.1. В данном пункте рассматривается понятие концов для произвольного некомпактного многообразия. В двумерном случае приводимое далее определение по существу совпадает с понятием бесконечно удаленной точки римановой поверхности и терминах триангуляции многообразия, подробно описанного в [4, стр. 149]. Для общего случая мы используем понятие концов, как идеальных граничных элементов, основанный на классах эквивалентности цепей. Такой способ введения наиболее отвечает геометрической стороне рассматриваемых нами задач.

С другой стороны, поскольку используемое нами определение опирается на топологические характеристики многообразия, нетрудно проверить, что число концов является топологическим инвариантом многообразия.

Пусть M — многообразие с возможно непустым компактным краем ∂M. Будем записывать $E \Subset F$, если E содержится в F вместе со своим замыканием.

Определение 1.6. Семейство непустых связных открытых подмножеств $\{\mathscr{O}_i\}$ называется *цепью*, если

(i) $\mathscr{O}_{i+1} \Subset \mathscr{O}_i$ и $\overline{\mathscr{O}_i} \bigcap \partial M = \varnothing$;

(ii) $\partial \mathscr{O}_i$ — компакт;

(iii) пересечение замыканий $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\mathscr{O}_i}$ пусто.

Полезно отметить следствие из аксиомы (iii):

(iv) ни одно из множеств $\mathscr{O}_i$ не имеет компактного замыкания.

В самом деле, в противном случае, начиная с некоторого номера, все $\overline{\mathscr{O}_i}$ должны быть компактными связными множествами, что противоречило бы (iii).

Определение 1.7. Будем говорить, что цепь $\{\mathscr{O}_i'\}$ эквивалентна цепи $\{\mathscr{O}_i''\}$, если каждый элемент $\mathscr{O}_n'$ содержит в себе некоторый элемент $\mathscr{O}_m''$ и наоборот. Класс эквивалентности по введенному отношению будем называть *бесконечно удаленной точкой*, или *концом* многообразия M.

Существенным отличием данного выше определения цепи от определения по Каратеодори [45] состоит в требовании связности каждого $\mathscr{O}_i$ и компактности его края, что значительно сужает выбор цепей. В нашем случае это приводит к отождествлению простых концов по Каратеодори, которые лежат в одной компоненте связности граничного множества.

2.2. Естественность введенной выше терминологии вытекает из следующего факта.

Предложение 1.2. *Пусть N — произвольное компактное многообразие без края и A — конечное подмножество точек из N. Рассмотрим новое некомпактное многообразие $M = N \setminus A$. Тогда число концов многообразия M равно мощности множества A, причем существует естественное соответствие между множеством концов и A.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и символы $\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O})$ и $\mathrm{Cl}_M(\mathscr{O})$ означают замыкание множества $\mathscr{O}$ по отношению к топологии N и индуцированной топологии M соответственно.

Рассмотрим произвольную цепь $\{\mathscr{O}_i\}$ в M. Если для некоторого номера i_0 замыкание $\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_{i0})$ не пересекается с A, то в силу условия (i) для номеров, больших i_0, соответствующее пересечение также будет пусто. Очевидно, что в этом случае $\mathrm{Cl}_M(\mathscr{O}_k)$ суть компактные подмножества в M при $k \geq i_0$, и, тем самым, свойство (iv) не будет выполнено. Следовательно, имеем

$$\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_k) \bigcap A \neq \varnothing, \qquad \forall k \geq 1.$$

Так как множество A конечно, а множества $\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_k)$ вложены друг в друга, то найдется некоторая точка $a_j \in A$, которая принадлежит всем $\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_k)$. Предположим, что A_1 — подмножество тех точек A, которые обладают этим свойством. Тогда, применяя условие (iii), будем иметь по определению индуцированной топологии на M

$$\varnothing = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_M(\mathscr{O}_k) \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigl(\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_k) \setminus A_1\bigr) = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_k)\right) \setminus A_1,$$

или, учитывая выбор A_1, получаем $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_k) = A_1$.

По теореме о пределе сходящейся последовательности компактных связных множеств (см. [36, теорема 5, стр.179]), пересечение $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_i)$ должно быть континуумом и поэтому множество A_1 связно, то есть состоит из одной точки a_j.

Заметим далее, что a_j лежит строго внутри каждого $\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_i)$, так как иначе относительная граница $\partial_M \mathscr{O}_i$ не может быть компактным множеством.

Следовательно, любая цепь на M представляет единственную точку $a_j \in A$, внутреннюю для $\mathrm{Cl}_N(\mathscr{O}_i)$ при любом $i \geq 1$. Очевидно также, что две цепи представляют одну и ту же точку a_j тогда и только тогда, когда они эквивалентны.

С другой стороны, для любой точки a_j найдется цепь, ее представляющая. В самом деле, достаточно рассмотреть семейство проколотых геодезических шаров

$$\mathscr{O}_k = B_{\varepsilon_k}(a_j) \setminus \{a_j\}$$

для последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$ и ε_1 достаточно мало.

Таким образом, установлено взаимнооднозначное соответствие между множеством концов и множеством A.

□

Доказанное выше утверждение позволяет рассматривать в общем случае концы многообразия как идеальные точки, отвечающие различным "уходам на бесконечность".

Определение 1.8. Обозначим через $\ell(M)$ мощность множества концов и будем говорить, что многообразие имеет конечное число концов, если характеристика $\ell(M)$ конечна.

2.3. Пусть M — многообразие с возможно непустым компактным краем ∂M и $F \subset M$ — произвольное компактное подмножество, содержащее в себе край многообразия, если он не пуст. Обозначим через $q_M(F)$ число различных компонент связности множества $M \setminus F$, которые имеют некомпактное замыкание в M. Следующее утверждение дает способ вычисления $\ell(M)$.

Лемма 1.1. *Пусть $\{F_i\}$ — исчерпание многообразия M семейством компактных множеств $F_i \subset \mathrm{int} F_{i+1}$, $\bigcup_i F_i = M$. Тогда многообразие M имеет конечное число концов тогда и только тогда, когда для любого исчерпания конечна величина $\sup_i q(F_i)$, при этом*

$$\ell(\mathscr{M}) = \sup_i q(F_i) = \lim_{i\to\infty} q(F_i). \tag{51}$$

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что край многообразия содержится внутри каждого элемента данного исчерпания. Пусть A_k^i — суть все компоненты связности дополнения $M \setminus F_i$, имеющие некомпактное замыкание (ясно, что каждый такой набор непуст и не более чем счетный). Заметим также, что граница ∂A_k^i содержится в F_i и поэтому компактна.

Зафиксируем для некоторого $i \geq 1$ множество A_k^i. Тогда по крайней мере одно из множеств A_1^{i+1}, $A_2^{i+1} \ldots$ должно содержаться внутри A_k^i (в противном случае A_k^i содержится в компактном множестве F_{i+1}, что противоречит нашему выбору компонент связности). Повторяя эту процедуру, мы получим цепь

$$A_k^i \Supset A_{k_1}^{i+1} \Supset \ldots$$

Очевидно, что при фиксированном i для разных индексов k получаются неэквивалентные цепи, то есть для любого i мощность множества компонент связности A_k^i не превосходит $\ell(M)$.

Пусть супремум в (51) конечен. Тогда из рассуждений, проведенных выше, вытекает, что последовательность $q(F_i)$ неубывает и ограничена. Обозначим через s предел этой последовательности. Имеем неравенство $s \leq \ell(M)$ и, так как $q(F_i)$ целочисленная, можно считать, что $q(F_i) \equiv s$ при любом $i \geq n$ для некоторого n. Пусть $A_1, \ldots A_s$ — компоненты связности $M \setminus F_n$, имеющие некомпактное замыкание. Тогда при $i \geq n$ множество $M \setminus F_i$ состоит из компонент связности $\mathscr{O}_i^{(k)} = A_k \setminus F_i$ и полученные цепи $\{\mathscr{O}^{(k)}\}$, $1 \leq k \leq s$, попарно неэквивалентны.

Рассмотрим произвольную цепь $\{U_j\}$. В силу компактности F_n и условия (iii) определения цепи, найдется номер m такой, что $\overline{U_m} \cap F_n = \varnothing$. С другой стороны, все U_j связные множества, и, значит, должны содержаться в одной из компонент A_{i_0}, начиная с номера m. Повторяя рассуждения, проводимые выше, делаем заключение об эквивалентности цепей $\mathscr{O}^{(i_0)}$ и $\{U_j\}$. Поэтому $s \geq \ell(M)$, и равенство 51 доказано.

Пусть теперь имеет место конечность величины $\ell(M)$. Тогда, как показано ранее, $q(F_i) \le \ell(M) < \infty$, и, тем самым, $\sup_i q(F_i) < \infty$. Приходим к уже рассмотренному случаю. Лемма доказана полностью.

□

Определение 1.9. Пусть M — p-мерное риманово многообразие и e – некоторый конец M, ассоциированный с цепью $\{\mathscr{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$. Будем говорить, что e – конец *параболического типа*, если для любого компактного множества $F \subset M$ выполнено

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{cap}_p(F; \mathscr{O}_i; M) = 0.$$

В противном случае e называется концом *гиперболического* типа.

Замечание 1.1. Понятие концов многообразия традиционно используется во многих вопросах, так или иначе посвященных глобальным свойствам решений эллиптических уравнений. В двумерном случае параболический (гиперболический) конец может быть отождествлен с граничной точкой (соответственно, граничным континуумом) на подходящей римановой поверхности. В многомерном случае, как правило, модельной ситуацией является либо полное пространство неотрицательной секционной кривизны или многообразие, которое вне некоторого компакта устроено как объединение топологических цилиндров. В этих случаях существует естественная компактификация многообразия вдоль геодезических, уходящих на бесконечность. В общем же случае во многих работах обычно используется понятие числа концов, совпадающее по содержанию с леммой 1.1.

2.4. Пусть многообразие M имеет конечное число бесконечно удаленных точек $\Delta = \{\delta_1, \dots \delta_n\}$. Тогда, используя стандартную топологическую технику [105, гл. 3], можно ввсти топологию на множестве $\overline{M} = M \bigcup \Delta$, превращая его в бикомпактное расширение многообразия M. В случае, когда M устроено так же, как и в предложении 1.2, некоторые окрестности всех бесконечно удаленных точек в новом многообразии $\overline{M}$ гомеоморфны (но не обязательно конформно-эквивалентны) проколотому евклидовому шару. Будем говорить в таком случае, что бесконечно удалённая точка *неособая*.

С другой стороны, нетрудно строятся примеры даже двумерных многообразий M, для которых $\ell(M) < \infty$, в то время как многообразие $\overline{M}$ вблизи своих бесконечно удаленных точек устроено как угодно сложно. В частности, такое многообразие может иметь бесконечный род $g(M)$ и не допускать гладкую бикомпактификацию конечным числом точек.

С этой точки зрения, из результатов Р. Оссермана [54] следует, что любая полная двумерная минимальная поверхность *конечной интегральной гауссовой кривизны* имеет только конечное число бесконечно удаленных точек и все они — неособые. Более того, как показано в работе Б. Уайта [85], этим же свойством обладают произвольные двумерные полные поверхности, для которых длина второй квадратичной формы суммируема с квадратом на $\mathscr{M}$.

Определение 1.10. Пусть $\mathscr{M}$ — собственно погруженная поверхность с краем или без. Будем говорить, что $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов, если этим свойством обладает M. При этом полагаем $\ell(\mathscr{M}) \equiv \ell(M)$.

3. Асимптотические тракты субгармонических функций

3.1. Классическая теорема Данжуа-Альфорса утверждает, что порядок роста целой голоморфной функции $f(z)$ дает верхнюю грань на число ρ различных асимптотических значений $f(z)$. Пусть $w = f(z)$ — такая функция. Семейство областей $\{\mathscr{D}(\tau)\}$ называется асимптотическим трактом $w = f(z)$ если

a) каждая область $\mathscr{D}(\tau)$ является открытой компонентой связности множества

$$\{z \in \mathbf{C} : |f(z)| > \tau > 0\};$$

b) для всех $\tau_2 > \tau_1 > 0$ выполнено $\mathscr{D}(\tau_1) \supset \mathscr{D}(\tau_2)$ и $\cap_\tau \overline{\mathscr{D}}(\tau) = \emptyset$.

Два асимптотических тракта $\mathscr{D}'(\tau)$ и $\mathscr{D}''(\tau)$ называются различными, если для достаточно большого $\tau > 0$ мы имеем $\mathscr{D}'(\tau) \cap \mathscr{D}''(\tau) = \emptyset$.

Тогда упомянутое неравенство принимает вид

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r} \geq \frac{1}{2}\rho,$$

где $M(r)$ — максимум модуля $f(z)$ на окружности $|z| = r$.

Хорошо известно [98], что это утверждение дает оценку числа различных *асимптотических трактов* голоморфной функции через ее нижний порядок. Данная терминология восходит к работе [39] и более предпочтительна для геометрических приложений.

Пусть M — некомпактное p-мерное риманово многообразие и $\mathscr{M} = (M, u)$ — C^2-гладкая минимальная поверхность, задаваемая посредством погружения $u(m) : M \to \mathbf{R}^n$. Последнее означает, что для данного единичного вектора $e \in \mathbf{R}^n$ координатная функция $f(m) = \langle e, u(m) \rangle$, будет гармонической во внутренней метрике $\mathscr{M}$. Тогда асимптотические тракты $f(m)$ соответствуют компонентам поверхности $\mathscr{M}$, которые можно отрезать гиперплоскостями $\langle u, e \rangle = \text{const}$. С другой стороны, a priori существует естественная грань на порядок координатной функции $f(m)$ в терминах роста функции расстояния в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, теорема типа Данжуа-Альфорса, примененная к функции $f(m)$ на минимальной поверхности $\mathscr{M}$, дает некоторое соотношение между внутренними геометрическими характеристиками $\mathscr{M}$ и числом компонент, которые можно отрезать от этой поверхности гиперплоскостями.

3.2. Обозначим через $\mathscr{Z}(f)$ множество всех критических точек функции $f(m)$.

Будем называть гладкую функцию $f(m)$ *α-субгармонической*, если выполнено неравенство

$$\Delta_\alpha f(m) \geq 0 \tag{52}$$

всюду на множестве $M \setminus \mathscr{Z}(f)$. Оператор Δ_α определен в (45).

В случае знака равенства в (52) функцию $f(m)$ называют *α-гармонической*.

Пусть $h(m) : M \to (0; h_0)$ — непрерывная функция класса $C^\infty(M \setminus \Sigma_0)$, где через Σ_0 обозначено множество нулей $h(m)$. Введем для данного $t \in (0; h_0)$ h-шар радиуса t

$$B_h(t) = \{m \in M : h(m) < t\},$$

и h-сферу

$$\Sigma_h(t) = \{m \in M : h(m) = t\}.$$

Определение 1.11. Функция $h(m)$ называется *функцией исчерпания* на M, если

(1) $B_h(t)$ — предкомпакт для любого $t \in (0; h_0)$;
(2) $\lim_{k\to\infty} h(m_k) = h_0$ вдоль любой последовательности $m_k \in M$, не имеющей точек накопления на $M \cup \partial M$;
(3) $|\nabla h(m)| > 0$ почти всюду в M.

Примерами функций исчерпания на полном римановом многообразии может служить функция расстояния $h(m) = \operatorname{dist}(m_0, m)$. Более того, такая функция почти всюду дифференцируема, и в точках дифференцируемости для нее выполнено $|\nabla h(m)| = 1$.

Следующее утверждение описывает часто встречающийся класс функций исчерпания на минимальных погруженных подмногообразиях $\mathbf{R}^n$.

Лемма 1.2. *Пусть $\mathscr{M} = (M, u)$ — минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$, $\varphi(x)$ — гладкая функция, определенная на $\mathbf{R}^n$; функция $h(m) = \varphi \circ u(m)$ удовлетворяет условиям* (1), (2) *в определении 1.1 и найдется гладкая положительная функция $\psi(t)$, для которой композиция $\psi \circ \varphi$ — строго выпуклая функция. Тогда $h(m)$ — функция исчерпания на M.*

Доказательство. Установим, что $|\nabla h(m)| > 0$ почти всюду на M. Если это не верно, то существует замкнутое множество $\mathscr{Z}(h)$ положительной меры Лебега такое, что $|\nabla h(m)| = 0$ при $m \in \mathscr{Z}(h)$. Последнее влечет существование точки $m_0 \in \mathscr{Z}(h)$ такой, что контингенция $\mathscr{Z}(h)$ в m_0 совпадает с $T_{m_0}M$. Пусть $\{E_k(m) : \ k = 1, \ldots, p\}$ — гладкий набор попарно ортогональных единичных касательных полей, определенный в некоторой окрестности точки m_0. Ввиду вырожденности градиента h, касательная составляющая $\nabla h(m) = (\overline{\nabla}\varphi \circ u)^{\top} = 0$ всюду на $\mathscr{Z}(h)$. Для нормальной компоненты имеем

$$(\overline{\nabla}\varphi \circ u)^{\perp} = \overline{\nabla}(\varphi \circ u), \quad m \in \mathscr{Z}(h).$$

Из определения отображения Вейнгартена следуют равенства

$$A^{\zeta}(E_j) = -(\overline{\nabla}_{E_j}\overline{\nabla}(\psi\circ\varphi))^{\top} = -\left[\sum_{k=1}^{n} \overline{\nabla}_{E_j}\left(e_k \frac{\partial(\psi\circ\varphi)}{\partial x_k}\right)\right]^{\top}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \langle E_j, e_i^{\top}\rangle e_k^{\top} \frac{\partial^2(\psi\circ\varphi)}{\partial x_k \partial x_j},$$

где $\zeta = [\overline{\nabla}(\psi\circ\varphi)]^{\perp}$ и $\{x_k\}$ — координатные функции в $\mathbf{R}^n$, двойственные базису $\{e_k\}$. Находя след в последней формуле, в точке m_0 получаем

$$\langle H, \overline{\nabla}(\psi\circ\varphi)\rangle = -\sum_{i,k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle E_j, e_i^{\top}\rangle \langle E_j, e_k^{\top}\rangle \frac{\partial^2(\psi\circ\varphi)}{\partial x_k \partial x_j} =$$

$$= -\sum_{i,k=1}^{n} \langle e_k^{\top}, e_i^{\top}\rangle \frac{\partial^2(\psi\circ\varphi)}{\partial x_k \partial x_i}.$$

С другой стороны, гессиан

$$\left\|\frac{\partial^2(\psi\circ\varphi)}{\partial x_k \partial x_i}\right\|$$

является положительно определенной формой в точке m_0 в силу строгой выпуклости $\psi\circ\varphi$. Принимая во внимание последнее тождество и равенство средней кривизны нулю, получаем $\langle e_k^\top, e_i^\top\rangle = 0$ для всех $i,k \le n$. Подстановка $i=k$ дает $|e_k^\top| = 0$ и, суммируя, имеем

$$0 = \sum_{k=1}^{n} |e_k^\top|^2 = \dim M = p.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

□

Далее мы часто опираемся на тот факт, что, как следствие леммы 1.2, функция $\varphi(m) = |u(m)|$ является функцией исчерпания на собственно погруженной минимальной поверхности $\mathscr{M}$ в $\mathbf{R}^n$.

3.3. Пусть $f(m)$ — некоторая непрерывная функция, отличная от тождественной постоянной, удовлетворяющая принципу максимума, то есть для любого открытого множества $U \subset M$ с компактным замыканием выполнено

$$\max_{m\in\partial U} f(m) = \max_{m\in\overline{U}} f(m). \tag{53}$$

Заметим, что (53) справедливо для произвольной α-субгармонической функции.

Назовем семейство областей $\{D(\tau) : \tau \in (\alpha,\beta)\}$ на M *асимптотическим трактом* функции $f(m)$ если:

(i) для любого $\tau \in (\alpha,\beta)$ область $D(\tau)$ есть непустая компонента множества $\{m \in M : f(m) > \tau\}$;

(ii) $D(\tau_1) \supset D(\tau_2)$ для всех $\tau_1 < \tau_2$ из интервала (α,β);

(iii) или $\beta = +\infty$, или для некоторого $\tau \in (\alpha,\beta)$

$$D(\tau) \cap \{m \in M : f(m) > \beta\} = \emptyset.$$

Из (53), (i) и (iii) следует, что каждая область $D(\tau)$ имеет некомпактное замыкание.

Будем говорить, что два асимптотических тракта *различны*, если существуют такие $\tau_1 \in (\alpha_1,\beta_1)$ и $\tau_2 \in (\alpha_2,\beta_2)$, что $D(\tau_1)\cap D(\tau_2) = \emptyset$.

Пусть $h(m)$ — некоторая функция исчерпания на M и $\{D(\tau) : \tau \in (\alpha,\beta)\}$ — асимптотический тракт $f(m)$.

Определение 1.12. Тракт $\{D(\tau)\}$ называется *регулярным*, если существует $\tau_0 \in (\alpha,\beta)$ и система непересекающихся интервалов $\triangle_k \subset (0,h_0)$, сходящаяся к h_0 ($h_0 \in \cup_k \overline{\triangle_k}$) такая, что множество $D(\tau_0)\cap \Sigma_h(t)$ не содержит ни одного цикла (компактного подмногообразия без края) для всех значений $t \in \cup_k \Delta_k$. В противном случае говорят, что $\{D(\tau)\}$ является *сингулярным* трактом.

4. Взвешенная фундаментальная частота и ее N-средние

4.1. Пусть Σ — компактное p-мерное многообразие. Далее определяется взвешенная фундаментальная частота для подмножеств Σ, которые являются конечной системой попарно непересекающихся $(p-1)$-мерных компактных подмногообразий $\mathscr{O}_j$ в Σ с краем или без. Такое множество назовем *простым* подмножеством Σ. Заметим, что h-сфера $\Sigma_h(t)$ является простой для любого регулярного значения t функции исчерпания $h(m)$.

Пусть U — простое множество, состоящее только из компонент $\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2, \ldots, \mathscr{O}_k$ с непустым краем и θ — положительная гладкая функция на U. Будем говорить, что липшицева функция φ *допустима* для U, или $\varphi \wedge U$, если для каждой компоненты $\mathscr{O}_j$ выполнено равенство $\varphi|_{\partial \mathscr{O}_j} = 0$. В этом случае величина

$$\lambda_{\alpha,\theta}(U) = \inf_{\varphi \wedge U} \left[\frac{\int_U |\nabla \varphi|^\alpha \theta^{-1}}{\int_U |\varphi|^\alpha \theta^{\alpha-1}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{54}$$

называется *(взвешенной) фундаментальной α-частотой* простого множества U с весовой функцией θ. В случае, когда простое множество U содержит хотя бы одну замкнутую компоненту с пустым краем, полагаем $\lambda_{\alpha,\theta}(U) = 0$.

При $\theta \equiv 1$ на U, $\alpha = 2$ и если U — область с кусочно гладкой непустой границей, то $\lambda^2 = \lambda^2_{2,\theta}(U)$ — первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа в U. Другими словами, для некоторой положительной $f(m)$, равной нулю на границе ∂U, выполнено

$$\Delta_\Sigma f + \lambda f = 0,$$

Здесь Δ_Σ — оператор Лапласа на Σ.

Основная модельная ситуация в дальнейшем — когда для некоторой функции исчерпания h многообразия M множество Σ есть множество уровня $\Sigma(\tau)$, задаваемое уравнением $h(m) = \tau$. В этом случае естественный выбор весовой функции $\theta(m)$ есть сужение модуля градиента $|\nabla h(m)|$ на $\Sigma(\tau)$. Для краткости будем обозначать $\lambda_{\alpha,h}(\mathscr{O})$ вместо $\lambda_{\alpha,|\nabla h|}(\mathscr{O})$.

Сформулируем без доказательства свойство α-фундаментальной частоты $\lambda(U) \equiv \lambda_{\alpha,\theta}(U)$, вытекающее непосредственно из ее определения и свойств инфимума.

Лемма 1.3. *λ — невозрастающая функция множества (т.е. для $U_1 \subset U_2$ выполняется $\lambda(U_1) \geq \lambda(U_2)$). Кроме того, если U состоит из компонент $\mathscr{O}_1, \ldots, \mathscr{O}_k$, то*

$$\lambda(U) = \min_{1 \leq i \leq k} \lambda(\mathscr{O}_i).$$

Лемма 1.4. *Пусть $\alpha > 1$ и $f(m) > 0$ — функция класса $C^2(U)$ такая, что $\mathscr{Z}(f) = \emptyset$. Тогда*

$$(\lambda_{\alpha,\theta}(U))^\alpha \geq \inf_{m \in U} \left[-\frac{1}{(f\theta)^{\alpha-1}} \operatorname{div} \frac{|\nabla f|^{\alpha-2} \nabla f}{\theta} \right]. \tag{55}$$

Здесь ∇ и div рассматриваются по отношению к внутренней метрике U.

Замечание 1.2. Данное утверждение является обобщением хорошо известной в случае $\alpha = 2$ оценки [101] на первое собственное значение. Наш метод доказательства отличен от метода, используемого в [101], который основан на линейности оператора Лапласа и принципе максимума.

Доказательство. Зафиксируем функцию $\varphi(m) \wedge U$ и обозначим через β правую часть (55). Тогда из-за положительности $f(m)$ всюду в U имеем неравенство

$$\operatorname{div}\left(|\nabla f|^{\alpha-2} \frac{\nabla f}{\theta} \right) + \beta (f\theta)^{\alpha-1} \leq 0,$$

и, таким образом,

$$\theta^{\alpha-1}\varphi^\alpha\beta = \frac{\varphi^\alpha\beta}{f^{\alpha-1}}(f\theta)^{\alpha-1} \le -\frac{\varphi^\alpha}{f^{\alpha-1}}\mathrm{div}\left(|\nabla f|^{\alpha-2}\,\frac{\nabla f}{\theta}\right) =$$

$$-\mathrm{div}\left(\frac{|\nabla f|^{\alpha-2}\,\varphi^\alpha}{\theta f^{\alpha-1}}\nabla f\right) + \frac{|\nabla f|^{\alpha-2}}{\theta f^\alpha}\langle \nabla f, \alpha f\varphi^{\alpha-1}\nabla\varphi - (\alpha-1)\varphi^\alpha\nabla f\rangle \le$$

$$-\,\mathrm{div}\left(\frac{|\nabla f|^{\alpha-2}\,\varphi^\alpha}{\theta f^{\alpha-1}}\nabla f\right) + \alpha\frac{(\varphi\,|\nabla f|)^{\alpha-1}}{\theta f^{\alpha-1}}\,|\nabla\varphi| - (\alpha-1)\frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}. \tag{56}$$

Пусть U разложено в объединение компонент с непустым краем $U_1, \dots, U_k$. В силу $\varphi(m)\wedge U$, имеем $\varphi|_{\partial U_i} = 0$. Используя формулу Стокса и (56), приходим к неравенству

$$\beta\int_U \theta^{\alpha-1}\varphi^\alpha \le \alpha\int_U \frac{(\varphi\,|\nabla f|)^{\alpha-1}}{\theta f^{\alpha-1}}\,|\nabla\varphi| \;-\; (\alpha-1)\int_U \frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}.$$

После применения неравенства Коши будем иметь

$$\beta\int_U \theta^{\alpha-1}\varphi^\alpha \le \alpha\left[\int_U \frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[\int_U |\nabla\varphi|^\alpha\,\frac{1}{\theta}\right]^{\frac{1}{\alpha}} - (\alpha-1)\int_U \frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}. \tag{57}$$

Заметим, что для данного $k > 1$ существует $\varphi(m)\wedge U$ такая, что

$$\int_U \frac{|\nabla\varphi|^\alpha}{\theta} \le k\lambda^\alpha(U)\int_U \varphi^\alpha\theta^{\alpha-1},$$

где $\lambda(U) = \lambda_{\alpha,\theta}(U)$. Из (57) следует

$$\beta\int_U \varphi^\alpha\theta^{\alpha-1} \le \alpha\lambda(U)k^{\frac{1}{\alpha}}\left[\int_U \frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\left[\int_U \varphi^\alpha\theta^{\alpha-1}\right]^{\frac{1}{\alpha}} - (\alpha-1)\int_U \frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}.$$

Таким образом,

$$A(\xi) \equiv \beta\xi^\alpha - \alpha k^{\frac{1}{\alpha}}\lambda(U)\xi + (\alpha-1) \le 0, \tag{58}$$

где

$$\xi = \left[\int_U \frac{|\nabla f|^\alpha\,\varphi^\alpha}{\theta f^\alpha}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\int_U \varphi^\alpha\theta^{\alpha-1}\right]^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Находя минимум $A(\xi)$ по всем $\xi \ge 0$, заключаем

$$A(\xi) \ge (\alpha-1)\left[\frac{\beta}{\lambda(U)k^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} - (\alpha-1)k^{\frac{1}{\alpha}}\lambda(U),$$

и, в силу (58), приходим к неравенству

$$\beta \;\le\; \lambda^\alpha(U)k.$$

Переход к точной нижней грани в последнем неравенстве по всем допустимым k дает требуемое утверждение.

4.2. Рассмотрим $(p-1)$-мерное подмножество $\mathscr{O} \subset \Sigma$ и целое $N \ge 1$. Введем

$$\lambda(\mathscr{O}, N) \equiv \lambda_{\alpha,\theta}(\mathscr{O}; N) = \inf\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \lambda_{\alpha,\theta}(\mathscr{O}_i),$$

где точная нижняя грань берется по всем системам $\{\mathscr{O}_i\}_{i=1}^N$, состоящих из N попарно неналегающих простых множеств $\mathscr{O}_i \subset \mathscr{O}$ с непустым краем.

Величина $\lambda(\mathscr{O}, N)$ называется *N-средним фундаментальной частоты* множества $\mathscr{O}$.

Данная характеристика плодотворно использовалась ранее в [44] в теории квазиконформных отображений и исследованиях качественного поведения субрешений квазилинейных уравнений со структурными свойствами, близкими к свойствам оператора Лапласа. В этой же работе установлена оценка снизу на N-среднее фундаментальной частоты в терминах изопериметрической функции многообразия. В целом же нижние оценки данной величины для многомерного случая являются достаточно неизученной областью. Одномерный случай стоит изолированно и исследование в нем можно провести полностью.

С этой целью рассмотрим одномерное компактное многообразие Σ.

Лемма 1.5. *Для данного открытого подмножества $\mathscr{O} = \cup_{i=1}^s \mathscr{O}_i \subset \Sigma$ такого, что $\partial\mathscr{O}_i \not\equiv \emptyset$, $\mathscr{O}_i \cap \mathscr{O}_j = \emptyset$ и для любого целого N выполнено*

$$\lambda_{2,\theta}(\mathscr{O}) = \pi \left[\max_{1\le i\le s} \int_{\mathscr{O}_i} \theta(t)\,dt\right]^{-1} \ge \frac{\pi}{\int_{\mathscr{O}} \theta(t)\,dt} \tag{59}$$

и

$$\lambda_{2,\theta}(\mathscr{O}; N) \ge \pi N \left[\max_{1\le i\le s} \int_{\mathscr{O}} \theta(t)dt\right]^{-1}. \tag{60}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $\mathscr{O}$ является объединением попарно непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$, которые оснащены натуральной параметризацией. Пусть также $|\Delta_i|$ — длина Δ_i. Выберем произвольно $\varphi_i(t) \wedge \Delta_i$ и для $0 \le t \le |\Delta_i|$ положим

$$\xi_i(t) = \int\limits_0^t \theta_i(\tau)d\tau\,,$$

где $\theta_i(\tau)$ есть ограничение $\theta(t)$ на Δ_i. Применяя неравенство Виртингера [92, стр. 222], получаем

$$\frac{\int\limits_0^{|\Delta_i|} |\varphi_i'(t)|^2\,\theta_i^{-1}dt}{\int\limits_0^{|\Delta_i|} \varphi_i(t)^2\theta_i dt} = \frac{\int\limits_0^{\xi_i} |\psi_i'(t)|^2\,dt}{\int\limits_0^{\xi_i} \psi_i(t)^2 dt} \ge \left(\frac{\pi}{\xi_i}\right)^2.$$

Здесь $\xi_i = \xi_i(|\Delta_i|)$ и $\psi_i(\xi) = \varphi_i \circ t(\xi)$. Равенство выполнено для $\psi_i(\xi) = \sin(\xi\pi/\xi_i)$ и, в силу леммы 1.3, неравенство (59) доказано.

С целью доказать (60), положим $\epsilon > 0$ и выберем разложение $\mathscr{O}$ в объединение непересекающихся интервалов $\delta_i \subset \mathscr{O}$ таких, что

$$\epsilon + \lambda_{2,\theta}(\mathscr{O}; N) \ge \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \lambda_{2,\theta}(\delta_i) = \frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^N \left(\int_{\delta_i} \theta_i(t)\,dt\right)^{-1}.$$

Применяя неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим, получим

$$\epsilon + \lambda_{2,\theta}(\mathscr{O}; N) \geq \pi N \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} N \int_{\delta_i} \theta_i(t) dt \right]^{-1} \geq \pi N \left[\int_{\mathscr{O}} \theta(t) dt \right]^{-1},$$

и, в силу произвольности выбора $\epsilon > 0$, приходим к требуемому неравенству.

5. Дифференциальное неравенство для интеграла Дирихле

5.1. В данном пункте мы устанавливаем оценки на интеграл Дирихле субгармонических функций, используя рассмотренное выше понятие фундаментальной частоты и ее N-средних.

Пусть $\mathscr{D} \subset M$ — открытое множество и $f \in C^1(\mathscr{D})$. Для заданного $\alpha > 1$ введем *интеграл Дирихле*

$$\int_{\mathscr{D}} |\nabla f|^{\alpha},$$

если последний интеграл отличен от бесконечности.

Пусть $f(m)$ — некоторая α-субгармоническая функция на M; $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\tau)$ — фиксированный элемент асимптотического тракта $\{\mathscr{D}(\tau)\}$ функции $f(m)$. Возьмем $t \in (h(\mathscr{D}); h_0)$, где

$$h(\mathscr{D}) = \inf\{h(m) : m \in \mathscr{D}\},$$

и

$$P(t) = \overline{\mathscr{D}} \cap \overline{B_h(t)}, \qquad Q(t) = \overline{\mathscr{D}} \setminus B_h(t).$$

Лемма 1.6. *Пусть $M(t) = \max_{\mathscr{D} \cap \Sigma_h(t)} \{\tau, f(m)\}$. Тогда для любых чисел $t_1 < t_2$ из интервала $(h(\mathscr{D}), h_0)$ выполняется неравенство*

$$\int_{P(t_1)} |\nabla f|^{\alpha} \leq \alpha^{\alpha} \mathrm{cap}\, (P(t_1), Q(t_2); \mathscr{D})\, M^{\alpha}(t_2). \tag{61}$$

Доказательство. Пусть φ — некоторая функция, допустимая для вычисления емкости конденсатора $(P(t_1), Q(t_2); \mathscr{D})$. Тогда $f_1(m) = (f(m) - \tau)$ равна нулю всюду на множестве $\partial \mathscr{D}$. Применяя формулу Стокса, получаем

$$\int_{\mathscr{D}} \varphi^{\alpha} \langle \nabla f_1, \nabla f_1 \, |\nabla f_1|^{\alpha-2} \rangle \leq -\alpha \int_{\mathscr{D}} \varphi^{\alpha-1} f_1 \langle \nabla f_1 \, |\nabla f_1|^{\alpha-2}, \nabla \varphi \rangle.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathscr{D}} \varphi^{\alpha} |\nabla f|^{\alpha} \leq \alpha \left(\int_{\mathscr{D}} \varphi^{\alpha} |\nabla f|^{\alpha} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_{\mathscr{D}} |f_1|^{\alpha} |\nabla \varphi|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{62}$$

откуда, после использования принципа максимума для $f_1(m)$, имеем:

$$\left(\int_{\mathscr{D}} \varphi^{\alpha} |\nabla f|^{\alpha} \right) \leq \alpha^{\alpha} \max_{\mathscr{D} \cap \Sigma_h(t_2)} f_1^{\alpha}(m) \int_{\mathscr{D} \cap B_h(t_2)} |\nabla \varphi|^{\alpha}.$$

Применяя теперь равенство $\varphi(m) \equiv 1$ на $P(t_1)$ и переходя к инфимуму по всем $\varphi(m)$, получаем требуемую оценку.

□

Лемма 1.7. *Пусть $f(m)$ — α-гармоническая функция и $M(t) = \max\{|f(m)| : m \in \Sigma_h(t)\}$. Тогда для любых t_1, t_2 из $(0; h_0)$, $t_1 < t_2$ имеем*

$$\int_{B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \le \alpha^\alpha \left[\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{M^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t)}{S(\Sigma_t)}\, dt \right]^{1-\alpha},$$

где

$$S(\Sigma_t) = \left(\int_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|^{\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

поток функции исчерпания.

Доказательство отличается только в деталях от изложенного выше. Именно, применяя формулу Кронрода-Федерера ([88], теорема 3.2.22) и (62), получаем

$$\int_{B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \le \alpha^\alpha \int_{B_h(t_2)} |f|^\alpha |\nabla \varphi|^\alpha \le \alpha^\alpha \int\limits_{t_1}^{t_2} M^\alpha(t) dt \int_{\Sigma_h(t)} \frac{|\nabla \varphi|^\alpha}{|\nabla h|} \tag{63}$$

для произвольной функции $\varphi(m)$, допустимой для вычислении емкости конденсатора $(\overline{B_h(t_1)}, M \setminus B_h(t_2); M)$

Положим

$$G(t) = \int_{t_1}^{t} \frac{d\xi}{M^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(\xi) S(\Sigma(\xi))}.$$

Подставим $G \circ h(m)/G(t_2)$ вместо $\varphi(m)$ в (63). После преобразований получаем

$$\int_{B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \le \alpha^\alpha G^{1-\alpha}(t_2),$$

что и требовалось установить.

□

Предположим теперь, что $h(m)$ — функция, равная абсолютной величине некоторой α-гармонической функции. Тогда поток $S(\Sigma_t)$, определенный выше в лемме 1.7, не будет зависеть от выбора t. Величина

$$S(h) \equiv S(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t(h)} \langle \nu, \nabla h\, |\nabla h|^{\alpha-2} \rangle$$

называется *полным потоком* функции h.

Лемма 1.8. *Для любых t_1, t_2 из интервала $(0, h_0)$ таких, что $t_1 < t_2$, выполнено*

$$\operatorname{cap}(\overline{B_h(t_1)}, M \setminus B_h(t_2); M) = \left(\frac{S(h)}{t_2 - t_1} \right)^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Заметим, что функция $\varphi(m)$, определенная для $m \in \overline{B_h(t_2)} \setminus B_h(t_1)$ равенством

$$\varphi(m) = \frac{t_2 - h(m)}{t_2 - t_1},$$

равна 0 при $m \in M \setminus B_h(t_2)$ и равна 1, когда $m \in \overline{B_h(t_1)}$, является допустимой для конденсатора $(\overline{B_h(t_1)}, M \setminus B_h(t_2); M)$. Тогда из (46) имеем

$$\operatorname{cap}_{\alpha,h}(t_1,t_2) \leq \int_{B_h(t_2)\setminus\overline{B_h(t_1)}} |\nabla\varphi|^\alpha,$$

где обозначено

$$\operatorname{cap}_{\alpha,h}(t_1,t_2) = \operatorname{cap}(\overline{B_h(t_1)}, M \setminus B_h(t_2); M).$$

Используя α-гармоничность $h(m)$ и формулу Стокса, получаем

$$\int_{B_h(t_2)\setminus\overline{B_h(t_1)}} |\nabla\varphi|^\alpha = \int_{B_h(t_2)\setminus\overline{B_h(t_1)}} (|\nabla\varphi|^\alpha + \varphi \operatorname{div} |\nabla\varphi|^{\alpha-2}\nabla\varphi) =$$

$$= \int_{\Sigma_h(t_2)} \varphi\, |\nabla\varphi|^{\alpha-1} \langle\nabla\varphi, \nu\rangle - \int_{\Sigma_h(t_1)} \varphi\, |\nabla\varphi|^{\alpha-1} \langle\nabla\varphi, \nu\rangle.$$

Принимая во внимание граничные условия $\varphi(m)$, приходим к неравенству

$$\operatorname{cap}_{\alpha,h}(t_1,t_2) \leq \left(\frac{S(h)}{t_2-t_1}\right)^{\alpha-1}.$$

Заметитим, что $\varphi(m)$ является экстремалью в задаче вычисления α-емкости конденсатора $(P(t_1), Q(t_2))$ в силу того, что она α-гармоническая и удовлетворяет "естественному"граничному условию $\langle\nabla h, \nu\rangle = 0$ на ∂M (см. [27]). Таким образом, в последнем неравенстве имеет место знак равенства.

5.2. Пусть M — некомпактное p-мерное многообразие с фиксированной функцией исчерпания $h(m) : M \to [0, h_0)$. Предположим, что f является α-субгармонической функцией и $\{\mathscr{D}(\tau)\}$ — асимптотическим трактом f. Выберем произвольно подмножество $\mathscr{D} \equiv \mathscr{D}(\tau_0)$, где τ_0 — регулярное значение для функций h и f; положим $f_1(m) = f(m) - \tau_0$ всюду в $\mathscr{D}$. Пусть $h(\mathscr{D}) = \inf_{m\in\mathscr{D}} h(m)$. Тогда для любого регулярного $t > h(\mathscr{D})$ функции $h(m)$ имеем

$$J(t) \equiv \int\limits_{\mathscr{D}\cap B_h(t)} |\nabla f|^\alpha \leq \int\limits_{\mathscr{D}\cap\Sigma_h(t)} f_1 \langle\nabla f_1 |\nabla f_1|^{\alpha-2}, \frac{\nabla h}{|\nabla h|}\rangle,$$

так как $f_1(m)\Delta_\alpha f_1(m) \geq 0$ всюду в $\mathscr{D}$. Здесь $\nu(m) = \nabla h/|\nabla h|$ — внешняя единичная нормаль к $\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D}$ по отношению к многообразию M. Множество $\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D}$ компактно и распадается в объединение компонент связности с непустыми краями $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_k(t)$. Пусть $\gamma(t) = \cup_{j=1}^k \gamma_j(t)$. Положим

$$\lambda(t) = \min_{1\leq i\leq k} \lambda_{\alpha,|\nabla h|}(\gamma_i). \tag{64}$$

Тогда f_1 допустима для вариационной задачи (54) на множестве $\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D}$. Применяя неравенство Минковского, будем иметь

$$f_1\langle\nabla f_1|\nabla f_1|^{\alpha-2}, \nabla h\rangle \leq \frac{\alpha-1}{\lambda(t)\alpha} \left|\langle\nabla f_1|\nabla f_1|^{\alpha-2}, \frac{\nabla h}{|\nabla h|}\rangle\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\lambda^{\alpha-1}(t)|f_1|^\alpha|\nabla h|^\alpha,$$

и, таким образом,

$$J(t) \leq \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} f_1\langle\nabla f_1|\nabla f_1|^{\alpha-2}, \frac{\nabla h}{|\nabla h|}\rangle \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^{\alpha-1}(t)}{\alpha} \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} |f_1|^\alpha |\nabla h|^{\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{\alpha\lambda(t)} \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} \frac{1}{|\nabla h|} \left|\langle \nabla f_1 |\nabla f_1|^{\alpha-2}, \frac{\nabla h}{|\nabla h|}\rangle\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

Принимая во внимание определение $\lambda(t)$, приходим к соотношению

$$J(t) \leq \frac{1}{\alpha\lambda(t)} \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} \frac{|Df_1|^\alpha}{|\nabla h|} + \frac{\alpha-1}{\alpha\lambda(t)} \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} \frac{|\nabla f_1|^\alpha}{|\nabla h|} \left|\langle \frac{\nabla f_1}{|\nabla f_1|}, \frac{\nabla h}{|\nabla h|}\rangle\right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, \tag{65}$$

где через D обозначена индуцированная ковариантная прозводная на подмногообразии $\Sigma(t)$.

В силу ортогональности $\nu = \nabla h(m)|\nabla h(m)|^{-1}$ касательному пространству к $\Sigma_h(t)$ в точке m, получаем следующее ортогональное разложение для градиента:

$$\nabla f_1 = Df_1 + \nu\langle \nabla f_1, \nu\rangle. \tag{66}$$

Таким образом, из (65) и (66) имеем

$$J(t) \leq \frac{1}{\lambda(t)} \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} \frac{|\nabla f_1|^\alpha}{|\nabla h|} \left(\frac{\xi^\alpha}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}(1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}}\right),$$

где $\xi = |Df_1|/|\nabla f_1| \leq 1$. Непосредственно убеждаемся, что подынтегральное выражение в скобках есть убывающая функция переменной ξ для $\alpha \geq 2$ и возрастающая функция для $1 < \alpha < 2$. Находя соответствующие верхние грани, получим

$$J(t) \leq \frac{c(\alpha)}{\lambda(t)} \int\limits_{\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}} \frac{|\nabla f_1|^\alpha}{|\nabla h|},$$

где

$$c(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha-1}{\alpha}, & \text{для } \alpha \geq 2; \\ \dfrac{1}{\alpha} & \text{для } \alpha \in (1;2) \end{cases} \tag{67}$$

Так как множество $\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D}$ — множество t-уровня функции h, то на основании формулы Кронрода-Федерера имеем

$$J(t) \leq \frac{c(\alpha)}{\lambda(t)} \frac{dJ}{dt} \tag{68}$$

для почти всех $t \in (h(\mathscr{D}), h_0)$.

5.3. Предположим теперь, что у функции f найдется по крайней мере один регулярный асимптотический тракт. Пусть Δ — открытое подмножество интервала $(h(\mathscr{D}); h_0)$, отвечающее определению регулярности тракта $\mathscr{D}(\tau_0)$, то есть $\Gamma(t) = \emptyset$ для $t \in \Delta$, где

$$\Delta = \cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i\ , \quad \Delta_i = (\alpha_i, \beta_i),$$

и $h_0 \in \overline{\Delta}$. Заметим, что $J(t)$ является неубывающей функцией. Более того, для $t \in \Delta$ из леммы 1.3 заключаем, что $\lambda(t) = \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D})$ и, в силу (68), получаем

$$J'(t) \geq c(\alpha)\lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t) \cap \mathscr{D})\, J(t)$$

почти всюду в $(h(\mathscr{D}), h_0)$. В силу абсолютной непрерывности функции $J(t)$, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть $f(m)$ — α-субгармоническая функция на M и $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\tau_0)$ — регулярная компонента асимптотического тракта $\{\mathscr{D}(\tau)\}$. Тогда для любых t_1, t_2 из $(h(\mathscr{D}), h_0)$*

$$\int_{\mathscr{D}\cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \leq \left(\int_{\mathscr{D}\cap B_h(t_2)} |\nabla f|^\alpha\right) \exp\left(-c(\alpha) \int\limits_{(t_1,t_2)\cap\Delta} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D})dt\right).$$

Следствие 1.1. *Пусть f является α-субгармонической функцией, имеющей по крайней мере N различных регулярных асимптотических трактов $\{\mathscr{D}_1(\tau)\}, \ldots, \{\mathscr{D}_N(\tau)\}$ и $\sigma = \max_{1\leq i\leq N} h(\mathscr{D}_i)$, где $\mathscr{D}_i \equiv \mathscr{D}_i(\tau_i)$ — суть их регулярные элементы. Тогда для любых $t_1 < t_2$ из (σ, h_0) имеем*

$$N \min_{1\leq i\leq N} \int_{\mathscr{D}_i\cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \leq \int_{B_h(t_2)} |\nabla f|^\alpha \exp\left(-c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t); N)\, dt\right). \tag{69}$$

Доказательство. В соответствии с предыдущей теоремой, для любой области $\mathscr{D}_i$ и произвольных $t_1 < t_2$, $t_i \in (\sigma, h_0)$ имеем

$$\exp\left(c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda_i(t)dt\right) \int\limits_{B_h(t_1)\cap\mathscr{D}_i} |\nabla f|^\alpha \leq \int\limits_{\mathscr{D}_i\cap B_h(t_2)} |\nabla f|^\alpha,$$

где $\lambda_i(t) = \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t)\cap\mathscr{D}_i)$. Суммируя последние неравенства, получаем

$$\min_{1\leq i\leq N} \int_{\mathscr{D}_i\cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \cdot \sum_{i=1}^N \exp\left(c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda_i(t)\, dt\right) \leq \int_{B_h(t_2)} |\nabla f|^\alpha, \tag{70}$$

и, на основании неравенства между арифметическим и геометрическим средними из (70) имеем

$$\min_{1\leq i\leq N} \int_{\mathscr{D}_i\cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \cdot N \exp \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda_i(t)\, dt\right) \leq \int_{B_h(t_2)} |\nabla f|^\alpha.$$

Области $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_N$ попарно неналегающие, поэтому для любого $t \in (t_1, t_2)$ выполняется

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_{\alpha,h}(\mathscr{D}_i \cap \Sigma_h(t)) \geq \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t), N).$$

Требуемое неравенство доказано.

□

Следствие 1.2. *Пусть M — многообразие с функцией исчерпания $h(m)$ такое, что для некоторого целого $N \geq 1$ и $h_1 < h_0$ выполнено*

$$\int\limits_{h_1}^{h_0} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t); N)\, dt = +\infty. \tag{71}$$

Тогда каждая α-субгармоническая функция $f(m)$ с конечным интегралом Дирихле

$$\int_M |\nabla f|^\alpha < \infty$$

имеет не более $(N-1)$ различных регулярных асимптотических трактов.

Доказательство. Действительно, если $f(m)$ имеет N различных регулярных асимптотических трактов, то из (69) и (71), в силу конечности интеграла Дирихле, для некоторого $i \leq N$ и $t_i \in (h(\mathscr{D}_i), h_0)$ на открытом множестве $\mathscr{D}_i \cap B_h(t_i)$ всюду выполняется $|\nabla f| \equiv 0$. Следовательно, $f(m) \equiv \mathrm{const}$, где $m \in \mathscr{D}_i \cap B_h(t_i)$, что противоречит определению $\mathscr{D}_i = \mathscr{D}_i(\tau_i)$.

□

Следствие 1.3. *Пусть M — многообразие с функцией исчерпания $h(m)$ такое, что*

$$\int_{h_1}^{h_0} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t); 2) dt = +\infty. \tag{72}$$

Тогда единственными α-гармоническими функциями на M с конечными интегралами Дирихле являются константы.

Доказательство. Достаточно заметить, что если $f(m)$ — произвольная α-гармоническая функция, отличная от постоянной, то для данной точки m_0 можно рассмотреть новую α-субгармоническую функцию $f_1(m) = |f(m) - f(m_0)|$, которая имеет по крайней мере два различных асимптотических тракта. Последнее свойство является прямым следствием принципа максимума для f_1.

Пусть теперь $\Delta = \cup_i \Delta_i$ — подмножество интервала (h_1, h_0), состоящее из регулярных значений t функции h такое, что $\lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t), 2) > 0$. В этом случае по определению множество $\Sigma_h(t_0)$ не может содержать циклов и, таким образом, тракты функции f_1 являются регулярными.

□

Замечание 1.3. Подчеркнем, что существенным отличием наших утверждений от аналогичных результатов типа теоремы Лиувилля является отсутствие требования полноты многообразия. Пример 5.4 показывает, что условия (71), (72) не влекут полноту многообразия.

5.4. Пример. Пусть M реализовано как компактная поверхность вращения в $\mathbf{R}^n$ с профильной функцией $\rho(x_n)$, то есть

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = \rho^2(x_n), \qquad x_n > 0.$$

Предположим, что $\rho(0) = 0$, а начало координат в $\mathbf{R}^n$ — предельная особая точка M. Именно,

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & \text{для } t \in (0;1); \\ \sqrt{9-t^2}, & \text{для } t \in (1;2). \end{cases}$$

где $\zeta(t)$ — некоторая достаточно гладкая функция склейки. Тогда M имеет форму "капли"с регулярной верхней точкой $A = (0, \dots, 0, 3)$ и особенностью в нуле. Легко видеть, что функция геодезического рассотяния $h(m)$, измеряемого от A до $m \in M$, является функцией исчерпания на M и

$$h_0 = \lim_{m \to 0} h(m) < +\infty.$$

Поэтому M не является геодезически полным. С другой стороны, все h-сферы $\Sigma_h(t)$ суть $(n-2)$-мерные евклидовы сферы радиуса $R(t)$. Здесь $R(t) = \rho(m)$ и $h(m) = t$. Если $h(m)$ достаточно близко к h_0, то

$$R(h(m)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_0 - h(m)).$$

Заметим, что $|\nabla h| \equiv 1$ всюду в $M \backslash \{A\}$. Таким образом, используя свойства основной частоты на евклидовых сферах [44], получаем

$$\lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t), N) = \frac{c}{h_0 - t}, \quad \text{при} \quad t \to h_0,$$

где c зависит только от n и N. Теперь (72) выполнено, в то время как M не является геодезически полным.

5.5. Предположим, что α-субгармоническая функция $f(m)$ имеет по крайней мере $N \geq 1$ регулярных асимптотических трактов $\{\mathscr{D}_1(\tau)\}, \dots, \{\mathscr{D}_N(\tau)\}$ и выберем попарно различные области $\mathscr{D}_k = \mathscr{D}_k(\tau_k)$, $1 \leq k \leq N$ так, чтобы множества $\mathscr{D}_k \cap \Sigma_h(t)$ отвечали условию регулярности.

Используя (61) и (70), получим неравенство

$$\left(\min_{1 \leq i \leq N} \int_{\mathscr{D}_i \cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \right) \sum_{k=1}^{N} \exp\left\{ c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda_{\alpha,h}(\mathscr{D}_k \cap \Sigma_h(t)) dt \right\} \leq$$
$$\leq \alpha^\alpha M^\alpha(t_3) \mathrm{cap_{\alpha,h}}(t_2, t_3),$$

где $M(t) = \max_{m \in \Sigma_h(t)} \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N, f(m)\}$ и числа $t_1 < t_2 < t_3$ принадлежат (h_1, h_0).

Рассуждая также, как и в доказательстве следствия 1.1, заключаем, что справедливо неравенство

$$\min_{1 \leq i \leq N} \int_{\mathscr{D}_i \cap B_h(t_1)} |\nabla f|^\alpha \leq$$
$$\leq \frac{\alpha^\alpha M^\alpha(t_3)}{N} \mathrm{cap}_{\alpha,h}(t_2, t_3) \exp\left(-c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t_2} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t), N)\, dt \right).$$

Таким образом, доказана следующая версия теоремы Данжуа-Альфорса.

Теорема 1.2. *Пусть $f(m)$ — α-субгармоническая функция и для некоторого целого $N \geq 1$ выполнено*

$$\liminf_{t, \xi \to h_0} M^\alpha(\xi)\, \mathrm{cap}_{\alpha,h}(t, \xi)\, \exp\left(-c(\alpha) \int\limits_{t_1}^{t} \lambda_{\alpha,h}(\Sigma_h(t), N) dt \right) = 0,$$

где $c(\alpha)$ — постоянная из (67), $M(t) = \max_{\Sigma_h(t)} f^+(m)$; $t_1 > 0$ фиксировано и t, ξ стремятся к h_0, причем $t_1 < t < \xi$. Тогда $f(m)$ имеет не более $(N-1)$ различных регулярных асимптотических трактов.

6. Оценки первого собственного значения на минимальных подмногообразиях

6.1.

Пусть $\mathscr{M}$ — поверхность в $\mathbf{R}^N$, заданная C^2-гладким изометрическим погружением $x(m)$ p-мерного многообразия M; $\mathscr{D}$ — открытая подобласть в M и a — точка в $\mathbf{R}^N$. Положим

$$k_a(\mathscr{D}) = \inf_{m\in\mathscr{D}} \langle x(m) - a, H(m)\rangle,$$

где H — вектор средней кривизны погружения $x(m)$. Заметим, что введенная величина является количественной оценкой роста средней кривизны поверхности. В частности, если $\mathscr{M}$ — минимальная поверхность, то $k_a(\mathscr{D}) = 0$. Обозначим через $\lambda(\mathscr{D})$ первое ненулевое собственное значение оператора Лапласа подмножества $\mathscr{D}$.

Пусть $B_a(R)$ — открытый шар в объемлющем пространстве радиуса R с центром в точке a. Тогда для $\mathscr{D}$ однозначно определен наименьший по включению шар $B_a(R) \supset x(\mathscr{D})$, называемый шаром, описанным около $\mathscr{D}$. Через $\rho(\mathscr{D})$ будем обозначать радиус этого шара. В силу изометричности погружения, справедливо неравенство

$$\rho(\mathscr{D}) \le d(\mathscr{D}), \tag{73}$$

где через $d(\mathscr{D})$ обозначен радиус наименьшего геодезического шара, содержащего $\mathscr{D}$. Будем далее говорить, что $\mathscr{D}$ — открытое множество поверхности $\mathscr{M}$, если найдется такое открытое множество $\mathscr{D}_1 \subset M$, для которого $\mathscr{D} = x(\mathscr{D}_1)$.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная поверхность в $\mathbf{R}^N$ и $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}$ — произвольное открытое множество такое, что $\rho(\mathscr{D}) < \infty$ и $k_a(\mathscr{D}) \ge -(p-1)$, где a — центр шара, описанного около $\mathscr{D}$. Тогда имеет место*

$$\lambda(\mathscr{D}) \ge \frac{\mu(\nu)}{\rho^2(\mathscr{D})}, \tag{74}$$

где $\nu = p + [k_a(\mathscr{D})]$, $\mu(\nu)$ — основная частота единичного ν-мерного евклидового шара и квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Замечание 1.4. Отметим, что, по сравнению с известными результатами [96] и [35], наша оценка дается в терминах внешней геометрии и является более точной. С другой стороны, из следующего утверждения видно, что в случае минимальных подмногообразий данная выше оценка является неулучшаемой.

Следствие 1.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^N$. Тогда для любого открытого множества $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}$*

$$\lambda(\mathscr{D}) \ge \frac{\mu(p)}{\rho^2(\mathscr{D})}. \tag{75}$$

При этом равенство достигается лишь в случае p-мерной плоскости в $\mathbf{R}^N$, проходящей через центр шара, описанного около $\mathscr{D}$.

6.2. Укажем на некоторые приложения сформулированных утверждений к теории минимальных поверхностей.

Классической является задача об отыскании условий, при которых данную метрику можно реализовать в виде погруженной в $\mathbf{R}^N$ поверхности с набором заданных геометрических свойств. Следствие 1.5 указывает причину невозможности решения частного случая этой задачи в терминах скорости роста основной частоты геодезического шара. Особо подчеркнем, что мы используем только внутренние термины, несмотря на то, что условие минимальности поверхности является внешнегеометрическим.

Следствие 1.5. *Пусть $\mathscr{D}$ — некоторая открытая область в $\mathbf{R}^p$ с заданной в ней полной метрикой ds^2. Пусть $z_0 \in \mathscr{D}$ — фиксированная точка и $\mathscr{D}(R)$ — геодезический шар радиуса R с центром в z_0. Тогда если*

$$\lim_{R\to+\infty} \lambda(\mathscr{D}(R))\, R^2 < \mu(p),$$

то пара $(\mathscr{D}; ds^2)$ не может быть реализована как минимальное подмногообразие ни в каком $\mathbf{R}^N$, $N > p$.

Доказательство следствия сразу же вытекает из оценок (73) и (75).

Э. Калаби в [28] высказал гипотезу, в соответствии с которой любая внутренне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^3$ не может содержаться в евклидовом шаре. Следующее утверждение дает препятствие к положительному решению гипотезы Калаби в терминах основной частоты погружаемого многообразия.

Следствие 1.6. *Пусть $\mathscr{M}$ — внутренне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^N$, содержащаяся внутри некоторого евклидова шара радиуса R. Тогда первое собственное значение многообразия M отлично от нуля и выполнено*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{\mu(2)}{R^2}.$$

Из результатов Ченга и Яо [101], в частности, вытекает, что рост объема геодезического шара на таких многообразиях выше, чем полиномиальный.

6.3. Доказательство теоремы 1.3 опирается на приводимое ниже свойство решений дифференциального уравнения типа Бесселя.

Предложение 1.3. *Пусть $\nu \geq 1$ — произвольное целое число, $\lambda > 0$ и $Y(z)$ — решение уравнения*

$$xY''(x) + (\nu - 1)Y'(x) + \lambda x Y(x) = 0 \tag{76}$$

на отрезке $[0; R]$ с краевым условием

$$Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = 0 \tag{77}$$

такое, что

$$Y(x) > 0, \qquad \forall x \in [0; R). \tag{78}$$

Тогда всюду на интервале $(0; R)$ выполнено неравенство

$$xY''(x) - Y'(x) > 0. \tag{79}$$

Предварительно докажем необходимые свойства решений задачи (76)–(78).

Лемма 1.9. *Если $Y(x)$ — решение (76)–(78), то функция*

$$Y_1(x) \equiv -\frac{1}{x}Y'(x)$$

также является решением уравнения (76) для значений параметров $\nu_1 = \nu + 2$ и $\lambda_1 = \lambda$. При этом

$$\lim_{x\to+0} Y_1(x) = \frac{\lambda}{\nu} > 0.$$

Доказательство. Отметим, что из (76) вытекает

$$0 = Y''(0) + (\nu - 1)\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}Y'(x) + \lambda Y(0) = \lambda + \nu Y''(0),$$

то есть $Y''(0) = -\lambda/\nu$. Отсюда находим

$$\lim_{x\to+0} Y_1(x) = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{1}{x}Y'(x)\right) = Y''(0) = \frac{\lambda}{\nu}.$$

Проверим теперь, что $Y_1(x)$ — решение (76) внутри интервала $(0;R)$. Непосредственно убеждаемся в справедливости равенств

$$Y_1'(x) = \frac{1}{x^2}(Y' - xY''), \qquad \lim_{x\to+0} {Y'}_1(x) = 0,$$

$$Y_1''(x) = \frac{1}{x^3}(2xY'' - 2Y' - x^2Y'''),$$

и поэтому

$$xY_1''(x) + (\nu+1)Y_1'(x) + \lambda x Y_1(x) = -Y''' - \frac{\nu-1}{x}Y'' + Y'\left(\frac{-\lambda x^2 + \nu - 1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(Y'' + \frac{\nu-1}{x}Y' + \lambda Y\right).$$

Необходимое свойство следует из (76). Лемма доказана. □

В соответствии с предыдущей леммой, можно считать новое решение Y_1 продолженным на весь сегмент $[0,R]$.

Лемма 1.10. *Любое решение (76))–(78) есть строго убывающая функция на отрезке $[0,R]$.*

Доказательство. В случае $\nu = 1$ имеем $Y(x) = \cos\frac{\pi x}{2c}$ для некоторого $c \geq R$; утверждение леммы очевидно.

Пусть теперь $\nu \geq 2$. Покажем сначала, что $Y(x)$ удовлетворяет принципу минимума на сегменте $[0;R)$. Действительно, если это не так, то найдется точка $\xi \in [0;R)$, являющаяся локальным минимумом функции $Y(x)$. Это влечет выполнение следующих соотношений

$$Y'(x) = 0, \qquad \text{и} \qquad Y''(x) \geq 0.$$

Из доказательства предыдущей леммы следует, что $Y''(0) = -\frac{\lambda}{\nu} < 0$, то есть $\xi > 0$. Принимая во внимание (76), будем иметь

$$Y''(\xi) + \lambda Y(\xi) = 0,$$

откуда, учитывая неотрицательность $Y''(\xi)$, замечаем, что $Y(\xi) \le 0$. Последнее соотношение противоречит предположению (78).

Используя отрицательность второй производной решения в нуле и краевое условие (77), получаем, что $Y(x)$ строго убывает в некоторой окрестности нуля и поэтому, на основании принципа минимума, оно является по крайней мере невозрастающей функцией. Докажем, что $Y'(x) \neq 0$ на $(0; R)$, или, что тоже самое: $Y'(x) < 0$ всюду на $(0; R)$.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $Y_1(x) = -Y'(x)/x$, являющуюся по лемме 1.9 решением (76) для $\nu_1 = \nu + 2$. В силу доказанного выше, $Y'(x) \le 0$ при $x \in [0; R]$, поэтому $Y_1(x) \ge 0$ и $Y_1(0) = \frac{\lambda}{\nu}$.

Предположим, что $Y_1(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in [0; R)$. Тогда $\xi > 0$ и, в силу теоремы существования и единственности для решений уравнения второго порядка,

$$Y_1''(x) = -\frac{\nu+1}{x} Y_1'(x) - \lambda Y_1(x), \qquad \forall x \in (0; R],$$

либо ${Y_1}'(x) \neq 0$, либо $Y_1(x)$ — тождественно нулевое решение. В силу невозможности последней альтернативы, функция $Y_1(x)$ изменяет знак в окрестности точки ξ, что противоречит неотрицательности $Y_1(x)$. Следовательно, $Y_1(x) > 0$ всюду на $[0; R)$, то есть $Y(x)$ строго убывает.

□

Доказательство предложения 1.3. Положим $v(x) = Y''x - Y'$, или

$$v(x) = x^3 D^2[Y],$$

где D — дифференциальный оператор первого порядка вида

$$D[f] = -\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(f(x)).$$

В силу леммы 1.9, функция $Y_2 = D^2[Y]$ является решением (76) при $\nu_2 = \nu + 4$. Более того, на основании леммы 1.9 и леммы 1.10, функции $Y_n = D^n[Y]$ строго положительны при $n \ge 1$, что легко выводится по индукции из (77). Тем самым,

$$v(x) = x^3 Y_2(x) > 0$$

всюду на полуинтервале $(0; R]$, что и требовалось доказать.

□

6.4. Доказательство теоремы 1.3 удобно провести в более общей ситуации, пригодной для других возможных приложений. Пусть $V \subset \mathbf{R}^N$ — фиксированное n-мерное подпространство, $\{v_i\}_{i=1}^n$ — некоторый ортонормированный базис V и $f^2(m) = \sum_{i=1}^n \langle x(m), v_i\rangle^2$. Легко убедиться, что значение $f(m)$ не зависит от выбора базиса.

Лемма 1.11. *Имеют место соотношения*

$$\nabla f(m) = \frac{1}{f(m)} v^{\top} \tag{80}$$

и

$$\Delta f(m) = \frac{\sigma(V,T)-1}{f(m)} + \frac{\langle H(m), v\rangle}{f(m)} + \frac{|v^{\perp}|^2}{f^3(m)}, \tag{81}$$

где $v = \sum_{i=1}^n v_i\langle x(m), v_i\rangle$, $\sigma(V,T) = \sum_{i=1}^n |v_i^{\top}|^2$ *и символы* $\top$ *и* $\perp$ *означают проекцию данного вектора на касательное и нормальное пространство к* $\mathscr{M}$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть E — вектор, касательный к $\mathscr{M}$ и $\overline{\nabla}$ — каноническая ковариантная производная в $\mathbf{R}^N$. Тогда

$$\nabla_E f(m) = \frac{1}{f(m)}\sum_{i=1}^n \langle x(m), v_i\rangle \nabla_E\langle x(m), v_i\rangle =$$

$$= \frac{1}{f(m)}\sum_{i=1}^n \langle x(m), v_i\rangle \langle \overline{\nabla}_E x(m), v_i\rangle =$$

$$= \frac{1}{f(m)}\sum_{i=1}^n \langle x(m), v_i\rangle \langle E, v_i^{\top}\rangle = \frac{\langle E, v^{\top}\rangle}{f(m)},$$

и, по определению градиента, приходим к (80).

Учитывая, что для любого вектора $e \in \mathbf{R}^N$ имеет место равенство $\Delta\langle x(m), e\rangle = \langle H(m), e\rangle$, получаем

$$\frac{1}{2}\Delta f^2(m) = \sum_{i=1}^n \left[\langle x(m), v_i\rangle \Delta\langle x(m), v_i\rangle + |\nabla\langle x(m), v_i\rangle|^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle x(m), v_i\rangle\langle H(m), v_i\rangle + \sum_{i=1}^n |e_i^{\top}|^2 = \langle v, H(m)\rangle + \sigma(V,T). \tag{82}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2}\Delta f^2(m) = f(m)\Delta f(m) + |\nabla f(m)|^2 = f(m)\Delta f(m) + \frac{|v^{\top}|^2}{f^2(m)},$$

и, в силу (82), убеждаемся в справедливости (81).

□

Лемма 1.12. *Пусть* $\mathscr{M}$ *—* p*-мерная поверхность в* $\mathbf{R}^N$ *с вектором средней кривизны* H*. Пусть* V *–* n*-мерное подпространство в* $\mathbf{R}^N$ *и* $C_a^V(R)$ *— обобщенный цилиндр вида*

$$C_a^V(R) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x^V - a| < R\},$$

где $a \in V$ *и* x^V *— проекция вектора* x *на* V*. Пусть* $k = k_a(\mathscr{M} \cap C_a^V(R))$ *и выполнено неравенство*

$$\nu = n + p + [k] - N \geq 1. \tag{83}$$

Тогда

$$\lambda(\mathscr{M} \cap C_a^V(R)) \geq \frac{\mu(\nu)}{R^2}. \tag{84}$$

Доказательство. Будем, не ограничивая общности считать, что $a = 0$. Отметим, что

$$\sigma(V,T) = \sum_{i=1}^{n} |v_i^{\top}|^2 = n - \sum_{i=1}^{n} |v_i^{\perp}|^2 \geq n - (N-p),$$

откуда, учитывая определение k и применяя (81), получим

$$\Delta f \geq \frac{n+p+k-1}{f(m)} + \frac{|v^{\perp}|^2}{f^3(m)} \geq \frac{\nu - 1}{f(m)} + \frac{|v^{\perp}|^2}{f^3(m)}. \tag{85}$$

Зафиксируем решение $Y(t)$ задачи (76)–(78), соответствующее значению параметра $\nu = n + p + [k] - N$, где λ_0 подбирается так, чтобы выполнялось условие $Y(R) = 0$. Именно, ввиду однородности (76), нетрудно проверить, что $\lambda_0 = \mu(p)/R^2$. Используя отрицательность $Y'(t)$ и соотношение (85), получим для композиции $\varphi = Y \circ f(m)$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi(m) &= Y'(t)\Delta f + |\nabla f|^2 Y''(t) \leq \\ &\leq \frac{Y'(t)}{f(m)}(\nu-1) + \left(\frac{Y'(t)}{f(m)}(\nu-1) - Y''(t)\right)\frac{|v^{\top}|^2}{f^2(m)} + Y''(t)\right) = \\ &= -\lambda_0 Y(t) + \frac{|v^{\top}|^2}{f^3(m)}\left(Y'(t) - Y''(t)f(m)\right).\end{aligned} \tag{86}$$

В силу леммы 1.4, $\varphi(m)$ — положительная на множестве $\mathscr{D} \subset M$ дважды дифференцируемая функция, поэтому

$$\lambda(\mathscr{D}) \geq \inf_{m\in\mathscr{D}} \left(-\frac{\Delta\varphi(m)}{\varphi(m)}\right). \tag{87}$$

Выбирая в качестве $\mathscr{D}$ множество $x^{-1}(\mathscr{M} \cap C_a^V(R))$ и объединяя (86) и (87), получаем

$$\lambda(\mathscr{M} \cap C_a^V(R)) \geq \lambda_0 \frac{|v^{\top}|^2}{f^3(m)}\big(Y'(t) - Y''(t)f(m)\big). \tag{88}$$

Неравенство (84) следует из предложения 1.3 и определения числа λ_0.

□

Доказательство теоремы 1.3 следует из доказательства предыдущей леммы, если положить $V = \mathbf{R}^N$ и, тем самым, $C_a^V(R) = B_a(R)$.

Отметим, что равенство в (75) может достигаться лишь при условии, что всюду на $\mathscr{M} \cap B_a(R)$ выполняется равенство $|x^{\perp}(m)| = 0$. Последнее означает, что радиус-вектор $x(m)$ погружения является касательным к $\mathscr{M}$ в каждой точке, то есть поверхность $\mathscr{M}$ является конусом с центром в точке a. В силу регулярности погружения, такая поверхность совпадает с p-мерной плоскостью, проходящей через a.

□

Глава 2

Проективный объем минимального подмногообразия

В параграфе 1 вводятся понятия проективного и логарифмического объемов погруженного многообразия ($V_p(\mathscr{M})$ и $Q_p(\mathscr{M})$ соответственно). Основой для дальнейших наших приложений является параграф 2, в котором устанавливается инвариантность проективного и логарифмического объемов полного минимального подмногообразия относительно действия группы гомотетий и сдвигов пространства $\mathbf{R}^n$. Кроме того, здесь же мы доказываем равенство $V_p(\mathscr{M}) = pQ_p(\mathscr{M})$ для минимальных подмногообразий $\mathscr{M}$ без края. В параграфе 3 изучается связь проективного объема и конформных характеристик поверхности, а также рассматриваются примеры нахождения проективного объема для некоторых классов минимальных поверхностей.

1. Проективный и логарифмический объемы

1.1. Обозначим через $\mathscr{M}$ p-мерную внешне полную поверхность и $B_a(R) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| < R\}$ — открытый шар радиуса $R > d_{\mathscr{M}}(a)$, где

$$d_{\mathscr{M}}(a) = \max_{m \in M} |x(m) - a|. \tag{89}$$

Тогда, очевидно, $x(\partial M) \subset B_a(R)$. Зафиксируем $r > d_{\mathscr{M}}(a)$ и положим

$$V_p(\mathscr{M}; a) = \limsup_{R \to \infty} \frac{1}{\ln R} \int\limits_{M_a(r,R)} \frac{1}{|x(m) - a|^p}, \tag{90}$$

где $M_a(r, R) = \{m \in M : r < |x(m) - a| < R\}$. Легко видеть, что величина $V_p(\mathscr{M}; a)$ не зависит от выбора радиуса r.

Определение 2.1. Назовем величину $V_p(\mathscr{M}; a)$ *логарифмическим объемом* поверхности $\mathscr{M}$ относительно точки a.

Интеграл, стоящий в правой части (90), участвует в определении приведенной логарифмической площади некомпактных двусвязных областей на плоскости $\mathbf{C}^2$ и впервые был применен к задачам теории конформных и квазиконформных отображений Грёчем [18], а затем Тейхмюллером [71] (см. также [13, стр. 144]). Эта же характеристика использовалась в изучении целых решений квазилинейных уравнений типа минимальных поверхностей двух переменных Р. Финном [89], Миклюковым В.М. [42], Миклюковым и автором [46]. Отметим также недавнюю работу Л. Саймона, где оценки интеграла в правой части (90) применяются к доказательству теоремы Бернштейна в специальном классе квазилинейных эллиптических уравнений.

Величина $V_p(\mathscr{M};a)$ как самостоятельная характеристика вводится нами впервые. Как видно из доказываемого нами далее в пункте 2 признака параболичности многообразия, проективный объем напрямую связан с конформными свойствами многообразия. В этой связи отметим, что другой традиционно принятой в теории эллиптических уравнений на римановых многообразиях является терминология скорости роста объема геодезического шара [101], [24], [17].

1.2. Обозначим через $\alpha_m(v)$ угол между вектором $v \in \mathbf{R}^n$ и касательным пространством T_mM. Тогда следующий, вообще говоря, несобственный интеграл

$$Q_p(\mathscr{M};a) = \int_M \frac{\sin^2 \alpha_m(x(m)-a)}{|x(m)-a|^p} \tag{91}$$

будем называть *проективным объемом* поверхности $\mathscr{M}$ относительно точки $a \in \mathbf{R}^n$.

Известно, что любое комплексное подмногообразие N в $\mathbf{C}^n$, рассматриваемое как вещественное подмногообразие, после отождествления $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$, является глобально минимальным [90, теорема 2.6.1] и, в частности, минимальной поверхностью специального вида. В этом случае введенный нами проективный объем совпадает с точностью до постоянной, зависящей только от размерности, со значением проективного объема подмногообразия N в смысле определения из теории комплексных аналитических множеств ([102], стр.128-129). Таким образом, наше определение можно рассматривать как подходящее обобщение понятия классического проективного объема на общие минимальные подмногообразия.

Некоторые свойства проективного объема минимальных подмногообразий, доказываемые нами в дальнейшем, являются распространением известных свойств аналитических множеств и комплексных подмногообразий в $\mathbf{C}^n$.

Отметим также, что понятие проективного объема тесно связано с такими интегрально-геометрическими характеристиками поверхности, как кратность ее проекции на сферу или грассманово многообразие, что играет важную роль в наших дальнейших исследованиях.

Замечание 2.1. Существует одно принципиальное различие рассмотренных выше определений. Именно, если проективный объем, по своему определению, является величиной, чувствительной к локальному изменению поверхности, то логарифмический объем отвечает за асимптотические свойства многообразия. Однако, как будет видно из результатов следующего параграфа, в случае, когда поверхность $\mathscr{M}$ является минимальной и внешне полной, значения обоих объемов равны с точностью до абсолютной постоянной.

2. Взаимосвязь логарифмического и проективного объемов

2.1. Доказываемые нами в этом параграфе утверждения являются ключевыми для изучения геометрии "в целом"минимальных поверхностей.

Как простое следствие определения, логарифмический объем является инвариантом поверхности относительно группы поворотов евклидова пространства, оставляющих точку a на месте. Имеет место более сильное свойство — инвариантность относительно группы параллельных переносов, а значит, относительно группы всех движений пространства $\mathbf{R}^n$. Именно, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ с возможно непустым краем ∂M. Тогда величина логарифмического объема $V_p(\mathscr{M}, a)$ не зависит от выбора точки $a \in \mathbf{R}^n$ и, более того, верхний предел в (90) может быть заменен на обычный предел.*

Доказательство. Положим $h = \operatorname{dist}(a, x(M))$ и $\rho = \max(h; d_{\mathscr{M}}(a))$, где $d_{\mathscr{M}}(a)$ определена в (89). Полагая $f(m) = |x(m) - a|$, будем иметь

$$\nabla f(m) = \left(\overline{\nabla}\ |x(m) - a|\right)^{\top} = \frac{x_a^{\top}(m)}{|x_a(m)|}, \tag{92}$$

где мы для краткости обозначаем $x_a(m) = x(m) - a$. Следовательно,

$$\operatorname{div}\frac{x_a^{\top}(m)}{|x_a(m)|^p} = \frac{1}{|x_a(m)|^p}\operatorname{div}(x_a^{\top}(m)) - \frac{p}{|x_a(m)|^{p+1}}\langle \nabla f, x_a^{\top}(m)\rangle =$$

$$= \frac{p(|x_a(m)|^2 - \left|x_a^{\top}(m)\right|^2)}{|x_a(m)|^{p+2}} = \frac{p\left|x_a^{\perp}(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}}. \tag{93}$$

Пусть r, R — произвольные регулярные значения функции $f(m)$ такие, что $\rho < r < R$. Проинтегрируем получившееся выше соотношение по множеству $M_a(r, R)$ и применим к нему формулу Стокса:

$$\frac{1}{R^p}\int\limits_{\partial M_a(R)}\langle x_a^{\top}(m), \nu\rangle - \frac{1}{r^p}\int\limits_{\partial M_a(r)}\langle x_a^{\top}(m), \nu\rangle = p\int\limits_{M_a(r,R)}\frac{\left|x_a^{\perp}(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}},$$

где ν — это единичный вектор внешней нормали к множеству t-уровня $\partial M_a(t)$ функции $f(m)$, рассматриваемому как гладкое подмногообразие M. Легко видеть, что

$$\nu(m) = \frac{x_a^{\top}(m)}{|x_a^{\top}(m)|},$$

для любого регулярного значения t. Вводя обозначение

$$J(t) = t^{-1}\int_{\partial M_a(t)}\left|x_a^{\top}(m)\right|,$$

найденное выше тождество перепишем как

$$\frac{J(R)}{R^{p-1}} - \frac{J(r)}{r^{p-1}} = p\int\limits_{M_a(r,R)}\frac{\left|x_a^{\perp}(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}}. \tag{94}$$

В частности, из (94) вытекает, что дробь $J(t)/t^{p-1}$ является неубывающей функцией на $(\rho; +\infty)$.

Воспользуемся формулой Кронрода-Федерера [88, теорема 3.2.22]

$$\int\limits_{M_a(r,R)} \frac{1}{|x_a(m)|^p} = \int\limits_{M_a(r,R)} \frac{\left|x_a^\top(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}} + \int\limits_{M_a(r,R)} \frac{\left|x_a^\perp(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}} =$$

$$= \int\limits_r^R \frac{dt}{t^{p+2}} \int\limits_{\partial M_a(t)} \frac{\left|x_a^\top(m)\right|^2}{|\nabla f|} \,\mathrm{d}m + \int\limits_{M_a(r,R)} \frac{\left|x_a^\perp(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}} =$$

$$= \int\limits_r^R \frac{J(t)}{t^{p-1}} \frac{dt}{t} + \int\limits_{M_a(r,R)} \frac{\left|x_a^\perp(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}} = \int\limits_r^R \frac{J(t)}{t^{p-1}} \frac{dt}{t} + \frac{1}{p}\left(\frac{J(R)}{R^{p-1}} - \frac{J(r)}{r^{p-1}}\right). \tag{95}$$

Докажем, что

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{J(R)}{R^{p-1}} = V_p(\mathscr{M}, a). \tag{96}$$

Действительно, в силу отмеченного выше свойства монотонности дроби $J(R)/R^{p-1}$, ее предел, конечный или бесконечный, существует. Предположим сначала, что этот предел равен $\beta < +\infty$ и обозначим за $\varphi(R)$ левую часть (96). Тогда

$$\frac{\varphi(R)}{\ln R} = \frac{1}{\ln R}\int_r^R \frac{J(t)}{t^{p-1}} \cdot \frac{dt}{t} + \frac{1}{\ln R}\cdot O(1), \qquad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{97}$$

Существование и значение предела первого слагаемого в (97) вытекает из правила Лопиталя:

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\ln R}\int_r^R \frac{J(t)}{t^{p-1}} \cdot \frac{dt}{t} = \lim_{R\to+\infty} \frac{\frac{J(R)}{R^{p-1}}}{\frac{1}{R}} = \lim_{R\to+\infty} \frac{J(R)}{R^{p-1}} = \beta,$$

и, тем самым, в силу (97), предел в (90) существует и выполнено (96).

Теперь предположим, что $J(t)t^{1-p} \to +\infty$. По данному $n \in \mathbb{N}$ выберем R_1 так, что $J(t)t^{1-p} \geq n$ при $t \geq R_1$. Тогда из (95) получим

$$\varphi(R) \geq \int_{R_1}^R \frac{J(t)}{t^{p-1}} \cdot \frac{dt}{t} \geq n \ln \frac{R}{R_1}, \qquad \text{при} \quad R \geq R_1,$$

и, следовательно, существует предел в (90), равный $+\infty$. Таким образом, (96) доказано и мы проверили, что верхний предел в (90) можно заменить на обыкновенный предел.

Проверим, что $V_p(\mathscr{M}, a)$ не зависит от $a \in \mathbf{R}^n$. С этой целью рассмотрим произвольно отличную от a точку $b \in \mathbf{R}^n$ и положим $\delta = |b-a|$. Выберем по данному $\varepsilon \in (0;1)$ величину $r(\varepsilon) > \max(1, \delta)$ так, чтобы

$$\frac{p\delta}{r-\delta}\left[1 + \frac{r^{p-1}}{(r-\delta)^{p-1}}\right] < \varepsilon$$

для любого $r > r(\varepsilon)$. Это возможно сделать, так как выражение в левой части последнего неравенства имеет нулевой предел при $r \to \infty$. Фиксируя произвольно $R_1 > r(\varepsilon)$, для любого $R > R_1$ имеем:

$$\left| \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-b|^p} - \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-a|^p} \right| \leq \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{||x-b|^p - |x-a|^p|}{|x-b|^p\,|x-a|^p} \leq$$

$$\leq p\delta \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{|x-b|^{p-1} + |x-a|^{p-1}}{|x-b|^p\,|x-a|^p}. \tag{98}$$

Тогда, ввиду того, что для любого $m \in M_b(R_1, R)$ выполнено

$$|x(m) - a| \geq |x(m) - b| - \delta > R_1 - \delta,$$

и, учитывая выбор $r(\varepsilon)$, получаем

$$p\delta \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{|x-b|^{p-1} + |x-a|^{p-1}}{|x-b|^p\,|x-a|^p} < \varepsilon \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-b|^p}. \tag{99}$$

Объединяя неравенства (98) и (99), получим

$$(1-\varepsilon) \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-b|^p} \leq \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-a|^p} \leq (1+\varepsilon) \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-b|^p}.$$

С другой стороны, отметим следующие очевидные вложения:

$$M_a(R_1+\delta, R-\delta) \subset M_b(R_1, R) \subset M_a(R_1-\delta, R+\delta), \tag{100}$$

поэтому из (100) имеем

$$\int\limits_{M_a(R_1+\delta,R-\delta)} \frac{1}{|x-a|^p} \leq (1+\varepsilon) \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-b|^p}$$

и

$$\int\limits_{M_a(R_1-\delta,R+\delta)} \frac{1}{|x-a|^p} \geq (1-\varepsilon) \int\limits_{M_b(R_1,R)} \frac{1}{|x-b|^p}.$$

Деля получившиеся неравенства на $\ln R$ и устремляя $R \to +\infty$, получим

$$(1-\varepsilon)V_p(\mathscr{M}, b) \leq V_p(\mathscr{M}, a) \leq (1+\varepsilon)V_p(\mathscr{M}, b),$$

и, в силу произвольности выбора ε, получаем $V_p(\mathscr{M}, b) = V_p(\mathscr{M}, a)$.

□

2.2. Следующее утверждение устанавливает связь между проективным и логарифмическим объемами минимальной поверхности.

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ с возможно непустым краем ∂M. Тогда для любого $a \notin x(M)$ выполнено*

$$V_p(\mathscr{M}, a) = p\, Q_p(\mathscr{M}, a) + c(\partial M; a), \tag{101}$$

где $c(\partial M; a)$ — конечная величина, такая, что $c(\varnothing; a) = 0$.

Доказательство. Пусть $R > d_{\mathscr{M}}(a)$. Тогда, интегрируя соотношение (93) по $M_a(R)$, получим

$$\frac{1}{R^p} \int\limits_{\partial M_a(R)} \langle x_a^\top(m), \nu\rangle - \int\limits_{\partial M} \frac{\langle x_a^\top(m), \nu\rangle}{|x_a(m)|^p} = p \int\limits_{M_a(R)} \frac{\left|x_a^\perp(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}}.$$

Если $\alpha \equiv \alpha_m(x(m)-a)$ — угол между вектором $x_a(m)$ и касательным пространством $T_m M$, то

$$|x_a^\perp(m)|^2 = |x_a(m)|^2 - |x_a(m)^\top|^2 = |x_a(m)|^2(1-\cos^2\alpha) = |x_a(m)|^2 \sin^2\alpha,$$

следовательно,

$$Q_p(\mathscr{M}; a) = \int\limits_{M_a(R)} \frac{\left|x_a^\perp(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}}. \tag{102}$$

Принимая во внимание (91) и (96), получим при $R \to \infty$

$$V_p(\mathscr{M}, a) - c(\partial M; a) = pQ_p(M, a),$$

где

$$c(\partial M; a) = \int\limits_{\partial M} \frac{\langle x_a^\top(m), \nu\rangle}{|x_a(m)|^p}.$$

□

Из доказанных теорем вытекает следующая важная связь между логарифмическим и проективным объемами, имеющая близкий аналог в случае аналитических комплексных множеств [102, лемма 3.6].

Следствие 2.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края и $a \notin x(M)$. Тогда обе величины $Q_p(\mathscr{M}, a)$ и $V_p(\mathscr{M}, a)$ не зависят от выбора a и выполнено*

$$V_p(\mathscr{M}, a) = p\, Q_p(\mathscr{M}, a). \tag{103}$$

2.3. Заметим, что условие минимальности для поверхности $\mathscr{M}$ является инвариантом относительно группы Π_n параллельных переносов и гомотетий объемлющего евклидова пространства $\mathbf{R}^n$. В этом смысле теоремы 2.1 и теоремы 101 показывают, что как проективный объем $Q_p(\mathscr{M}, a)$, так и логарифмический объем $V_p(\mathscr{M}, a)$ являются инвариантами минимальных поверхностей относительно подгруппы параллельных переносов и вращений в Π_n [1]. С другой стороны, инвариантность характеристик $Q_p(\mathscr{M}, a)$ и $V_p(\mathscr{M}, a)$ относительно подгруппы гомотетий легко следует из их определения и формулы замены переменной под интегралом.

В дальнейшем мы опускаем параметр a в обозначении логарифмического объема, а также в обозначении проективного объема, если в последнем случае $a \notin \mathscr{M}$:

$$V_p(\mathscr{M}) \equiv V_p(\mathscr{M}, a); \qquad Q_p(\mathscr{M}) \equiv Q_p(\mathscr{M}, a).$$

В предыдущем пункте было показано, что величина $V_p(\mathscr{M}, a)$ не зависит от выбора $a \in \mathbf{R}^n$. Следующее утверждение показывает, что при $a \in x(M)$ проективный объем дискретно изменяет свое значение.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда для любой точки $a \in x(M)$*

$$Q_p(\mathscr{M}, a) = \frac{1}{p}\bigl(V_p(\mathscr{M}) - \omega_p \cdot a\#\mathscr{M}\bigr), \tag{104}$$

где $a\#\mathscr{M}$ — алгебраическая кратность погружения x (то есть полное число прообразов $x^{-1}(a)$ в M).

Доказательство. Полагая

$$J(t) = \frac{1}{t}\int_{\partial M_a(t)} |x_a^{\top}(m)|$$

и используя равенство (94), получим, что величина $J(t)t^{1-p}$ является неубывающей и положительной. Следовательно, существует предел

$$\mu(a) = \lim_{t\to+0}\frac{J(t)}{t^{p-1}}.$$

В силу свойств собственности погружения и регулярности отображения x, множество прообразов $x^{-1} = \{m_1, \ldots, m_k\}$, $k = a\#\partial M$ точки a является конечным. Кроме того, по тем же причинам найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при $t < \varepsilon$ множество $x^{-1}(M_a(t))$ распадается на k открытых компонент связности $\mathscr{O}_1(t), \ldots, \mathscr{O}_k(t)$, содержащих соответственно $m_1, \ldots, m_k$ и попарно непересекающихся. Выбирая ε достаточно малым, можно считать, что сужения $x|_{\mathscr{O}_i(t)}$ являются вложениями.

Переходя к пределу $r \to +0$ в (94), получим

$$\frac{J(R)}{R^{p-1}} - \mu(a) = p\int\limits_{M_a(R)} \frac{\left|x_a^{\perp}(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}}, \tag{105}$$

[1] Проективный объем, подсчитанный относительно точки a, является инвариантом для любого параллельного переноса $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ такого, что $a \notin \sigma(\mathscr{M})$.

где последний интеграл рассматривается как несобственный в смысле определения (91). В силу регулярности вложения $x|_{\mathscr{O}_i(t)}$, будем иметь

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\sup_{m\in\mathscr{O}_i(t)}|x_a^{\perp}(m)|=0$$

для любого i, $1\le i\le k$ и, таким образом,

$$\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^{p-1}}\int_{\partial\mathscr{O}_i(t)}\frac{|x_a^{\top}|}{|x_a(m)|}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^{p-1}}\int_{\partial\mathscr{O}_i(t)}\sqrt{1-\frac{|x_a^{\top}|^2}{t^2}}=$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\mathscr{H}^{p-1}(\partial\mathscr{O}_i(t))}{t^{p-1}}=\omega_p, \tag{106}$$

где $\mathscr{H}^{p-1}$ — $(p-1)$-мерная мера Хаусдорфа. С другой стороны, в силу сделанных предположений для $t<\varepsilon$, $\partial M_a(t)=\cup_{i=1}^{k}\partial\mathscr{O}_i(t)$, откуда, ввиду (106),

$$\mu(a)=\lim_{t\to+0}\frac{J(t)}{t^{p-1}}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t^{p-1}}\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial\mathscr{O}_i(t)}\frac{|x_a^{\top}|}{|x_a(m)|}=k\omega_p,$$

и, возвращаясь к (105), получим

$$\frac{J(R)}{R^{p-1}}=k\omega_p+p\int\limits_{M_a(R)}\frac{\left|x_a^{\perp}(m)\right|^2}{|x_a(m)|^{p+2}}.$$

Переходя к пределу при $R\to+\infty$ в последнем равенстве и учитывая (96), получим требуемое соотношение.

□

2.4. Будем говорить, что p-мерная минимальная поверхность является *тривиальной*, если она совпадает с некоторой p-мерной плоскостью.

Следствие 2.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная нетривиальная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда*

$$V_p(\mathscr{M},a)>\omega_p. \tag{107}$$

Доказательство. Действительно, из (104) и неотрицательности $Q_p(\mathscr{M},a)$ следует, что для любой точки $a\in x(M)$ выполнено

$$V_p(\mathscr{M},a)\ge pQ_p(\mathscr{M},a)+\omega_p\ge\omega_p.$$

Тогда нестрогое неравенство в (107) следует из независимости логарифмического объема от выбора точки a.

Предположим, что $V_p(\mathscr{M},a)=\omega_p$. В этом случае из последней цепочки неравенств вытекает, что $Q_p(\mathscr{M},a)=0$. Это возможно лишь при следующем условии:

$$(x(m)-a)^{\perp}\equiv 0,\quad \forall m\in M,$$

то есть $x(m)-a$ является касательным векторным полем к поверхности $\mathscr{M}$.

Известно, что последнее равенство возможно лишь для конусов с вершиной в точке a. Принимая во внимание внешнюю полноту и регулярность поверхности, заключаем, что $\mathscr{M}$ — гиперплоскость.

□

Непосредственным следствием положительности проективного объема и теоремы 2.3 является следующее утверждение. Обозначим через $\xi(\mathscr{M})$ максимальную кратность погружения поверхности $\mathscr{M}$ ($\xi(\mathscr{M})$ — максимальное число прообразов $x^{-1}(a)$ в $\mathscr{M}$, где a пробегает $\mathbf{R}^n$).

Следствие 2.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда*

$$\xi(\mathscr{M}) \le \frac{V_p(\mathscr{M}, a)}{\omega_p}. \tag{108}$$

3. Некоторые свойства проективного объема

3.1. Следующее утверждение обобщает на многомерный случай ранее полученное в [42] и [46] соотношение между логарифмическим объемом и конформным типом произвольной собственно погруженной поверхности $\mathscr{M}$.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная собственно погруженная поверхность конечного проективного объема. Тогда $\mathscr{M}$ имеет параболический конформный тип.*

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *В предположениях теоремы (2.4) для любого достаточно большого r имеет место оценка*

$$\limsup_{R\to\infty} \operatorname{mod}_p \Gamma(r;R) \cdot \ln^{p-1}(R/r) \le V_p(\mathscr{M}), \tag{109}$$

где $\Gamma(r;R)$ — семейство кривых в $M_0(r;R)$, соединяющие граничные компоненты $\partial M_0(r;R)$.

Доказательство. Пусть $r > d_{\mathscr{M}}(0)$. Тогда в качестве допустимой для семейства $\Gamma(r;R)$ функции $\rho(m)$ можно рассмотреть

$$\rho(m) = \frac{1}{|x(m)|\ln(R/r)}.$$

Действительно, для любой $\gamma \in \Gamma(r;R)$ выполнено

$$\int_\gamma \rho(m)\ |dx(m)| \ge \left|\int_\gamma \rho(m)\ d|x(m)|\right| = \frac{1}{\ln(R/r)}\left|\int_\gamma \frac{d|x(m)|}{|x(m)|}\right| = 1$$

По определению (48) модуля семейства кривых, имеем

$$\operatorname{mod}_p \Gamma(r;R) \le \int_{M(r;R)} \rho^p(m) \le \frac{1}{\ln^p(R/r)} \int_{M(r;R)} \frac{1}{|x(m)|^p},$$

откуда, принимая во внимание определение логарифмического объема и теорему 2.1, получим требуемое неравенство.

□

Доказательство теоремы 2.4. Пусть $F \subset M$ — произвольный компакт,

$$r = \sup_{m\in F} |x(m)|,$$

и $R > r$ выбрано произвольно. В силу свойства монотонности емкости

$$\operatorname{cap}_p(F, M'(R); M) \le \operatorname{cap}_p(\overline{M_0(r)}, M'(R); M),$$

где $M'(R)$ — замыкание множества $M \setminus M_0(R)$. С другой стороны, в силу равенства (49) из предыдущего соотношения получаем

$$\operatorname{cap}_p(F, M'(R); M) \le \operatorname{mod}_p \Gamma(r; R).$$

Но, в силу предыдущей леммы, для $p \ge 2$ величина модуля $\operatorname{mod}_p \Gamma(r; R)$ стремится к 0 при $R \to \infty$. Таким образом, исчерпание $\mathscr{U}_i = M_0(i + r)$, $i \in \mathbb{N}$, отвечает условию параболичности M. Теорема доказана полностью.

□

3.2. В этом пункте мы приводим примеры нахождения проективного объема для некоторых классов минимальных поверхностей.

Предложение 2.1. *Проективный объем $\mathbf{R}^p$ равен*

$$Q_p(\mathbf{R}^p) = \Omega_p, \tag{110}$$

где Ω_p — p-мерная мера Лебега единичного p-мерного шара в $\mathbf{R}^p$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{M} = \mathbf{R}^p$ расматривается как вложенное минимальное подмногообразие $\mathbf{R}^{p+1}$:

$$x(y) = e_{p+1} + y : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^{p+1}, \quad y \in \mathbf{R}^p,$$

где $\{e_i\}$ — подходящий ортонормированный репер в $\mathbf{R}^{p+1}$. Тогда начало координат не принадлежит $\mathscr{M}$ и, по определению проективного объема,

$$Q(\mathscr{M}) = \int\limits_{\mathbf{R}^p} \frac{\left|x(y)^{\perp}\right|^2 dy}{|x(y)|^{p+2}}.$$

Легко видеть, что $x(y)^{\perp} = e_{p+1}$, откуда находим после сферической замены переменной

$$Q(\mathscr{M}) = \int\limits_{\mathbf{R}^p} \frac{dy}{(|y|^2+1)^{p+2/2}} = \omega_p \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t^2)^{p+2/2}} =$$

$$= \frac{\omega_p}{p} = \Omega_p.$$

□

Пусть теперь $\mathscr{M} = (M, x)$ — некоторая p-мерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$. Для данного $k \geq 1$ рассмотрим новую поверхность $\mathscr{S} = \mathscr{M} \times \mathbf{R}^k$, которая задается отображением

$$\overline{x}(m; y) = (x(m); y), \quad (m; y) \in M \times \mathbf{R}^k.$$

Лемма 2.2. *В сделанных предположениях $\mathscr{S}$ — $(p+k)$-мерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^{n+k}$.*

Доказательство. Действительно, данное утверждение является простым следствием свойства разложения вектора средней кривизны декартова произведения поверхностей в сумму первоначальных векторов средних кривизн и того факта, что само многообразие $\mathbf{R}^k$ — минимальное.

□

Теорема 2.5. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная минимальная поверхность конечного проективного объема $V_p(\mathscr{M})$. Тогда $\mathscr{S} \equiv \mathscr{M} \times \mathbf{R}^k$ — также является минимальной поверхностью с конечным проективным объемом и*

$$\frac{Q_{p+k}(\mathscr{S})}{\Omega_{p+k}} = \frac{Q_p(\mathscr{M})}{\Omega_p}. \tag{111}$$

Доказательство. Если $\overline{x}$ — радиус-вектор $\mathscr{S}$, то имеет место ортогональное разложение

$$\overline{x}(s) = x(m) \oplus y, \quad s \equiv (m; y) \in M \times \mathbf{R}^k.$$

Заметим, что нормальное пространство $N_1(s)$ к поверхности $\mathscr{S}$ в точке s удобно отождествить с нормальным пространством $N(m)$ к $\mathscr{M}$, рассматриваемой как поверхность в $\mathbf{R}^n$, и будем записывать $x^{\perp}(m)$ вместо $x(m)^{N(m)}$. Тем самым,

$$\left|\overline{x}^{N_1}\right|^2 = \left|x(m)^{N_1} + y^{N_1}\right|^2 = \left|x^{\perp}(m)\right|^2.$$

С другой стороны,

$$|\overline{x}|^2 = |x(m)|^2 + |y|^2.$$

Подставляя найденные выражения в (102), получим

$$Q_p(\mathscr{S}) = \int\limits_{\mathscr{M}\times\mathbf{R}^k} \frac{\left|\overline{x}(m)^{N_1(s)}\right|^2}{|\overline{x}|^{p+k+2}}\, dm\, dy = \int\limits_{\mathscr{M}\times\mathbf{R}^k} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2}{(|x(m)|^2 + |y|^2)^{\alpha}}\, dm\, dy.$$

где $\alpha = \dfrac{k+p+2}{2}$. Тогда, используя определение

$$Q_p(\mathscr{M}) = \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2}{|x(m)|^{p+2}}\, dm,$$

получим

$$Q_p(\mathscr{S}) = \int\limits_{\mathscr{M}\times\mathbf{R}^k} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2}{(|x(m)|^2 + |y|^2)^{\alpha}}\, dm\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathscr{M}} \left|x^{\perp}(m)\right|^2 dm \int\limits_{\mathbf{R}^k} \frac{dy}{(|x|^2+|y|^2)^{\alpha}} = \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2 dm}{|x(m)|^{k+p+2}} \int\limits_{\mathbf{R}^k} \frac{dy}{\left(1+\left(\frac{|y|}{|x(m)|}\right)^2\right)^{\alpha}}.$$

Производя замену переменных во внутреннем интеграле $y = |x(m)|z$, получим следующее соотношение

$$\int\limits_{\mathscr{M}} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2 dm}{|x(m)|^{k+p+2}} \int\limits_{\mathbf{R}^k} \frac{|x(m)|^k\, dz}{(1+|z|^2)^{\alpha}} = \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2 dx}{|x(m)|^{p+2}} \int\limits_{\mathbf{R}^k} \frac{dz}{(1+|z|^2)^{\alpha}}$$

Из последнего выражения видно, что

$$Q_p(\mathscr{S}) = cQ_p(\mathscr{M}),$$

где постоянная c от поверхности $\mathscr{M}$ не зависит. Применяя предложение 2.1, получим

$$c = \frac{Q_p(\mathbf{R}^{p+k})}{Q_p(\mathbf{R}^p)} = \frac{\Omega_{p+k}}{\Omega_p},$$

откуда следует утверждение теоремы.

□

3.3. Следующая формула дает альтернативный вариант вычисления логарифмического объема $\mathscr{M}$.

Теорема 2.6. *Пусть $\mathscr{M} \in \mathbf{R}^n$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность конечного проективного объема. Тогда для любого $a > 0$ выполнено*

$$V_p(\mathscr{M}) = p \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{\left|x^{\perp}\right|^2 + a}{\left(|x|^2+a\right)^{\frac{p+2}{2}}}. \tag{112}$$

Доказательство. Пусть $a > 0$ и $\lambda = \sqrt{a}$. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^1$ и поверхность $\mathscr{M}_\lambda$, задаваемую вектор-функцией $x_\lambda(m) = x(m) + \lambda e_{n+1}$, где $x(m)$ — параметризация $\mathscr{M}$. Другими словами, поверхность $\mathscr{M}_\lambda$ является параллельным переносом поверхности $\mathscr{M}$ вдоль вектора e_{n+1} на λ.

Легко видеть, что нормальное пространство $N_\lambda(m)$ к поверхности $\mathscr{M}_\lambda$ в точке $m \in M$ является прямой суммой

$$N_\lambda(m) = N(m) \oplus L,$$

где $N(m)$ — нормальное пространство к $\mathscr{M}$ и L — линейная оболочка вектора e_{n+1}. Следовательно, имеют место равенства

$$|x_\lambda^{N_\lambda}|^2 = |x^N|^2 + \lambda^2, \qquad |x_\lambda|^2 = |x|^2 + \lambda^2,$$

и проективный объем $\mathscr{M}_\lambda$ относительно начала координат равен

$$Q_p(\mathscr{M}_\lambda; 0) = \int\limits_M \frac{|x_\lambda^{N_\lambda}|^2}{|x_\lambda|^{p+2}} = \int\limits_M \frac{|x^N|^2 + a}{\left(|x|^2+a\right)^{\frac{p+2}{2}}}.$$

С другой стороны, поверхность $\mathscr{M}_\lambda$ не проходит через 0. Поэтому $V_p(\mathscr{M}_\lambda) = pQ_p(\mathscr{M}_\lambda; 0)$. Так как по теореме 2.1 логарифмический объем $\mathscr{M}$ инвариантен относительно сдвигов в пространстве, то $V_p(\mathscr{M}_\lambda) = V_p(\mathscr{M})$, откуда следует (112).

□

Следствие 2.4. *Пусть $\mathscr{M} \in \mathbf{R}^n$ — p-мерная внешне полная минимальная поверхность конечного проективного объема. Тогда*

$$V_p(\mathscr{M}) = p \lim_{a\to+\infty} \left(a \cdot \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{1}{\left(|x|^2 + a\right)^{\frac{p+2}{2}}} \right). \tag{113}$$

Доказательство. Имеем из (112)

$$V_p(\mathscr{M}) = p \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{|x^\perp|^2}{\left(|x|^2 + a\right)^{\frac{p+2}{2}}} + pa \int\limits_{\mathscr{M}} \frac{1}{\left(|x|^2 + a\right)^{\frac{p+2}{2}}} \equiv I_1(a) + I_2(a).$$

С другой стороны, первый интеграл $I_1(a)$ стремится к нулю при $a \to +\infty$, откуда следует (113).

□

Глава 3

Минимальные подмногообразия конечного проективного объема

В настоящей главе мы устанавливаем связь между величиной проективного объема и числом концов минимальных поверхностей. Основной результат параграфа 1 состоит в том, что минимальное подмногообразие произвольной коразмерности и конечного проективного объема всегда имеет конечное число концов $\ell(\mathscr{M})$. Более того, устанавливается равномерная оценка $\ell(\mathscr{M}) \le c(p,n)V_p(\mathscr{M})$, где $c(n,p)$ — некоторая универсальная постоянная. В данной главе мы также получаем оценки проективного объема для минимальных поверхностей в терминах их интегрально-геометрических характеристик. В параграфе 2 доказывается оценка сверху проективного объема для минимальных гиперповерхностей с компактным краем, имеющих конечную кратность проекции относительно некоторой гиперплоскости. В параграфе 3 рассматриваются минимальные поверхности, имеющие конечную кратность проекции относительно грассманиана. Подчеркнем, что в последнем случае оценка проективного объема получена для поверхностей произвольной коразмерности. Применяя результаты предыдущей главы, мы получаем оценки числа концов таких поверхностей в терминах кратности проекции и интегральных средних относительно сферы.

Оставшаяся часть главы посвящена двумерному случаю. Используя результаты § 5, мы получаем в параграфе 4 оценки индекса гармонических функций на минимальной поверхности. Как следствие, доказывается обобщение теоремы Бернштейна для двумерных минимальных поверхностей данного топологического типа, а также получены оценки числа горбушек на минимальных поверхностях конечного проективного объема.

1. Оценка числа концов минимальной поверхности

1.1. Напомним классический результат Р. Оссермана [54]: в упомянутом случае многообразие M гомеоморфно некоторой компактной римановой поверхности $\overline{M}$ с конечным числом $\ell(\mathscr{M})$ выброшенных точек (концов). При этом имеет место оценка

$$g(\mathscr{M}) + \ell(\mathscr{M}) - 1 \le \frac{1}{4\pi}\int_{\mathscr{M}} |K(m)|, \tag{114}$$

где $g(\mathscr{M})$ — род поверхности $\overline{M}$. В частности, $\ell(\mathscr{M}) < \infty$. В силу положительности числа концов, оценка (114) задает ограничение на род поверхности $g(\mathscr{M})$. С другой стороны, как показывают недавние примеры, построенные в [97], [26], существуют семейства двумерных минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^3$, имеющие фиксированное число концов и как угодно большую интегральную гауссову кривизну. В частности, данное значение интегральной гауссовой кривизны минимальной поверхности не дает правильной верхней оценки числа концов поверхности.

Метод доказательства оценки (114) является прямым следствием существования глобальных изотермических координат на любой двумерной минимальной поверхности. В многомерном случае существование изотермических координат (даже локально) на минимальной поверхности является довольно редкой ситуацией. Более того, известные примеры минимальных подмногообразий показывают, что оценки в форме, аналогичной (114) (даже с заменой гауссовой кривизны на симметрические функции от главных кривизн), без дополнительных ограничений не существует [104], [3].

Отметим также недавние работы Касуе [29] и Касуе и Шугахара [30], где доказывается конечность числа концов минимальных подмногообразий высших размерностей при излишних, с нашей точки зрения, ограничениях на асимптотическое поведение второй квадратичной формы. Причем связь между внешней геометрией таких поверхностей и налагаемыми условиями остается неясной. Так, например, в указанный класс попадают лишь поверхности с достаточно "хорошим"поведением гауссова образа на бесконечности. По данной причине минимальные графики, не являющиеся гиперплоскостями в $\mathbf{R}^{n+1}$, не удовлетворяют указанным условиям (при $n \geq 8$, как известно, такие поверхности существуют).

Из результатов, доказываемых в главе 3 настоящей работы, следует, что проективный объем обширного класса минимальных поверхностей, включающий в себя графики, является конечным. В частности, конечность проективного объема не влечет a priori стабилизацию гауссова образа вблизи концов поверхности.

1.2. Следующее утверждение является ключевым для оценок числа концов минимальных поверхностей с конечным проективным объемом.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная внешне полная связная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ с краем ∂M или без, имеющая конечный логарифмический объем $V_p(\mathscr{M})$. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов $\ell(\mathscr{M})$ и выполнено*

$$\ell(\mathscr{M}) \leq \frac{2^p}{\omega_p} V_p(\mathscr{M}). \tag{115}$$

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathscr{D}$ — связная p-мерная минимальная поверхность с границей $\partial\mathscr{D} \subset \partial B_0(R_1) \cup \partial B_0(R_2), \quad R_2 > R_1 > 0$. Тогда*

$$\mathrm{Area}_p \mathscr{D} \geq \frac{\omega_p}{p} \left(\frac{R_2 - R_1}{2} \right)^p, \tag{116}$$

где $\mathrm{Area}_p \mathscr{D}$ — p-мерная лебегова мера поверхности $\mathscr{D}$.

Доказательство. Пусть сначала $\mathscr{D}$ — компактная минимальная поверхность, проходящая через начало координат и такая, что ее край содержится в сфере $\partial B_0(R)$. Положим

$$A(t) = \mathrm{Area}_p(\mathscr{D} \cap B_0(t))\,.$$

Тогда, используя соотношения

$$\operatorname{div} x^{\top}(m) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{div} x_i e_i^{\top} = \sum_{i=1}^{n} \left| e_i^{\top} \right|^2 = p, \tag{117}$$

после интегрирования

$$pA(t) = \int\limits_{\mathscr{D}\cap B_0(t)} \operatorname{div} x^{\top}(m) = t \int\limits_{\mathscr{D}\cap\partial B_0(t)} \frac{\left|x^{\top}(m)\right|}{|x(m)|} = t\,J(t), \tag{118}$$

получим, что функция

$$\frac{p\,A(t)}{t^p} = \frac{J(t)}{t^{p-1}}$$

является неубывающей. Более того,

$$\lim_{t\to+0} \frac{p\,A(t)}{t^p} = \lim_{t\to+0} \frac{J(t)}{t^{p-1}} = \omega_p \cdot (0\#\mathscr{D}),$$

где $0\#\mathscr{D}$ означает кратность в нуле. Следовательно, для всех $t > 0$ имеем

$$\frac{\operatorname{Area}_p(\mathscr{D}\cap B_0(t))}{t^p \omega_p} \geq \lim_{t\to+0} \frac{A(t)}{t^p} = \frac{1}{p}\,(0\#\mathscr{D}). \tag{119}$$

Первый случай леммы доказан.

Теперь предположим, что $\partial\mathscr{D} \subset \partial B_0(R_1) \cup \partial B_0(R_2)$ и введем $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. При таком выборе, в силу связности поверхности $\mathscr{D}$, множество $\mathscr{D} \cap \partial B_0(R)$ не пусто. Пусть a — произвольная точка в $\mathscr{D} \cap \partial B_0(R)$. Тогда для $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D} \cap B_a(r)$ имеем

$$\partial\mathscr{D}_1 \subset \partial B_a(r), \tag{120}$$

где $r = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)$. Ввиду (119) и включения $\mathscr{D}_1 \subset \mathscr{D}$, (120) влечет (116) и, таким образом, лемма доказана полностью.

$\square$

Замечание 3.1. Заметим, что в случае глобально минимальной поверхности (любая часть $\mathscr{D}$ реализует минимум площади в классе поверхностей с той же границей) лемма 3.1 также может быть получена применением общего результата А. Т. Фоменко [90, гл. 3, § 12] (см. также [1]).

Доказательство теоремы 3.1. Учитывая инвариантные свойства логарифмического объема, не ограничивая общности рассуждений, можно предполагать, что начало координат 0 отделено от $\mathscr{M}$ и $V_p(\mathscr{M}) = V_p(\mathscr{M}, 0)$.

В качестве компактного исчерпания многообразия M рассмотрим семейство семейство евклидовых шаров с центром в начале координат и бесконечно возрастающей последовательностью R_i радиусов, являющихся регулярными значениями функции

$f(m) = |x(m)|$. Пусть край поверхности содержится внутри всех таких шаров. Зафиксируем произвольно $R = R_i$ и пусть $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_k \ldots$ — суть все открытые компоненты связности множества $M \setminus \overline{M_0(R)}$. Заметим, что $x(\partial\mathscr{D}_k) \subset \partial B_0(R)$ и в силу (117)

$$\Delta f(m) = \operatorname{div} \frac{x^\top(m)}{|x(m)|} = \frac{p}{|x(m)|} - \frac{|x^\top(m)|^2}{|x(m)|^3} > 0.$$

Следовательно, применяя принцип максимума, получим, что все $\mathscr{D}_k$ являются областями с некомпактными замыканиями. Более того, в силу регулярности значения R, заключаем, что число $l = l(R)$ компонент $\mathscr{D}_k$ конечно и является неубывающей функцией от R (см. лемму 1.1). Положим для $t > R$,

$$J_k(t) = \frac{1}{t} \int\limits_{\partial B_0(t)\cap\mathscr{D}_k} \left|x^\top(m)\right|.$$

Тогда, рассуждая аналогично доказательству теоремы 2.1, получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{l} J_k(t) = J(t) \ \leq \ V_p(\mathscr{M}) t^{p-1}. \tag{121}$$

С другой стороны, используя лемму 3.1, мы имеем

$$\operatorname{Area}_p\{m \in \mathscr{D}_k : \ |x(m)| < t\} \geq \frac{\omega_p (t-R)^p}{p\, 2^p},$$

и, после суммирования по всем $k \leq l$ получим, что

$$\operatorname{Area}_p(M_0(t) \setminus M_0(R)) \geq \frac{l\omega_p}{p2^p}(t-R)^p.$$

Используя (118) и (121), имеем последовательность неравенств

$$\frac{l\omega_p}{p2^p}(t-R)^p \leq \operatorname{Area}_p(M_0(t) \setminus M_0(R)) \leq \operatorname{Area}_p(M_0(t)) =$$

$$= \frac{tJ(t)}{p} \leq \frac{V_p(\mathscr{M})t^p}{p},$$

откуда, деля на t^p и устремляя $t \to \infty$, получим

$$l(R) = l \leq \ \frac{V_p(\mathscr{M})2^p}{\omega_p}.$$

Таким образом, число компонент дополнения $M \setminus F_i$, где $F_i = M_0(R_i)$, равномерно ограничено по i. Тогда, в силу леммы 1.1, M имеет конечное число концов $\ell(M)$ и

$$\ell(\mathscr{M}) \equiv \ell(M) = \lim_{i\to\infty} l(R_i) \leq \frac{V_p(\mathscr{M})2^p}{\omega_p},$$

что доказывает теорему полностью.

□

Следствие 3.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно погруженная связная p-мерная минимальная поверхность, имеющая ограниченный проективный объем. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов и*

$$\ell(M) \quad \leq \quad \frac{Q_p(\mathscr{M})2^p p}{\omega_p}.$$

1.3. Как упоминалось выше, если $\mathscr{M}$ является двумерной полной минимальной поверхностью с конечной интегральной гауссовой кривизной, то она конформно эквивалентна некоторой компактной римановой поверхности с конечным числом удаленных точек. Из предложения 1.2 следует, что это число совпадает с числом $\ell(\mathscr{M})$ концов $\mathscr{M}$. Кроме того, из результатов [54] следует, что в некоторой окрестности каждой своей бесконечно удалённой точки такая поверхность является графиком относительно подходящей системы координат, и в [104] доказано асимптотическое разложение для соответствующей функции высоты. Непосредственные вычисления показывают, что логарифмический объем $V_2(D_i)$ каждого конца такой поверхности равен 2π. Поэтому

$$V_2(\mathscr{M}) = 2\pi\ell(\mathscr{M}) = \omega_2\ell(\mathscr{M}),$$

то есть *приведенный* логарифмический объем

$$V_p'(\mathscr{M}) \equiv \frac{V_p(\mathscr{M})}{\omega_p}$$

в этом случае в точности совпадает с числом концов. В частности, отметим, что $V_2'(\mathscr{M})$ — целое число для поверхностей конечной интегральной гауссовой кривизны. В высших размерностях, как следует из таблицы 1 (см. § 2), приведенный объем уже не обязательно будет целым числом.

2. Оценки проективного объема n-мерных минимальных графиков

В данном параграфе мы рассматриваем класс минимальных гиперповерхностей в $\mathbf{R}^{n+1}$, являющийся обобщением непараметрических поверхностей. Будем говорить, что внешне полная n-мерная поверхность $\mathscr{M}$, заданная в $\mathbf{R}^{n+1}$, является s-графиком относительно некоторой гиперплоскости Π, если выполнены следующие условия:

(1) отображение проекции $\mathrm{Pr} : \mathscr{M} \to \Pi$ собственное, то есть прообраз $(\mathrm{Pr} \circ x)^{-1}(F)$ любого компакта $F \subset \Pi$ является компактом в M;

(2) мощность множества точек-прообразов $(\mathrm{Pr} \circ x)^{-1}(a)$ для любой точки $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ не превосходит s.

Нетрудно видеть, что, в силу собственности погружения, понятие s-графика совпадает с обычным определением графика при $s = 1$.

Метод, используемый нами далее, является подходящим обобщением на многомерный случай приема, предложенного ранее в работе [46]. Важно отметить, что даже в двумерном случае полученная ниже оценка значительно улучшает имеющуюся в [46].

Основным результатом настоящего параграфа является следующая

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — внешне полная минимальная поверхность с возможно непустым компактным краем, являющаяся s-графиком. Тогда*

$$V_n(\mathscr{M}) \le sk_n\,\omega_n, \tag{122}$$

где

$$k_n = \frac{1 + a_n^2(n-1)^2}{2a_n(n-1)}, \qquad a_n = \frac{\pi\Gamma(n-1)}{2^{n-1}\Gamma^2(n/2)} \tag{123}$$

Доказательство. Принимая во внимание инвариантность условия минимальности и величины проективного объема относительно действия группы сдвигов и поворотов евклидова пространства, можно предполагать, что гиперплоскость Π задается уравнением $x_{n+1} = 0$ и что начало координат не принадлежит поверхности $\mathscr{M}$. С другой стороны, логарифмический объем является инвариантом минимальной поверхности относительно гомотетии пространства. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что проекция $\mathrm{Pr}(\partial\mathscr{M})$ края поверхности (в том случае, если он не пуст) расположена внутри единичного шара гиперплоскости Π.

Сначала оценим интеграл вида

$$I(R) \equiv \int\limits_{D(R)} \frac{1}{|x|^n},$$

где интегрирование ведется по множеству

$$D(R) = \{m \in M:\ 1 < \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < R\}.$$

При этом отметим, что

$$\int\limits_{M_0(1;R)} \frac{1}{|x|^n} < I(R), \tag{124}$$

ввиду очевидного включения $M_0(1; R) \subset D(R)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию, определенную всюду в $D(R)$

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{|v|^{n-1}}\varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right).$$

Здесь и далее $v = (x_1, \ldots, x_n, 0)$, а функция φ определена с точностью до постоянного слагаемого следующим дифференциальным соотношением

$$\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{n/2}},$$

и ее точный вид будет выбран позже.

Используя гармоничность координатных функций x_k минимального погружения и применяя формулу Стокса, получим

$$\int\limits_{D(R)} \langle\nabla x_{n+1}, \nabla f\rangle = \int\limits_{\partial D(R)} f\langle\nabla x_{n+1}, \nu\rangle,$$

где ν — единичный внешний вектор нормали к границе $\partial D(R)$.

Вычислим значения нужных градиентов:

$$\nabla x_{n+1} = e_{n+1}^{\top}, \quad \nabla |v| = \frac{v^{\top}}{|v|}.$$

Действительно, первое равенство непосредственно следует из определения связности погруженного многообразия. Проверим второе равенство

$$\nabla |v| = \nabla \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} \left(2x_1 \nabla x_1 + \cdots + 2x_n \nabla x_n\right) =$$

$$= \frac{1}{|v|}\left(x_1 {e_1}^{\top} + \cdots + x_n {e_n}^{\top}\right) = \frac{1}{|v|}(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)^{\top} = \frac{v^{\top}}{|v|}.$$

Следовательно,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial |v|} \nabla |v| + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \nabla x_{n+1} = -\frac{(n-1)\nabla |v|}{|v|^n} \varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) -$$

$$-\frac{x_{n+1}\nabla |v|}{|v|^{n+1}} \varphi'\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) + \frac{\nabla x_{n+1}}{|v|^n} \varphi'\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) = -\frac{(n-1)\nabla |v|}{|v|^n} \varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) -$$

$$-\frac{\nabla |v| x_{n+1}}{|v|^{n+1}} \frac{|v|^n}{\left(|v|^2 + x_{n+1}^2\right)^{n/2}} + \frac{\nabla x_{n+1}}{\left(|v|^2 + x_{n+1}^2\right)^{n/2}}.$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\nabla f = -\frac{v^{\top}}{|v|^{n+1}} \left[(n-1)\varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) + \frac{x_{n+1}|v|^{n-1}}{\left(|v|^2 + x_{n+1}^2\right)^{n/2}}\right] +$$

$$+ \frac{e_{n+1}^{\top}}{\left(|v|^2 + x_{n+1}^2\right)^{n/2}}.$$

Домножая скалярно обе части на ∇x_{n+1}, получим:

$$\langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle = -\frac{\langle v^{\top}, e_{n+1}^{\top}\rangle}{|v|^{n+1}} \left[(n-1)\,\varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) + \right. \tag{125}$$

$$\left. + \frac{x_{n+1}|v|^{n-1}}{\left(|v|^2 + x_{n+1}^2\right)^{n/2}}\right] + \frac{|e_{n+1}^{\top}|^2}{\left(|v|^2 + x_{n+1}^2\right)^{n/2}}.$$

Обозначим через N вектор единичной нормали к поверхности $\mathscr{M}$. Тогда, в силу ортогональности векторов e_{n+1} и v в $\mathbf{R}^{n+1}$, имеем

$$\langle v^{\top}, {e_{n+1}}^{\top}\rangle = \langle e_{n+1} - {e_{n+1}}^{\perp}, v - v^{\perp}\rangle =$$

$$= \langle e_{n+1}, v\rangle - \langle e_{n+1}, v^{\perp}\rangle - \langle e_{n+1}^{\perp}, v\rangle + \langle e_{n+1}^{\perp}, v^{\perp}\rangle,$$

Используя равенства

$$e_{n+1}^{\perp} = N\langle e_{n+1}, N\rangle, \quad v^{\perp} = N\langle v, N\rangle,$$

будем иметь:

$$\langle v^{\top}, e_{n+1}^{\top}\rangle = -\langle e_{n+1}, N\rangle\langle v, N\rangle - \langle e_{n+1}, N\rangle\langle v, N\rangle +$$

$$+\langle v, N\rangle\langle N, N\rangle\langle e_{n+1}, N\rangle = -\langle e_{n+1}, N\rangle\langle v, N\rangle.$$

Заметим также, что

$$|e_{n+1}{}^{\top}|^2 = 1 - \langle e_{n+1}, N\rangle^2.$$

Подставляя найденные выражения в (125), получим

$$\langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle = \frac{1-\langle e_{n+1}, N\rangle^2}{\left(|v|^2+x_{n+1}^2\right)^{n/2}} +$$

$$+\frac{\langle v, N\rangle\langle e_{n+1}, N\rangle}{|v|^{n+1}}\left[(n-1)\varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right)+\frac{x_{n+1}|v|^{n-1}}{\left(|v|^2+x_{n+1}^2\right)^{n/2}}\right] =$$

$$= \frac{\langle e_{n+1}, N\rangle}{|v|^n}\left[\frac{\langle v, N\rangle}{|v|}\left((n-1)\varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right)+\frac{x_{n+1}|v|^{n-1}}{\left(|v|^2+x_{n+1}^2\right)^{n/2}}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{\langle e_{n+1}, N\rangle|v|^n}{\left(|v|^2+x_{n+1}^2\right)^{n/2}}\right] + \frac{1}{\left(|v|^2+x_{n+1}^2\right)^{n/2}}$$

и, вводя замену переменных $\xi = x_{n+1}/|v|$, приходим к соотношению

$$\langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle = \frac{\langle e_{n+1}, N\rangle}{|v|^n}\left[\frac{\langle v, N\rangle}{|v|}\left((n-1)\varphi\left(\xi\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2}}\right) - \frac{\langle e_{n+1}, N\rangle}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2}}\right] + \frac{1}{|x|^n},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{|x|^n} = \langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle +$$

$$+\frac{\langle e_{n+1}, N\rangle}{|v|^n}\left[\frac{\langle e_{n+1}, N\rangle}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2}} - \frac{\langle v, N\rangle}{|v|}\left((n-1)\varphi\left(\xi\right)+\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2}}\right)\right].$$

Используя неравенство Коши, получаем оценку

$$\frac{1}{|x|^n} \le \langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle +$$

$$+\frac{|\langle e_{n+1}, N\rangle|}{|v|^n}\left[\frac{1}{\left(\left(1+\xi^2\right)^{n/2}\right)^2} + \left((n-1)\varphi\left(\xi\right)+\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2}}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Найдем функцию $\varphi(\xi)$ в явном виде, используя выражения для $\varphi'(\xi)$. Имеем

$$\varphi\left(\xi\right) = \int\limits_0^{\xi} \frac{d\tau}{\left(1+\tau^2\right)^{n/2}} + c,$$

где постоянная c будет выбрана позже. Обозначим через

$$\Phi^2(\xi) = \frac{1}{\left(1+\xi^2\right)^n} + \left((n-1)\varphi\left(\xi\right)+\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{n/2}}\right)^2$$

и найдем точную верхнюю грань $\Phi(\xi)$ на $[0;+\infty)$. Заметим, что

$$\Phi\,(0)=\sqrt{1+(n-1)^2c^2},\quad \Phi\,(\infty)=(n-1)\biggl(a_n+c\biggr),$$

где $a_n=\varphi\,(\infty)$, и исследуем $\Phi\,(\xi)$ на максимум. Имеем

$$2\Phi\Phi'=\frac{n}{(1+\xi^2)^{n/2+1}}\left[(n-1)\varphi\,(\xi)+\xi\varphi'\,(\xi)\right]-\frac{n\xi}{(1+\xi^2)^{n+1}}=$$

$$=\frac{n}{(1+\xi^2)^{n+1}}\left[\left((n-1)\varphi\,(\xi)+\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{n/2}}\right)(1+\xi^2)^{n/2}-\xi\right]=$$

$$=\frac{n(n-1)\varphi\,(\xi)}{(1+\xi^2)^{n+2/2}}.$$

Таким образом, $\Phi'(\xi)=0$ только при $\varphi\,(\xi)=0$. Рассмотрим три случая

Случай 1. Если >0, то $\varphi\,(\xi)>0$ при всех $\xi\geq 0$ и $\Phi'(\xi)>0$, то есть

$$\max_{\xi\geq 0}\Phi(\xi)=\Phi(+\infty)=(n-1)(a_n+c).$$

Случай 2. Если $c\in(-a_n;0]$, то $\varphi\,(\xi)$ имеет единственный нуль, скажем, $\xi_0>0$, и выполнено

$$\varphi\,(\xi)>0\quad\text{при}\quad \xi>\xi_0,\qquad \varphi\,(\xi)<0\quad\text{при}\quad 0<\xi<\xi_0.$$

Следовательно, при $\xi=\xi_0$, Φ достигает локального минимума. Тогда

$$\max_{\xi\geq 0}\Phi(\xi)=\max\left\{\Phi(0);\Phi(\infty)\right\}=\max\left\{\sqrt{1+(n-1)^2c^2};(n-1)(a_n+c)\right\}.$$

Варьируя постоянную c в пределах от $-a_n$ до 0, можно добиться оптимального (минимального) значения величины $\max_{\xi\geq 0}\Phi(\xi)$.

Именно, соответствующее c_0 находится из условия

$$\sqrt{1+(n-1)^2c_0^2}=(n-1)(a_n+c_0).$$

Решая это уравнение, получаем

$$c_0=\frac{1-(n-1)^2a_n^2}{2(n-1)^2a_n}.$$

Проверим отрицательность $_0$, или, что эквивалентно, справедливость неравенства $_n(n-1)>1$. Последнее неравенство следует из оценки

$$a_n=\int\limits_0^\infty\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{n/2}}>\int\limits_0^\infty\frac{d\xi}{(1+2\xi+\xi^2)^{n/2}}=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{d\xi}{(1+\xi)^n}=\frac{1}{n-1}.$$

Таким образом, при найденном выше $_0$ получим:

$$\max_{\xi\geq 0}\Phi(\xi)=(n-1)(a_n+c_0)=(n-1)\left(a_n+\frac{1-(n-1)^2a_n^2}{2(n-1)^2a_n}\right)=$$

$$= \frac{1 + a_n^2(n-1)^2}{2a_n(n-1)}.$$

Случай 3. Если $c \le -a_n, \quad$ то $\quad \Phi'(\xi) < 0$,

$$\max_{\xi \ge 0} \Phi(\xi) = \Phi(0) = \sqrt{1 + c^2} \ge \sqrt{1 + a_n^2}.$$

Анализ приведенных случев показывает, что оптимальным в смысле наилучшей оценки будет случай 2 и, тем самым,

$$\Phi(\xi) \le k_n \equiv \frac{1 + a_n^2(n-1)^2}{2a_n(n-1)}.$$

В итоге, получаем оценку

$$\frac{1}{|x|^n} \le k_n \frac{|\langle e_{n+1}, N\rangle|}{|v|^n} + \langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle. \tag{126}$$

Покажем теперь, что для минимальных -графиков выполнено

$$\int\limits_{D(R)} \langle \nabla f, \nabla x_{n+1}\rangle \equiv \int\limits_{\partial D(R)} f \langle \nabla x_{n+1}, \nu\rangle = O(1),$$

при $R \to +\infty$.

По условию 1) определения s-графиков, для почти всех значений $R > 0$ по теореме Сарда множество $\partial D(R)$ представляет собой конечный набор замкнутых $(n-1)$-мерных компактных многообразий.

Кроме того,

$$|\langle \nabla x_{n+1}, \nu\rangle| = |\langle e_{n+1}, \nu\rangle| \le |e_3^W|,$$

где W — двумерное пространство, натянутое на вектора ν и N. Заметим, что W — нормальное пространство в соответствующей точке к $\partial D(R)$ и, по формуле проекции, будем иметь

$$\left| \int\limits_{\partial D(R)} f \langle \nabla x_{n+1}, \nu\rangle \right| \le \int\limits_{\partial D(R)} |f|\, |\langle \nabla x_{n+1}, \nu\rangle| \le$$

$$\le \mu(R) \int\limits_{\partial D(R)} |e_{n+1}^W| \le \mu(R) s \int\limits_{\mathrm{Pr}(\partial D(R))} dv \le s\mu(R)\, \omega_n R^{n-1},$$

где $\mu(R) = \max_{m \in \partial D(R)} |f(m)|$. Имеем

$$\max_{m \in \partial D(R)} |f(m)| = \max_{m \in \partial D(R)} \frac{1}{|v|^{n-1}} \left| \varphi\left(\frac{x_{n+1}}{|v|}\right) \right| =$$

$$= \max_{m \in \partial D(R)} \frac{1}{R^{n-1}} |\varphi\left(\frac{x_{n+1}}{R}\right)| \le \frac{A}{R^{n-1}},$$

где $A = \max_{\xi \ge 0} \varphi(\xi) < \infty$.

Тогда
$$\left| \int\limits_{\partial D(R)} f\langle \nabla x_{n+1}, \nu\rangle \right| \le s\,\omega_n A,$$
таким образом, интеграл ограничен независимо от R.

Чтобы оценить интеграл
$$\int\limits_{D(R)} \frac{|\langle e_{n+1}, N\rangle|}{|v|^n}$$
заметим, что отображение проекции $\mathrm{Pr} : \mathscr{M} \to \mathbf{R}^n$ имеет вид $\mathrm{Pr}(x) = (x_1, \cdots, x_n)$, и, тем самым, его якобиан равен $|d\mathrm{Pr}_x| = |\langle e_{n+1}, N\rangle|$. Следовательно,
$$\int\limits_{D(R)} \frac{|\langle e_{n+1}, N\rangle|}{|v|^n} \le s \int\limits_{1<|v|<R} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{|v|^n} =$$
$$= s\,\omega_n \int\limits_1^R \frac{d\rho}{\rho} = s\,\omega_n \ln R.$$

Приходим к оценке

(127)
$$\int\limits_{D(R)} \frac{1}{|x|^n} \le k_n s\,\omega_n \ln R + s\omega_n A,$$
откуда, по определению проективного объема получим
$$V_n(\mathscr{M}) \le k_n s\,\omega_n,$$
что и требовалось доказать.

$\square$

Применяя следствие 2.2 в случае $s = 1$, получим

Следствие 3.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — n-мерная непараметрическая минимальная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$, возможно с непустым компактным краем. Тогда*

(128)
$$\omega_n < V_n(\mathscr{M}) \le k_n\,\omega_n.$$

Проиллюстрируем полученную оценку следующей таблицей:

Таблица 1.

n	k_n
2	1.1037
3	1.2500
4	1.3903
5	1.5208
6	1.6424
7	1.7563
8	1.8636
9	1.9653
10	2.0621

Замечание 3.2. При $n \geq 8$ существуют нетривиальные минимальные графики и, таким образом, оценка (128) становится содержательной даже для минимальных графиков. Сравнение с известными результатами Алларда [1], Бомбьери и Джусти [7] показывает, что доказанная нами оценка проективного объема дает скорость роста объема для минимальных графиков, в значительной степени улучшающую имеющиеся оценки в этих работах. Более того, методы, используемые в упомянутых работах, работают только в предположении, что поверхность не имеет края, а кратность проекции поверхности в точности равна 1. Явные вычисления даже для двумерных минимальных поверхностей коразмерности, большей 1, заданных в непараметрической форме, показывают, что проективный объем может быть бесконечным.

Легко проверить, что при больших n, как следствие формулы Стирлинга

$$k_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{8}}.$$

Используя следствие 3.1, получим следующее утверждение

Следствие 3.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — внешне полная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$, являющаяся s-графиком относительно некоторой гиперплоскости. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов $\ell(\mathscr{M})$ и*

$$\ell(M) \leq 2^n k_n s, \tag{129}$$

где k_n — постоянная из (123).

3. Минимальные поверхности, конечнократные относительно сферы

3.1. Предположим, что $\mathscr{M}$ является гиперповерхностью в $\mathbf{R}^n$. Тогда, фиксируя точку $b \in \mathbf{R}^n \setminus x(M)$, можно ввести *считающую функцию* $\mathscr{N}(e,b)$ для кратности радиальной проекции относительно b, полагая для каждого направления $e \in \mathbf{R}^n$, $|e| = 1$,

$$\mathscr{N}(e,b) = \sum_{a \in L_b(e)} a\#\mathscr{M} \equiv \#L_b(e) \cap x(M),$$

где $L_b(e)$ — луч с началом в b и направлением e и $\#L_b(e) \cap x(M)$ означает алгебраическое число точек пересечения луча $L_b(e)$ с поверхностью $\mathscr{M}$. Число $\mathscr{N}(e,b)$ может быть также интерпретировано как полная кратность центральной проекции

$$\pi_b : \mathscr{M} \to S^{n-1}, \quad \pi_b(y) = \frac{y-b}{|y-b|}, \tag{130}$$

в точке e.

Пусть теперь $\operatorname{codim}\mathscr{M} > 1$. Тогда образ $\mathscr{M}$ при проекции (130) имеет нулевую $(n-1)$-мерную меру на S^{n-1} и второе определение величины $\mathscr{N}(e,b)$ несодержательно. Мы приводим приложение первого определения к случаю произвольной коразмерности.

Пусть $G_n^p(b)$ — грассманово многообразие всех неориентированных $(n-p)$-мерных линейных многообразий (далее — плоскостей) γ, проходящих через b. Тогда $G_n^p(b)$ может быть оснащено единственной мерой Хаара $d\gamma$, которая инвариантна относительно действия группы движений, сохраняющих b, нормализованной условием

$$\int\limits_{G_n^p(b)} d\gamma \;=\; 1.$$

Пусть $R > 0$. По теореме Сарда мы знаем, что для $d\gamma$-почти всех плоскостей $\gamma \in G_n^p(b)$ множество прообразов $x^{-1}(x(M) \cap \gamma \cap B_b(R))$ дискретно. Обозначим через $\mathscr{N}(b,\gamma;R)$ мощность соответствующего множества. Тогда [88, § 3.2] последняя величина является γ-измеримой. Положим

$$\mathscr{N}(b;R) = \int\limits_{G_n^p(b)} \mathscr{N}(b,\gamma;R)d\gamma$$

Данная характеристика может быть интерпретирована как средняя кратность пересечений $(n-p)$-мерных плоскостей с частью $\mathscr{M}$, удаленной от b не далее, чем на R. Ясно, что $\mathscr{N}(b;R)$ является неубывающей функцией аргумента R и, таким образом, существует конечный или бесконечный предел

$$\mathscr{N}(b) = \lim_{R\to\infty} \mathscr{N}(b;R).$$

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-мерная собственно погруженная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края и $b \notin \mathscr{M}$. Тогда, если $\gamma(b) < +\infty$, то*

$$Q_p(\mathscr{M}) \le \frac{1}{2}\mathscr{N}(b)\omega_{p+1}, \tag{131}$$

где ω_{p+1} — p-мерная лебегова мера единичной сферы S^p.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $b = 0$. Зафиксируем $R > 0$ и обозначим, как ранее,

$$M_0(R) = \{m \in M : |x(m)| < R\}.$$

Рассмотрим сквозное отображение

$$\sigma : \mathscr{M} \xrightarrow{x} \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} S^{n-1},$$

где π определено в (130) с $b = 0$. Чтобы найти якобиан $\det(d\sigma)$ отображения σ в m заметим сначала, что

$$d\sigma_m = d\pi_{x(m)} \circ dx_m : T_mM \to T_{\sigma(m)}S^{n-1}.$$

Пусть X — произвольный касательный вектор к $\mathbf{R}^n$ в точке $y \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$d\pi_y(X) = \overline{\nabla}_X \pi(y) = \overline{\nabla}_X \frac{y}{|y|} =$$

$$= \frac{X|y|^2 - y\langle X, y\rangle}{|y|^3} = \frac{X - \pi(y)\langle X, \pi(y)\rangle}{|y|}.$$

Таким образом, для любого $Y \in T_mM$ выполнено

$$d\sigma_m(Y) = \frac{Y - \overline{x}(m)\langle Y, \overline{x}(m)\rangle}{|x(m)|},$$

где $\overline{x}(m) = x(m)/\,|x(m)|$ и мы отождествляем вектор Y с его образом $dx_m(Y)$ и пространство T_mM с подпространством $T_{x(m)}\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^n$ при изометрии dx_m. Выберем ортонормированный репер $Y_1, \ldots, Y_p$ в T_mM. Тогда

$$\det{}^2(d\sigma_m) = \langle w, w\rangle,$$

где

$$w = d\sigma_m(Y_1) \wedge d\sigma_m(Y_2) \wedge \ldots \wedge d\sigma_m(Y_p) =$$

$$= |x|^{-p}\,\big(Y_1 - \overline{x}\langle Y_1, \overline{x}\rangle\big) \wedge \ldots \wedge \big(Y_p - \overline{x}\langle Y_p, \overline{x}\rangle\big) =$$

$$= |x|^{-p}\,(Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_p - \sum_{i=1}^{p} Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{i-1} \wedge \overline{x} \wedge Y_{i+1} \wedge \ldots \wedge Y_p\langle \overline{x}, Y_i\rangle) =$$

$$= \frac{Y_1 \wedge Y_2 \wedge \ldots \wedge Y_p}{|x|^p}\left(1 - \sum_{i=1}^{p}\langle Y_i, \overline{x}(m)\rangle^2\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} Y_1 \wedge \ldots \wedge Y_{i-1} \wedge \overline{x}^{\perp} \wedge Y_{i+1} \wedge \ldots \wedge Y_p\langle \overline{x}, Y_i\rangle,$$

и, следовательно,

$$\det{}^2(d\sigma_m) = \frac{\left|\overline{x}^{\perp}(m)\right|^2}{|x(m)|^{2p}}.$$

Таким образом, получаем требуемое выражение для якобиана $d\sigma_m$:

$$|\det(d\sigma_m)| = \frac{\left|\overline{x}^{\perp}(m)\right|}{|x(m)|^p} = \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|}{|x(m)|^{p+1}}. \tag{132}$$

Используя формулу замены координат, из (132) получаем

$$\int\limits_{M(R)} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2}{|x(m)|^{p+2}} \le \int\limits_{M(R)} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|}{|x(m)|^{p+1}}$$

$$= \int\limits_{M(R)} |\det(d\sigma_m)| = \int\limits_{\sigma(M(R))} \chi(s)d\mathscr{H}^p(s), \tag{133}$$

где $\chi(s)$ — мощность прообраза $\sigma^{-1}(s) \cap M(R)$ для данного $s \in \sigma(M(R)) \subset S^{n-1}$ и $\mathscr{H}^p$ — соответствующая мера Хаусдорфа на $\sigma(M(R))$. Тогда по теореме Федерера [88, теорема 3.2.48] заключаем, что для каждого $\mathscr{H}^p$-измеримого и $(\mathscr{H}^p, p)$-спрямляемого множества $F \subset S^{n-1}$ и неотрицательной суммируемой функции f на F выполнено

$$\int\limits_{s\in F} f(s)d\mathscr{H}^p(s) = \frac{\omega_{p+1}}{2}\int\limits_{\gamma\in G_n^p(0)} f^*(\gamma \cap F)d\gamma, \tag{134}$$

где

$$f^*(\gamma \cap F) = \sum_{s \in \gamma \cap F} f(s)$$

корректно определена для $d\gamma$-почти всех плоскостей $\gamma \in G_n^p(0)$. Тогда из (133) и (134) следует

$$\int\limits_{M(R)} \frac{\left|x^{\perp}(m)\right|^2}{|x(m)|^{p+2}} \leq \frac{\omega_{p+1}}{2} \int\limits_{\gamma \in G_n^p(0)} \#\sigma^{-1}[\gamma \cap \sigma(M(R))] d\gamma = \frac{\omega_{p+1}}{2} \mathscr{N}(0, R).$$

Здесь $\#\sigma^{-1}[\gamma \cap \sigma(M(R))]$ означает число точек-прообразов в M. Устремляя теперь $R \to \infty$, приходим к требуемому соотношению (131).

$\square$

3.2. Опираясь на предыдущую лемму и следствие 3.1, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно погруженная p-мерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ без края. Предположим, что для некоторой точки $b \in \mathbf{R}^n$ мощность множества точек пересечения (с учетом кратности) любой плоскости $\gamma \in G_n^p(b)$ и $x(M)$ не превышает k. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов и*

$$\ell(M) \leq k c_p,$$

где

$$c_p = \frac{2^{p-1} p \omega_{p+1}}{\omega_p} = 2^{p-1}(p+1)\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{p+3}{2}\right) \tag{135}$$

и Γ — гамма-функция Эйлера.

Далее мы используем следующий частный случай последнего утверждения. Будем говорить, что внешне полная вложенная гиперповерхность $\mathscr{M}$ является *звездной* относительно точки $b \in \mathbf{R}^n$, если она является графиком относительно радиальной проекции π_b. Другими словами, $\mathscr{N}(e; b) = 0$ или $\mathscr{N}(e; b) = 1$ для любого направления e.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Пусть $\mathscr{M}$ — звездная p-мерная минимальная гиперповерхность. Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное число концов $\ell(M)$ и*

$$\ell(M) \leq 2c_p,$$

где постоянная c_p из (135).

4. Оценка индекса координатных функций на минимальных поверхностях

4.1. В данном параграфе рассматривается случай $\alpha = 2$ и в качестве M — двумерное ориентируемое некомпактное многообразие. Пусть $f(m)$ — субгармоническая функция, имеющая N различных асимптотических трактов $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \ldots, \mathscr{D}_N$; $h(m)$ — функция исчерпания на M и положим

$$\theta(t) = \int\limits_{\Sigma_h(t)} |\nabla h|\,.$$

Из леммы 1.5 и неравенств (59), (69) для любых $t_1 < t_2 < t_3$ таких, что $t_1 > \max_{i \le N} h(\mathscr{D}_i)$ имеем:

$$(136) \qquad \frac{N}{4} \min_{i \le N} \int\limits_{\mathscr{D}_i \cap B_h(t_1)} |\nabla f|^2 \le \left[\int\limits_{t_2}^{t_3} \frac{dt}{\mu^2(t)\theta(t)} \right]^{-1} \exp\left(-2\pi N \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\theta(t)} \right),$$

где $\mu(t) = \max_{m \in \Sigma_h(t)} |f(m)|$.

Предположим, что $x : M \to \mathbf{R}^n$ — собственное погружение, реализующее минимальную поверхность. Тогда $x_k(m)$, $1 \le k \le n$, являются гармоническими функциями на M и, в силу леммы 1.2, функция $h(m) = |x(m)|$ является функцией исчерпания. Заметим, что выполняется

$$\nabla h(m) = (\overline{\nabla}\, |x(m)|)^\top = \frac{x^\top(m)}{|x(m)|},$$

и, таким образом,

$$|\nabla h(m)| = \frac{|x^\top(m)|}{|x(m)|} \le 1$$

всюду в M. После применения неравенства Коши

$$\ln \frac{b}{a} \le \left(\int\limits_a^b \frac{\theta(t) dt}{t^2} \right)^{1/2} \left(\int\limits_a^b \frac{dt}{\theta(t)} \right)^{1/2},$$

получаем

$$(137) \qquad \int\limits_a^b \frac{dt}{\theta(t)} \ge \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \left[\int\limits_a^b \frac{dt}{t^2} \int\limits_{\Sigma_t} |\nabla h| \right]^{-1} = \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \left[\int\limits_{B_h(b) \setminus B_h(a)} \frac{1}{|x|^2} \right]^{-1}.$$

Подставляя в (136) координатную функцию $x_k(m)$ вместо $f(m)$, приходим к неравенству

$$(138) \qquad \min_{1 \le i \le N} \int\limits_{B_h(t_1) \cap \mathscr{D}_i} |\nabla x_k|^2 \le \frac{4\, t_3^2\, (V(t_3) - V(t_2))}{N\, \ln^2(t_3/t_2)} \exp\left(-\frac{2\pi N \ln^2(t_2/t_1)}{V(t_2) - V(t_1)} \right).$$

Здесь

$$V(t) = \int_{B_h(t)} \frac{1}{|x|^2}.$$

Последняя величина участвует в определении логарифмического объема и, как было показано в главе 2, существует конечный или бесконечный предел

$$(139) \qquad V_2'(\mathscr{M}) \equiv \lim_{t \to \infty} \frac{V(t)}{\omega_2 \ln t},$$

называемый приведенным проективным объемом; через ω_p обозначен $(p-1)$-мерный объем единичной сферы $S^{p-1}(1)$.

4.2. Наша дальнейшая цель — получение соотношения между величиной $V_2'(\mathscr{M})$ и числом горбушек, которые можно срезать с двумерной минимальной поверхности системой гиперплоскостей. Для вложенных поверхностей термин "горбушка"имеет ясное геометрическое истолкование.

Назовем многогранным углом K в $\mathbf{R}^n$ любую открытую компоненту связности с некомпактным замыканием, множества $\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ — некоторая конечная система гиперплоскостей Π_i в $\mathbf{R}^n$. Ясно, что K является выпуклой областью. Пусть $\mathscr{M}$ — собственно вложенная двумерная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$. Тогда под *горбушкой* будем понимать ассоциированную с многогранным углом K связную компоненту поверхности $\mathscr{M}$, расположенную в K, некомпактный край которой содержится на границе ∂K.

Отметим, что существуют минимальные поверхности (например, катеноид), для которых найдутся многогранные углы, не отсекающие горбушек (в случае катеноида — любое полупространство с границей, ортогональной оси катеноида).

С другой стороны, имеется качественное различие для разных значений коразмерности $\mathscr{M}$. Именно, в $\mathbf{R}^3$ каждая собственно вложенная (и даже погруженная) минимальная поверхность не может содержаться ни в каком многогранном угле [97], в то время как для значений коразмерности $n-2 \geq 4$ существуют собственно вложенные минимальные двумерные поверхности, заключенные в параллельном слое.

С учетом сделанных замечаний, введем следующее определение. Направление $e \in \mathbf{R}^n$ называется *регулярным* для поверхности $\mathscr{M}$, если $\mathscr{M}$ не содержится ни в какой гиперплоскости, ортогональной e, и все сечения $\mathscr{M}$ такими гиперплоскостями не содержат компактных компонент (здесь и далее в случае погружения термины "сечение поверхности $\mathscr{M}$ "поверхность содержит"понимаются как "прообраз сечения на многообразии M "содержится в прообразе погружения").

Пусть e — регулярное направление и Π_1, Π_2 — некоторые гиперплоскости, ортогональные e. Обозначим через $N(\Pi_1;\Pi_2)$ число компонент связности дополнения $\mathscr{M} \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2)$, лежащих вне параллельного слоя с границей $\Pi_1 \cup \Pi_2$.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная собственно погруженная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^n$ конечного логарифмического объема $V_2'(\mathscr{M})$; e — регулярное направление. Тогда для любой пары гиперплоскостей Π_1 и Π_2, ортогональных e, выполнено*

$$N(\Pi_1;\Pi_2) \leq 2V_2'(\mathscr{M}). \tag{140}$$

Доказательство. Пусть x_1 — ассоциированная с e координатная функция $x_1(m) = \langle x(m), e\rangle$. По определению регулярности $\mathscr{M}$ не может содержаться ни в какой гиперплоскости, ортогональной e, и, следовательно, $x_1(m)$ не является тождественной константой. Не ограничивая общности, можно считать, что Π_i определяются уравнениями $x_1 = (-1)^i a$ для некоторого $a > 0$. Рассмотрим субгармоническую функцию $f(m) = |x_1(m)|$ и зафиксируем $t_1 > a$. Тогда, интеграл в правой части (138) $J > 0$ и для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти t_2 так, что

$$V(t) < 2\pi(V_2'(\mathscr{M}) + \varepsilon)\ln t.$$

Таким образом, для любых $t > t_2$ из (136) имеем

$$J < \frac{4t_3^2\, t_2^{-N/(V_2'(\mathscr{M})+\varepsilon)}}{N \ln(t_3/t_2)},$$

где $t_3 > t_2$ и $N = N(\Pi_1; \Pi_2)$.

Выберем $t_3 = 2t_2$. Тогда при $t_2 \to \infty$ получаем неравенство

$$2 - \frac{N}{V_2'(\mathscr{M}) + \varepsilon} \ \geq 0,$$

Неравенство (140) доказано.

□

4.3. В настоящем пункте применяется доказанное выше неравенство для получения верхней оценки индекса Морса координатных функций двумерных минимальных поверхностей конечного топологического типа. Последнее означает, что $\mathscr{M}$ может быть реализована собственным погружением некоторого компактного двумерного многообразия M конечного рода g с конечным числом ℓ удаленных точек. В нашей терминологии эти точки соответствуют концам поверхности $\mathscr{M}$.

Пусть $f(m)$ — некоторая функция, гармоническая на M. Следуя [51], определим *индекс* $f(m)$ в критической точке $m_0 \subset \mathscr{Z}(f)$ как целое положительное число

$$\operatorname{ind}(m_0) = \frac{\sigma}{2} - 1,$$

где σ — число континуумов множества: $\{m \in M : f(m) = f(m_0), m \neq m_0\}$ и m достаточно близко к m_0.

Как показано в [51], приведенное определение корректно и $\operatorname{ind}(m_0) > 0$, если f не является постоянной.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная собственно погруженная минимальная поверхность конечного топологического типа в $\mathbf{R}^n$, e — регулярное направление и x_1 — ассоциированная с ним координатная функция. Если $V_2'(\mathscr{M}) < +\infty$, то множество критических точек $\{a_j\}$ функции $x_1(m)$ конечно и выполнено неравенство*

$$\sum_j \operatorname{ind}(a_j) \leq V_2'(\mathscr{M}) - \chi(M), \tag{141}$$

где $\chi(M)$ — Эйлерова характеристика поверхности M. Суммирование производится по всем критическим точкам.

Замечание 3.3. Данный результат обобщает имеющийся в [43], где рассмотрен случай, когда M гомеоморфно сфере с ν выброшенными точками.

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{N}(t)$ число компонент связности $\{m \in M : x_1(m) > t\}$. В силу полноты $\mathscr{M}$ и принципа максимума для координатных функций на минимальных поверхностях, каждая компонента имеет некомпактное замыкание. Следовательно, $\mathscr{N}(t)$ — неубывающая функция, принимающая целочисленные значения, определенная при $t \in \mathbf{R}$. Для любой критической точки a_i имеем

$$\lim_{t \to x_1(a_i)+0} \mathscr{N}(t) - \lim_{t \to x_1(a_i)-0} \mathscr{N}(t) \geq 1. \tag{142}$$

Кроме того, множество уровня $\{m \in M: \ x_1(m) = a_i\}$ есть объединение континуумов γ и, по предположению регулярности координатной функции, не одно из γ не является компактным.

Из теоремы Миикса и Хоффмана [97] о полупространстве следует, что функция x_1 не может быть ограниченной. Отметим также, что в рассматриваемом нами случае $V_2' < \infty$ и данное свойство также следует из результата, полученного ранее в совместной работе [46].

Положим

$$\mathscr{N}(+\infty) \equiv \lim_{t \to +\infty} \mathscr{N}(t).$$

В силу теоремы 2.4, конечность проективного объема влечет параболичность конформного типа $\mathscr{M}$. Таким образом, по теореме Фрагмена-Линделёфа, примененной к гармонической функции $x_1(m)$, можно полагать, что каждая горбушка множества $\{m \in M | x_1(m) > t\}$ не ограничена в положительном направлении функции x_1. Конечность числа критических точек a_i функции x_1 следует из (142) и конечности числа $\mathscr{N}$ асимптотических трактов субгармонической функции $|x_1(m)|$. Последнее свойство является следствием (140).

Выберем число c таким, что его абсолютная величина больше абсолютной величины любого из критических значений $x_1(a_j)$. Из конформности гауссова отображения двумерной минимальной поверхности вытекает, что гауссово отображение имеет локально конечную кратность. Это свойство обеспечивает (см. [4, теорема 18.5.4]) существование *регулярной* части M' многообразия M, то есть такого гладкого подмногообразия M с непустым компактным краем, которое удовлетворяет следующим условиям:

(1) Эйлеровы характеристики M' и M равны: $\chi(M') = \chi(M)$;
(2) Каждая граничная компонента M' есть конечное объединение чередующихся линий уровня функции $x_1(m)$: γ_i $(x_1 = \pm c)$ и градиентных кривых Γ_i (кривых наибольшего возрастания или убывания $x_1(m)$);
(3) Число ℓ всех компонент $\partial M'$ совпадает с числом концов M.

В силу регулярности направления e, γ_i являются простыми открытыми жордановыми дугами. Как следствие, каждая компонента $\partial M'$ состоит из четного числа γ_i и такого же числа Γ_j.

Рассмотрим разложение следующих двух частей многообразия M на открытые компоненты

$$\{x_1(m) > c\} = \bigcup_{i=1}^{N^+} \mathscr{O}_i^+, \quad \{x_1(m) < -c\} = \bigcup_{j=1}^{N^-} \mathscr{O}_j^-.$$

В силу того, что множество $\{|x_1(m)| > c\}$ не содержит ни одной критической точки, то каждое $\mathscr{O}_i^\pm$ гомотопно эквивалентно двумерному диску. Более того, можно определить биекцию между дугами γ_i и компонентами $\mathscr{O}_i^\pm$. Из (140) и чередования γ_i и Γ_j следует, что

$$N^+ = N^- = \mathscr{N}(+\infty) = \frac{\mathscr{N}}{2} \leq V_2'(\mathscr{M}).$$

Пусть $M_0 = M' \# M'$ — результат склейки двух экземпляров M' вдоль края $\partial M'$ и последовательного стягивания каждой кривой γ_i и ее копии в точку G_i. Тогда (см. [69], часть 5, упр. 5), род g_0 многообразия M_0 вычисляется по формуле

$$g_0 = 2g + \ell - 1, \tag{143}$$

где ℓ — число компонент связности $\partial M'$.

В силу определения M_0, координатная функция $x_1(m)$ может быть канонически поднята до функции f, определенной на M_0. Тогда $f(\xi)$ — гладкая всюду на $M_0 \setminus G$, где $G = \{G_i\}$. Более того, все G_j суть точки строгого максимума или минимума $f(\xi)$.

Для эйлеровой характеристики $\chi(M_0)$ из (143) имеем

$$\chi(M_0) = 2 - 2g_0 = 2(2 - 2g - \ell) = 2\chi(M') = 2\chi(M). \tag{144}$$

Возможно также поднять естественным путем градиентное поле $\nabla x_1(m)$ до непрерывного векторного поля $X(m) \equiv \nabla f$ на $M_0 \setminus G$. Тогда множество особых точек поля $X(m)$ состоит из: a) критических точек $\{a_i\}_{i=1}^k$ и их дублей $\{a_i^\star\}_{i=1}^k$; и b) особых точек G_j.

Пусть $\mathrm{ind}_\xi X$ означает число вращения (*индекс*) векторного поля X в точке ξ [49, §5]. Тогда особые точки G_j являются локальными экстремумами f и поэтому

$$\mathrm{ind}_{G_j} X = 1. \tag{145}$$

С другой стороны, в силу определения индекса гармонической функции (см. [49, §6]), выполняется

$$\mathrm{ind}_{a_i} X = \mathrm{ind}_{a_i^\star} X \equiv \mathrm{ind}_{a_i}(\nabla x_1) = -\mathrm{ind}(a_i). \tag{146}$$

В самом деле, последнее равенство вытекает из непосредственного анализа достаточно малой окрестности критической точки a_i гармонической функции.

Таким образом, применяя теорему Пуанкаре-Хопфа и используя (145), (146), получаем

$$\chi(M_0) = \sum \mathrm{ind}_{a_i} X + \sum \mathrm{ind}_{a_i^\star} X + \sum_{j=1}^{\gamma} \mathrm{ind}_{G_j} X = -2 \sum \mathrm{ind}(a_i) + \mathscr{N}.$$

Следовательно, (144) приводит к требуемому соотношению

$$\sum \mathrm{ind}(a_i) = \frac{\mathscr{N}}{2} - \chi(M) \le V_2'(\mathscr{M}) - \chi(M),$$

и теорема 3.5 доказана.

□

4.4. Пусть $\sigma : M \to \mathrm{S}^2$ — гауссово отображение.

Теорема 3.6. *Пусть $\mathscr{M}$ — минимальный s-график, полученный собственным погружением некоторой компактной римановой поверхности рода g с l выброшенными точками. Если найдется регулярное направление e, лежащее в гауссовом образе $\sigma(\mathscr{M})$ и имеющее алгебраическую кратность m (т.е. число точек $\xi_\in M$ таких, что $\sigma(\xi_i) = a$ равно m), то выполнено неравенство*

$$sk_2 \ge 2 - 2g - l + m, \tag{147}$$

где $k_2 = 1.1037$.

Доказательство. В силу теоремы 3.2, $\mathscr{M}$ имеет конечный приведенный проективный объем $V_2'(\mathscr{M}) \leq k_2 s$. Выберем в качестве координатной функции

$$f(\xi) = \langle x(\xi), e\rangle.$$

Тогда она имеет m критических точек ξ_i, соответствующих $\sigma(\xi_i) = e$. В силу предположения, e будет регулярным направлением. Поэтому имеем

$$\sum_i \operatorname{ind}(\xi_i) \geq m, \tag{148}$$

и, принимая во внимание, что $\chi(\mathscr{M}) = 2 - 2g - l$, из (141) и (148) получим (147).

$\square$

Замечание 3.4. Предположим, что поверхность $\mathscr{M}$ в $\mathbf{R}^3$ получена собственным погружением плоскости, то есть $\chi(M) = \chi(\mathbf{R}^2) = 1$. Если $\mathscr{M}$ отлична от плоскости, то гауссов образ $\sigma(M)$ имеет непустую внутренность $\operatorname{int}\sigma(M)$. Выберем произвольно $e \in \operatorname{int}\sigma(M)$. Тогда, как следствие неравенства (147) и точного вида константы k_2, получаем $s \geq \frac{2}{k_2}$, или $s > 1$. Но $s \in \mathbf{Z}$, и, следовательно, $s \geq 2$.

Отметим, что следствием последнего неравенства является новое доказательство теоремы Бернштейна. Действительно, если $\mathscr{M}$ — график над некоторой плоскостью, то $s = 1$. Таким образом, $\mathscr{M}$ — плоскость.

Глава 4

Оценка времени существования минимальных трубок

Как объект исследования, минимальные трубки находятся на стыке теории функций и дифференциальной геометрии "в целом". В данной главе дано решение проблемы времени существования двумерных минимальных трубок. Предложен новый подход, основанный на введении инварианта минимальных трубчатых поверхностей, так называемого вектор-потока трубки, позволяющего объяснить феномен существования как бесконечных так и конечных двумерных трубок. В параграфе 1 вводятся основные понятия, а также обсуждаются некоторые примеры минимальных трубок. В параграфе 2 показывается, что если угол наклона вектор-потока к оси времени ненулевой и трубка имеет конечную полную кривизну, то ее время существования конечно. В параграфе 3 построено семейство бесконечных трубок, имеющих произвольный заданный угол наклона вектор-потока к оси времени, показывающее необходимость ограничений на полную кривизну. В последнем параграфе мы рассматриваем многомерные трубчатые минимальные поверхности. Основной результат этого параграфа — оценка снизу диаметра гауссова образа произвольного сечения трубки, данная только в терминах вектор-потока трубки.

1. Основные определения

1.1. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ — точка в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ и M – некоторое некомпактное ориентированное p-мерное риманово многообразие, $2 \le p \le n$.

Поверхность $\mathscr{M} = (M, X)$, заданная C^2-погружением $X : M \to \mathbf{R}^{n+1}$, называется *трубкой* (или *трубчатой поверхностью*) с интервалом существования $\tau(\mathscr{M}) \subset Ox_{n+1}$ и осью Ox_{n+1}, если

(i) для любого $\tau \in \tau(\mathscr{M})$ сечения $\Sigma_\tau = f(\mathscr{M}) \cap \Pi_\tau$ гиперплоскостями $\Pi_\tau = \{x \in \mathbf{R}_1^{n+1} : x_{n+1} = \tau\}$ — непустые компактные множества;

(ii) для любых $\tau', \tau'' \in \tau(\mathscr{M})$ порция $\mathscr{M}$, расположенная между двумя различными гиперплоскостями $\Pi_{\tau'}$ и $\Pi_{\tau''}$, является также компактным множеством.

Длина $|\tau(\mathscr{M})|$ интервала проекции называется *временем существования* трубки. В случае, когда $|\tau(\mathscr{M})| = +\infty$, будем называть трубку *бесконечной.* При этом допускается, что сам интервал существования такой трубки может быть лучом. Если $|\tau(\mathscr{M})| < +\infty$ и $\mathscr{M}$ не является частью никакой бесконечной трубки, то $\mathscr{M}$ называется *конечной* трубкой.

Отметим, что само определение трубки не налагает каких-либо топологических ограничений на поверхность. В частности, при различных значениях переменной τ сечения Σ_τ могут распадаться в объединение нескольких компонент связности.

Заметим, что для произвольных $\tau_i \in \tau(\mathscr{M})$ минимальная трубчатая поверхность является решением задачи Плато для контура, состоящего из граничных компонент $\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{\tau_2}$. С другой стороны, двумерные минимальные трубки впервые, по-видимому, изучались в работах Шиффмана [103] и Ниче [53]. Ниче доказал, что время существования компактной части трубки сверху может быть оценено через размеры ее граничных компонент. Используя различные формы геометрического принципа максимума, данное неравенство было уточнено и перенесено на многомерный случай в [12] (см. также [10], [19]).

Хорошо известен в настоящий момент тот факт, что в многомерном случае ($\dim M \geq 3$) *любая минимальная трубка произвольной коразмерности имеет конечный интервал проекции* $\tau(\mathscr{M})$ ([12], [47], [31]). Данное утверждение является следствием дифференциального неравенства на функцию $\rho(\tau)$ радиуса обхвата минимальной поверхности

$$\rho(\tau) = \sup_{m \in \Sigma_\tau} \sqrt{x_1(m)^2 + \ldots + x_n(m)^2}. \tag{1}$$

В цитированных выше работах доказывается, что $\rho(\tau)$ выпуклая функция и ее минимальное значение

$$r(\mathscr{M}) = \min_{\tau \in \tau(\mathscr{M})} \rho(\tau) \tag{2}$$

всегда положительно. Тогда, при $p \geq 3$, время существования трубки оценивается сверху в терминах минимального радиуса обхвата поверхности $r(\mathscr{M})$:

$$\tau(\mathscr{M}) \leq c_p\, r(\mathscr{M}), \tag{3}$$

где c_p — постоянная, зависящая только от размерности поверхности p.

Двумерный случай является в этом отношении особым. Именно, как показывают примеры, приводимые в следующем пункте, двумерные минимальные трубки могут иметь соответственно как бесконечную, так и конечную (непродолжаемую) величину времени существования $|\tau(\mathscr{M})|$. В последнем случае величина $|\tau(\mathscr{M})|$ может быть произвольной при фиксированном минимальном радиусе обхвата, что создает необходимость введения дополнительных характеристик, в терминах которых будет справедлива оценка на время существования. В данной главе мы отвечаем на следующий вопрос: *При каких условиях можно гарантировать конечность времени существования двумерной минимальной трубки?*

Пусть $e^\top \equiv e^\top(m)$ означает ортогональную проекцию вектора $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ на касательное пространство к поверхности $\mathscr{M}$ в точке m и $\tau \in \tau(\mathscr{M})$ — регулярное значение координатной функции $X_{n+1}(m)$ (то есть $e_{n+1}^\top \neq 0$). Множество Σ_τ распадается в конечное объединение попарно непересекающихся компактных $(p-1)$-мерных подмногообразий M без края, оснащенных полем внутренних единичных нормалей $\nu = e_{n+1}^\top / |e_{n+1}^\top|$, ориентированных в направлении e_{n+1}. Заметим, что, в силу регулярности значения τ, скалярное произведение $\langle \nu, e_n \rangle$ нигде не обращается в нуль на Σ_τ, поэтому выбор направления ν оправдан.

Пусть Σ — некоторая компонента связности Σ_τ, также оснащенная как подмногообразие полем ν. При фиксированном Σ выражение $F_\Sigma(x) = \int\limits_\Sigma \langle x, \nu \rangle : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^1$ является линейным функционалом от x и поэтому, в силу теоремы Рисса, найдется единственный вектор $J(\Sigma) \in \mathbf{R}^{n+1}$ такой, что

$$F_\Sigma(e) \equiv \int_\Sigma \langle e, \nu\rangle = \langle e, J(\Sigma)\rangle\,. \tag{4}$$

Тогда, в силу нашего выбора,

$$\langle J(\Sigma), e_{n+1}\rangle = \int_\Sigma \langle e_{n+1}, \nu\rangle = \int_\Sigma |e_{n+1}^\top| > 0\,,$$

следовательно, $J(\Sigma) \neq 0$ и сонаправлен с e_{n+1}.

Определение 4.1. Назовем *циклом* Σ в Σ_τ произвольное несвязное объединение $\bigsqcup_{i=1}^k \Sigma_i$ компонент связности $\Sigma_i \subset \Sigma_\tau$ с сохранением их ориентаций. Два ориентированных цикла Σ' и Σ'' *бордантны* друг другу в $\mathscr{M}$, или $\Sigma' \overset{\mathscr{M}}{\sim} \Sigma''$, если существует открытое подмножество $D \subset M$ такое, что $\partial D = (-\Sigma')\bigcup \Sigma''$ [95, стр. 221]. Цикл называется *простым*, если он бордантно эквивалентен нулю в Π_τ, то есть является краем некоторого компактного многообразия в Π_τ.

Следствием вышеприведенных определений является

Предложение 4.1. *Для* $\Sigma = \Sigma^1 \bigsqcup \ldots \bigsqcup \Sigma^k$

$$J(\Sigma) = J(\Sigma^1) + \ldots + J(\Sigma^k)\,. \tag{5}$$

Кроме того, если $\Sigma' \overset{\mathscr{M}}{\sim} \Sigma''$, *то* $J(\Sigma') = J(\Sigma'')$.

Доказательство необходимо только для второго утверждения. С этой целью вспомним, что координатные функции минимальной поверхности являются гармоническими. Пусть $D \subset M$ — открытое множество, отвечающее определению бордантности, такое, что $\partial D = \Sigma' \bigcup \Sigma''$. Тогда для любого $e \in \mathbf{R}^n$

$$\langle J(\Sigma'), e\rangle - \langle J(\Sigma''), e\rangle = \int_{\partial D} \langle e, \nu\rangle = \int_{\partial D} \langle \nabla f, \nu\rangle = \int_D \Delta f = 0\,,$$

где $\nabla f = e^\top$ — градиент координатной функции $f = \langle e, u(m)\rangle$.

□

Из последнего утверждения следует, что определение $J(\Sigma_\tau)$ не зависит от выбора $\tau \in \tau(\mathscr{M})$.

Определение 4.2. Вектор $J(\mathscr{M}) \equiv J(\Sigma_\tau)$ называется *вектор-потоком* минимальной трубки $\mathscr{M}$.

Выпишем также явное координатное представление вектор-потока:

$$J_k = \int_{\Sigma_\tau} \langle e_k^\top, \nu\rangle, \qquad 1 \leq k \leq n+1,$$

или, что то же самое,

$$J(\mathscr{M}) = \int\limits_{\Sigma_\tau} \nu,$$

где ν рассматривается как вектор-функция, определенная вдоль Σ_τ.

Как следует из выбранной ориентации поля нормалей ν, $(n+1)$-я координата вектор-потока строго положительна. Обозначим через $\alpha(\mathscr{M})$ угол между вектором $J(\mathscr{M})$ и осью Ox_{n+1}. Легко проверяется, что, как следствие определения, *длина вектор-потока и угол $\alpha(\mathscr{M})$ являются инвариантами относительно подгруппы движений пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, сохраняющих направление оси времени.* Более того, угол $\alpha(\mathscr{M})$ также инвариантен относительно подгруппы гомотетий $\mathbf{R}^{n+1}$.

Укажем также на физическую интерпретацию вектор-потока. Известно, что минимальные трубки являются евклидовыми аналогами замкнутых релятивистских струн в пространстве Минковского. При таком подходе геометрические инварианты трубок отвечают за физические характеристики соответствующих элементарных частиц. Так, например, длина интервала $\tau(\mathscr{M})$ соответствует времени существования струны, а вектор-поток $J(\mathscr{M})$ — импульсу струны [16]. В этом смысле предложение 4.1 показывает, что $J(\mathscr{M})$ удовлетворяет закону сохранения импульса: если некоторое сечение Σ_τ распадается в объединение нескольких компонент $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, то выполнено (5).

Пусть $K(m)$ — гауссова кривизна двумерной минимальной поверхности $\mathscr{M}$ в точке m. Величина

$$\int\limits_{\mathscr{M}} K(m)$$

называется *полной*, или *интегральной гауссовой* кривизной поверхности $\mathscr{M}$. Поскольку для минимальной поверхности всегда выполнено $K(m) \le 0$, удобно рассматривать абсолютное значение последнего интеграла, которое мы также называем полной кривизной и обозначаем через $G(\mathscr{M})$.

1.2. В этом пункте рассматриваются характерные примеры двумерных минимальных трубок в $\mathbf{R}^3$.

Бесконечные трубки.

(Б1). Главный модельный пример — стандартный катеноид

$$\cosh x_3 = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2},$$

являющийся внешне полной поверхностью вращения. Хорошо известно, что катеноид имеет конечную полную кривизну 4π и его вектор-поток параллелен оси поверхности.

(Б2). В параграфе 3 построено семейство $\{M_\lambda\}$, $\lambda \in [0;+\infty)$ косых бесконечных трубок, имеющих следующее представление Вейерштрасса

$$g(z) = g_\lambda(z) \equiv z \exp \lambda(z + \frac{1}{z}).$$

В этом случае полная кривизна поверхности бесконечна и угол наклона $\alpha(\mathscr{M})$ вектор-потока трубки к оси времени Ox_3 может быть выбран произвольно, подбирая подходящее значение параметра $\lambda \in [0; +\infty)$:

$$\tan \alpha(\mathscr{M}_\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{m!(m-1)!}.$$

(Б3). Необходимо отметить также некоторые примеры трубок, у которых интервал проекции является лучом, но не может быть продолжен за пределы этого луча. Хоффман и Миикс в 1989 г. [97] построили семейство вложенных минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^3$ с тремя концами: двумя — асимптотически выходящими на катеноиды относительно одной оси Ox_3 и одним — на некоторую плоскость, ортогональную оси катеноидов. Из их построения вытекает, что каждый катеноидальный конец, рассматриваемый как поверхность с краем, является трубкой с интервалом проекции, совпадающим с некоторым лучом. Действительно, любое сечение данной поверхности плоскостью $x_3 = t$ при больших по модулю значениях t будет компактным множеством, в то время как при малых значениях, соответствующих плоскому концу, компактность исчезает. Будем считать, что оба луча выбраны максимальными. Тогда, в силу аналитичности двумерных минимальных поверхностей, такие концы не могут быть продолжены при условии сохранения трубчатости.

Вектор-потоки этих концов параллельны оси Ox_3, а полная кривизна — конечна.

Конечные трубки.

(К1). В этой ситуации ключевым модельным примером является семейство косых катеноидов Римана [63]. Именно, существует (подробное обсуждение имеется в [97]) семейство вложенных минимальных поверхностей $\mathscr{M}_s$, $t \in (0, +\infty)$, обладающее следующими свойствами: каждая $\mathscr{M}_s$ инвариантна относительно действия группы сдвигов в $\mathbf{R}^3$ вида

$$x \to x + e_3 + n \cdot te_1, \quad n \in \mathbb{Z},$$

и, следовательно, является однопериодической поверхностью. Каждая поверхность $\mathscr{M}_s$ может быть получена действиями данной группы на некоторую трубку $\mathscr{M}'_s$ с конечным интервалом проекции длины $\tau(s)$. Все непустые сечения этой трубки плоскостями $x_3 = t$ являются окружностями, а граничные компоненты $\partial\mathscr{M}_s$ — прямыми, вследствие чего трубка $\mathscr{M}_s$ является непродолжаемой. Эти трубки называются косыми катеноидами.

Важным для нас является то обстоятельство, что все $\mathscr{M}'_s$ имеют один и тот же минимальный радиус обхвата, в то время как длины $\tau(s)$ интервалов проекций могут принимать любое значение из $(0; +\infty)$ при изменении s. Данный пример показывает, что знание *только* минимального радиуса обхвата недостаточно для оценки длины интервала существования, в отличие от многомерного случая. Непосредственный расчет показывает, что $\tau(s)$ является монотонно убывающей функцией от угла наклона вектор-потока трубки $\mathscr{M}'_s$ к оси Ox_3. Все трубки данного семейства обладают однолистным гауссовым отображением, в следствие чего значения их полной кривизны ограничены значением 4π равномерно по $s \in (0; +\infty)$.

(К2). Приведем пример непродолжаемых конечных трубок с бесконечной полной кривизной. Именно, Х. Розенберг и Э. Тоубиана в [64] построили внутренне полную минимальную трубку, являющуюся погружением кольца и содержащуюся между двумя параллельными плоскостями в $\mathbf{R}^3$. Как следует из результатов работы [87], полная кривизна такой поверхности должна быть бесконечной. К сожалению, само построение не носит конструктивный характер и не дает информацию о вектор-потоке.

2. Трубки с ограниченной интегральной кривизной

2.1. Сформулируем основное утверждение данного параграфа.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная минимальная трубка произвольного топологического типа в $\mathbf{R}^3$ с вектор-потоком $J(\mathscr{M})$. Тогда если абсолютная интегральная гауссова кривизна $G(\mathscr{M})$ конечна и $\alpha(\mathscr{M}) > 0$, то время существования $|\tau(\mathscr{M})|$ поверхности $\mathscr{M}$ конечно и*

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq \frac{G(\mathscr{M})\|J(\mathscr{M})\|\cos\alpha(\mathscr{M})}{16\,\alpha^2(\mathscr{M})}. \tag{6}$$

Из данного утверждения следует конечность времени существования минимальной трубки с конечнократным (в частности – однолистным) гауссовым отображением, так как для таких поверхностей выполнено $G(\mathscr{M}) \leq 4\pi s$, где s — кратность отображения.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть $\mathscr{M}$, $\dim\mathscr{M} = 2$ — минимальная трубка произвольного топологического типа в $\mathbf{R}^3$. Если гауссово отображение не более чем s-листно и $\alpha(\mathscr{M}) > 0$, то время существования $|\tau(\mathscr{M})|$ поверхности $\mathscr{M}$ конечно и*

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq \frac{\pi s\|J(\mathscr{M})\|\cos\alpha(\mathscr{M})}{4\,\alpha^2(\mathscr{M})}. \tag{7}$$

Замечания. Использование традиционной характеристики — полной кривизны — дает более гибкий подход, чем использование кратности гауссова отображения. Действительно, конечность интегральной гауссовой кривизны a priori не влечет конечности кратности самого гауссова отображения. Далее, в пункте 4.2.5 мы отдельно рассматриваем случай трубок с однолистным гауссовым отбражением. Необходимость ограничений на гауссово отображение показывают примеры трубок с произвольным углом $\alpha(\mathscr{M})$ и бесконечным временем существования, приводимые в параграфе 3.

Интересно отметить также, что для трубок бесконечного времени существования с ненулевым углом наклона вектор-потока к оси времени, неравенство (6) можно интерпретировать как равномерную линейную оценку снизу на интегральную гауссову кривизну любой порции трубки, заключенной в параллельном слое в терминах ширины этого слоя.

В отличие от большинства работ, касающихся геометрии "в целом"минимальных поверхностей конечной интегральной кривизны, мы не накладываем требований на внутреннюю полноту поверхности. Действительно, как следует из результатов Микса и Фанга [87], двумерная трубка с конечным временем существования и конечной интегральной кривизной не может быть (внутренне) полной поверхностью.

2.2. В данном пункте мы предполагаем, что $\mathscr{M}$ — двумерная двусвязная минимальная трубка в $\mathbf{R}^3$, реализованная погружением некоторого кольца M. Тогда из результатов Оссермана и Шиффера [57] вытекает существование глобальной системы изотермических координат на M. Таким образом, можно считать, что поверхность $\mathscr{M}$ конформно эквивалентна кольцу $D_R = \{z : 1/R < |z| < R\}$ для некоторого подходящего $R > 1$.

Пусть $g(\zeta)$ — голоморфная в кольце D_R функция, $C_t = \{z \in \mathbf{C} : |z| = t\}$ и

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta}$$

центральный коэффициент разложения $g(\zeta)$ в ряд Лорана.

Будем говорить, что $g(\zeta)$ *допустима* для кольца D_R, если она не обращается в нуль и

$$a_0(g) = -\overline{a_0(1/g(z))}. \tag{8}$$

Имеет место следующее представление типа Вейерштрасса.

Лемма 4.1. *Поверхность $\mathscr{M}$ допускает параметризацию*

$$X(z) = \mathrm{Re} \int\limits_{z_0}^{z} \mathbf{F}(\zeta)\, d\zeta, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{F} = (F_1;\ F_2;\ F_3) = \frac{J_3}{4\pi} \left(\frac{1 - g^2(z)}{g(z) z};\ \frac{i(1 + g^2(z))}{g(z) z};\ \frac{2}{z} \right).$$

и $g(z)$ – некоторая допустимая для D_R голоморфная функция такая, что

$$a_0(g) = -\frac{1}{J_3}(J_1 + iJ_2), \qquad a_0(1/g) = \frac{1}{J_3}(J_1 - iJ_2), \tag{10}$$

где J_k —компоненты вектор-потока трубки $\mathscr{M}$.

Доказательство. Следуя [54], запишем классическую параметризацию Эннепера-Вейерштрасса поверхности $\mathscr{M}$. Именно, найдутся голоморфные в кольце D_R функции $f(z)$ и $g(z)$ такие, что справедлива формула (9) для голоморфной вектор-функции

$$\mathbf{F}(z) = \big((1 - g^2(z)) f(z);\ i(1 + g^2(z)) f(z);\ 2 f(z) g(z)\big), \tag{11}$$

и выполнено

$$\mathrm{Re} \int\limits_{C_1} \mathbf{F}(\zeta)\, d\zeta = \mathbf{0}, \tag{12}$$

Где $g(z)$ — композиция гауссова отображения поверхности $\mathscr{M}$ и последующей стереографической проекции единичной сферы относительно ее северного полюса на плоскость, касательную к южному полюсу.

В введенных обозначениях имеем

$$J(\mathscr{M}) = \mathrm{Im} \int\limits_{|z|=1} F(\zeta)\, d\zeta. \tag{13}$$

Действительно, рассмотрим сопряженные функции

$$v_k(z) = \operatorname{Im} \int_{z_0}^{z} F_k(\zeta)\, d\zeta.$$

Тогда каждая $v_k(z)$, вообще говоря, многозначная гармоническая функция. С другой стороны, градиент ∇v_k корректно определен и, используя свойства $*$-оператора Ходжа, получаем

$$J_k(\mathscr{M}) = \int_{\Sigma_\tau} \langle \nabla X_k, \nu \rangle \, ds = \int_{\Sigma_\tau} \langle *\nabla X_k, *\nu \rangle \, ds = \int_{\Sigma_\tau} \langle \nabla v_k, *\nu \rangle \, ds =$$

$$= \int_{\Sigma_\tau} d\, v_k = \operatorname{Im} \int_{|z|=1} F_k(\zeta)\, d\zeta,$$

тем самым тождество (13) доказано.

□

В силу представления (9), координатная функция $X_3(z)$ является гармонической в кольце D_R. Используя определение трубки, получаем

$$\lim_{z\to 1/R} X_3(z) = \tau_1, \qquad \lim_{z\to R} X_3(z) = \tau_2, \tag{14}$$

где $\tau(\mathscr{M}) = (\tau_1;\ \tau_2)$ — интервал существования трубки $\mathscr{M}$ на ось Ox_3.

Рассмотрим следующую вспомогательную гармоническую функцию

$$h(z) = \tau_1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\ln R} \ln(R|z|).$$

Легко видеть, что $h(z)$ также удовлетворяет (14) и, таким образом, $h_1(z) = X_3(z) - h(z)$ снова гармоническая в кольце с граничным условием

$$\lim_{z\to\partial D_R} h_1(z) = 0.$$

Применяя принцип максимума для функции h_1, получим $h_1(z) \equiv 0$ всюду в D_R и, таким образом,

$$X_3(z) \equiv \tau_1 + \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\ln R} \ln(R|z|). \tag{15}$$

В частности, из (15) следует, что дифференциал $dX_3(z)$ нигде не обращается в нуль в D_R, поэтому нормаль $n(z)$ к поверхности $\mathscr{M}$ не может быть параллельна e_3 ни в какой точке. Принимая во внимание приведенную выше геометрическую интерпретацию $g(z)$, получаем, что $g(z) : D_R \to \mathbf{C} \setminus \{0;\ \infty\}$.

Сравнивая (15) и (11), заключаем

$$2g(z)f(z) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2\ln R} \cdot \frac{1}{z}. \tag{16}$$

Чтобы исключить $\ln R$ из последнего равенства, подставим (16) в (11), и, используя (13), будем иметь

$$\ln R = \frac{\pi(\tau_2 - \tau_1)}{J_3}. \tag{17}$$

Наконец, подставляя найденное соотношение в (16), приходим к представлению (9).

Чтобы доказать (10), распишем условие (13) с учетом найденного соотношения между $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_{C_1} \frac{1-g^2(\zeta)}{2g(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi J_1 i}{J_3}, \qquad \int\limits_{C_1} \frac{1+g^2(\zeta)}{2g(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi J_2}{J_3},$$

откуда, после упрощения, получаем требуемые тождества. Лемма доказана.

□

2.3. Пусть $\Gamma(R)$ является семейством концентрических окружностей C_t, $t \in (1/R; R)$, с центром в нуле и радиуса t, содержащихся в кольце D_R. Тогда хорошо известным (см. например [2, стр.19]) является тот факт, что

$$\operatorname{mod}\Gamma(R) = \frac{\ln R}{\pi}. \tag{18}$$

Далее нам также понадобятся следующие известные формулы для некоторых внутренних характеристик минимальной поверхности, параметризованной с помощью системы (11). Элемент длины поверхности $\mathscr{M}$ и гауссова кривизна в терминах голоморфного представления соответственно принимают вид (см. [54])

$$ds \equiv \lambda(z)\,|dz| = |f|(1+g^2)\,|dz|$$

и

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2. \tag{19}$$

Учитывая изотермичность координат, получаем следующее выражение для абсолютной интегральной гауссовой кривизны $G(\mathscr{M})$

$$G(\mathscr{M}) \equiv -\int_{D_R} K(z)\lambda^2(z)\,dz\,d\overline{z} = \int_{D_R} \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}\,dz\,d\overline{z}.$$

Лемма 4.2. *Оценка (6) имеет место для любой двусвязной минимальной трубки $\mathscr{M}$ с конечной абсолютной гауссовой кривизной $G(\mathscr{M})$.*

Доказательство. Пусть $g(\zeta)$ — функция из леммы 4.1, отвечающая поверхности $\mathscr{M}$ и $a_0(g) = ae^{i\theta}$ — ее центральный лорановский коэффициент, записанный в полярной форме для некоторого положительного вещественного a. Тогда из (10) будем иметь равенство $a_0(1/g) = -ae^{-i\theta}$. Следовательно, для функции $g_1(\zeta) = e^{-i\theta}g(\zeta)$ и для любого $t \in (1/R; R)$ выполнено

$$a_0(g_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_1(te^{i\xi})\,d\xi = a;$$

$$a_0(1/g_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\xi}{g_1(te^{i\xi})} = -a. \tag{20}$$

Положим

$$\varphi(\zeta) \equiv \frac{|g_1'(\zeta)|}{1+|g_1(\zeta)|^2} = \frac{|g'(\zeta)|}{1+|g(\zeta)|^2},$$

и

$$\sigma = \inf_{1/R<t<R} \int\limits_{C_t} \varphi(\zeta)\,|d\zeta|. \tag{21}$$

Тогда, по определению (48), для величины конформного модуля $\operatorname{mod}\Gamma(R)$ имеем следующую оценку

$$\operatorname{mod}\Gamma(R) \le \frac{1}{\sigma^2}\int_{D_R} \varphi^2(z)\,dz\,d\overline{z},$$

откуда, принимая во внимание (18) и (19), получим

$$\ln R \le \frac{\pi G(\mathscr{M})}{4\sigma^2}. \tag{22}$$

Чтобы оценить σ снизу рассмотрим вспомогательное стереографическое отображение

$$h(\zeta) = \left(\frac{2\mathrm{Re}\zeta}{|\zeta|^2+1};\ \frac{2\mathrm{Im}\zeta}{|\zeta|^2+1};\ \frac{|\zeta|^2-1}{|\zeta|^2+1}\right)\ : \mathbf{C}^1 \to S^2 \setminus \{P\},$$

комплексной плоскости в единичную сферу S^2 с выброшенным северным полюсом $P = (0;0;1)$. Тогда дифференциал стереографического отображения в точке w вычисляется по формуле

$$|d_w h| = \frac{2|dw|}{|w|^2+1}.$$

Таким образом, для любого $t \in (1/R; R)$ имеем

$$\int\limits_{C_t} \varphi(\zeta)\,|d\zeta| \equiv \int\limits_{C_t} \frac{|g_1'(\zeta)|}{1+|g_1(\zeta)|^2}|d\zeta| = \int\limits_{g_1(C_t)} \frac{|dw|}{1+|w|^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{h\circ g_1(C_t)} |dh| \ge \frac{1}{2}\ell(h\circ g_1(C_t)), \tag{23}$$

где через $\ell(E)$ обозначена длину континуума $E \in S^2$ в сферической метрике.

Объединяя (21) и (23), получим

$$\sigma \ge \frac{1}{2}\inf_{1/R<t<R} \ell(h\circ g_1(C_t)). \tag{24}$$

Применим теорему о среднем к вещественным частям тождеств (20). Тогда для каждого $t \in (1/R; R)$ найдутся ξ_1 и ξ_2 такие, что справедливы равенства

$$\operatorname{Re} g_1(te^{i\xi_1}) = a, \qquad \operatorname{Re} \frac{1}{g_1(te^{i\xi_2})} = -a. \tag{25}$$

Из (25) следует, что $\gamma_t = g_1(C_t)$ имеет непустое пересечение с прямой $L_1 = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z = a\}$ и окружностью $L_2 = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = -a\}$. Принимая во внимание замкнутость кривой γ_t и равенство $h \circ g_1(C_t) = h(\gamma_t)$, из (24) получаем

$$\sigma \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{dist}(h(L_1); h(L_2)) = \operatorname{dist}(h(L_1); h(L_2)), \tag{26}$$

где dist означает геодезическое расстояние между соответствующими подмножествами единичной сферы.

Пусть $h(z) = (x_1, x_2, x_3) \in h(L_1)$ — произвольная точка. Тогда, используя определение стереографической проекции и тот факт, что $\operatorname{Re} z = a$ на L_1, получаем равенство

$$x_1 + ax_3 = \frac{2\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2} + a\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = a.$$

Последнее означает, что $h(L_1)$ есть окружность в единичной сфере S^2, лежащая в плоскости $x_1 + ax_3 = a$. Аналогично убеждаемся, что $h(L_2)$ — центрально-симметричная ей окружность в плоскости $x_1 + ax_3 = -a$. Непосредственные вычисления расстояния между этими окружностями в метрике единичной сферы дают соотношение

$$\operatorname{dist}(h(L_1); h(L_2)) = 2\operatorname{arctg} a,$$

и, с учетом (22) и (26), получаем

$$\ln R \leq \frac{\pi G(\mathscr{M})}{16 \operatorname{arctg}^2 a}. \tag{27}$$

Пусть $\alpha(\mathscr{M})$ — угол между вектор-потоком $J(\mathscr{M})$ и осью Ox_3. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha(\mathscr{M}) = \frac{\sqrt{J_1^2 + J_2^2}}{J_3} = a, \tag{28}$$

и, используя (27) и (17), получим требуемое неравенство. Лемма доказана полностью.

$\square$

2.4. Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\mathscr{M} \subset \mathbf{R}^3$ — двумерная погруженная минимальная трубка произвольного топологического типа с интервалом существования $\tau(\mathscr{M}) = (\tau_1; \tau_2)$. Обозначим через E множество всех критических точек координатной функции $X_3(\zeta)$ погружения $X : M \to \mathbf{R}^3$. Заметим, что ввиду гармоничности $X_3(\zeta)$, множество E состоит только из изолированных точек, в частности, оно не более чем счетно. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу определения 1, множество критических значений $\{h_i = X_3(\xi_i) : \xi_i \in E\}$, лежащих в интервале $(\tau_1 + \varepsilon; \tau_2 - \varepsilon)$, может быть только конечным. Будем считать, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ это множество непусто, так как в противном случае поверхность является погруженным кольцом и утверждение теоремы следует из леммы 4.2. Кроме того, без ограничения общности будем предполагать, что значения h_i, $1 \leq i \leq N$, нумеруются в порядке возрастания.

Зафиксируем произвольный индекс $i : 1 \leq i \leq N-1$. Тогда порция поверхности $\mathscr{M}$, заключенная в пространственном слое $h_i \leq x_3 \leq h_{i+1}$, распадается на конечное число связных минимальных трубок $D_1, \ldots, D_k$ имеющих топологический тип кольца. Действительно, по классической лемме Морса, отсутствие критических точек функции высоты X_3 на любой компоненте D_j влечет гомеоморфность D_j (погруженному) цилиндру.

Обозначим через $J^{(j)} = J(D_j)$ — вектор-потоки, соответствующие каждой компоненте D_j, рассматриваемой как независимая трубка, и через α_j — углы между $J^{(j)}$ и базисным вектором e_3. Тогда, ввиду леммы 4.2, получим для любого j, $1 \leq j \leq k$

$$h_{i+1} - h_i \leq \frac{G(D_j)J_3(D_j)}{16\ \alpha_j^2} \leq \frac{G(D)J_3(D_j)}{16\ \alpha_j^2},$$

где $D = \cup D_j$. Кроме того, в силу определения вектор-потока, имеем

$$J^{(1)} + J^{(2)} + \ldots + J^{(k)} = J(\mathscr{M}), \tag{29}$$

и, учитывая неотрицательность третьей координаты вектор-потока,

$$J_3^{(i)} \leq \sum_{j=1}^{k} J_3^{(j)} = J_3(\mathscr{M}),$$

получаем

$$h_{i+1} - h_i \leq \frac{G(D)J_3(\mathscr{M})}{16\ \alpha_j^2}. \tag{30}$$

С другой стороны, найдется индекс ν такой, что $\alpha_\nu \geq \alpha(\mathscr{M})$. Действительно, рассмотрим выпуклый многогранник P, полученный в результате взятия выпуклой оболочки начала координат $O \in \mathbf{R}^3$ и концов векторов $J^{(j)}$. Принимая во внимание (29), получим, что вектор $\dfrac{1}{k}J(\mathscr{M})$ лежит в P. Тогда, из выпуклости многогранника P вытекает, что найдется вектор $J^{(\nu)}$, для которого угол α_ν должен быть не меньше, чем угол между e_3 и $\dfrac{1}{k}J(\mathscr{M})$, который по определению совпадает с $\alpha(\mathscr{M})$. Тем самым, после применения (30) к ν, будем иметь

$$h_{i+1} - h_i \leq \frac{G(D)J_3(\mathscr{M})}{16\ \alpha^2(\mathscr{M})}.$$

После суммирования полученных неравенств по всем i, приходим к оценке

$$|\tau(\mathscr{M})| - 2\varepsilon \leq \frac{G(\mathscr{M}')J_3(\mathscr{M})}{16\ \alpha^2(\mathscr{M})},$$

где $\mathscr{M}'$ — часть поверхности $\mathscr{M}$, расположенная в слое $\tau_1 + \varepsilon \leq x_3 \leq \tau_2 - \varepsilon$. Учитывая произвольность выбора ε и возрастание абсолютной интегральной гауссовой кривизны как функции множества, приходим к требуемому неравенству. Теорема доказана полностью.

2.5. В этом пункте мы рассматриваем класс минимальных трубок $\mathscr{M}$ с однолистным гауссовым отображением. Так как для таких трубок абсолютная интегральная гауссова кривизна конечна и меньше 4π, то в силу теоремы 4.1 имеем

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq \frac{\pi \|J(\mathscr{M})\| \cos \alpha(\mathscr{M})}{4\, \alpha^2(\mathscr{M})}. \tag{31}$$

В работе [81] мы уточнили данный результат для двусвязных трубок:

Теорема 4.2. *Пусть $\mathscr{M}$, $\dim\mathscr{M} = 2$ — двусвязная минимальная трубка с однолистным гауссовым отображением и $\alpha(\mathscr{M}) > 0$. Тогда время жизни $|\tau(\mathscr{M})|$ поверхности $\mathscr{M}$ конечно*

$$\tau(\mathscr{M}) \leq \frac{\pi \|J(\mathscr{M})\| \cos \alpha(\mathscr{M})}{\ln \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2})}. \tag{32}$$

Доказательство. Предварительно заметим, что как и в пункте 4.2.3 достаточно получить подходящую оценку на конформный модуль семейства кривых Γ, разделяющих граничные компоненты кольца $D_R = \{z \in \mathbf{C} : 1/R < |z| < R\}$. Основное отличие данного доказательства от приводимого в пункте 4.2.3 заключается в более точном выборе допустимой функции для вычисления конформного модуля кольца D_R. Это возможно в силу однолистности стереографического гауссова отображения $g(z)$.

Как и ранее, в кольце D_R можно определить голоморфную функцию $g_1(z)$, совпадающую с $g(z)$ с точностью до постоянного комплексного множителя и такую, что выполнены условия (20). Следовательно, $g_1(z)$ будет также однолистной в кольце D_R функцией. Докажем, что

$$\ln R \leq \frac{\pi^2}{\ln(a + \sqrt{1 + a^2})}. \tag{33}$$

Пусть $\Gamma = \{C_\rho : 1/R < \rho < R\}$ — семейство концентрических окружностей $C_\rho = \{z : |z| = \rho\}$. Как и при доказательстве леммы 4.2, заключаем, что кривые-образы $g_1(C_\rho)$ имеют непустые пересечения с прямой $L_1 = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re} z = a\}$ и окружностью $L_2 = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = -a\}$.

Так как отображение $g_1(z)$ однолистно, конформный модуль семейства Γ совпадает с конформным модулем семейства кривых $g_1(\Gamma)$. Рассмотрим вспомогательную область

$$D = \left\{ z : \mathrm{Re}\, z < a; \; \left| z + \frac{1}{2a} \right| > \frac{1}{2a} \right\}.$$

Таким образом, для любого $\rho \in (1/R; R)$ можно найти континуумы $\gamma_\rho \subset {}_\rho$, образы которых при отображении g_1 соединяюn граничные компоненты области D. Тогда новое семейство Γ_1, состоящее из всех таких континуумов γ_ρ, "короче"семейства Γ в том смысле, что каждая кривая из Γ_1 содержится в некоторой кривой из Γ. Тогда из теоремы 1.2 в [2] получаем неравенство

$$\mathrm{mod}\, \Gamma = \mathrm{mod}\, g_1(\Gamma) \leq \mathrm{mod}\, \Gamma_1 = \mathrm{mod}\, g_1(\Gamma_1). \tag{34}$$

С другой стороны, $g_1(\Gamma_1)$ является подсемейством $\Gamma(D)$ *всех* кривых в области D соединяющих ее граничные компоненты. Свойство монотонности инфимума и определение конформного модуля приводят к следующему неравенству

$$\mathrm{mod}\, g_1(\Gamma_1) \leq \mathrm{mod}\Gamma(D). \tag{35}$$

и, подставляя известную формулу $\operatorname{mod}\Gamma = \frac{\ln R}{\pi}$ в соотношения (34) и (35), получаем

$$\frac{\ln R}{\pi} \le \operatorname{mod}\Gamma(D).$$

Чтобы вычислить последний модуль, заметим, что дробно-линейная функция

$$h(z) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{z+\lambda}{1-z\lambda}$$

отображает D на кольцо $D_1 = \{w : 1 < |w| < 1/\lambda^2\}$, где $\lambda = \sqrt{a^2+1} - a$. Таким образом, используя инвариантность конформного модуля, будем иметь

$$\frac{\ln R}{\pi} \le \operatorname{mod}\Gamma(D) \equiv \frac{2\pi}{\ln{(1/\lambda^2)}} = \frac{\pi}{\ln(a+\sqrt{1+a^2})}.$$

и формула (33) доказана.

Учитывая равенство (28) и (17), получаем требуемую оценку и теорема доказана полностью.

$\square$

3. Примеры минимальных трубок с бесконечным временем существования

3.1. Ниже приводятся примеры, показывающие, что существуют минимальные трубки с интервалом существования $\mathbf{R}$ и произвольным углом наклона вектор-потока.

Лемма 4.3. *Пусть $\psi(\zeta)$ — голоморфная в кольце D_R функция и такая, что*

$$\overline{\psi\left(-\frac{1}{z}\right)} = -\psi(z). \tag{36}$$

Тогда для любого целого N функция

$$g(z) = z^{2N+1}\exp(\psi(z))$$

является допустимой для кольца D_R.

Доказательство. Пусть $w = -1/z$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$\frac{1}{g(z)} = z^{-2N-1}\exp(-\psi(z)) = -\left(-\frac{1}{z}\right)^{2N+1} \cdot \exp\overline{\psi\left(-\frac{1}{z}\right)} =$$
$$= -w^{2N+1}\overline{\exp\psi(\overline{w})} = -\overline{\overline{w}^{2N+1}\exp\psi(\overline{w})} = -\overline{g(\overline{w})},$$

и, следовательно, для центральных лорановских коэффициентов имеем

$$a_0(1/g(z)) = a_0(-\overline{g(\overline{w})}) = -\overline{a_0(g(w))} = -\overline{a_0(g(z))},$$

что и требовалось доказать.

$\square$

В качестве приложения рассмотрим простейшую функцию, удовлетворяющую условию (36)

$$\psi(z) = \lambda\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

где $\lambda \geq 0$ — некоторое вещественное положительное число. В силу леммы 4.3, функция

$$g_\lambda(z) = z \exp \lambda(z + \frac{1}{z})$$

является допустимой для проколотой комплексной плоскости $D_\infty \equiv \mathbf{C}\backslash\{0\}$. Разложение в ряд Лорана дает следующее выражение для центрального лорановского коэффициента функции $g_\lambda(z)$:

$$a_0(g_\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{k!(k-1)!}.$$

Пусть $\mathscr{M}_\lambda$ — минимальная двусвязная трубка, полученная в результате представления (9) с функцией $g_\lambda(z)$. Тогда $\mathscr{M}_\lambda$ конформно эквивалентна $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ и, применяя (26) и (28), будем иметь

$$\operatorname{tg} \alpha(\mathscr{M}_\lambda) = |a_0(g_\lambda)| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{k!(k-1)!}.$$

Таким образом, варьируя $\lambda \in (0; +\infty)$, будем получать двусвязные минимальные трубки $\mathscr{M}_\lambda$ с бесконечным интервалом существования и с произвольным углом наклона вектор-потока к оси Ox_3.

4. Гауссово отображение многомерных трубок

4.1. Всюду далее в данном параграфе мы рассматриваем только случай вложенных в $\mathbf{R}^n$ гиперповерхностей и поэтому не будем делать различий в обозначениях, касающихся самого многообразия M и поверхности $\mathscr{M} = (M; u)$. Например, Σ_τ одновременно означает как подмножество M, так и подмножество $\mathbf{R}^n$, соответствующее образу Σ_τ при отображении u.

Пусть S^{n-1} — стандартная единичная евклидова сфера в $\mathbf{R}^n$ и $d(E)$ — диаметр подмножества $E \subset S^{n-1}$, подсчитанный в сферической метрике. Обозначим через $\gamma : M \to S^{n-1}$ гауссово отображение поверхности $\mathscr{M}$, сопоставляющее каждой точке $m \in M$ нормальный вектор $\gamma(m)$, и для данного подмножества $E \subset M$ через $\gamma(E)$ — его гауссов образ.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — минимальная трубка в $\mathbf{R}^n$, $\Sigma \subset \Sigma(\tau)$ — некоторая простая связная компонента с вектор-потоком $J(\Sigma)$. Тогда диаметр гауссова образа $\gamma(\Sigma)$ компоненты Σ удовлетворяет неравенству*

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2\alpha(\Sigma)\,, \tag{37}$$

где $\alpha(\Sigma)$ — угол между $J(\Sigma)$ и e_n.

4.2. Будем обозначать через $\Lambda(\mathbf{R}^n)$ и $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ — внешнюю алгебру пространства $\mathbf{R}^n$ и ее подпространство кососимметрических k-форм соответственно. Зафиксируем канонический базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в $\mathbf{R}^n$ и обозначим через $\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ — форму объема, порождающую ориентацию $\mathbf{R}^n$. Далее приводятся некоторые факты из внешней алгебры, которые могут быть найдены, например, в книге Стернберга [70]. Будем записывать $a \simeq b$, если $a = \pm b$.

Для данного $u \in \Lambda(\mathbf{R}^n)$ определим оператор внутреннего умножения $u \dashv \cdot$ на $\Lambda(\mathbf{R}^n)$, полагая

$$\langle x, u \dashv y \rangle \equiv \langle u \wedge x, y \rangle\,, \quad \forall x, y \in \Lambda(\mathbf{R}^n)\,. \tag{38}$$

Через $*$ обозначим *оператор Ходжа* $\Lambda^k(\mathbf{R}^n) \to \Lambda^{n-k}(\mathbf{R}^n)$, полагая для любой k-формы x

$$* \, x = x \dashv \omega\,. \tag{39}$$

Перечислим некоторые стандартные свойства этих операторов (см. [70, стр. 33]).

(i) $* * x = (-1)^{k(n-k)} x \simeq x\,, \quad \forall x \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)$;

(ii) $x \wedge *y = \langle x, y \rangle \omega\,, \quad \forall x \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n), \forall y \in \Lambda^{n-k}(\mathbf{R}^n)\,$;

(iii) $\langle *x, *y \rangle = \langle x, y \rangle\,, \quad \forall x, y \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $V \subset \mathbf{R}^n$ — ориентированное k-мерное подпространство и $v_1, \dots, v_k$ — некоторый ортонормированный базис V (далее мы употребляем термин *репер*) с согласованой ориентацией. Нетрудно видеть, что форма

$$\sigma(V) \equiv v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$$

не зависит от выбора репера $v_1, \dots, v_k$. Определим также оператор

$$\pi_V(\xi) = * \left(\sigma(V) \wedge \xi\right)\,.$$

Если $V \subset \mathbf{R}^n$ — ориентированное подпространство, $\mathrm{dim} V = n-1$, и ξ — некоторый единичный вектор, ортогональный V (т.е. $\xi \in V^\perp$), то из свойства (ii) вытекает представление

$$\xi \simeq *\sigma(V). \tag{40}$$

Лемма 4.4. *Для любых $a \in \Lambda^r(\mathbf{R}^n)$, $b \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ выполнено*

$$a \dashv (*b) = *(b \wedge a)\,.$$

Доказательство. Имеем для любого $\xi \in \Lambda^{n-k-r}(\mathbf{R}^n)$,

$$\langle a \dashv *b, \xi \rangle = \langle *b, a \wedge \xi \rangle = \langle b \dashv \omega, a \wedge \xi \rangle =$$

$$= \langle \omega, b \wedge a \wedge \xi \rangle = \langle (b \wedge a) \dashv \omega, \xi \rangle = \langle *(b \wedge a), \xi \rangle\,.$$

В силу произвольности выбора ξ, имеем $*(b \wedge a) = a \dashv *b$, что и требовалось доказать.

□

Лемма 4.5. *Пусть $V \subset \mathbf{R}^n$ — подпространство,* $\dim V = k$, *и $V^\perp$ — его ортогональное дополнение. Тогда для $\forall x \in \mathbf{R}^n$*

$$x^{V^\perp} = \sigma(V) \dashv \left(\sigma(V) \wedge x\right)\,. \tag{41}$$

Доказательство. Выберем в V ориентированный репер $v_1, \dots, v_k$ и дополним его до ориентированного репера $\mathbf{R}^n$: $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ — произвольный вектор и $x = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + y_1 w_1 + \dots + y_{n-k} w_{n-k}$ — его ортогональное разложение. Тогда для любого v_i имеем

$$\langle \sigma(v) \dashv (\sigma(v) \wedge x)\,, v_i \rangle = \langle \sigma(v) \wedge x, \sigma(v) \wedge v_i \rangle = 0\,.$$

С другой стороны,

$$\langle \sigma(v) \dashv (\sigma(v) \wedge x)\,, w_\alpha \rangle = \langle \sigma(v) \wedge x, \sigma(v) \wedge w_\alpha \rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-k} \langle \sigma(v) \wedge w_j, \sigma(v) \wedge w_\alpha \rangle = \sum_{j=1}^{n-k} y_j \delta_{j\alpha} = y_\alpha\,.$$

Таким образом, по определению внутреннего умножения

$$\sigma(v) \dashv (\sigma(v) \wedge x) = y_1 w_1 + \dots + y_{n-k} w_{n-k} = x^{V^\perp}\,,$$

что и требовалось доказать.

□

4.3. Доказательство теоремы 4.3

Обозначим далее через Π гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$, определяемую уравнением $x_n = 0$, через $T \equiv T_m\Sigma$ — касательное пространство к сечению Σ (рассматриваемому как подмногообразие Π) и $\gamma = \gamma(m)$ — вектор внешней нормали к поверхности $\mathscr{M}$ в точке m. Пусть вектора $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$ образуют ориентированный репер в T и $\tau \equiv \sigma(T)$ — элемент объема в $T_m\Sigma$.

Лемма 4.6. *Пусть ξ и η — единичные вектора такие, что вектора $\xi, \eta, \tau_1, \dots, \tau_{n-2}$ образуют ориентированный репер в $\mathbf{R}^n$. Тогда для любого вектора $q \in \mathbf{R}^n$, $\|q\| \neq 0$, имеем*

$$\langle q, \xi \rangle \simeq \langle \eta, \pi_T(q) \rangle.$$

Доказательство. Из свойства (40) находим, что

$$\xi \simeq *(\eta \wedge \tau),$$

и, используя (iii) и лемму 4.4, получаем

$$\langle q, \xi \rangle \simeq \langle q, *(\eta \wedge \tau) \rangle \simeq \langle q, *(\tau \wedge \eta) \rangle \simeq \langle q, \eta \dashv *\tau \rangle \simeq$$

$$\simeq \langle \eta \wedge q, *\tau \rangle \simeq \langle \eta, q \dashv *\tau \rangle \simeq \langle \eta, *(\tau \wedge q) \rangle \simeq \langle \xi, \pi_T(q) \rangle$$

что и требовалось установить.

□

Перейдем теперь непосредственно к **доказательству** теоремы 4.3. Пусть $\eta = \eta(m)$ — поле единичных нормалей к Σ, рассматриваемому как подмногообразие Π_τ, ориентированное так, что пара $(T; \eta)$ образует ортонормированный репер Π. Тогда, в силу леммы 4.5, получим для любого вектора $q \in \mathbf{R}^n$

$$\int\limits_{\Sigma}\langle \pi_T(q), e_n\rangle = \int\limits_{\Sigma}\langle *(\tau\wedge q), e_n\rangle \simeq \int\limits_{\Sigma}\langle \tau\wedge q, *e_n\rangle \simeq$$

$$\simeq \int\limits_{\Sigma}\langle \tau\wedge q, \tau\wedge\eta\rangle \simeq \int\limits_{\Sigma}\langle q, \tau \dashv (\tau\wedge\eta)\rangle \simeq \int\limits_{\Sigma}\langle q, \eta\rangle \tag{42}$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Действительно, как вложенное компактное подмногообразие Π_t без края, простой цикл Σ является границей некоторой компактной области $\Omega \subset \Pi_t$. Тогда, применяя формулу Стокса, получим

$$\int\limits_{\partial\Omega}\langle q, \eta\rangle = \int\limits_{\Omega}\operatorname{div} q = 0.$$

Таким образом, из (42) следует тождество

$$\int\limits_{\Sigma}\langle \pi_T(q), e_n\rangle = 0. \tag{43}$$

Выберем вектор q произвольно так, чтобы выполнялось соотношение $\langle q, J(\Sigma)\rangle = 0$. В этом случае, учитывая взаимную ортогональность нормалей γ, ν и касательного пространства $T_m\Sigma$, из (4) и леммы 4.6 последовательно получаем

$$0 = \int\limits_{\Sigma}\langle q, \nu\rangle = \int\limits_{\Sigma}\langle \pi_T(q), \gamma\rangle,$$

и, используя (43), приходим к равенствам

$$\int\limits_{\Sigma}\langle \pi_T(q), \gamma \pm e_n\rangle = 0. \tag{44}$$

В силу регулярности значения t оба выражения $\gamma \pm e_n$ не обращаются в нуль на Σ. Поэтому вдоль Σ корректно определены векторные поля

$$v_{\pm}(m) = \frac{e_n \pm \gamma(m)}{\|e_n \pm \gamma(m)\|}.$$

По теореме о среднем из (44) найдутся две точки m_- и m_+ в Σ, для которых выполнено

$$\langle \pi_{T_{\pm}}(q), v_{\pm}\rangle = 0, \tag{45}$$

где $T_{\pm} = T_{m_{\pm}}M$ и $v_{\pm} = v_{\pm}(m_{\pm})$.

Заметим, что набор $(v_-, v_+, \tau_1, \dots, \tau_{n-2})$ образует ориентированный репер $\mathbf{R}^n$. Тогда, применяя к (45) лемму 4.6, будем иметь

$$0 = \langle \pi_{T_+}(q), v_+\rangle \simeq \langle v_-, q\rangle$$

в точке m_- и, соответственно, в точке m_+:

$$0 = \langle \pi_{T_-}(q), v_-\rangle \simeq \langle v_+, q\rangle.$$

Избавляясь от знаменателей в определении векторов $v_\pm$, из последних равенств получим

$$\langle q, e_n \pm \gamma(m_\pm)\rangle = 0.$$

Вычитая одно равенство из другого, получим

$$\langle \gamma(m_+) - \gamma(m_-), q\rangle = 2q_n,$$

где $q_n = \langle q, e_n\rangle$ — n-я координата q. Наконец, применяя неравенство Коши-Буняковского к последнему тождеству, приходим к неравенству

$$\|\gamma(m_+) - \gamma(m_-)\| \geq \frac{2q_n}{\|q\|}. \tag{46}$$

Учитывая, что $\gamma(m_\pm)$ — точки на единичной сфере, принадлежащие гауссову образу компоненты Σ, получим $\|\gamma(m_+) - \gamma(m_-)\| = 2\sin\frac{\beta}{2}$, где β — угол между $\gamma(m_+)$ и $\gamma(m_-)$. С другой стороны, по определению сферического диаметра подмножества $\gamma(\Sigma) \subset S^{n-1}$, выполнено неравенство $d(\gamma(\Sigma)) \geq \beta$. Таким образом, из (46) будем иметь

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2\arcsin\frac{q_n}{\|q\|}.$$

Найдем максимальное значение правой части последнего неравенства. Пусть $\alpha(\Sigma)$ — угол между векторами $J(\Sigma)$ и e_n. Тогда, учитывая ортогональность q вектор-потоку $J(\Sigma)$, легко определить, что

$$\max_{q\perp J(\Sigma)} \frac{q_n}{\|q\|} = \sin\alpha(\Sigma),$$

и, таким образом,

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2\alpha(\Sigma),$$

что завершает доказательство теоремы 4.3 полностью.

□

4.4. Продемонстрируем применение доказанного результата для случая двумерных минимальных трубок. Как уже отмечалось выше, гауссово отображение таких поверхностей конформно. Пусть $\mathscr{M}$ — двусвязная вложенная трубка. Тогда можно считать, что $\mathscr{M}$ конформно эквивалентна некоторму кольцу и, как показано в [43], ее конформный модуль равен

$$\operatorname{mod}\mathscr{M} = \frac{|t(\mathscr{M})|}{\langle J(\mathscr{M}), e_3\rangle}.$$

В силу конформности гауссова отображения, для любого касательного вектора $X \in T_m M$ выполнено

$$\|d\gamma_m(X)\| = \lambda(m)\|X\|,$$

где $\lambda(m)$ — некоторая гладкая функция. Для гауссовой кривизны имеет место равенство $K(m) = -\lambda^2(m)$.

Имеем для любого $t \in t(\mathscr{M})$

$$\int_{\Sigma_t} \lambda\, ds = \int_{\gamma(\Sigma_t)} ds_1 \geq 2d(\gamma(\Sigma_t)),$$

где ds_1 — сферическая метрика. Применяя теорему 4.3, получим

$$\int\limits_{\Sigma_t} \lambda\, ds \geq 4\alpha(\mathscr{M}), \tag{47}$$

где $\alpha(\mathscr{M})$ — угол между вектор-потоком $J(\mathscr{M})$ и e_3.

Используя теперь определение конформного модуля ([2])

$$\operatorname{mod} \mathscr{M} = \inf_{\varrho \geq 0} \frac{\int_M \varrho^2\, dS}{\left(\inf_t \int\limits_{\Sigma_t} \varrho\, ds\right)^2},$$

где dS — элемент площади $\mathscr{M}$ и, полагая $\varrho = \lambda$, из (47) получим неравенство

$$\operatorname{mod} \mathscr{M} \leq \frac{\int\limits_M (-K)\, dS}{16\alpha^2(\mathscr{M})}.$$

Напомним, что выражение $G(\mathscr{M}) = \int_M K\, dS$ называется интегральной гауссовой кривизной поверхности $\mathscr{M}$. Учитывая выражение для конформного модуля трубки, получим следующую оценку на время существования

$$|t(\mathscr{M})| \leq \frac{J_3(\mathscr{M})|G(\mathscr{M})|}{16\alpha^2(\mathscr{M})},$$

совпадающую с приведенной выше в следствии 4.1.

Глава 5

p-минимальные поверхности и принцип сравнения

В настоящей главе вводится класс так называемых p-минимальных поверхностей, совпадающий с обычными минимальными поверхностями при $p = 2$. Естественность введения данного класса основывается на следующих соображениях. Во-первых, некоторые факты из геометрии "в целом"минимальных поверхностей могут быть продолжены на класс p-минимальных поверхностей. Во-вторых, отметим, что в работах Р. Оссермана и Л. Саймона изучались поверхности, имеющие квазиконформное гауссово отображение, хотя конкретные примеры таких поверхностей не рассматривались. Ниже нами доказывается (теорема 5.2), что гауссово отображение p-минимальных поверхностей является $K(p)$-квазиконформным (в частности, $K(2) = 1$ дает известное свойство конформности гауссова отображения минимальных поверхностей).

Отметим характерную особенность теории p-минимальных поверхностей. Именно, как показывают некоторые результаты (например, теорема 5.1, следствие 81, теорема 5.6), поведение таких поверхностей зависит не от величины параметра p, а от дроби $\beta = \frac{n-1}{p-1}$.

В последнем параграфе главы, используя принцип сравнения, мы обобщаем теорему Йоргенсона-Калаби-Погорелова об уравнении Монжа-Ампера в случае дифференциального нелинейного оператора второго порядка.

1. Определение p-минимальных поверхностей

1.1. Пусть $\mathscr{M} = (M; x)$ — минимальная поверхность, заданная C^2-погружением $x : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ ориентированного n-мерного некомпактного многообразия M.

Основное функциональное характеристическое свойство данного класса погружений является гармоничность каждой координатной функции в метрике поверхности. На самом деле имеет место более точное утверждение.

Предложение 5.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — n-мерная гиперповерхность в $\mathbf{R}^{n+1}$. Если найдется набор из n линейно независимых единичных векторов $\{v_i\}$ такой, что соответствующие координатные функции являются гармоническими в метрике поверхности $\mathscr{M}$, то $\mathscr{M}$ — минимальная поверхность.*

Доказательство. Принимая во внимание линейность оператора Лапласа, можно не ограничивая общности считать, что вектора $\{v_i\}$ являются попарно ортогональными и вместе с подходящим вектором v_{n+1} образуют ортонормированный базис $\mathbf{R}^{n+1}$. Пусть x_i — соответствующие координатные функции. Заметим, что для любого касательного вектора $E \in T_m M$ и индекса i, $1 \leq i \leq n+1$, выполнено $\overline{\nabla}_E x_i = v_i$ и, следовательно,

$$\nabla_E x_i = v_i^\top. \tag{48}$$

Более того, по определению (44) для произвольного ортонормального базиса $\{E_j\}$ касательного пространства $T_m M$ будем иметь

$$\Delta x_i = \operatorname{div} v_i^\top = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{E_j} v_i^\top, E_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle B(E_j, E_j), v_i^\perp \rangle = \langle H(m), v_i \rangle, \tag{49}$$

где $H(m)$ — вектор средней кривизны поверхности $\mathscr{M}$.

Принимая во внимание, что $\Delta x_i = 0$, $1 \le i \le n$, получим

$$\langle H(m), v_i \rangle \equiv 0, \quad 1 \le i \le n,$$

всюду на M. Таким образом, нормальный вектор $H(m)$ коллинеарен вектору v_{n+1}. Предположим, что в некоторой точке $m \in M$: $H(m) \neq 0$. Тогда вектор H ненулевой в некотором непустом открытом множестве $\mathscr{O} \subset M$, и в этом множестве любая линейная комбинация параллельных векторных полей v_i, $1 \le i \le n$, является касательной к поверхности $\mathscr{M}$. Следовательно, сечение $\mathscr{M}$ двумерными плоскостями, проходящими через произвольную точку $\mathscr{O}(m)$ и натянутыми на вектор нормали к поверхности и v_{n+1}, являются прямолинейными сегментами. Последнее означает, что вторая квадратичная форма B поверхности $\mathscr{M}$, а так же и вектор средней кривизны в произвольной точке $m \in \mathscr{O}$ обращаются в нуль, что противоречит сделанному предположению.

□

1.2. Пусть $\Omega \in M$ — компактное подмножество риманова многообразия M и $p > 1$ — действительное число. Пусть N — другое риманово многообразие. Для отображения $\phi : \Omega \to N$, $\phi \in L^{1,p}$ введем понятие p-энергии

$$E_p(\phi, \Omega) = \frac{1}{p} \int_\Omega |d\phi|^p. \tag{50}$$

Следуя [34] и [11], отображение $\phi : M \to N$ будем называть *p-гармоническим*, если $\phi|_\Omega$ — критическая точка функционала $E(\cdot, \Omega)$ для любого компактного подмножества $\Omega \in M$. В случае, когда $N = \mathbf{R}^1$, функция $\phi(x)$ называется *p-гармонической функцией*. Как следствие формулы Эйлера-Лагранжа, такая функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\alpha f \equiv \operatorname{div} |\nabla f|^{\alpha-2} \nabla f = 0. \tag{51}$$

Данные понятия нужно рассматривать как естественное обобщение гармонических отображений и функций, которые являются критическими точками функционала 2-энергии. Вопросы регулярности p-гармонических отображений подробно обсуждаются, например, в [93]. Известно, в частности, что такие отображения могут иметь гёльдеровы особенности в тех точках, где обобщенный градиент равен нулю. Последнее обстоятельство выполняется в высоких размерностях даже при $p = 2$. Ниже мы сосредоточимся преимущественно на геометрической стороне дела и будем предполагать, что все изучаемые объекты (многообразия, поверхности, функции и т.д.) являются как минимум C^2-гладкими. Мы приводим ряд примеров, показывающих, что для любого $p > 1$ существуют полные собственно вложенные многообразия, у которых одна из координатных функций является нетривиальной p-гармонической вещественно-аналитической функцией.

Назовем точку m поверхности $\mathscr{M}$ *некритической* для данного направления e, если вектор нормали ν_m к поверхности не коллинеарен e. Другими словами, если f — координатная функция, соответствующая e, то в m дифференциал df невырожден. Обозначим через $k_e(m)$ кривизну поверхности $\mathscr{M}$ в направлении e (то есть кривизну кривой, полученной сечением $\mathscr{M}$ двумерной плоскостью, натянутой на e нормаль ν_m).

Предложение 5.2. *Пусть m — некритическая точка направления e и f — координатная функция, соответствующая e. Тогда*

$$\Delta_p f = |\nabla f|^{p-2}\langle e,\nu\rangle\Big(H(m)+(p-2)k_e(m)\Big). \tag{52}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\overline{\nabla}$ и ∇ обозначают стандартные ковариантные производные в $\mathbf{R}^{n+1}$ и $\mathscr{M}$ соответственно. Тогда

$$\nabla f(m) = \left(\overline{\nabla}\,\langle x(m), e\rangle\right)^{\top} = e^{\top},$$

Из предположения некритичности точки m заключаем, что $|\nabla f(m)| \neq 0$, или, что то же самое, $|e^{\top}| \neq 0$, в некоторой окрестности m. Таким образом, для любого касательного вектора X получаем

$$\nabla_X|\nabla f| = \nabla_X|e^{\top}| = \frac{\langle\overline{\nabla}_X e^{\top}, e^{\top}\rangle}{|e^{\top}|} = \frac{\langle\overline{\nabla}_X(-e^{\perp}), e^{\top}\rangle}{|e^{\top}|} = \langle e,\nu\rangle\langle A(X), \frac{e^{\top}}{|e^{\top}|}\rangle.$$

Здесь A означает отображение Вейнгартена поверхности $\mathscr{M}$ и $e^{\perp}$ — проекция e на нормальное пространство к $\mathscr{M}$. В силу симметрии A, имеем

$$\nabla|\nabla f| = \langle e,\nu\rangle A(\tau), \tag{53}$$

где векторное поле $\tau = e^{\top}/|e^{\top}|$ корректно определено в точке m. После подстановки (53) в определение (51) мы получаем

$$\begin{aligned}\Delta_p f = \operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = (p-2)|\nabla f|^{p-3}\langle\nabla f, \nabla(|\nabla f|)\rangle + \\ + |\nabla f|^{p-2}\Delta f = |\nabla f|^{p-4}\langle e,\nu\rangle\left(|e^{\top}|^2\Delta f + (p-2)\langle A(e^{\top}), e^{\top}\rangle\right).\end{aligned} \tag{54}$$

Используя теперь определение $k_e(m)$ вместе с формулой (49), получим на основании (54) равенство (52) всюду на множестве некритических точек $M_0 \equiv \{m \in M : |e^{\top}(m)| \neq 0\}$.

□

Следствие 5.1. *Пусть поверхность $\mathscr{M} = (M, x)$ удовлетворяет условию*

$$H(m) = -(p-2)k_e(m), \tag{55}$$

тогда координатная функция f является p-гармонической.

Замечание 5.1. Используя формулу (52), легко проверить, что условие (55) является необходимым и достаточным для того, чтобы $f(m)$ была p-гармонической, если исключить из рассмотрения класс цилиндрических поверхностей.

Определение 5.1. Пусть $\mathscr{M}$ — погруженная поверхность в евклидовом пространстве и для некоторого направления $e \in \mathbf{R}^n$ выполнено соотношение (55). Тогда такую поверхность будем называть *p-минимальной.*

Заметим, что данное определение в случае $p = 2$ приводит к обыкновенным минимальным поверхностям.

Можно проверить, что p-гармоничность одной из координатных функций при $p \neq 2$ не будет переноситься на остальные, так как p-оператор Лапласа не является линейным. В некотором смысле это означает, что в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ выделено направление (отвечающее градиенту p-гармонической координатной функции). Данная ситуация вполне естественна в случаях, когда в исследуемой задаче уже есть отмеченные направления. Например, для трубчатых поверхностей таким направлением является вектор, направленный параллельно оси трубки. С другой стороны, в пространстве Минковского $\mathbf{R}_1^{n+1}$ выделенной является ось времени Oe_{n+1}.

В последние годы особый интерес вызывают задачи, связанные с p-гармоническими функциями на римановых многообразиях [94], задачи нелинейной теории потенциала и квазирегулярных отображений [15], [94], также изучаются задачи регулярных [11] и нерегулярных p-гармонических отображений римановых многообразий (см. недавний обзор в [93]).

2. Предварительные свойства p-минимальных поверхностей

2.1. В данном параграфе мы рассматриваем примеры p-минимальных гиперповерхностей вращения.

Предположим, что Π - гиперплоскость в $\mathbf{R}^{n+1}$, трансверсально пересекающая p-минимальную поверхность $\mathscr{M}$ в точке m_0. Пусть Σ - гиперповерхность в $\mathscr{M}$, получаемая сечением $\mathscr{M}$ гиперплоскостью Π. По теореме Сарда Σ является гладким подмногообразием в окрестности m_0. Введем вектор единичной внешней нормали Y к Σ, $\langle Y, \nu\rangle > 0$, и через $A_{\mathscr{M}}$ и A_Σ обозначим гомоморфизмы Вейнгартена поверхностей $\mathscr{M}$ и Σ в точке m_0 соответственно.

Лемма 5.1. *В указанных выше обозначениях выполнено*

$$A_\Sigma = \frac{1}{|e^T(m_0)|}(A_{\mathscr{M}})^\Sigma,$$

где $(\quad)^\Sigma$ означает ортогональную проекцию на касательное пространство к Σ.

Доказательство. Пусть τ - единичный касательный вектор $e^T/|e^T|$. Тогда, в силу определения поверхности Σ, нормаль Y допускает разложение

$$Y = \nu \cos\psi - \tau \sin\psi, \tag{56}$$

где $\psi = \psi(m)$ - гладкая в окрестности точки m_0 функция, равная углу между векторами e и τ. Дифференцируя (56) вдоль произвольного касательного к Σ вектора X, будем иметь

$$(D_X Y)^\Sigma = (-\nu \sin\psi \nabla_X \psi - \tau \cos\psi \nabla_X \psi)^\Sigma + (\cos\psi D_X \nu - \sin\psi D_X \tau)^\Sigma,$$

откуда, учитывая ортогональность ν и τ к касательному пространству $T_m\Sigma$ и определение гомоморфизмов Вейнгартена поверхностей $\mathscr{M}$ и Σ соответственно, получаем

$$A_\Sigma(X) = \cos\psi (A_\mathscr{M} X)^\Sigma + \sin\psi (D_X \tau)^\Sigma. \tag{57}$$

Для последнего слагаемого имеем

$$\begin{aligned}(D_X \tau)^\Sigma &= D_X\tau - \tau\langle \tau, D_X\tau\rangle - \nu\langle \nu, D_X\tau\rangle = \\ &= D_X\tau + \nu\langle \tau, D_X\nu\rangle = D_X\tau - \nu\langle A_\mathscr{M} X, \tau\rangle\end{aligned}$$

в силу равенства $2\langle \tau, D_X\tau\rangle = D_X\langle \tau, \tau\rangle = 0$. Из (53) вытекает

$$D_X\tau = \frac{|e^T| D_X e^T - e^T D_X |e^T|}{|e^T|^2} = \frac{\langle e, \nu\rangle}{|e^T|} A_\mathscr{M}(X) - \frac{\tau}{|e^T|}\langle e, \nu\rangle \langle A_\mathscr{M}\tau, X\rangle,$$

и, подставляя в (57), получаем

$$\begin{aligned}A_\Sigma(X) = \sin\psi\, [\mathrm{tg}\psi (A_\mathscr{M} X - \tau\langle A_\mathscr{M}\tau, X\rangle) - \nu\langle A_\mathscr{M}\tau, X\rangle] + \\ + \cos\psi (A_\mathscr{M} X)^\Sigma = \frac{1}{\cos\psi}(A_\mathscr{M} X)^\Sigma.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

□

Следствие 5.2. *В обозначениях предыдущей леммы средняя кривизна h p-минимальной поверхности $\mathscr{M}$ и средняя кривизна h_Σ сечения Σ связаны соотношением*

$$h_\Sigma = -\frac{p-1}{\cos\psi}\, k_e = \frac{p-1}{p-2}\, \frac{h}{\cos\psi}. \tag{58}$$

Доказательство. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, \tau$ - ортонормированный базис касательного пространства $T_{m_0}M$. Тогда

$$h_\Sigma = \sum_{i=1}^{n-1}\langle A_\Sigma E_i, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1}\langle (A_\mathscr{M} E_i)^\Sigma, E_i\rangle \frac{1}{\cos\psi} =$$

$$= \frac{1}{\cos\psi}\sum_{i=1}^{n-1}\langle A_\mathscr{M} E_i, E_i\rangle = \frac{1}{\cos\psi}(\mathrm{tr} A_\mathscr{M} - \langle A_\mathscr{M}\tau, \tau\rangle),$$

что доказывает (58).

□

2.2. Рассмотрим поверхность вращения с представлением $x_{n+1} = f(\rho)$, где $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Выберем вектор главной нормали ν таким образом, что кривизна k_ν поверхности $\mathscr{M}$ в направлении касательного вектора τ, соответствующего наибольшему росту координатной функции x_{n+1}, имеет следующее значение:

$$k_\nu = -f''(\rho)(1 + f'^2(\rho))^{-3/2}. \tag{59}$$

Тогда для средней кривизны $h(\rho)$ поверхности $\mathscr{M}$ будем иметь

$$h(\rho) = -\frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{f'(\rho)\rho^{n-1}}{\sqrt{1+f'^2(\rho)}}\right), \tag{60}$$

и, после объединения соотношений (59) и (60), получим

$$\frac{(p-2)f''(\rho)}{(1+f'^2(\rho))^{3/2}} + \frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{f'(\rho)\rho^{n-1}}{\sqrt{1+f'^2(\rho)}}\right) = 0.$$

Обозначим

$$\beta = \frac{n-1}{p-1},$$

тогда последнее уравнение перепишется в следующем виде, удобном для интегрирования:

$$\frac{df'(\rho)}{f'(\rho)(1+f'^2(\rho))} = -\beta\frac{d\rho}{\rho}.$$

Таким образом, интегрируя, для любых $\rho_2 > \rho_1 > 0$ из области определения функции $f(\rho)$ имеем

$$\frac{f'(\rho_2)}{\sqrt{1+f'^2(\rho_2)}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\beta \frac{f'(\rho_1)}{\sqrt{1+f'^2(\rho_1)}}.$$

Будем не ограничивая общности считать $f(\rho)$ возрастающей функцией. Тогда, в силу ограниченности

$$0 \le \frac{f'(\rho)}{\sqrt{1+f'^2(\rho)}} < 1,$$

существует $\rho_0 > 0$ такое, что

$$\lim_{\rho\to\rho_0+0} f'(\rho) = +\infty,$$

и общее решение имеет вид

$$f(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \left[(t/\rho_0)^{2\beta} - 1\right]^{-1/2} dt.$$

Вводя специальное обозначение для последнего интеграла

$$\Phi_\beta(t) \equiv \int_1^t (\tau^{2\beta} - 1)^{-1/2} d\tau, \qquad c(\beta) \equiv \Phi_\beta(+\infty),$$

получим представление p-минимальной поверхности вращения в явном виде

$$x_{n+1} = \rho_0 \Phi_\beta(\frac{1}{\rho_0}\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}). \tag{61}$$

Важно отметить, что вид профильной функции зависит только от отношения β и имеет три качественных типа поведения координаты x_{n+1}.

Случай 1. (*ограниченный тип*): $\beta > 1$, или $n > p > 1$.

Видно, что гиперповерхность расположена в слое между двумя параллельными гиперплоскостями, ортогональными $e = e_{n+1}$:

$$x_{n+1}(\rho) = \rho_0 c(\beta) - \frac{\rho_0}{\beta - 1}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\beta-1} + o(\rho^{\beta-1}),$$

при $\rho \to +\infty$ и *проекция $\mathscr{M}$ на гиперплоскость $x_{n+1} = 0$ выпускает шар радиуса $R = 1$.*

Случай 2. (*логарифмический тип*): $\beta = 1$, или $p = n$.

Для функции высоты поверхности имеем профильную кривую, в точности совпадающую с цепной линией

$$x_{n+1}(\rho) = \rho_0 \mathrm{arch}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \rho_0 \ln(\rho/\rho_0) + o(1),$$

соответствующей катеноиду в случае минимальных поверхностей.

Случай 3. (*степенной тип*): $0 < \beta < 1$, или $p > n$.

Этот случай не является типичным для минимальных поверхностей, так как поведение функции высоты подчинено степенному закону

$$x_{n+1}(\rho) = \frac{\rho_0^\beta}{1 - \beta}\,\rho^{1-\beta} + o(\rho^{1-\beta}).$$

2.3. Известной проблемой в теории минимальных поверхностей является задача Э. Калаби [28] о существовании нетривиальных полных поверхностей нулевой средней кривизны в полупространстве $\mathbf{R}^3_+$. В совместной работе В.М. Миклюкова и автора [46] доказано, что, при ограничении на рост кратности проекции поверхности на плоскость $x_3 = 0$, единственными собственно погруженными минимальными поверхностями, расположенными в области $\mathbf{R}^3$ с границей, совпадающей с частью катеноида, являются плоскости. С другой стороны, недавно Миикс и Хоффман [97] показали справедливость последней теоремы в классе собственно погруженных минимальных поверхностей, если такая поверхность расположена в полупространстве.

В данном параграфе мы доказываем следующее обобщение теоремы Миикса и Хоффмана на случай n-мерных p-минимальных гиперповерхностей.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно погруженная n-мерная p-минимальная (относительно направления координатного вектора e_{n+1}) гиперповерхность с параметром $p \geq n$. Если $\mathscr{M}$ содержится в полупространстве с границей $x_{n+1} = c$, тогда $\mathscr{M}$ — плоскость.*

Замечание 5.2. Как показывают примеры (случай 1) из предыдущего пункта, ограничение на значения параметра p в сформулированном утверждении является точным.

Доказательство. Предположим, что $\mathscr{M}$ отлична от гиперплоскости. Не ограничивая общности, можно также предполагать, что поверхность $\mathscr{M}$ содержится в полупространстве $x_{n+1} \geq 0$ и не содержится ни в каком полупространстве $x_{n+1} \geq \varepsilon > 0$. Заметим, что, в силу принципа минимума для p-гармонической координатной функции $f(m) = \langle e_{n+1}, x(m) \rangle$, поверхность $\mathscr{M}$ не может иметь точек m с координатой $f(m) = 0$. Следовательно, $\mathscr{M}$ содержится в строгом полупространстве $x_{n+1} > 0$.

Пусть $c > 0$, $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$. Введем в рассмотрение семейство p-минимальных поверхностей вращения $\mathscr{O}_c$

$$x_{n+1} = -\Phi_\beta \left(\frac{1}{-r} \right), \qquad r > c,$$

имеющих компактный край в гиперплоскости $\Pi = \{x_{n+1} = 0\}$, совпадающий со сферой $r = c$. Пусть для некоторого положительного b поверхность $\mathscr{O}_c(b)$ получена из $\mathscr{O}_c$ параллельным переносом вдоль координатного вектора e_{n+1} на b.

Пусть $c = 1$. Тогда найдется достаточно малое $\beta > 0$ такое, что поверхности $\mathscr{M}$ и $\mathscr{O}_1(\beta)$ не пересекаются. В самом деле, если это не так, то, используя собственность погружения и компактность края $\partial \mathscr{O}_1(\beta)$, можно заключить, что поверхность $\mathscr{M}$ и гиперплоскость Π имеют непустое пересечение. Пусть $\xi \in \mathscr{M} \cap \Pi$. Тогда в точке ξ координатная функция $f(m) = \langle e_{n+1}, x(m) \rangle$ имеет локальный минимум, что снова противоречит принципу минимума для функции $f(m)$.

Введем

$$\gamma = \inf \bigl\{ c > 0 : \mathscr{O}_c(\beta) \cap \mathscr{M} = \emptyset \bigr\}.$$

Предположим, что $\gamma = 0$. Тогда из явного представления поверхностей $\mathscr{O}_c(\beta)$ легко видеть, что $\mathscr{M}$ содержится в полупространстве $x_{n+1} \geq \beta$. Получено противоречие сделанным предположениям.

Таким образом, $1 > \gamma > 0$. Рассмотрим поверхность $\mathscr{O} = \mathscr{O}_\gamma(\beta)$. В силу условия $p \geq n$ и по результатам предыдущего пункта, поверхность $\mathscr{O}$ не ограничена в отрицательном направлении координаты x_{n+1}. Более того, часть поверхности $\mathscr{O}$, расположенная (как график) над внешностью множества

$$\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = \beta, \quad r \leq r_0\},$$

лежит ниже гиперплоскости Π и, следовательно, не пересекается с поверхностью $\mathscr{M}$. Так как оставшаяся часть поверхности компактна и ее край

$$\partial\mathscr{O} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = \beta, \quad r = c\} \subset \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = \beta, \quad r \le 1\},$$

то пересечение $\mathscr{M}$ и $\mathscr{O}$ возможно лишь во внутренней точке поверхности $\mathscr{O}$. Последнее означает, что $\mathscr{M}$ находится всюду выше поверхности $\mathscr{O}$ и в некоторой точке ее касается. В силу принципа сравнения для двух p-минимальных поверхностей, $\mathscr{O}$ и $\mathscr{M}$ совпадают, что противоречит предположению об ограниченности $\mathscr{M}$ в отрицательном направлении e_{n+1}. Таким образом, $\mathscr{O}$ не имеет общих точек с $\mathscr{M}$.

С другой стороны, по определению γ найдется возрастающая последовательность c_k, $c_k \to \gamma$ такая, что последовательности $\mathscr{M}$ и $\mathscr{O} = \mathscr{O}_{c_k}(\beta)$ имеют общие точки. Обозначим через m_k одну из таких точек для каждого натурального k. Если последовательность m_k содержит сходящуюся подпоследовательность, то ее предел m, в силу собственности погружения, необходимо лежит в $\mathscr{M}$. Но тогда m лежит и на поверхности $\mathscr{O}$, что противоречит пустоте пересечения $\mathscr{O}$ и $\mathscr{M}$. Следовательно, поверхность m_k расходится в $\mathbf{R}^{n+1}$, $|m_k| \to \infty$. В силу выбора последовательности $_k$ имеем неравенство $c_k \ge c_1$, откуда (в силу свойства неограниченности поверхностей $\mathscr{O}_c$ в отрицательном направлении координаты x_{n+1}) вытекает, что $f(m_k) \to -\infty$. Последнее свойство противоречит тому, что $f(m) \ge 0$ на поверхности $\mathscr{M}$. Теорема доказана.

□

2.4. Приводимое в данном пункте утверждение относится к собственно p-минимальным поверхностям, $p \ne 2$ и не имеет аналога в теории минимальных поверхностей.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная поверхность, заданная как график C^2-функции $f(x)$, определенной в области $G \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $x_0 \in G$ — критическая точка $f(x)$ ($\overline{\nabla} f(x_0) = 0$). Тогда гессиан $\overline{\nabla}^2 f$ вырожден. Другими словами, x_0 — точка уплощения.*

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы перепишем (55) в форме, более удобной для дальнейшего использования. Запишем в локальных координатах следующие формулы для средней кривизны $H(m)$ и оператора Лапласа-Бельтрами Δ соответственно:

$$H(m) = \frac{1}{g^{3/2}} \sum_{i,j=1}^{n} (g\delta_{ij} - \overline{\nabla}_i f \overline{\nabla}_j f) \overline{\nabla}^2_{ij} f,$$

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\nabla}_i (g^{ij} \sqrt{g} \overline{\nabla}_j u), \tag{62}$$

где $\overline{\nabla}_i$ означает ковариантную производную вдоль координатного вектора e_i, g^{ij} — матрица, обратная к метрическому тензору $g_{ij} = \delta_{ij} + \overline{\nabla}_i f \overline{\nabla}_j f$ и $g = \det \|g_{ij}\|$.

Таким образом, из (51) и (54) получаем

$$g|\overline{\nabla} f|^2 \operatorname{tr}\overline{\nabla}^2 f + \sum_{l,s=1}^{n}(p-2-|\overline{\nabla} f|^2)\overline{\nabla}_l f\overline{\nabla}_s f\overline{\nabla}^2_{ls} f = 0, \tag{63}$$

Здесь $\overline{\nabla}^2 f$ — гессиан функции $f(x)$ и след $\operatorname{tr}\overline{\nabla}^2 f$ равен обычному оператору Лапласа в $\mathbf{R}^n$. Пусть $a_{ij} = \overline{\nabla}^2_{ij}(x_0)$ и $A = ||a_{ij}||$. Тогда, выбирая подходящее $\varepsilon > 0$, для любого вектора $y \in \mathbf{R}^n$ такого, что $|y| < \varepsilon$, имеем:

$$\overline{\nabla}_k f(x_0 + y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i + o(|y|),$$

и

$$|\overline{\nabla} f(x_0 + y)|^2 = O(|y|^2).$$

Подставляя эти соотношения в (63), приходим к равенству

$$\sum_{k,l,s=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ki}a_{kj}\operatorname{tr}A + (p-2)a_{li}a_{sj}a_{ls})y_i y_j = o(|y|^2).$$

Принимая во внимание справедливость последнего тождества для достаточно малых $y \in \mathbf{R}^n$, получаем уравнение в матричной форме

$$A^2(I\operatorname{tr}A + (p-2)A) = 0, \tag{64}$$

где I — единичная матрица. В силу симметричности гессиана A, можно выбрать ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^n$, состоящий из собственных векторов A, в котором A становится диагональной: $\lambda_i\delta_{ij}$. Таким образом, из (64) для $i : 1 \le i \le n$ имеем

$$\lambda_i\Big(\lambda_i(p-2) + \operatorname{tr}A\Big) = 0.$$

Из последнего равенства видно, что любое ненулевое собственное значение λ_i должно быть равно $-(p-2)^{-1}\operatorname{tr}A$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — суть все такие собственные значения. После суммирования получим

$$\operatorname{tr}A = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = -\frac{k}{p-2}\operatorname{tr}A. \tag{65}$$

С другой стороны, $\operatorname{tr}A = k\lambda_1 \ne 0$. Тогда из (65) следует равенство $p = 2 - k$, где $k \ge 1$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее противоречит предположению того, что $p > 1$. Следовательно, все λ_i нулевые, и, в силу симметричности гессиана, $A = 0$.

$\square$

3. Квазиконформность гауссова отображения

3.1. Обозначим для данной поверхности $\mathscr{M}$ в $\mathbf{R}^3$ через $\gamma(m) : \mathscr{M} \to S^2$ ее гауссово отображение, относящее каждой точке m поверхности точку $\gamma(m)$ на единичной сфере, равную нормальному вектору в m. Классическим свойством является конформность гауссова отображения для минимальных поверхностей. Мы обобщаем данное свойство на p-минимальные поверхности. Напомним следующее определение:

Определение 5.2. Отображение $F : M_1 \to M_2$ двух двумерных гладких многообразий M_1 и M_2 называется *квазиконформным* [2], [15], если его якобиан $\det d_x F$ не меняет знака на M_1 и для почти всех $x \in M_1$ выполнено

$$\max |d_x F(E)| \leq K_m \min |d_x F(E)|, \tag{66}$$

где min и max берутся по множеству всех единичных касательных векторов касательного пространства $T_x M_1$. Число $K = \max_{m \in M_1} K_m$ называется *коэффициентом квазиконформности* отображения F.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная p-минимальная поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда гауссово отображение является $K(p)$-квазиконформным, где*

$$K(p) = \max\{p - 1; 1/(p - 1)\}. \tag{67}$$

Доказательство. Пусть A — гомоморфизм Вейнгартена поверхности $\mathscr{M}$ и $d\gamma_m$ — дифференциал гауссова отображения в точке m. Как следует из их определения, $A = -d\gamma_m$. Квазиконформность γ будет доказана, если мы установим, что коэффициент искажения (66) отображения A равномерно ограничен на $\mathscr{M}$.

Зафиксируем точку $m \in M$ и рассмотрим ортонормированный базис E_1, E_2 касательного пространства $T_m M$, который диагонализирует A (напомним, что отображение A является симметрическим гомоморфизмом). Имеем

$$A(E_i) = \lambda_i E_i.$$

Здесь λ_1, λ_2 — главные кривизны поверхности $\mathscr{M}$ в m. Без ограничения общности можно предполагать, что $|e^T(m)| \neq 0$. Действительно, если $|e^T(m)| = 0$, то, в силу леммы 5.2, отображение $A \equiv 0$ и условие (66) тривиально выполняется.

Обозначим $\tau = e^T/|e^T|$. Тогда для некоторого угла $\psi \in [0;\, 2\pi]$ выполнено

$$\tau = E_1 \cos\psi + E_2 \sin\psi,$$

и, по теореме Менье,

$$\langle A\tau, \tau\rangle = \lambda_1 \cos^2\psi + \lambda_2 \sin^2\psi = -\frac{1}{p-2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \frac{1+(p-2)\sin^2\psi}{1+(p-2)\cos^2\psi}.$$

Как непосредственное следствие последнего тождества, якобиан $\det(d_m\gamma) = \lambda_1\lambda_2$ должен быть отрицателен. Используя стандартные факты теории квадратичных форм, получаем коэффициент искажения отображения A, а вместе с ним и γ, в точке m:

$$K_m = \max_{\psi}\{q; \frac{1}{q}\}, \qquad q = \frac{1+(p-2)\sin^2\psi}{1+(p-2)\cos^2\psi}.$$

Находя максимум по всевозможным ψ, получаем требуемую оценку.

□

Л. Саймон в [65] установил, что любая целая двумерная заданная непараметрическим образом поверхность с квазиконформным гауссовым отображением является плоскостью. Как следствие этого результата, получаем следующую версию теоремы Бернштейна.

Следствие 5.3. *Пусть $\mathscr{M}$ — целый (заданный над всем $\mathbf{R}^2$) p-минимальный график в $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathscr{M}$ — плоскость.*

4. Трубчатые p-минимальные гиперповерхности

4.1. В этом параграфе мы используем терминологию и обозначения главы 1. Напомним, что из результатов работ [12], [47], [31] следует, что каждая n-мерная минимальная трубчатая поверхность произвольной коразмерности удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству

$$\rho(\tau)\rho''(\tau) \geq (n-1)(1+\rho'(\tau)^2), \tag{68}$$

которое имеет решающее значение для теории минимальных трубок. Как следствие, каждая минимальная трубка при $n \geq 3$ обязательно имеет конечное время существования, то есть содержится в конечном параллельном слое.

Ниже мы обобщаем свойство (68) по двум направлениям. Во-первых, данное неравенство в подходящей форме справедливо для p-минимальных трубок. Во-вторых, если в (68) участвует функция $\rho(\tau)$, измеряющая отклонение трубки от фиксированной оси, то устанавливаемое нами неравенство дает оценку для радиусов шаров, описанных около сечений трубки. Отличие особенно заметно, например, в случае, когда поверхность имеет незначительные размеры самих сечений по сравнению с их отклонением от оси трубки.

Лемма 5.3. *Пусть V — некоторое выпуклое компактное множество в $\mathbf{R}^n$ и W — компакт такой, что $W \setminus V \neq \emptyset$. Тогда существует замкнутый шар $B \subset \mathbf{R}^n$, для которого выполнено*

$$W \subset B \tag{69}$$

и

$$\partial B \cap (W \setminus V) \neq \emptyset. \tag{70}$$

Доказательство. Функция расстояния $f(x) = \operatorname{dist}(x, V)$ непрерывна на всем $\mathbf{R}^n$. Как следует из условий леммы, эта функция достигает своего максимума на W в некоторой точке $a \in W$ и $d = f(a) > 0$. С другой стороны, в силу выпуклости V найдется единственная точка $b \in \partial V$ такая, что $f(a) = \|b - a\|$.

Выберем новую координатную систему в $\mathbf{R}^n$ с началом в точке a такую, что первый координатный вектор имеет вид

$$e_1 = \frac{b-a}{d},$$

а остальные $e_2, \ldots, e_n$ образуют ортонормированную систему вместе с e_1. Тогда гиперплоскость, задаваемая уравнением $x_1 = d$, является опорной к V в a. Из неравенства треугольника получаем то, что W состоит из полупространства $\{x_1 \geq 0\}$ и V в $\{x_1 \geq d\}$.

Для данных положительных h и R зафиксируем открытый шар

$$B(R,h) = \{x \in \mathbf{R}^n : (x_1 + R)^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 < (R+h)^2\}.$$

В силу нашего выбора и компактности V, для произвольного положительного ϵ найдется $R > 0$ такое, что V содержится в шаре $B(R, \epsilon)$.

Пусть $\epsilon = d/2$ и R_0 — соответствующий радиус. Тогда по определению d получаем, что $a \notin B(R_0, d/2)$, в то время как бо́льший шар $B(R_0, 3d/2)$ содержит V вместе с W. Обозначим через δ_0 минимальное значение среди всех $\delta \in (0; d)$, для которых выполнено

$$W \subset \overline{B(R_0, d/2 + \delta)}.$$

Тогда $a \in \partial B$, где $B = \overline{B(R_0, d/2 + \delta_0)}$ и $V \cap B = \emptyset$.

□

Сформулируем утверждение, которое можно рассматривать как аналог принципа максимума.

Следствие 5.4. *Пусть $\mathscr{M} = (M, x)$ — погруженная компактная p-минимальная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$ с непустым краем ∂M. Тогда*

$$\operatorname{conv} x(\partial M) = \operatorname{conv} x(M), \tag{71}$$

где $\operatorname{conv} E$ *— выпуклая оболочка E.*

Доказательство. Обозначим через $\Omega = \operatorname{conv} x(\partial M)$ и предположим, что равенство (71) не верно. Тогда $x(M) \setminus \Omega \neq \emptyset$ и по лемме 5.3 найдется замкнутый шар B такой, что $x(M) \subset B$ и существует точка $m \in \operatorname{int} M$, $x(m) \in \partial B$. Выберем окрестность $\mathscr{O}$ точки m, для которой ограничение отображения x на $\mathscr{O}$ является вложением. Дальнейшие рассуждения носят локальный характер и можно не ограничивая общности предположить, что $\mathscr{M} = x(\mathscr{O})$.

В силу выбора B, касательные пространства к $\mathscr{M}$ и ∂B в $x(m)$ совпадают. Более того, $\mathscr{M} \subset B$ и, в силу принципа сравнения кривизн соприкасающихся поверхностей, приходим к неравенству

$$\lambda_i \geq \frac{1}{R}, \tag{72}$$

где λ_i — главные кривизны поверхности $\mathscr{M}$ в m по отношению внутренней единичной нормали ∂B и R есть радиус шара B.

Теперь вернемся к тождеству (55). По определению $k_e(m)$ найдется набор положительных чисел $\alpha_i \leq 1$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

и

$$k_e(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i.$$

Как следует из этих соотношений, а также из (72) и (55),

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (1 + (p-2)\alpha_i) \geq \frac{n+p-2}{R} > 0.$$

Получено противоречие следствию 5.4.

□

Далее мы используем операции сложения и умножения на скаляр по Минковскому, которые определены на многообразии выпуклых подмножеств $\mathbf{R}^n$. Именно, если даны два таких множества $A, B \subset \mathbf{R}^n$, то $A \oplus B$ и λA означают множества $\{x = a + b : a \in A, b \in B\}$ и $\{x = \lambda a : a \in A\}$ соответственно.

Определение 5.3. Семейство выпуклых множеств $\{\Omega(\tau) : \tau \in [\alpha, \beta]\}$ называется [38] *выпуклым*, если для произвольных $\tau_1 < \tau_2$ из отрезка $[\alpha; \beta]$ и неотрицательного $t \leq 1$ выполнено

$$\Omega\left(\tau_1 t + \tau_2(1-t)\right) \subset t\Omega(\tau_1) \oplus \bar{t}\Omega(\tau_2).$$

Пусть $\mathscr{M}$ — n-мерная p-минимальная трубка в $\mathbf{R}^{n+1}$. Обозначим через $\Omega(\tau)$ проекцию выпуклой оболочки сечения $\Sigma(\tau)$ на гиперплоскость $\Pi_0 = \{x_{n+1} = 0\}$. Тогда

$$\operatorname{conv} \Sigma(\tau) = \tau e_{n+1} \oplus \Omega(\tau).$$

Теорема 5.3. *Семейство $\{\Omega(\tau) : \tau \in \tau(\mathscr{M})\}$ выпуклое.*

Доказательство. Зафиксируем $\tau_1 < \tau_2$ из интервала $\tau(\mathscr{M})$ и некоторое $t \in [0; 1]$. Обозначим через H слой $\{x : x_{n+1} \in (\tau_1; \tau_2)\}$ и $M' = x^{-1}(H \cap x(M))$. Тогда из следствия 5.4 получаем

$$V \equiv \operatorname{conv}\,(\Sigma(\tau_1) \cup \Sigma(\tau_2)) = \operatorname{conv}\, x(M').$$

Пусть $\tau_0 = t\tau_1 + \bar{t}\tau_2$. Тогда $\Sigma(\tau_0) \subset V$ и, по определению выпуклой оболочки, $\operatorname{conv}\,\Sigma(\tau_0) \subset V$.

Выберем произвольно точку $z \in \Omega(\tau_0)$. Тогда $y = z + \tau_0 e_{n+1} \in \Pi(\tau_0) \cap V$ и найдутся $y_i \in \operatorname{conv}\,\Sigma(\tau_i)$ и $\lambda \in [0;1]$ такие, что

$$y = \lambda y_1 + \overline{\lambda} y_2. \tag{73}$$

Из разложения $y_i = z_i + \tau_i e_{n+1}$ для некоторого $z_i \in \Omega(\tau_i)$ и (73) получаем

$$z = \lambda z_1 + \overline{\lambda} z_2, \qquad \tau_0 = \lambda\tau_1 + \overline{\lambda}\tau_2.$$

Таким образом, $\lambda = t$ и $z \in t\Omega(\tau_1) \oplus \bar{t}\Omega(\tau_2)$, что и требовалось доказать.

□

Обозначим через $R(\tau)$ радиус шара, описанного около сечения $\Sigma(\tau)$.

Следствие 5.5. *Функция $R(\tau)$ является выпуклой.*

Доказательство. Обозначим через $B(\tau)$ проекцию шара, описанного около $\Sigma(\tau)$ на гиперплоскость Π_0. Тогда, в силу выпуклости $B(\tau)$, имеем $B(\tau) \supset \Omega(\tau)$. По теореме 5.3 для произвольного $t \in [0;1]$ получим

$$\Omega(\tau_0) \subset t\Omega(\tau_1) \oplus \bar{t}\Omega(\tau_2) \subset tB(\tau_1) \oplus \bar{t}B(\tau_2) = B_0,$$

где $\tau_0 = \tau_1 t + \tau_2(1-t)$. По определению $R(\tau_0) \le R_0$, где R_0 — радиус B_0. С другой стороны, $R_0 = tR(\tau_1) + \bar{t}R(\tau_2)$. Получаем требуемое неравенство

$$R(\tau_1 t + \tau_2(1-t)) \le R(\tau_1) + \bar{t}R(\tau_2).$$

□

4.2. Изучим структуру $\Sigma(\tau)$ более подробно. Для этого потребуется более тонкая информация не только о радиусе $R(\tau)$, но также и о кривой распределения центров шаров $B(\tau)$. Обозначим через $\xi(\tau)$ центр $B(\tau)$. Напомним без доказательства следующее известное экстремальное свойство шаров $B(\tau)$ (см., например, [38], теорема 7.5).

Лемма 5.4. *Пусть E — компактное подмножество $\mathbf{R}^n$ и $B(E)$ — описанный около E шар с центром ξ. Тогда для любого единичного вектора $y \in \mathbf{R}^n$ найдется точка $b \in \partial E \cap \partial B(E)$ такая, что*

$$\langle b - \xi, y\rangle \ge 0. \tag{74}$$

Введем обозначение

$$\sigma(E) = \min_{y \in S^{n-1}} \max_{b \in \partial B \cap E} \frac{\langle b - \xi, y \rangle}{R},$$

где через B, R и ξ обозначены шар, описанный около E, его радиус и центр соответственно. Как следует из (74), $0 \le \sigma(E) \le 1$. Более того, $\sigma(E) = 0$ тогда и только тогда, когда пересечение граничной сферы $S = \partial B$ с множеством E лежит в некоторой экваториальной гиперсфере из S.

Имеет место

Теорема 5.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная трубчатая погруженная гиперповерхность в $\mathbf{R}^{n+1}$ такая, что*

$$\sigma(\Sigma(\tau)) \ge \epsilon > 0, \qquad \forall \tau \in \tau(\mathscr{M}). \tag{75}$$

Тогда $\xi(\tau)$ является δ-выпуклой кривой по переменной τ. Другими словами, каждая координатная функция $\xi_k(\tau)$ допускает разложение

$$\xi_k(\tau) = \varphi_k(\tau) - \psi_k(\tau),$$

где $\varphi_k(\tau)$, $\psi_k(\tau)$ — выпуклые функции.

Доказательство. Рассмотрим τ_1, τ_2 из $\tau(\mathscr{M})$ и $t \in [0;1]$. Пусть $B(\tau_i) = B_i(\xi(\tau_i), R_i)$ — соответствующие шары, описанный около $\Sigma(\tau_i)$. Как и выше, для $\tau_0 = t\tau_1 + \bar{t}\tau_2$ имеем

$$\Omega(\tau_0) \subset tB(\tau_1) \oplus \bar{t}B(\tau_2).$$

В силу леммы 5.4, найдется $y \in \partial B(\tau_0) \cap \Sigma(\tau_0)$ такой, что

$$\langle y - \xi(\tau_0), \xi(\tau_0) - \xi_0 \rangle \ge \epsilon |y - \xi(\tau_0)| \cdot |\xi(\tau_0) - \xi_0|,$$

где $\xi_0 = t\xi(\tau_1) + \bar{t}\xi(\tau_2)$. Таким образом,

$$|y - \xi_0|^2 = \left|(y - \xi(\tau_0)) + (\xi(\tau_0) - \xi_0)\right|^2 \ge$$

$$\ge |y - \xi(\tau_0)|^2 + |\xi(\tau_0) - \xi_0|^2 + 2\epsilon |y - \xi(\tau_0)| \cdot |\xi(\tau_0) - \xi_0|,$$

и, принимая во внимание, что $|y - \xi(\tau_0)| = R(\tau_0)$ и $|y - \xi_0| \le R_0$, получаем

$$|\xi(\tau_0) - \xi_0|^2 + 2\epsilon |y - \xi(\tau_0)| \cdot |\xi(\tau_0) - \xi_0| + (R^2(\tau_0) - R_0^2) \le 0,$$

и, следовательно,

$$|\xi(\tau_0) - \xi_0| \le \frac{R_0^2 - R^2(\tau_0)}{R(\tau_0)\epsilon + \sqrt{R_0^2 - R^2(\tau_0)(1 - \epsilon^2)}}. \tag{76}$$

По следствию 5.5 имеем неравенство $R_0 \ge R(\tau_0)$. В силу (76) справедливо неравенство

$$|\xi(\tau_0)-\xi_0|\le \frac{R_0^2-R^2(\tau_0)}{\epsilon(R(\tau_0)+R_0)}=\frac{1}{\epsilon}(R_0-R(\tau_0)). \tag{77}$$

Рассмотрим координатную функцию $\xi_k(\tau)=\langle\xi(\tau),e_k\rangle$. Тогда (77) влечет

$$t\xi_k(\tau_1)+\bar t\xi_k(\tau_2)-\xi_k(\tau_0)\le\frac{1}{\epsilon}\big(tR(\tau_1)+\bar tR(\tau_2)-R(\tau_0)\big).$$

Последнее неравенство означает то, что разность $\psi(\tau)=\epsilon^{-1}R(\tau)-\xi_k(\tau)$ является выпуклой функцией. Таким образом, из следствия 5.5 получаем требуемое разложение $\xi_k(\tau)$ через разность двух выпуклых функций

$$\xi_k(\tau)=\frac{1}{\epsilon}R(\tau)-\psi(\tau).$$

Лемма доказана.

□

Теорема 5.5. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная трубка, удовлетворяющая условию* (75) *и $\beta=(n-1)/(p-1)$. Тогда $R(\tau)$ и $\xi(\tau)$ удовлетворяют дифференциальному неравенству*

$$R(\tau)R''(\tau)\ge\beta(1+R'(\tau)^2)+|\xi'(\tau)|^2\min\{\beta;1\} \tag{78}$$

почти всюду в $\tau(\mathscr{M})$.

Доказательство. Выпуклость функции влечет существование почти всюду ее второго дифференциала (см., например, [38] или [15], теорема 5.3). Как видно из следствия 5.5 и теоремы 5.4, функции $R(\tau)$ и $\xi_k(\tau)$ имеют вторые дифференциалы почти всюду на $\tau(\mathscr{M})$. Пусть $\tau'(\mathscr{M})$ — множество полной меры, где одновременно существуют вторые дифференциалы от $R(\tau)$ и $\xi_k(\tau)$, $1\le k\le n+1$.

Обозначим через S^{n-1} единичную сферу в $\Pi_0\sim\mathbf{R}^n$, снабженную стандартной метрикой. Рассмотрим гиперповерхность $\mathscr{M}_0$, задаваемую следующим образом

$$w(\theta,\tau)=\xi(\tau)+R(\tau)\theta+\tau e_{n+1}\ :S^{n-1}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^{n+1},$$

где $\theta\in S^{n-1}$. В [74] было установлено, что для такой поверхности кривизна $k_{e,\mathscr{M}_0}$ в направлении вектора e вычисляется по формуле

$$k_{e,\mathscr{M}_0}(\theta,\tau)=\frac{\omega^3}{R(\tau)}\left[R(\tau)R''(\tau)+R(\tau)\langle\xi''(\tau),\theta\rangle+\langle\xi'(\tau),\theta\rangle^2-|\xi'|^2\right], \tag{79}$$

где

$$\omega^2=\langle\nu_m,e\rangle^2=\frac{1}{1+\Big(R'(\tau)+\langle\theta,\xi'(\tau)\rangle\Big)^2}.$$

По определению функций $R(\tau)$ и $\xi(\tau)$, поверхность M содержится внутри $\mathscr{M}_0$ в том смысле, что $\Sigma(\tau)$ — подмножество $\Pi(\tau) \cap \mathscr{M}_0$ для любого $\tau \in \tau(\mathscr{M})$.

Рассмотрим произвольно $\tau \in \tau'(\mathscr{M})$ и $E = \Omega(\tau) \cap \partial B(\tau)$. Поверхности $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}_0$ имеют общую внешнюю нормаль ν_m в $m = y \oplus \tau e_{n+1}$ для каждого $y \in E$ (под внешней нормалью мы понимаем нормаль, направленную во внешность $B(\tau)$). Пусть $\mathscr{O}$ — окрестность точки m, где $x(\cdot)$ является вложением. Из определения поверхности $\mathscr{M}_0$ следует, что внешнее произведение $\nu_m \wedge e_{n+1} \neq 0$. Обозначим через $\gamma(\tau)$ и $\gamma_0(\tau)$ сечения $x(M)$ и $\mathscr{M}_0$ двумерной плоскостью, натянутой на ν_m и e_{n+1}. Тогда, в силу принципа сравнения для соприкасающихся поверхностей,

$$k_{e,\mathscr{M}}(m) \leq k_{e,\mathscr{M}_0}(m).$$

Пусть $h(m)$ и $h_0(m)$ — средние кривизны в точке m сечений $\Sigma(\tau)$ и $\Pi(\tau) \cap \mathscr{M}_0 = \xi(\tau) \oplus \tau e_{n+1} \oplus B(\tau)$ по отношению к их общей внешней нормали. В силу геометрического принципа сравнения имеем следующее неравенство

$$h(m) \leq h_0(m) \equiv -\frac{n-1}{R(\tau)},$$

и, после применения (58),

$$-\frac{p-1}{\omega}\, k_e(m) \leq -\frac{n-1}{R(\tau)}.$$

Из (79) после элементарных преобразований получаем:

$$R(\tau)R''(\tau) - \beta(1 + R'(\tau)^2) \geq (\beta - 1)\langle \xi'(\tau), \theta\rangle^2 + |\xi'|^2 + \langle \theta, y\rangle, \tag{80}$$

где $y = 2\beta R'(\tau)\xi'(\tau) - R(\tau\xi''(\tau))$. Таким образом, по лемме 5.4 для вектора y существует $b \in E$ такой, что $\langle b - \xi(\tau), y\rangle \geq 0$. Пусть

$$\theta_0 = \frac{b - \xi(\tau)}{R(\tau)},$$

тогда из (80) следует

$$R(\tau)R''(\tau) - \beta(1 + R'(\tau)^2) \geq (\beta - 1)\langle \xi'(\tau), \theta_0\rangle^2 + |\xi'(\tau)|^2 \geq |\xi'(\tau)|^2 \min\{\beta; 1\}.$$

Теорема доказана полностью.

□

Заметим, что δ-выпуклые функции принадлежат классу $\overline{W}^2_{1,\mathrm{loc}}(\tau(\mathscr{M}))$. Таким образом, обобщенные производные второго порядка являются мерами (см. [15], часть 2, § 4.10). Это свойство позволяет проинтегрировать неравенство (78) способом, изложенным в работе [12]. Получаем

Следствие 5.6. *Пусть $\mathscr{M}$ — p-минимальная погруженная трубчатая гиперповерхность такая, что* $\dim\mathscr{M} = n > p > 1$. *Тогда $\mathscr{M}$ имеет конечное время существования $|\tau(\mathscr{M})|$ и справедлива оценка*

$$|\tau(\mathscr{M})| \leq 2c_\beta r(\mathscr{M}), \quad \beta = \frac{n-1}{p-1},$$

где

$$r(\mathscr{M}) \equiv \min_{\tau \in \tau(\mathscr{M})} R(\tau) > 0,$$

(81)
$$c_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^{2\beta})^{1/2}}.$$

5. Радиус просвета p-минимальной поверхности

В своей недавней работе [97] Миикс и Хоффман анонсировали теорему "о полупространстве согласно которой не существует собственно погруженной минимальной поверхности в $\mathbf{R}^3$, отличной от плоскости и содержащейся в некотором полупространстве $\mathbf{R}^3_+$. Тем не менее, при $n \geq 3$ существуют минимальные собственно погруженные гиперповерхности в $\mathbf{R}^{n+1}$, которые лежат в слое между двумя параллельными гиперплоскостями. Более того, в [12], [31] даны оценки ширины слоя Δ в терминах минимального радиуса шара $r(\mathscr{M})$, описанного около таких сечений (определение $r(\mathscr{M})$ дано в 2):

(82)
$$\Delta \leq 2c_n r(\mathscr{M}),$$

где c_n из (81).

В настоящем параграфе устанавливается в определенном смысле обратная оценка.

Теорема 5.6. *Пусть $\mathscr{M}$ – n-мерная собственно погруженная связная p-минимальная (относительно вектора e_{n+1}) гиперповерхность, лежащая в параллельном слое ширины Δ с граничными гиперплоскостями, ортогональными вектору e_{n+1}. Предположим, что $n > p > 1$, а проекция $\mathscr{M}$ на граничные гиперплоскости слоя выпускает открытый шар радиуса R. Тогда*

(83)
$$R \leq \frac{\Delta}{2c_\beta},$$

где c_β из (81).

Замечание 5.3. Как показывают примеры p-минимальных поверхностей вращения, постоянная из правой части неравенства (83) неулучшаема.

Замечание 5.4. Если поверхность минимальная ($p = 2$), то условие ортогональности граничных гиперплоскостей вектору e_{n+1} может быть опущено.

Данную оценку можно рассматривать как ограничение на существование "слишком широких"дыр у поверхностей нулевой средней кривизны. Существуют примеры минимальных поверхностей, расположенных в слое, у которых указанная выше проекция является неограниченным множеством.

Доказательство. Обозначим через $x : M \to \mathbf{R}^{n+1}$ изометрическое погружение n-мерного многообразия M, реализующее данную поверхность $\mathscr{M}$.

Так как класс рассматриваемых поверхностей включает поверхности с самопересечениями, будем сохранять различие между точкой $m \in M$ на многообразии и её образом $x(m) \in \mathscr{M}$ на поверхности.

Пусть неравенство (83) не выполняется:

$$k^4 \equiv 2Rc_\beta/\Delta > 1.$$

Так как условие p-минимальности и неравенство (83) инвариантны относительно гомотетии и параллельного переноса вдоль вектора e_{n+1}, можно не ограничивая общности считать, что $\mathscr{M}$ расположена в гиперслое $x_{n+1} < \Delta/2$, где

$$\Delta = \frac{2c_\beta}{k^2} < 2c_\beta \tag{84}$$

и проекция $\mathscr{M}$ на гиперплоскость $x_{n+1} = 0$ выпускает шар радиуса $R \equiv k^2 > 1$ с центром в начале координат. Обозначим через $B(R)$ указаный шар и введем в рассмотрение специальную p-минимальную гиперповерхность вращения $\mathscr{C}^+$, которая задается формулой (61) при $\rho_0 = 1$

$$x_{n+1} = \Phi_\beta(\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}), \quad x_{n+1} > 0, \tag{85}$$

с краем, совпадающим со сферой $\partial B(1)$ в гиперплоскости $x_{n+1} = 0$. Здесь и далее

$$\Phi_\beta(t) = \int_1^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^{2\beta} - 1}}.$$

Удобно использовать следующую терминологию: пусть имеются две поверхности $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$, погруженные в $\mathbf{R}^{n+1}$. Будем говорить, что $\mathscr{N}$ *лежит строго выше (ниже) поверхности* $\mathscr{M}$, если для любой пары точек $m = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathscr{M}$ и $l = (x_1, \ldots, x_n, y_{n+1}) \in \mathscr{N}$ с одинаковыми первыми n координатами выполняется неравенство $y_{n+1} > x_{n+1}$ ($y_{n+1} \geq x_{n+1}$ соответственно).

Покажем, что $\mathscr{C}^+$ лежит строго выше $\mathscr{M}$. Предположим противное: пусть найдется общая точка в пересечении внутренности $\mathscr{C}^+$ и $\mathscr{M}$. Рассмотрим вспомогательное семейство поверхностей $\mathscr{C}^+(\varepsilon)$, получаемых с помощью сдвига вдоль $(n+1)$-й координаты поверхности $\mathscr{C}^+$ на $\varepsilon \geq 0$. Заметим, что $\mathscr{C}^+(\varepsilon)$ снова являются минимальными и при $\varepsilon > \Delta/2$ не пересекаются с $\mathscr{M}$.

Рассмотрим $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \geq 0 : \mathscr{M} \cap \mathscr{C}^+(\varepsilon) \neq \emptyset\}$, где $\mathscr{C}^+(0) \equiv \mathscr{C}^+$. Тогда, в силу сказанного выше, ε_0 определено корректно. Если $\varepsilon_0 > 0$, то можно выбирать последовательность $\varepsilon_k \uparrow \varepsilon_0$. Пусть m_k - общая точка поверхностей $\mathscr{M}$ и $\mathscr{C}^+(\varepsilon_k)$. Отметим, что

$$x_1^2(m_k) + \ldots + x_n^2(m_k) = \Psi_\beta\left(x_{n+1}(m_k) - \varepsilon_k\right) < \Psi_\beta\left(\frac{\Delta}{2}\right) < +\infty,$$

где $\Psi_\beta(t)$ – функция, обратная (в смысле композиции) к $\Phi_\beta(\rho)$. Таким образом, все точки m_k содержатся внутри ограниченного цилиндра

$$\{x \in \mathbf{R}^n : |x_{n+1}| < \frac{\Delta}{2}, \quad \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \Psi_\beta(\frac{\Delta}{2})\}.$$

В самом деле, в силу сделанного предположения (84), $\Psi_\beta(\frac{\Delta}{2}) < \Psi_\beta(c_\beta) = +\infty$.

Поскольку $\mathscr{M}$ задана собственным погружением, найдется предельная точка $m_0 \in M$ последовательности $\{m_k\}$. Ясно, что $x(m_0) \in \mathscr{M} \cap \mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$, и, в силу определения ε_0, поверхность $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$ лежит выше $\mathscr{M}$.

Как в случае $\varepsilon_0 = 0$, так и в случае $\varepsilon_0 > 0$, общая точка $x(m_0)$ поверхностей $\mathscr{M}$ и $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$ лежит во внутренности поверхности $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$. Анализ, проведенный выше, означает, что $x(m_0)$ — точка касания $\mathscr{M}$ и $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$.

Поверхность $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$ задана в непараметрическом виде как график над проколотой гиперплоскостью $\mathbf{R}^n \setminus \overline{B(1)}$. Тем самым, общее касательное пространство $T_{m0}\mathscr{M} \equiv T_{m0}\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$ к обеим поверхностям расположено под ненулевым углом к оси координаты x_{n+1}.

Следовательно, некоторая окрестность $\mathscr{O}$ точки $m_0 \in M$ на поверхности $\mathscr{M}$ также имеет вид графика над гиперплоскостью x_{n+1}, и в $\mathscr{O}$ поверхность $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$ расположена выше $\mathscr{M}$ (за исключением точки m_0). Применяя сильный принцип максимума [14, лемма 3.4, стр.41] к $(n+1)$-ым координатным функциям поверхностей $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$ и $\mathscr{M}$ в окрестности точки m_0 (напомним, что уравнение минимальных поверхностей, заданных в явной форме, является равномерно эллиптическим в окрестности любой точки с ненулевым углом наклона $\alpha(m_0)$ касательной плоскости к вектору e_{n+1}), заключаем, что в этой окрестности $\mathscr{M} \equiv \mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$. Поэтому множество M_0 точек m_0, для которых выполняется последнее тождество, должно быть открытым в M. Действительно, если m_1 – произвольная граничная для $\mathscr{O}$ и одновременно внутренняя точка для $\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)$, то угол $\alpha(m_1)$ отличен от нуля и аналогичным образом получаем требуемую окрестность. Множество M_0 должно быть замкнутым, так как условие равенства, из-за непрерывности погружения, продолжается в граничные точки. Тогда, в силу связности поверхностей, $\overline{\mathscr{C}^+(\varepsilon_0)} \in \mathscr{M}$. Последнее невозможно, так как по условию $\mathscr{M}$ выпускает шар радиуса R, строго меньшего единицы.

Аналогично доказывается, что $\mathscr{M}$ лежит всюду строго выше поверхности $\mathscr{C}^-$:

$$x_{n+1} = -\Phi_\beta(\sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}),$$

Но $\mathscr{C} \equiv \overline{\mathscr{C}^-} \cup \mathscr{C}^+$ - есть полная минимальная поверхность вращения и $\mathscr{M} \cap \mathscr{C} = \emptyset$. В частности, выполнено неравенство

$$|x_{n+1}(m)| < \Phi_\beta(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}). \tag{86}$$

Рассмотрим новое семейство $\mathscr{C}(t)$ поверхностей, получаемых гомотетией $\mathscr{C}$ с коэффициентом $t \geq 1$:

$$\mathscr{C}(t) \quad \sim \quad x_{n+1} = t\cdot\Phi_\beta(t^{-1}\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}).$$

Тогда, ввиду (86), корректно определено значение $t_0 = \sup\{t \geq 1 : \mathscr{C}(t)\cap\mathscr{M} = \emptyset\} < +\infty$. Применяя метод, изложенный выше, и, принимая во внимание то, что $\mathscr{C}(t)$ лежит в слое ширины, строго большей Δ при $t > 1$, можно отметить существование точки m_0 касания $\mathscr{C}(t_0)$ и $\mathscr{M}$. При этом всюду на $\mathscr{M}$ выполняется неравенство

$$t_0\cdot\Phi_\beta(t_0^{-1}\sqrt{x_1^2+\ldots x_n^2}) \geq |x_{n+1}(m)|.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть угол $\alpha(m_0)$ между общим касательным пространством к $\mathscr{M}$ и $\mathscr{C}(t_0)$ в точке m_0 и вектором e_{n+1} отличен от нуля. Тогда, в силу вышесказанного, $\mathscr{C}(t_0) \equiv \mathscr{M}$. Но ширина слоя для $\mathscr{C}(t_0)$ строго больше Δ. Получено противоречие.

Случай 2. Пусть $\alpha(m_0) = 0$. По определению $\mathscr{C}(t_0)$ имеем то, что соответствующая общая точка $x(m_0) \in \mathscr{M}\cap\mathscr{C}(t_0)$ лежит на талии катеноида $\mathscr{C}(t_0)$, то есть в гиперплоскости $x_{n+1} = 0$.

Учитывая условие (84), введем в рассмотрение минимальную поверхность $\widetilde{\mathscr{M}}$, полученную из $\mathscr{M}$ параллельным сдвигом вдоль вектора e_{n+1} такую, что она остается в слое $|x_{n+1}| \leq \Delta_1 < c_\beta$ ширины, меньшей $2c_\beta$. Тогда, возвращаясь к началу доказательства, получим аналогичную поверхность $\mathscr{C}(t_1)$. В силу гомотетичности катеноидов $\mathscr{C}(t_0)$ и $\mathscr{C}(t_1)$, заключаем, что $t_1 < t_0$, то есть радиус талии у нового катеноида $\mathscr{C}(t_1)$ строго меньше, чем у $\mathscr{C}(t_0)$. Значит, общая точка $\widetilde{m}$ поверхностей $\widetilde{\mathscr{M}}$ и $\mathscr{C}(t_1)$ не может лежать на талии $\mathscr{C}(t_0)$ и условие невырожденности $\alpha(\widetilde{m}) \neq 0$ выполняется. Следовательно, для поверхностей $\widetilde{\mathscr{M}}$ и $\mathscr{C}(t_1)$ имеют место предположения случая 1. Получаемое противоречие окончательно доказывает теорему.

□

6. Теорема Йоргенсона-Калаби-Погорелова

В данном параграфе демонстрируются также приложения принципа сравнения, применяемого к целым решениям некоторого класса нелинейных уравнений. Основной результат доказан в работе автора [78].

Пусть $S_k(A)$ — k-ая главная симметрическая функция собственных значений матрицы A:

$$\det(A+tI) = \sum_{k=0}^{n} S_k(A)t^{n-k}.$$

Хорошо известна следующая теорема (см. [25], [27], [59]):

Т е о р е м а А. (Йоргенс-Калаби-Погорелов) *Пусть $f(x)$ – выпуклая, определенная во всем $\mathbf{R}^n$ функция, удовлетворяющая уравнению*

$$S_n(\mathrm{Hess} f) \equiv \det(\mathrm{Hess} f) = 1.$$

где $\mathrm{Hess} f$ *– гессиан функции* $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$*. Тогда* f *является многочленом второй степени,*

$$f(x) = a + \langle b, x\rangle + \langle x, Ax\rangle, \tag{87}$$

где A *– постоянная* $n \times n$*-матрица с* $\det A = 1$*; угловые скобки обозначают скалярное произведение.*

Естественным, с нашей точки зрения, является вопрос: *до каких пор остаётся в силе утверждение теоремы A в случае, когда* $f(x)$ *есть выпуклое целое решение следующего общего уравнения*

$$L(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(x) S_k(\mathrm{Hess} f) = 0. \tag{88}$$

На непрерывные коэффициенты $a_k(x)$, вообще говоря, не налагается требование постоянности.

Недавно А.А.Борисенко в [8] доказал теоремы Лиувиллева типа для специальных случаев оператора L :

$$L(f) = S_n(\mathrm{Hess} f) - S_1(\mathrm{Hess} f) = \det(\mathrm{Hess} f) - \Delta f = 0, \tag{89}$$

и

$$L(f) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^k S_{2k+1}(\mathrm{Hess} f) = 0. \tag{90}$$

Как следует из [8], *единственные целые выпуклые решения уравнений* (89) *и* (90) *с линейным асимптотическим ростом на бесконечности суть линейные функции.* Техника доказательства этого утверждения основывается на специальных интегральных оценках. Указывается, что решения (89) и (90) описывают специальные лагранжевые многообразия, задаваемые в непараметрическом виде.

Далее мы установливаем утверждение, обобщающее [8] в различных направлениях и отвечающее на поставленный выше вопрос в случае, когда коэффициенты оператора $L(f)$ удовлетворяют условию квазипостоянности:

> (Q) либо $a_k(x) \equiv 0$ на $\mathbf{R}^n$, либо существуют строго положительные постоянные μ_1, μ_2 такие, что $\mu_1 \le |a_k(x)| \le \mu_2$.

Имеет место

Теорема 5.7. *Пусть* $f(x)$ *целое выпуклое решение класса* C^2 *уравнения* (88)*, выполнено (Q) и*

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{|f(x)|}{|x|^2} = 0. \tag{91}$$

Тогда $f(x)$ *является линейной функцией.*

Замечание 5.5. Приводимый в заключении параграфа пример показывает, что существуют операторы L, для которых выполняется предположение (Q) и решение $f(x) \sim$

$|x|^2$ отлично от квадратичного полинома. Таким образом, (91) является оптимальным условием в этом смысле.

Будем использовать стандартное обозначение $A \geq B$, если разность $A - B$ есть положительно полуопределенная матрица. Обозначим далее через $J = J(L)$ множество всех номеров i, $0 \leq i \leq n$ для которых $a_i \not\equiv 0$.

Лемма 5.5. *Пусть $A(x) \geq 0$ непрерывная $n \times n$-матрица, удовлетворяющая уравнению*

$$L(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) S_k(A(x)) = 0, \tag{92}$$

всюду в $\mathbf{R}^n$. Тогда или $S_i(A(x)) \equiv 0$ для любого $i \in J$, или существуют номер $k \in J$ и постоянная σ_0, зависящие только от μ_1, μ_2, для которых

$$S_k(A(x)) \geq \sigma_0 > 0.$$

Доказательство. Заметим, что $S_k(A(x)) \geq 0$ в силу положительной полуопределенности матрицы $A(x)$. Таким образом, если все коэффициенты $a_k(x)$ имеют один знак, то для $k \in J$ выполнено $S_k(A(x)) \equiv 0$.

Предположим, что существуют точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и номер $k \in J$ такие, что $S_k(A(x_0)) > 0$. В этом случае найдутся по крайней мере два коэффициента противоположного знака (причем, в силу условия (Q) и требования непрерывности, это свойство выполнено во всем $\mathbf{R}^n$). Перепишем (92) в виде

$$|a_{i_1}| S_{i_1}(A) + \ldots + |a_{i_m}| S_{i_m}(A) = |a_{j_1}| S_{j_1}(A) + \ldots + |a_{j_p}| S_{j_p}(A),$$

где $i_1 < \cdots < i_m$, $j_1 < \cdots < j_p$, $i_1 < j_1$ и покажем, что индекс $k = i_1$ удовлетворяет заключению леммы.

Действительно,

$$S_{i_1}(A) \leq |b_1| S_{j_1}(A) + \ldots + |b_p| S_{j_p}(A), \tag{93}$$

где $b_k = |a_{j_k}|/|a_{i_1}| \leq \mu_2/\mu_1$. Используя неравенство между симметрическими функциями ([40], предложение 3.2.2),

$$\left(\frac{S_k(A)}{C_n^k}\right)^m \leq \left(\frac{S_m(A)}{C_n^m}\right)^k,$$

где $1 \leq m \leq k \leq n$, из (93) получаем

$$S_{i_1}(A) \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k (S_{i_1}(A))^{\nu_k}.$$

Здесь $\nu_k = j_k/i_1 > 1$ и $\alpha_k = C_n^{j_k} (C_n^{i_1})^{-\nu_k}$.

Заметим, что левая часть уравнения

$$\frac{\mu_2}{\mu_1}\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\sigma^{\nu_k-1}=1$$

является возрастающей функцией и пусть $\sigma=\sigma_0$ — его единственный положительный корень. Тогда, ввиду положительности $S_{i_1}(A(x_0))$, заключаем, что $S_{i_1}(A(x_0))\geq\sigma_0$. Но, в силу непрерывности $A(x)$, последнее неравенство выполнено во всем $\mathbf{R}^n$. Лемма доказана.

□

Следствие 5.7. *Пусть $f(x)\in C^2(\mathbf{R}^n)$ – выпуклое решение уравнения (88). Тогда либо $\det(\mathrm{Hess} f)\equiv 0$ в $\mathbf{R}^n$, либо существует номер $k\in J$, такой, что для всех $x\in\mathbf{R}^n$*

$$S_k(\mathrm{Hess} f)\geq\sigma_0>0 \tag{94}$$

где k,σ_0 из предыдущей леммы.

Доказательство теоремы 5.7 Пусть (94) выполнено всюду в $\mathbf{R}^n$. Можно считать, что решением $f(x)$ является всюду неотрицательная функция, рассматривая, если нужно, подходящий сдвиг $f(x)\to\pm f(x)+\langle a,x\rangle$. Ввиду условия (91), выберем по данному $\varepsilon>0$ число p так, что справедливо неравенство

$$f(x)\leq\varepsilon|x|^2/2+p$$

при всех $x\in\mathbf{R}^n$. Но функция $g(x)=\varepsilon|x|^2/2-f(x)$ равномерно стремится к бесконечности вдоль последовательностей $x_k\to\infty$. Следовательно, $g(x)$ достигает своего минимума в некоторой точке $x_0\in\mathbf{R}^n$ и

$$(\mathrm{Hess}\, g)(x_0)\equiv\mathrm{Hess}(\frac{\varepsilon}{2}|x|^2)-(\mathrm{Hess} f)(x_0)\geq 0,$$

откуда имеем: $(\mathrm{Hess} f)(x_0)\leq\varepsilon I$, где I единичная матрица. Так как $\mathrm{Hess} f(x_0)$ — положительно полуопределенная матрица, то, используя принцип мажоризации, (см. [20], следствие 4.3.3), получим

$$S_i(\mathrm{Hess} f)(x_0)\leq S_i(\varepsilon I)=\varepsilon^i C_n^i,\qquad 1\leq i\leq n.$$

Предположение того, что $S_k(\mathrm{Hess} f)\geq\sigma_0>0$ противоречит произвольности выбора $\varepsilon>0$. Таким образом, выполняется вторая альтернатива следствия, $\det\mathrm{Hess} f\equiv 0$ в $\mathbf{R}^n$. Данное уравнение может быть исследовано с помощью аналогичных рассуждений, изложенных в [8]. Получаем линейность функции $f(x)$. Теорема доказана.

□

6.. Ниже мы приводим пример оператора L, показывающий, что показатель роста в теореме 5.7 неулучшаем.

Пусть $\alpha(t)$ – положительная функция, отличная от постоянной, такая, что $0<q\leq\alpha(t)\leq q^{-1}$ при заданном $q>0$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} (x_i - t)\alpha(t)\, dt,$$

для которой $\mathrm{Hess} f = |\alpha(x_i)\delta_{ij}|$. Следовательно, $f(x)$ выпуклая и является решением уравнения

$$S_n(\mathrm{Hess} f) - \omega(x) = 0$$

с $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n)$. Нетрудно видеть, что $q^n \leq \omega(x) \leq q^{-n}$, то есть коэффициенты $a_k(x)$ удовлетворяют условию (Q) и, более того,

$$q\frac{|x|^2}{2} \leq |f(x)| \leq \frac{|x|^2}{2q}.$$

Таким образом, $f(x)$ имеет квадратичный асимптотический рост.

Глава 6

Звездные минимальные поверхности

Собственно вложенная n-мерная поверхность $\mathscr{M}$ называется *звездной* (по отношении к точке $a \in \mathbf{R}^{n+1}$), если она является графиком относительно единичной сферы с центром в a.

В настоящей главе изложены результаты, относящиеся к геометрии "в целом"звездных минимальных поверхностей. Данный класс поверхностей непосредственно связан с активно изучаемыми в последнее время минимальными графиками. Особое место в этой теории занимает известная проблема Бернштейна: верно ли то, что единственными минимальными непараметрическими гиперповерхностями являются гиперплоскости?

В настоящее время известно, что положительный ответ имеет место лишь для малых значений размерности поверхности: $n \leq 7$. Первый контрпример для размерности $n = 8$ был построен Е. Бомбиери, Е. Джусти и Де Джоржи в [7], а для больших значений размерности $n \geq 8$ — Л. Саймоном в [67]. С этого времени проблема Бернштейна трансформировалась в проблему исследования нетривиальных минимальных графиков. Отметим, что построение примеров в упомянутых работах опирается на технически изощренные рассуждения, позволяющие всякому строго минимальному изопараметрическому конусу отнести некоторый минимальный график. Как следствие, Саймон показал, что такие графики имеют полиномиальный рост на бесконечности и высказал предположение, что это свойство выполняется для любого минимального графика (для размерности $n = 8$ это доказано в [67]). В этой связи остается нерешенным также вопрос о существовании алгебраических минимальных графиков, отличных от гиперплоскостей [68].

В своей монографии [90, с. 216] А.Т. Фоменко предложил следующую интерпретацию феномена "восьмерки"в проблеме Бернштейна: если рассмотреть размерность поверхности n как непрерывный параметр в задаче определения устойчивых эквивариантных минимальных конусов, то задача сводится к качественному исследованию геодезических на плоскости с искривленной метрикой. Оказывается, существует критическое значение параметра $n_0 = 5 + 2\sqrt{2} = 7.828\ldots$, при переходе через которое появляются нетривиальные строго минимальные конусы.

Пусть $k \geq 1$ — некоторое целое число, $n = 2k$. Обозначим через C_k минимальный гиперконус Саймонза (J. Simons) $C_k = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 = x_{k+1}^2 + \ldots + x_{2k}^2\}$ [21]. Будем говорить, что вложенная поверхность $\mathscr{M}$ вписана в конус C_k, если она содержится в одной из компонент связности множества $\mathbf{R}^n \setminus C_k$ и для любой последовательности точек $z_i \in \mathscr{M}$, не имеющей точек накопления на поверхности $\mathscr{M}$, выполнено: $\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(z_i; C_k) = 0$ (здесь через $\operatorname{dist}(x; C)$ обозначено расстояние от множества C до точки x). Пусть $\beta = \frac{1}{2}\big(n - 5 - \sqrt{n^2 - 10n + 17}\big)$.

Теорема 6.1. *Для всякого целого $k \geq 4$ существует единственная с точностью до гомотетии пространства $\mathbf{R}^n$, $n = 2k$, звездная минимальная поверхность $\mathscr{M}_k$,* *вписанная в конус C_k. Более того, скорость асимптотического приближения поверхности $\mathscr{M}_k$ к конусу Саймонза C_k выражается следующей формулой*

$$\operatorname{dist}(x; C_k) = c|x|^{-\beta} + o(|x|^{-\beta}), \qquad |x| \to \infty. \tag{95}$$

Заметим, что размерность k не может быть уменьшена. Более того, если рассматривать размерность n пространства как непрерывный параметр, то критическое значение размерности объемлющего евклидова пространства, при переходе через которое появляются звездные минимальные поверхности, вписанные в конусы Саймонза, равно $n_0 = 5 + 2\sqrt{2} = 7.828\ldots$ и совпадает с критической размерностью нетривиальных минимальных графиков [90, с. 216]. С другой стороны, как доказано в [67], все примеры n-мерных минимальных графиков имеют полиномиальный рост с показателем равным или большим значения $\beta + 2$. Отметим также, что наш метод доказательства отличен от применяемого в [90] и не использует никаких предположений относительно устойчивости минимальной поверхности.

Упомянем один класс поверхностей родственный звездным минимальным поверхностям. А именно, в работе [52] Ниче рассматривал поверхности, звездные относительно некоторой прямой в $\mathbf{R}^3$. В частности, им доказано, что полная двумерная минимальная поверхность, имеющая только звездные кривые в сечениях плоскостями, ортогональными данной прямой, является стандартным катеноидом.

1. Целые решения уравнения звездных минимальных поверхностей

1.1. Рассмотрим поверхность $\mathscr{M}$, задаваемую ^{2}-гладким отображением

$$x(\theta) = a + \theta e^{u(\theta)}, \tag{96}$$

над открытым связным подмножеством $\Omega \in \mathbf{S}^n$ единичной сферы $\mathbf{S}^n \in \mathbf{R}^{n+1}$, где θ пробегает точки $\Omega \in \mathbf{S}^n$. Далее мы рассматриваем только внешне полные поверхности, то есть поверхности, для которых отображение x является собственным в топологическом смысле. Данное свойство эквивалентно выполнению следущего граничного условия:

$$\lim_{\theta \to \partial\Omega} u(\theta) = +\infty. \tag{97}$$

Обозначим через ∇ и $\overline{\nabla}$ — ковариантные производные на сфере $\mathbf{S}^n$ и поверхности $\mathscr{M}$ соответственно; через div, Δ и $\operatorname{div}_{\mathscr{M}}$, $\Delta_{\mathscr{M}}$ обозначим соответствующие операторы дивергенции и операторы Лапласа-Бельтрами.

Предложение 6.1. *Пусть $x(\theta) = a + \theta e^{u(\theta)}$ – собственно вложенная звездная минимальная поверхность, заданная над областью $\Omega \subset \mathbf{S}^n$. Тогда $u(\theta)$ удовлетворяет уравнению*

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{n}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}. \tag{98}$$

Доказательство. Рассмотрим явное выражение для оператора Лапласа-Бельтрами $\Delta_{\mathscr{M}}$ в локальных сферических координатах. Пусть θ – точка на сфере $\mathbf{S}^n$; $E_1, \ldots, E_n$ –

ортонормированный базис касательного пространства $T_\theta \mathbf{S}^n$ и $d\theta_1, \dots, d\theta_n$ – сопряженный базис 1-форм в точке θ. Обозначим через $g_{ij}dx_i \otimes dx_j$ метрический тензор $\mathscr{M}$ и через $G^{-1} = \|g^{ij}\|$ – матрицу, обратную к g_{ij}. Известно [22, § 29], что для ^{2}-гладкой функции f на $\mathscr{M}$ выполнено

$$\Delta_{\mathscr{M}} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div} \sqrt{g} G^{-1} \nabla f, \tag{99}$$

где $g = \det \|g_{ij}\|$.

Чтобы вычислить g_{ij}, запишем

$$d\theta_i(x) = \nabla_{E_i}(\theta e^{u(\theta)}) = e^{u(\theta)}(E_i + \theta\langle \nabla u, E_i\rangle),$$

и, таким образом,

$$g_{ij} \equiv \langle d\theta_i(x), d\theta_j(x)\rangle = e^{2u(\theta)}(\delta_{ij} + u'_i u'_j),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и $u'_i = \langle \nabla u, E_i\rangle$ — производная в направлении вектора E_i. В результате непосредственных вычислений получаем

$$g = \det \|g_{ij}\| = e^{2nu(\theta)}(1 + \sum_{i=1}^{n} u'^2_i) = e^{2nu(\theta)}(1 + |\nabla u|^2) \tag{100}$$

и

$$g^{ij} = e^{-2u(\theta)} \left(\delta_{ij} - \frac{u'_i u'_j}{1 + |\nabla u|^2} \right).$$

Выберем стандартный ортонормированный базис e_k, $1 \le k \le n+1$ пространства $\mathbf{R}^{n+1}$. Координатные функции x_k будут гармоническими на минимальной поверхности $\mathscr{M}$ и, следовательно, $\Delta_{\mathscr{M}} x_k = 0$. Заметим также, что для градиента координатной функции имеем $|\overline{\nabla}\, x_k|^2 = 1 - \langle e_k, N\rangle^2$, где N — единичная нормаль к поверхности $\mathscr{M}$. Таким образом,

$$\Delta_{\mathscr{M}} |x|^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \Delta_{\mathscr{M}} x_k^2 = 2 \sum_{k=1}^{n+1} |\overline{\nabla}\, x_k|^2 = 2(n + 1 - |N|^2) = 2n. \tag{101}$$

Поэтому, подставляя (101) в (99) и применяя (100), получим

$$n = \Delta_{\mathscr{M}} \frac{|x|^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div} \sqrt{g} G^{-1} \nabla (e^{2u(\theta)}) =$$

$$= \frac{e^{-nu(\theta)}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \operatorname{div} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, e^{(n+2)u(\theta)}\, G^{-1} \nabla u(\theta). \tag{102}$$

Из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} g^{ij} u'_i = e^{-2u(\theta)} \frac{u'_j}{1 + |\nabla u|^2}$$

и (102) имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \operatorname{div} e^{nu(\theta)} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = n e^{nu(\theta)}.$$

Требуемая формула следует из последнего тождества.

Будем называть всякое решение $u(\theta)$ уравнения (98), удовлетворяющее (97), *целым решением* уравнения (98). Область Ω будем называть *допустимой*, если найдется хотя бы одно целое решение $u(\theta)$ в Ω.

1.2. В отличие от случая минимальных графиков, главной особенностью уравнения (98) является не определенный *a priori* класс таких областей Ω, которые допускают существование целых решений, поэтому естественно возникает вопрос: сколько различных целых решений уравнения (98) существует в данной допустимой области Ω? Два решения $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ называются различными, если разность $u_1(\theta) - u_2(\theta)$ не является постоянной в Ω. Последнее означает, что две соответствующие минимальные поверхности не являются гомотетичными друг другу.

Полный ответ удается получить лишь в случае совпадения Ω с полусферой $\mathbf{S}^n$ (см. следствие 6.1). Отметим также, что, как следует из теоремы 6.7, в двумерном случае полусферы суть единственные допустимые области.

Начнем изучение граничных свойств допустимых областей со следующего определения.

Говорят [21], что открытое множество $E \subset \mathbf{S}^n$ имеет *конечный периметр* (по Каччополи) $\mathscr{C}(E)$, если характеристическая функция $\varphi_E(\theta)$ имеет ограниченную в существенном вариацию. Другими словами,

$$\mathscr{C}(E) \equiv \sup \int_E \operatorname{div} X(\theta)\, d\theta < \infty, \tag{103}$$

где точная верхняя грань берется по всем гладким векторным полям X с носителем в E таким, что $|X(\theta)| \le 1$.

Если Ω является областью с гладкой границей, то она всегда имеет конечный периметр и последнее определение совпадает с обычной $(n-1)$-мерной мерой Хаусдорфа границы области $\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega)$.

Теорема 6.2. *Пусть $u(\theta)$ — целое решение уравнения* (98) *в Ω. Тогда Ω имеет конечный периметр $\mathscr{C}(\Omega)$. Более того, справедлива оценка*

$$\mathscr{C}(\Omega) \le n \int_\Omega \frac{d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{104}$$

В частности, периметр всегда меньше, чем объем n-мерной единичной сферы ω_n.

Доказательство. Чтобы доказать конечность периметра, рассмотрим векторное поле A:

$$A(\theta) = \frac{\nabla u(\theta)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \tag{105}$$

где $\Omega(R) = \{\theta \in \Omega |\ u(\theta) < R\}$ и введем функцию $\phi(\theta) = R - u(\theta)$. Тогда $\phi|_{\partial\Omega(R)} = 0$ и, в силу теоремы Стокса, получим

$$0 = \int_{\Omega(R)} \operatorname{div} \phi A(\theta)\, d\theta = \int_{\Omega(R)} \frac{n(R-u(\theta))\, d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \int_{\Omega(R)} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega(R)} \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,d\theta = \int_{\Omega(R)} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,d\theta + \int_{\Omega(R)} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,d\theta =$$

$$= \int_{\Omega(R)} \frac{1+n(R-u(\theta))}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,d\theta \le (1+Rn)\int_{\Omega(R)} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,d\theta. \tag{106}$$

Заметим, что $\Omega(R)\subset\Omega\subset\mathbf{S}^n$ и введем следующее обозначение

$$\mu(u) \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,d\theta < \infty.$$

Тогда из (106) имеем

$$\int_{\Omega(R)} \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,d\theta \le (1+nR)\mu(u). \tag{107}$$

Из (97) следует, что $c=\min_{\theta\in\Omega} u(\theta) > -\infty$ и, применяя формулу Кронрода-Федерера [88, §3.2], получаем из (107)

$$\mu(u)(1+nR) \ge \int_{\Omega(R)} |\nabla u|\,d\theta = \int_c^R \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega(t))\,dt,$$

где через $\mathscr{H}^{n-1}$ обозначена $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа.

Из (97) и последнего соотношения вытекает, что существует возрастающая последовательность $t_k\to\infty$ такая, что

$$\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega(t_k)) \le n\mu(u) + \frac{1}{k}.$$

Более того, используя теорему Сарда, можно выбрать последовательность t_k так, что все $\partial\Omega(t_k)$ являются гладкими многообразиями в $\mathbf{S}^n$. В этом случае $\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega(t_k))$ совпадает с периметром $\mathscr{C}(\partial\Omega(t_k))$ [21, стр. 14].

С другой стороны, последовательность характеристических функций $\varphi_{\Omega(t_k)}$ неубывает и поточечено сходится к φ_Ω. Таким образом, $\varphi_{\Omega(t_k)}\to\varphi_\Omega$ в смысле сходимости в классе $L_{1,loc}(\mathbf{S}^n)$.

Применяя свойство полунепрерывности вариации [21, теорема 1.9], заключаем, что Ω имеет конечный периметр и выполнено неравенство

$$\mathscr{C}(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} \mathscr{C}(\Omega(t_k)) \le n\mu(u).$$

Теорема доказана.

Важным, на наш взгляд, является вопрос о достижимости равенства в оценке (104). Можно показать, что равенство имеет место, если граница Ω "достаточно"хорошая, но нам не известно, выполняется ли оно в общем случае. Для наших дальнейших приложений достаточно предполагать, что $\partial\Omega$ гладкая. С другой стороны, равенство достигается также в случае, когда $\partial\Omega$ имеет конечный периметр по Минковскому.

Теорема 6.3. *Пусть Ω — допустимая область с гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда для любого целого решения $u(\theta)$ в Ω выполнено*

$$\mathscr{C}(\Omega) = n\mu(u) = n\int_{\Omega} \frac{d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{108}$$

Доказательство. Предположим, что Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$ и рассмотрим множество

$$\Omega_\rho = \{\theta \in \Omega |\ \mathrm{dist}\ (\theta; \partial\Omega) > \rho\},$$

где ρ выбрано достаточно малым, чтобы граница $\partial\Omega_\rho$ была также гладкой. В этом случае имеем

$$\lim_{\rho\to 0} \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega_\rho) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega) = \mathscr{C}(\Omega).$$

Для доказательства теоремы теперь достаточно показать, что

$$\lim_{\rho\to 0} \mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega_\rho) \geq \int_{\Omega} \mathrm{div} A.$$

Заметим, что $|A| < 1$ и, используя формулу Стокса, получаем

$$\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega_\rho) \geq \int_{\partial\Omega\rho} |A| \geq \int_{\partial\Omega_\rho} \langle A, \nu\rangle = \int_{\Omega_\rho} \mathrm{div} A,$$

где через ν обозначена внешняя нормаль к $\partial\Omega_\rho$.

1.3. В этом пункте устанавливается связь между периметром допустимой области и проективным объемом соответствующей минимальной поверхности. Последнее понятие было введено в недавней работе автора [76], где было показано, что если $\mathscr{M}$ собственно погруженная n-мерная минимальная поверхность (не обязательно звездная), то существует следующий предел, конечный или бесконечный:

$$V_n(\mathscr{M}) \equiv \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int_{M_r(a)} \frac{1}{|x(m)-a|^n} = \lim_{r\to\infty} \frac{n\,\mathrm{Vol}_n(M_r)}{r^n}.$$

Здесь $M_r = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : 1 < |x-a| < r\}$. В частности, если $V_n(\mathscr{M}) < \infty$, то объем M_r растет как $\frac{V_n(\mathscr{M})}{n} r^n$.

Более того, как показано в [76], величина проективного объема не зависит от выбора точки $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ и может быть вычислена по формуле

$$V_n(\mathscr{M}) = n\int_{\mathscr{M}} \frac{\langle x(m)-a, N(m)\rangle^2}{|x(m)-a|^{n+2}}, \tag{109}$$

где $N(m)$ — нормаль к $\mathscr{M}$ в точке m. Как следствие, минимальная поверхность имеет конечный проективный объем при условии, что кратность центральной проекции $\mathscr{M}$ на гиперсферу в $\mathbf{R}^{n+1}$ограничена по всем направлениям. Ниже мы выводим точное выражение для проективного объема звездных минимальных поверхностей.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathscr{M}$ — собственно вложенная звездная минимальная гиперповерхность, заданная над $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ уравнением (96). Тогда*

$$V_n(\mathscr{M}) = n\mu(u), \tag{110}$$

где $V_n(\mathscr{M})$ — проективный обьем $\mathscr{M}$.

Доказательство. В силу указанного выше инвариантного свойства проективного объема $V_n(\mathscr{M})$, можно считать, что точка a в (110) совпадает с полюсом a в (96).

Чтобы найти выражение для нормали $N(m)$, будем использовать обозначения из доказательства предложения 6.1. Заметим, что $\langle D_{E_i}x(\theta), N\rangle = 0$ для любого индекса i, где D означает стандартную ковариантную производную в $\mathbf{R}^{n+1}$. После дифференцирования получаем

$$0 = e^{u(\theta)}\langle E_i + \theta\langle\nabla u(\theta), E_i\rangle, N\rangle = e^{u(\theta)}\langle E_i, N + \langle\theta, N\rangle\nabla u(\theta)\rangle,$$

и, ввиду произвольности выбора индекса i, заключаем, что

$$N + \langle\theta, N\rangle\nabla u(\theta) = \alpha\theta$$

для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$. Следовательно,

$$N = \frac{\theta - \nabla u(\theta)}{1 + |\nabla u|^2}$$

и

$$\langle x, N\rangle = \frac{e^{u(\theta)}}{1 + |\nabla u|^2}. \tag{111}$$

Таким образом, из (100) и (109) имеем в локальных сферических координатах

$$V_n(\mathscr{M}) = n\int_\Omega \frac{\langle x, N\rangle^2\sqrt{g}}{|x|^{n+2}}\,d\theta = n\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\,d\theta,$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 6.1. *Если Ω совпадает с полусферой $\mathbf{S}^n_+$, то единственными звездными минимальными поверхностями, расположенными над Ω, являются гиперплоскости.*

Доказательство. Используя следствие 2.2, получаем

$$V_n(\mathscr{M}) \ge \omega_n, \tag{112}$$

где ω_n — $(n-1)$-мерный объем единичной сферы $\mathbf{S}^{n-1}$ и равенство в (112) достигается лишь в случае, когда $\mathscr{M}$ является гиперплоскостью.

С другой стороны, из теоремы 6.4 и теоремы 6.3 следует, что

$$\mathscr{C}(\mathbf{S}^n_+) = n\mu(u) = V_n(\mathscr{M}),$$

и, учитывая равенство $\mathscr{C}(\mathbf{S}^n_+) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial\mathbf{S}^n_+) = \omega_n$, получаем $V_n(\mathscr{M}) = \omega_n$. Таким образом, $\mathscr{M}$ — гиперплоскость. □

Следствие 6.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ допустимая область. Тогда число $\ell(\partial\Omega)$ различных компонент связности границы $\partial\Omega$ конечно и удовлетворяет неравенству*

$$\ell(\partial\Omega) \le \frac{n\omega_{n+1}2^{n-1}}{\omega_n} = 2^{n-1}(n+1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(n+2/2)}{\Gamma(n+3/2)},$$

где Γ — гамма-функция Эйлера .

Доказательство. Достаточно заметить, что число компонент связности границы $\partial\Omega$ в точности совпадает с числом концов соответствующей поверхности $\mathscr{M}$. Тогда неравенство непосредственно получается из теоремы 3.1.

2. Асимптотические свойства целых решений

2.1. Пусть $u(\theta)$ — целое решение уравнения звездных минимальных поверхностей в области $\Omega \subset \mathbf{S}^n$. Введем обозначения

$$\Omega(R) = \{\theta \in \Omega : u(\theta) < R\}, \qquad \Lambda(R) = \Omega \setminus \Omega(R),$$

и, для данной точки $\xi \in \Omega$,

$$E(\xi) = \Lambda(u(\xi)) = \{\theta \in \Omega : u(\theta) > u(\xi)\}.$$

Кроме того, положим

$$\mu(R) = \int_{\Omega(R)} \frac{n\,d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u(\theta)|^2}}.$$

Теорема 6.5. *Пусть $u(\theta)$ — целое решение, такое, что $|\nabla u(\theta)| \neq 0$ вблизи границы $\partial\Omega$. Тогда для достаточно большого R_0 и любого $\xi \in \Lambda(R_0)$ имеет место оценка*

$$\operatorname{dist}\,(\xi; \partial\Omega) \le \frac{\mathscr{H}^{n-1}(E(\xi))}{\mu(R)}, \tag{113}$$

где $\operatorname{dist}\,(\xi;\partial\Omega)$ — расстояние от точки ξ до множества $\partial\Omega$ в сферической метрике и $R = u(\xi)$.

Доказательство. Выберем R_0 так, что для любого $\theta \in \Lambda(R_0)$ выполнено $|\nabla u(\theta)| \neq 0$. Рассмотрим в Ω динамическую автономную систему

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = A(\theta(t)), \tag{114}$$

где $A(\theta)$ — оператор из (105).

Обозначим через $G(\xi;t)$ — решение (114) с начальными условиями $\theta(0) = \xi$ и через $G_t(\cdot) = G(\cdot, t) : \Omega \to \Omega$ — соответствующую однопараметрическую группу преобразований. Пусть $T(\xi)$ — максимально возможное значение параметра $t \ge 0$, для которого определено решение $G(\xi;t)$. Покажем, что

$$\liminf_{t \to T(\xi)-0} \operatorname{dist}\,(G(\xi;t);\partial\Omega) = 0. \tag{115}$$

Поле $A(\theta)$ сонаправлено с градиентом $u(\theta)$, поэтому

$$\frac{d}{dt}u(\theta(t)) = \langle \nabla u(\theta(t)), \theta'(t)\rangle = \frac{|\nabla u(\theta)|^2}{\sqrt{1+|\nabla u(\theta)|^2}} > 0.$$

Тогда вдоль интегральных траекторий системы (114) функция $u(\theta)$ строго возрастает; при начальном значении $\xi \in \Lambda(R_0)$ выполнено $u(\xi) \ge R_0$ и, следовательно, интегральная кривая $G(\xi;t)$ при $t \ge 0$ не пересекается с $\Omega(R_0)$.

Предположим, что (115) не выполнено. Тогда $\theta(t)$ остается в $\Omega(c)$ для некоторого $c > R_0$. В силу непродолжаемости решения $G(\xi;t)$ и условия невырожденности градиента на $\Lambda(R_0)$, кривая $G(\xi;t)$ имеет бесконечную длину. С другой стороны, если

$$d \equiv \sup_{\Omega(c)\setminus\Lambda(R_0)} |\nabla u| < \infty, \qquad \delta \equiv \inf_{\Omega(c)\setminus\Lambda(R_0)} |\nabla u| > 0,$$

то есть,

$$\frac{d}{dt}u(\theta(t)) \geq \frac{\delta^2}{\sqrt{1+d^2}} \equiv k > 0.$$

Имеем

$$u(\theta(t)) - u(\theta(0)) = \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau}u(\theta(\tau))\,d\tau > kt. \tag{116}$$

В силу равенства $|\frac{d\theta(\tau)}{d\tau}| = |A(\theta(\tau))| \leq 1$ получаем

$$\int\limits_0^t |d\theta(\tau)| \leq t.$$

Учтем бесконечность длины кривой $G(\xi;t)$:

$$\lim_{t\to T(\xi)-0}\int_0^t |d\theta(\tau)| = +\infty,$$

поэтому $T(\xi) = +\infty$. Из (116) следует, что $u(\theta(\tau))$ не ограничена в $\Omega(c)$. Получено противоречие определению $\Omega(c)$ и равенство (115) доказано.

Зафиксируем некоторую точку $\xi \in \Lambda(R_0)$. Тогда $R \equiv u(\xi) \geq R_0$. Применяя теорему Лиувилля об изменении объема фазового пространства, получим для любого $0 \leq t < T(\xi)$

$$\frac{d}{dt}m_n(G_t(\Omega(R))) = \int_{G_t(\Omega(R))} \operatorname{div} A(\theta) = \int_{G_t(\Omega(R))} \frac{n\,d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u(\theta)|^2}}. \tag{117}$$

Но, в силу указанных свойств системы (114), имеет место включение

$$G_t(\Omega(R)) \supset \Omega(R), \qquad \forall t \in [0;T(\xi)),$$

откуда, используя (117), получим

$$\frac{d}{dt}m_n(G_t(\Omega(R))) > \int_{\Omega(R)} \frac{n\,d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u(\theta)|^2}} = \mu(R).$$

Интегрируя последнее неравенство по $t \in [0;T(\xi))$, ввиду того, что $G_0(\Omega(R)) = \Omega(R)$, получаем

$$m_n(G_t(\Omega(R))) - m_n(\Omega(R)) > t\mu(R).$$

С другой стороны, $G_t(\Omega(R)) \subset \Omega$ и, следовательно,

$$m_n(G_t(\Omega(R))) < m_n(\Omega),$$

откуда

$$T(\xi) \leq \frac{m_n(\Omega) - m_n(\Omega(R))}{\mu(R)} = \frac{m_n(E(\xi))}{\mu(R)}. \tag{118}$$

Пусть γ — интегральная кривая $\{\theta = G_t(\xi) : t \in [0; T(\xi)\}$ с началом в ξ. Для длины этой кривой имеем:

$$\mathscr{H}^1(\gamma) \le \int_0^{T(\xi)} |\theta'(t)|\, dt = \int_0^{T(\xi)} \frac{|\nabla u(\theta(t))|\, dt}{\sqrt{1 + |\nabla u(\theta(t))|^2}} < T(\xi),$$

и, принимая во внимание (118), получаем

$$m_1(\gamma) < \frac{m_n(E(\xi))}{\mu(R)}, \quad R = u(\xi).$$

Но, используя (115) и определение геодезического расстояния, получаем

$$\mathrm{dist}\,(\xi; \partial\Omega) \le m_1(\gamma),$$

откуда и следует требуемая оценка.

2.2. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_k)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция в $\mathbf{R}^k$. Введем следующий дифференциальный оператор

$$L[f] = |\overline{\nabla}\, f|^2 \Delta f - \sum_{i,j=1}^{k} f''_{ij} f'_i f'_j, \tag{119}$$

где $\overline{\nabla}\, f = (f'_1, \dots, f'_k)$ — градиент f и f'_i означает частную производную по x_i. Известно [21], что если $L[f] = 0$ и для некоторой точки $a \in \mathbf{R}^k$ выполнено $\overline{\nabla}\, f(a) \ne 0$, то в окрестности точки a поверхность, задаваемая уравнением $f(x) = f(a)$, имеет нулевую среднюю кривизну.

Интересной и нерешенной в настоящее время проблемой является задача описания многомерных алгебраических минимальных гиперповерхностей в евклидовом пространстве. Так же остается открытой так называемая проблема Саймона [68]: существуют ли минимальные поверхности, которые могут быть заданы в виде $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, где f — некоторый полином. Несложно показать, что в последнем случае задача сводится к отысканию однородных полиномов $F(x)$ таких, что для них выполнено $L[F] = 0$.

С помощью доказанной в предыдущем пункте теоремы получаем следующее утверждение

Теорема 6.6. *Пусть $F(x)$ — гладкая функция в $\mathbf{R}^{n+1}$, однородная порядка $K \ge 2$ и удовлетворяющая уравнению $L[F] \equiv 0$. Пусть $\overline{\nabla}\, F(x) \ne 0$ при $x \ne 0$ и $\Sigma = \{\theta \in \mathbf{S}^n : F(\theta) = 0\}$. Тогда Σ непусто и всюду на нем выполнено*

$$|\overline{\nabla}\, F(\theta)| = \mathrm{const}. \tag{120}$$

Доказательство. Предположим противное: пусть $\Sigma = \emptyset$. Тогда $F(x)$ не меняет своего знака всюду в $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $F(x)$ положительная функция. В этом случае множество уровня $\mathscr{M} \equiv \{F(x) = 1\}$ будет минимальной гиперповерхностью в $\mathbf{R}^{n+1}$. В силу однородности и гладкости $F(x)$, поверхность $\mathscr{M}$ должна быть регулярной и компактной, что противоречит ее минимальности. Тем самым, $\Sigma \ne \emptyset$.

Легко видно, что $F(x)$ принимает значения разных знаков. Пусть Ω — некоторая связная компонента множества $\{\theta \in \mathbf{S}^n : F(\theta) > 0\}$ и Σ — ее граница. Тогда, по условию,

Σ — гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие сферы $\mathbf{S}^n$. В силу теоремы Эйлера об однородных функциях, всюду на Σ выполнено равенство

$$\langle \overline{\nabla}\, F(\theta), \theta \rangle = KF(\theta) = 0. \tag{121}$$

Вводя новую функцию $f(\theta) = F(\theta)$ как сужение F на единичную сферу, из (121) получаем

$$\nabla f(\theta) = (\overline{\nabla}\, F(\theta))^\top = \overline{\nabla}\, F(\theta) \neq 0, \tag{122}$$

где $(\,\cdot\,)^\top$ — проекция на касательное пространство к сфере $\mathbf{S}^n$ в соответствующей точке.

Рассмотрим множество уровня $\mathscr{M} \equiv \{x \in \mathbf{R}^n : F(x) = 1\}$, которое, как отмечалось, является регулярной звездной минимальной поверхностью. Найдем ее параметризацию, полагая $x = \theta \cdot e^{u(\theta)}$. Используя однородность функции $F(x)$, имеем:

$$1 = F(\theta e^{u(\theta)}) = f(\theta) e^{Ku(\theta)},$$

откуда

$$u(\theta) = -\frac{1}{K} \ln f(\theta).$$

Тогда для градиента получаем

$$\nabla u(\theta) = -\frac{1}{K} \frac{\nabla f(\theta)}{f(\theta)},$$

и, следовательно, ввиду (122) и левой части равенства (121),

$$|\nabla u(\theta)|^2 = \frac{|\overline{\nabla}\, F(\theta)|^2 - K^2 F^2(\theta)}{K^2 |F(\theta)|^2}.$$

Таким образом, выбирая достаточно большие R, из (121) получаем $\nabla u(\theta) \neq 0$, где $\theta \in \Lambda(R)$. Тогда, в силу предыдущей теоремы,

$$\mathrm{dist}\,(\xi; \Sigma) \le \frac{m_n(E(\xi))}{\mu(R)},$$

для любой $\xi \in \Lambda(R)$ и $R = u(\xi)$.

С другой стороны, из теоремы 6.3 имеем

$$\lim_{R\to\infty} \mu(R) \equiv \int_\Omega \frac{n\, d\theta}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma), \tag{123}$$

откуда

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{m_n(E(\xi))}{\mathrm{dist}\,(\xi; \Sigma)} \ge \mathscr{H}^{n-1}(\Sigma). \tag{124}$$

Заметим далее, что вектор $\overline{\nabla}\, F(y)$ ненулевой и, в силу (121), ортогонален многообразию Σ. Пусть y — произвольная точка в Σ и γ_0 — геодезическая на сфере с началом в y с направлением $\overline{\nabla}\, F(y)$. Обозначая $\delta(\xi) = \mathrm{dist}\,(\xi; y)$, для любой точки $\xi \in \gamma_0$, достаточно близкой к y, получим

$$\mathrm{dist}\,(\xi; \Sigma) = \delta(\xi).$$

Тогда

$$\lim_{\xi\to y,\, \xi\in\gamma_0} \frac{f(\xi)-f(y)}{\delta(\xi)} = |\overline{\nabla}\, F(y)|,$$

откуда следует равенство

$$F(\xi) = f(\xi) = |\overline{\nabla}\, F(y)|\delta(\xi) + o(\delta(\xi)), \qquad \xi \in \gamma_0. \tag{125}$$

С другой стороны, используя формулу Кронрода-Федерера, имеем

$$m_n(E(\xi)) \equiv m_n\{\theta\in\Omega : u(\theta) < u(\xi)\} =$$

$$= m_n\{\theta\in\Omega : 0 < f(\theta) < f(\xi)\} = \int_0^{f(\xi)} dt \int_{\Sigma_t} \frac{d\,\theta}{|\nabla f(\theta)|},$$

где Σ_t — t-множество уровня функции $f(\theta)$. Применяя теорему о среднем для внешнего интеграла, для некоторого $\tau(\xi)\in(0; f(\xi))$ получаем равенство

$$m_n(E(\xi)) = f(\xi)\int_{\Sigma_{\tau(\xi)}} \frac{d\,\theta}{|\nabla f(\theta)|},$$

и, подставляя в (124), имеем:

$$\mathscr{H}^{n-1}(\Sigma) \le \lim_{\xi\to y,\, \xi\in\gamma_0} \frac{f(\xi)}{\delta(\xi)} \quad \int_{\Sigma_{\tau(\xi)}} \frac{d\,\theta}{|\nabla f(\theta)|}. \tag{126}$$

Наконец, используя разложение (125) и совпадение градиентов $\overline{\nabla}\, F(\theta)$ и $\nabla f(\theta)$ на Σ, получаем

$$\mathscr{H}^{n-1}(\Sigma) \le \lim_{\xi\to y,\, \xi\in\gamma_0} \frac{|\overline{\nabla}\, F(y)|\delta(\xi)+o(\delta(\xi))}{\delta(\xi)} \quad \int_{\Sigma_{\tau(\xi)}} \frac{d\,\theta}{|\nabla f(\theta)|} =$$

$$= |\overline{\nabla}\, F(y)| \int_{\Sigma} \frac{d\,\theta}{|\nabla f(\theta)|} = |\overline{\nabla}\, F(y)| \int_{\Sigma} \frac{d\,\theta}{|\overline{\nabla}\, F(\theta)|}.$$

Интегрируя полученное неравенство по $y\in\Sigma$, получим

$$\big(\mathscr{H}^{n-1}(\Sigma)\big)^2 \le \int_{\Sigma} |\overline{\nabla}\, F(y)|\, dy \cdot \int_{\Sigma} \frac{d\theta}{|\overline{\nabla}\, F(\theta)|},$$

откуда, используя экстремальное свойство неравенства Коши и непрерывность выражения $|\overline{\nabla}\, F(y)|$, делаем заключение о его постоянстве.

Таким образом, доказано, что $|\overline{\nabla}\, F(y)|$ не меняет своего значения на границе любой компоненты связности Ω множества $F(x)\neq 0$, откуда легко вытекает постоянность $|\overline{\nabla}\, F(y)|$ на всем множестве 0-уровня функции $F(x)$, что и требовалось доказать.

3. Строение допустимых областей

3.1. Следующее утверждение является версией теоремы Бернштейна для звездных минимальных поверхностей.

Теорема 6.7. *Пусть $\mathscr{M}$ — двумерная звездная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathscr{M}$ является плоскостью. В частности, допустимыми областями на двумерной сфере являются только полусферы.*

Доказательство. Из теоремы 6.4 следует, что поверхность $\mathscr{M}$ имеет квадратичный рост площади. Другими словами, если мы рассмотрим геодезический шар $B(r) \subset M$ с центром в a и радиусом r, то

$$\text{Area } B(r) \le c \cdot r^2,$$

и из теоремы о параболичности типа [101], [48] следует, что на таких многообразиях любая положительная супергармоническая функция равна тождественной постоянной.

Пусть теперь $\mathscr{M}$ — вложенная минимальная поверхность с радиус-вектором x. Рассмотрим функцию

$$f(m) = \langle x(m), N(m) \rangle, \quad m \in \mathscr{M},$$

где $N(m)$ — нормаль к поверхности $\mathscr{M}$, выбранная так же, как и в (111). Тогда $f(m) \ge 0$ всюду в Ω. Предположим, что имеет место равенство

$$\Delta_{\mathscr{M}} f(m) = -\|A\|^2 f(m), \tag{127}$$

где $\|A\|^2$ — длина второй квадратичной формы A поверхности $\mathscr{M}$. Тогда из (127) следует, что функция $f(m)$ является супергармонической на $\mathscr{M}$ и, в силу сделанного выше замечания, $f = const$. Если $f \ne 0$, то из (127) вытекает, что $\|A\| = 0$ всюду на $\mathscr{M}$, то есть поверхность $\mathscr{M}$ является плоским подмногообразием $\mathbf{R}^3$. Если $f \equiv 0$, то из определения f следует, что $\mathscr{M}$ — конус, что противоречит звездности $\mathscr{M}$.

Докажем справедливость формулы (127). После применения уравнения Гаусса-Вейнгартена для любого касательного вектора $E \in T_m\mathscr{M}$ получим равенство

$$\overline{\nabla}_E f \equiv D_E f = \langle D_E x, N \rangle + \langle x, D_E N \rangle = \langle E, N \rangle + \langle x, -A(E) \rangle.$$

Учитывая взаимную ортогональность E и N, получим

$$\overline{\nabla}_E f = -\langle x, A(E) \rangle = -\langle A(x^\top), E \rangle,$$

где $x^\top$ — проекция вектора x на касательное пространство в соответствующей точке. Таким образом,

$$\overline{\nabla} f = -A(x^\top).$$

Пусть Y — некоторое касательное к $\mathscr{M}$ векторное поле. По определению оператора дивергенции, для произвольного ортонормированного базиса E_i пространства $T_m\mathscr{M}$ получаем

$$\operatorname{div}_{\mathscr{M}} A(Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} A(Y), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\nabla}_{E_i} A)(Y, E_i) + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{E_i} Y), E_i \rangle.$$

В силу симметричности градиента $\overline{\nabla} A$ второй квадратичной формы (что эквивалентно уравнению Гаусса-Кодацци), первое слагаемое в последнем выражении можно упростить следующим образом:

$$(\overline{\nabla}_{E_i} A)(Y, E_i) = \overline{\nabla} A(Y, E_i; E_i) = \overline{\nabla} A(E_i, E_i; Y) = (\overline{\nabla}_Y A)(E_i, E_i).$$

После суммирования и применения условия минимальности поверхности $\mathscr{M}$, получаем

$$\operatorname{div}_{\mathscr{M}} A(Y) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\nabla}_Y A)(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{E_i} Y), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{E_i} Y), E_i \rangle. \tag{128}$$

Тогда имеем равенство

$$\overline{\nabla}_{E_i} x^\top = D_{E_i} x - D_{E_i} x^\perp = E_i + A^{x^\perp}(E_i),$$

где символ $\perp$ обозначает проекцию на нормальное пространство и A^ν — касательный гомоморфизм Вейнгартена относительно нормального вектора ν. В нашем случае $\nu = x^\perp = N\langle N, x\rangle$ и, по определению второй квадратичной формы, получаем

$$\overline{\nabla}_{E_i} x^\top = E_i + \langle N, x\rangle A(E_i).$$

Подставляя последнее тождество в (128), приходим к (127). Теорема доказана.

3.2. Пусть $n \geq 3$. Для произвольного единичного вектора $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ введем экватор K_e единичной гиперсферы $\mathbf{S}^n$ так, что $K_e = \{\theta \in \mathbf{S}^n : \langle \theta, e\rangle = 0\}$. Открытую область $\Omega \subset \mathbf{S}^n$ назовем *дефектной*, если для любого направления $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ пересечение множества $\mathbf{S}^n \setminus \Omega$ и экватора K_e не пусто. Другим словами, ни один экватор K_e не содержится целиком в Ω.

Теорема 6.8. *Пусть $n \geq 3$ и Ω — допустимая область. Тогда Ω дефектная.*

Доказательство. Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующее определение из [12].

Говорят, что собственно вложенная связная гиперповерхность $\mathscr{M}$ в $\mathbf{R}^{n+1}$ трубчатая по отношению к вектору e_{n+1}, если найдется числовой интервал $(a; b)$ (концевые точки интервала, вообще говоря, могут быть бесконечными) такой, что

(i) сечения $\Sigma_\tau = \mathscr{M} \cap \Pi_\tau$ поверхности гиперплоскостями $\Pi_\tau = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_{n+1} = \tau\}$ суть компактные множества для любого $\tau \in (a; b)$;

(ii) любая часть поверхности $\mathscr{M}$, расположенная между двумя такими различными гиперплоскостями $\Pi_{\tau'}$ и $\Pi_{\tau''}$ также компактное множество.

Заметим, что никаких дополнительных топологических ограничений на $\mathscr{M}$ не налагается. Тогда, как следует из [12], любая минимальная трубчатая поверхность размерности $n \geq 3$ расположена в некотором конечном параллельном слое $\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : a_1 < x_{n+1} < b_1\}$.

Предположим, что утверждение теоремы не верно. Тогда найдется направление $e \in \mathbf{R}^{n+1}$ такое, что $K_e \subset \Omega$. После поворота в пространстве можно считать, что вектор e совпадает с координатным вектором e_{n+1}. Пусть $\mathscr{M}$ — звездная минимальная поверхность, отвечающая допустимой области Ω. Покажем, что $\mathscr{M}$ трубчатая относительно вектора e_{n+1}. В самом деле, если это не так и для некоторого числа τ пересечение $\Sigma_\tau = \mathscr{M} \cap \Pi_\tau$ — непустое некомпактное множество, то, в силу условия собственности вложения $\mathscr{M}$, найдется последовательность точек $m_k \in \mathscr{M}$ такая, что $|m_k| \to \infty$ и $m_k \in \Pi_\tau$.

Пусть K — экватор, соответствующий вектору e_{n+1}. Тогда для произвольного достаточно малого $\epsilon > 0$ замкнутая ϵ-окрестность экватора $K(\epsilon)$ будет также подмножеством области Ω. В силу компактности $K(\epsilon)$, часть поверхности $\mathscr{M}_\epsilon$, проектирующаяся на $K(\epsilon)$, также компактна как подмножество $\mathbf{R}^{n+1}$.

С другой стороны, центральная проекция $\theta_k = m_k/|m_k|$ последовательности $\{m_k\}$ попадает в $K(\epsilon)$ для достаточно больших $k > k_0$. В самом деле, это следует из равномерной ограниченности $(n+1)$-ых координат точек m_k. Но центральная проекция — взаимнооднозначное отображение на всей поверхности $\mathscr{M}$ и, следовательно, $\mathscr{M}_\epsilon$ содержит расходящуюся последовательность точек $\{m_k\}$, $k > k_0$. Полученное противоречие доказывает трубчатость поверхности $\mathscr{M}$.

Применяя вышеприведенный результат [12], приходим к выводу, что поверхность $\mathscr{M}$ содержится в конечном параллельном слое $\{x : a < x_{n+1} < b\}$ для некоторых a и b. Пусть число b выбрано минимально возможным. Так как $\mathscr{M}$ собственно вложенная, можно выбрать последовательность ρ_k, удовлетворяющую свойству $x_{n+1}(\rho_k) \to b$ при $k \to \infty$. Заметим, что для такой последовательности выполняется $|\rho_k| \to \infty$ в силу собственности вложения $\mathscr{M}$. Как и выше, заключаем, что последовательность точек центральной проекции $\rho_k/|\rho_k|$ стремится к K, а это значит, что $\rho_k \in \mathscr{M}_\epsilon$ для больших k. Полученное противоречие с компактностью $\mathscr{M}_\epsilon$ доказывает теорему полностью.

4. Примеры звездных минимальных поверхностей

4.1. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n$ с координатами $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ и будем искать минимальную поверхность $\mathscr{M}$, задаваемую в этих координатах уравнением $|y| = f(|x|)$, где $f(t)$ — четная дважды дифференцируемая функция, такая, что $f(0) = 1$. Легко видеть, что условие звездности поверхности $\mathscr{M}$ означает, что график кривой $\tau = f(t)$ должен быть звездной кривой относительно начала координат в плоскости переменных $(t;\tau)$. Положим

$$F(x, y) = |y| - f(|x|).$$

Тогда $\mathscr{M}$ задается уравнением в неявной форме $F(x, y) = 0$ и, как было замечено в пункте 2, F удовлетворяет уравнению $L[F] = 0$.

Будем считать, что индексы i, j принимают значения от 1 до n, а индексы α, β — от $n + 1$ до $2n$. Тогда для частных производных имеем

$$F'_i = -f' \frac{x_i}{|x|}, \qquad F'_\alpha = \frac{y_\alpha}{|y|},$$

и

$$F''_{ij} = -f' \frac{\delta_{ij} x_i x_j - |x|^2}{|x|^3} - f'' \frac{x_i x_j}{|x|^2}, \qquad F''_{i\alpha} = 0, \qquad F''_{\alpha\beta} = \frac{\delta_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta - |y|^2}{|y|^3}.$$

После подстановки в уравнение $L[F] = 0$ и учитывая,что $|y| = f(|x|)$, получаем

$$\frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{af'}{z} = \frac{a}{f}, \tag{129}$$

где $z = |x|$.

Будем говорить, что функция $f(z) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ *звездная*, если ее график является звездной кривой относительно начала координат.

Теорема 6.9. *Пусть a — фиксированное число такое, что*

$$a > a_0 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}. \tag{130}$$

Тогда существует звездное аналитическое на всей вещественной прямой решение $f(z)$ уравнения (129) такое, что

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

4.2. Проанализируем необходимые условия того, чтобы функция $f(z)$ была бы звездным решением (129); под решением (129) будем понимать функцию $f(z)$, для которой выполняются условия $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Лемма 6.1. *Если $f(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемое звездное решение (129), то при $z > 0$: $f'(z) > 0$.*

Доказательство. Вычисляя вторую производную по правилу Лопиталя, имеем:

$$f''(z) = \frac{a}{f(0)} - a \lim_{z \to +0} \frac{f'(z)}{z} = a - af''(0),$$

откуда получаем $f''(z) = \frac{a}{a+1} > 0$. Следовательно, ввиду $f'(0) = 0$, в некоторой правой окрестности точки 0 производная $f'(z)$ строго возрастает. Пусть $f'(z)$ обращается в нуль в некоторой точке. Обозначим через $z_0 > 0$ нижнюю грань таких нулей. Ясно, что $f'(z_0) = 0$ и $f'(z) > 0$ при $0 < z < z_0$. Подставляя в уравнение (129) и учитывая положительность $f(z)$ на последнем интервале, будем иметь

$$f''(z_0) = \frac{a}{f(z_0)} > 0,$$

что влечет наличие локального минимума $f(z)$ в точке z_0. Последнее противоречит условию строго возрастания $f(z)$ на промежутке $(0; z_0)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 6.3. *При $z \geq 0$ звездное решение $f(z)$ является строго возрастающей функцией, в частности, $f(z) > 1$.*

Далее мы приводим уравнение (129) к автономной системе. Рассмотрим замену переменных

$$f(z) = z \cdot w(\ln z), \qquad t = \ln z. \tag{131}$$

Тогда $f'_z = w + w'$, $f''_{zz} = (w' + w'')/z$. Подставляя эти выражения в (129), получаем

$$\frac{w'' + w'}{1 + (w' + w)^2} + a(w + w') = \frac{a}{w}.$$

После преобразований получим

$$w'' = -w' + \frac{a}{w}\big(1 + (w + w')^2\big)\big(1 - w(w + w')\big) \tag{132}$$

Введем переменную $v = w'$. Тогда (132) перепишется в виде

$$\begin{cases} w' = v \\ v' = -v + \frac{a}{w}\big(1 + (w + v)^2\big)\big(1 - w(w + v)\big). \end{cases} \tag{133}$$

4.3. Проанализируем условия на решение системы $w(t)$, при которых (131) описывало бы звездное решение уравнения (129). Для краткости такие решения автономной системы (133) также будем называть звездными.

В силу леммы 6.1, будем рассматривать только те решения (133), которые расположены в полуплоскости $W_0 = \{w > 0\}$.

Лемма 6.2. *Данное решение $w(t)$ является представлением звездного решения в координатах (131) тогда и только тогда, когда соответствующая интегральная кривая содержится в полуплоскости*

$$W^- = \{(w; v) : v < 0\}$$

фазового пространства $\mathbf{R}^2(w; v)$.

Доказательство. Заметим, что, ввиду начального условия (129), выполнено $\lim_{z\to+0} \frac{f(z)}{z} = +\infty$. Поэтому,

$$\lim_{t\to-\infty} w(t) = +\infty. \tag{134}$$

С другой стороны, звездность решения $f(z)$ равносильна условию строгой монотонности дроби $f(z)/z$ как функции z, что, в свою очередь, эквивалентно строгому убыванию $w(t)$. Следовательно, вдоль такой интегральной кривой γ выполнено: $v(t) = w'(t) \leq 0$, то есть кривая остается в замкнутой полуплоскости. Покажем, что последнее неравенство является строгим.

Так как не существует стационарных звездных решений (133), достаточно показать, что кривая γ не касается граничной прямой полуплоскости W^-. Обозначим через $F(w; v)$ поле касательных векторов системы (133). Тогда вдоль прямой $v = 0$ выполнено равенство

$$F(w; 0) = (0; \frac{a}{w}(1 + w^2)(1 - w^2)),$$

и, следовательно, всюду вне состояний равновесия $w = \pm 1$ поле $F(w; 0)$ ортогонально прямой $v = 0$, что доказывает наше предположение.

Наконец, заметим, что условие строгой отрицательности v вдоль интегральной траектории гарантирует, в силу (133), строгое убывание $w(t)$. Лемма доказана полностью.

Лемма 6.3. *Если $w(t)$ — некоторое решение задачи (129) такое, что $w > 1$ всюду, то $w(t)$ — звездное решение.*

Доказательство. Предположим, что найдется некоторая точка t_0, в которой $w'(t_0) = 0$. Подставляя в (132) и, принимая во внимание условие леммы, будем иметь

$$w''(t_0) = \frac{a}{w(t_0)}\big(1 + w^2(t_0)\big)\big(1 - w^2(t_0)\big) < 0.$$

Следовательно, t_0 — локальный максимум функции $w(t)$.

С другой стороны, в силу (134) на промежутке $(-\infty; t_0)$ должен существовавть глобальный минимум функции $w(t)$. Пусть такой точкой будет t_1, $t_1 < t_0$. Но тогда $w'(t_1) = 0$, и, по доказанному выше, $w''(t_1) < 0$, что противоречит условию минимальности $w(t)$ в t_1.

Следовательно, учитывая (134), $w'(t) < 0$ при всех t и по лемме 6.1 звездность решения доказана.

4.4. Доказательство основной теоремы данного параграфа будет следовать из справедливости следующей леммы.

Лемма 6.4. *Звездные решения системы ((133)) существуют тогда и только тогда, когда*

$$a \geq a_0 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что система (133) имеет единственное в полуплоскости W_0 состояние равновесия S: $w = 1$, $v = 0$, которое соответствует функции $f(z) = z$ и, следовательно, не будет звездным решением для уравнения (129).

Для дальнейшего качественного исследования системы (133) заметим, что фазовый портрет семейства интегральных траекторий нелинейной автономной системы диференциальных уравнений с точностью до диффеоморфизма окрестности невырожденного состояния равновесия совпадает с портретом линеаризованной системы (см., например, [5]). В окрестности особой точки S линеаризация системы (133) имеет вид

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ v_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4a & -2a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ v_1 \end{pmatrix},$$

где $w_1 = w - 1$, $v_1 = v$ — локальные координаты в точке S, откуда уравнение для характеристических чисел

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -4a & -2a-1-\lambda \end{pmatrix} = 0, \qquad \lambda^2 + (2a+1)\lambda + 4a = 0. \tag{135}$$

Отметим, что при $a > 0$ последнее уравнение не имеет нулевых корней и поэтому точка S невырожденная. Более того, так как $4a > 0$, то оба корня имеют одинаковый знак вещественной части и, ввиду $2a + 1 > 0$, оба отрицательны. Таким образом, точка S является либо устойчивым фокусом (если дискриминант $D = 4a^2 - 12a + 1$ отрицателен), либо устойчивым узлом (если $D \geq 0$).

Заметим далее, что граница полуплоскости W_0 является особой прямой для системы (133) и, тем самым, любая интегральная траектория, начинающаяся в точке из полуплоскости W_0, остается там же. Учитывая отсутствие других состояний равновесия в W_0 кроме S, любая интегральная траектория, начинающаяся в точке из W_0, необходимо стремится к устойчивому состоянию равновесия S.

Предположим, что $0 < a < a_0 = \frac{2\sqrt{2}+3}{2}$. Тогда дискриминант уравнения (135) отрицателен и характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm i\sqrt{-D}}{2}$$

с ненулевыми реальными частями. Эта ситуация соответствует невырожденному устойчивому фокусу в точке S. Пусть найдется звездная интегральная траектория γ. Тогда вблизи S она имеет топологический тип логарифмической спирали и, тем самым, локальные координаты w_1 и v_1 бесконечно много раз изменяют свой знак при стремлении γ к S. Последнее противоречит лемме 6.2, что и доказывает наше утверждение.

Предположим теперь, что выполнено условие (130). Из приводимых далее рассуждений будет видно, что искомое звездное решение системы (133) соответствует сепаратрисе седла, которое находится в бесконечно удаленной точке.

Введем следующую замену переменных

$$\begin{cases} x = \frac{w-1}{w+1} \\ y = \frac{1-w-v}{1+w+v} \end{cases} \tag{136}$$

Тогда уравнения (133) могут быть переписаны как

$$\frac{dy}{dx} = 2a\,\frac{y-x}{y+x}\cdot\frac{1+y^2}{1-x^2}.$$

Соответствующая автономная система дифференциальных уравнений принимает вид

$$\begin{cases} x' = -(y+x)(1-x^2) \equiv P(x;y) \\ y' = -2a(y-x)(1+y^2) \equiv Q(x;y) \end{cases} \tag{137}$$

Заметим, что функции обратного перехода

$$w = \frac{1+x}{1-x}, \qquad v = -2\frac{x+y}{(1+y)(1-x)} \tag{138}$$

определены всюду вне прямых $\{y=-1\}$, $\{x=1\}$, которые соответствуют бесконечно удаленным прямым $w+v=\pm\infty$ и $w=\pm\infty$ на фазовой плоскости $\mathbf{R}^2(w;v)$. Более того, замена (138) имеет ненулевой якобиан всюду в своей области определения. Таким образом, интегральные траектории системы (137), не пересекающие эти особые линии, переходят в некоторые интегральные траектории (133).

Отметим простейшие свойства системы (137).

(i) Если $(x(t),y(t))$ — решение (137), то $(-x(t),-y(t))$ и $(1/x(t),1/y(t))$ — также решение (137).

(ii) Конечные состояния равновесия системы (137) суть три точки $A(0;0)$, $B(1;1)$ и $C(-1;-1)$. Все эти точки являются невырожденными простыми состояниями равновесия.

(iii) Прямые $x=\pm1$ вне точек B и C являются интегральными кривыми системы (137) (особыми по отношению к системе (133)).

В силу лемм 6.2 и 6.3, достаточно доказать существование целой интегральной траектории системы (137), которая остается внутри квадранта $\{w>1,\ v<0\}$ после замены (138). Непосредственной проверкой устанавливается, что для этого достаточно, например, чтобы в новых координатах некоторая интегральная траектория оставалась в полуполосе $\{y>0,\ 0<x<1\}$.

Особая точка $A(0;0)$. Это единственное состояние равновесия системы (137), имеющее конечный прообраз $S=(1,0)$ в исходном фазовом пространстве $\mathbf{R}^2(w;v)$. Как известно, невырожденная замена координат не меняет характера состояния равновесия, поэтому точке A соответствует узел. Действительно, в этой точке линеаризация системы (137) принимает вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2a & -2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

откуда находим уравнение для характеристических чисел

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2a & -2a-\lambda \end{pmatrix} = 0, \qquad \lambda^2+(2a+1)\lambda+4a=0. \tag{139}$$

В силу нашего предположения, дискриминант положителен и характеристическое уравнение имеет два корня одинаковых знаков

$$\lambda_1 = \frac{-(2a+1)+\sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-(2a+1)-\sqrt{D}}{2}$$

Эта ситуация соответствует невырожденному устойчивому узлу в точке A. Стандартными методами находим, что характеристические направления в точке A, отвечающие λ_i параллельным прямым

$$y = k_i x, \quad k_i = |\lambda_i| - 1.$$

Заметим для дальнейшего, что

$$k_2 > k_1 = \frac{2a-1-\sqrt{D}}{2} = \frac{8a}{2((2a-1)+\sqrt{(2a+1)^2-16a})} > \frac{8a}{2\cdot 4a} = 1. \tag{140}$$

Особая точка B(1;1). В силу отмеченной выше в пункте (i) симметрии семейства интегральных траекторий, достаточно исследовать поведение системы в точке B.

Линеаризованная система (137) в этой точке принимает вид

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x(B) & P'_y(B) \\ Q'_x(B) & Q'_x(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4a & -4a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

где $\xi = x-1$, $\eta = y-1$. Характеристические числа этой системы $\mu_1 = 4$ и $\mu_2 = -4a < 0$ показывают, что для любого положительного a точка B является невырожденным седлом. Его характеристические направления соответственно: $\pm(a+1;a)$ (отталкивающее) и $\pm(0;1)$ (притягивающее).

Обозначим через σ сепаратрису, выходящую из седла B с направлением $(-a-1;-a)$ и покажем, что она лежит строго внутри треугольника $T = \{0 < x < 1,\ x < y < k_1 x$ (заметим, что в силу (140) $k_1 > 1$).

Пусть $D(1;k_1)$ — точка пересечения прямой $y = k_1 x$ и $x = 1$ (см. рис. 6.1). По нашему выбору, вблизи точки B кривая σ имеет тангенс угла наклона $\frac{a}{a+1} < 1$, поэтому сепаратриса σ в окрестности B входит в T. Покажем, что σ входит в A, оставаясь внутри T. Так как внутри треугольника T нет состояний равновесий системы (137), то для этого достаточно доказать, что векторное поле системы направлено трансверсально вовнутрь треугольника относительно его сторон AB и AD. Действительно, сторона BD является частью интегральной траектории системы и, по теореме единственности, не может пересекаться с сепаратрисой σ вне точки B.

Рассмотрим луч L_k: $\{y = kx, x > 0\}$ для некоторого положительного k. Тогда тангенс угла наклона векторного поля $(P;Q)$ вдоль L_k равен

$$\mathrm{tg}\alpha = \left.\frac{Q(x;y)}{P(x;y)}\right|_{L_k} = 2a\frac{kx-x}{kx+x}\cdot\frac{1+k^2x^2}{1-x^2} = 2a\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1+k^2x^2}{1-x^2}.$$

Вдоль стороны AB: $k = 1$, $0 < x < 1$ выполнено $\operatorname{tg}\alpha = 0$. С другой стороны $P(x;y) < 0$ всюду в треугольнике T. Следовательно, поле $(P;Q)$ направлено по горизонтали внутрь треугольника вдоль стороны AB.

Пусть $k = k_1$. Тогда, учитывая, что $k_1 > 1$, имеем оценку:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2a\frac{k_1-1}{k_1+1}\cdot\frac{1+k_1^2x^2}{1-x^2} > 2a\frac{k_1-1}{k_1+1} = k_1.$$

Принимая во внимание отрицательность первой координаты векторного поля, заключаем, что векторное поле направлено внутрь T вдоль стороны AD.

Таким образом, получаем, что σ является интегральной траекторией, идущей из B в A, оставаясь строго внутри угла DAB. Более того, сепаратриса как инвариантное многообразие наследует гладкость правой части системы (137), а, следовательно, является действительной аналитической кривой в окрестности точки B. Аналитически продолжить (используя теорему единственности) сепаратрису σ через седло B можно с помощью второго свойства в пункте (i). Таким образом, лемма 6.4, а вместе с ней и теорема 6.9 доказаны полностью.

4.5. Докажем справедливость асимптотического разложения (95). С этой целью заметим, что асимптотическое поведение сепаратрисы σ вблизи точки $A(0;0)$ (при $t\to+\infty$) соответствует асимптотическому поведению искомого звездного решения $f(z)$ при $z\to+\infty$. Как было установлено выше, вблизи A траектория σ имеет вид кривой, касательной характеристическому направлению $(1,k_1)$. Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{y(t)}{x(t)} = k_1, \quad \text{где} \quad \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0.$$

Переходя к координатам (v,w), из (138) при $t\to+\infty$ получаем

$$w(t) \equiv \frac{1+x(t)}{1-x(t)} = 1 + 2x(t) + o\left(x(t)\right),$$

$$v(t) \equiv -2\frac{x(t)+y(t)}{(1+y(t))(1-x(t))} = -2x(t)(1+k_1) + o\left(x(t)\right),$$

откуда

$$w(t) = 1 - \frac{1}{1+k_1}v(t) + o\left(v(t)\right), \ t\to+\infty.$$

Наконец, замечая, что $v(t) = w'(t)$, приходим к асимптотическому разложению

$$w'(t) = (1+k_1)(1-w(t)) + o(w'(t)),$$

или $\lim_{t\to+\infty}\frac{1-w(t)}{w'(t)} = \frac{1}{1+k_1}$. Отсюда находим, что

$$w(t) = 1 + ce^{-(1+k_1)t} + o\left(e^{-(1+k_1)t}\right)$$

для некоторого c.

Так как $w(t) > 1$ всюду, то $c > 0$. Подставляя найденное разложение в (131), получим

$$f(z) = z + cz^{-k_1} + o\left(z^{-k_1}\right), \ z\to+\infty.$$

В обозначениях теоремы 6.1 имеем $a = k-1$ и, ввиду (140),

$$k_1 = \frac{2k-3-\sqrt{4k^2-20k+17}}{2}.$$

Учитывая, что $f(z)$ — профильная функция искомой звездной поверхности, заключаем, что теорема доказана полностью.

$\square$

Литература

[1] Аллард У. (Allard W. K.) On the first variation of a varifold // Ann. of Math. 1972. V. 95. P. 417-491.
[2] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям: Пер. с англ.–М.: Мир, 1969.
[3] Андерсон М. (Anderson M. T.) The compactification of a minimal submanifold in Euclidean space by the Gauss map // Preprint. 1985.
[4] Бакельман И. Я., Вернер А. П., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию "в целом".– М.: Наука. 1973.
[5] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.– М.: Наука. 1990.
[6] Бернштейн С.Н. (Bernstein S.N.) Sur un théoréme de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique // Comm. Soc. Math. de Kharkov. 1915-1917. V. 15. N 2. C. 39-45.
[7] Бомбьери Э., Де Джорджи Э., Джусти Э. (Bombieri E., De Giorgi E., Giusti E.) Minimal cones and the Bernstein problem // Invent. Math. 1969. V. 7. C. 243-268.
[8] Борисенко А.А. Теорема Лиувилля для специальных лагранжевых многообразий // Матем.заметки. 1992. V. 52. C.22-25.
[9] Бринк Л., Энно Н. Принципы теории струн: Пер. с англ.–М.: Мир, 1991.
[10] Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства.– Л.: Наука, 1980.
[11] Бэрд П., Гудмундсон С. (Baird P., Gudmundsson S.) p-harmonic maps and minimal submanifolds // Math. Ann. 1992. V. 294. P. 611-624.
[12] Веденяпин А. Д., Миклюков В. М. Внешние размеры трубчатых минимальных гиперповерхностей // Мат. сб. 1986. Т.131, N2. С. 240-250.
[13] Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям: Пер. с англ.–М.: ГИФМЛ, 1960.
[14] Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: Пер. с англ.–М.: Наука, 1989.
[15] Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.– М.: Наука, 1983.
[16] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. Т. 1.– Пер. с англ.–М.: Мир. 1990.
[17] Григорьян А.А. (Grigor'yan A.) Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the brownian motion on Riemannian manifolds // Preprint. Imperial College, London. 1997.
[18] Грёч (Grötzsch H.), Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung, I, II, Ber. Sächs. Akad. Leipzig // 1929. V. 81. P. 51-86.
[19] Диеркс У. (Dierkes U.) Maximum principles and nonexistence results for minimal submanifolds // Manuscr. Math. 1990 V.69. P. 203-218.
[20] Джонсон К.Р., Хорн Р.А. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
[21] Джусти Э. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации: Пер. с англ.–М.: Мир, 1989.
[22] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1986.
[23] Еномото К. (Enomoto K.) Compactification of submanifolds in Euclidean space by the inversion // Advanced Stud. in Pure Math. 1993. V. 22. P. 1-11.
[24] Зорич В. А., Кессельман В. М. О конформном типе риманова многообразия // Фукцион. анализ и его приложения. 1996. Т. 30, вып. 2. С. 40-55.
[25] Йоргенс К. (Jörgens K.) Über die Lösungen der Differentialgleichnung $rt - s^2 = 1$ // Math. Ann. 1954. V. 127. C.130-134.
[26] Калахан М., Хоффман Д., Миикс У. (Callahan M., Hoffman D., Meeks W. H.) Embedded minimal surfaces with an infinite number of ends // Invent. math. 1989. V. 96. P. 459-505.
[27] Калаби Э. (Calabi E.) Improper affine hyperspheres of convex type and a Mich. Math. J. 1958. V. 5. C.105-126.
[28] Калаби Э. (Calabi E.) Quelque application de l'analise complex and surfaces d'aire minima // Topics in Complex Manifolds.: Les Presses de l'Universite de Montreal, 1968.
[29] Касуе А. (Kasue A.) Gap theorems for minimal submanifolds of Euclidean space // J. Math. Soc. Japan, 1986. V. 38. P. 473-492.

[30] Касуе А., Шугахара К. (Kasue A., Sugahara K.) Gap theorems for certain submanifolds of Euclidean spaces and hyperbolic space forms // Osaka. J. Math. 1987. V. 24. P. 679-704.

[31] Клячин В. А. Оценка протяженности трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, С. 201-205.

[32] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т.2.: Пер. с англ.–М.: Наука, 1981.

[33] Кондратьев В.А. О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений // Труды Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 293-318.

[34] Корон Дж., Гулливер Р. (Coron J.-M., Gulliver R.) Minimizing p-harmonic maps into spheres // J. Reine Angew. Math. 1989. V. 401. P. 82-100.

[35] Крёгер П. (Kröger P.) On the spectral gap for compact manifolds // J. Diff. Geom. 1992. V. 36. P. 315-330.

[36] Куратовский К. Топология.– Пер. с англ.–М.: Мир, 1969.

[37] Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.

[38] Лейхтвейс К. Выпуклые множества.- Пер. с англ.–М.: Наука, 1984.

[39] Мак-Лейн Г. Асимптотические значения голоморфных функций.– Пер. с англ.–М.: Мир, 1966.

[40] Маркус М., Минк М., Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.

[41] Мазья В.Г. Пространства Соболева и обобщенные функции. М.: Наука, 1985.

[42] Миклюков В. М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности // Мат. сб. 1979. Т. 108, N 2. С. 268-289.

[43] Миклюков В. М. О некоторых свойствах трубчатых в целом минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^n$ // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, N 3. С. 549-552.

[44] Миклюков В. М. Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображениях с ограниченным искажением // Матем. сб. Т. 111, N 1. 1980. С. 42-66.

[45] Миклюков В. М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер. Матем. 1996. Т. 60, N 4. С. 111-158.

[46] Миклюков В. М., Ткачев В. Г. О строении в целом внешне полных минимальных поверхностей в $\mathbf{R}^3$ // Изв. вуз. Математика. 1987. Т. 31. С. 30-36.

[47] Миклюков В. М., Ткачев В. Г. Некоторые свойства трубчатых минимальных поверхностей произвольной коразмерности // Мат. сб. 1989. Т. 180, N 9. С. 1278-1295.

[48] Миклюков В. М., Ткачев В. Г. (Miklyukov V. M., Tkachev V. G.) Denjoy-Ahlfors theorem for harmonic functions on Riemannian manifolds and external structure of minimal surfaces // Commun. in Anal. and Geom. 1996. V. 4, N 4. P. 547-587.

[49] Милнор Дж., Уоллес А. (Milnor J., Wallace A.) Дифференциальная топология.– Пер. с англ.–М.: Мир, 1972.

[50] Милнор Дж. (Milnor J.) On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic // Amer. Math. Monthly. 1977. V. 84, N 1. P. 43-46.

[51] Морс М. (Morse M.) Topological methods in the theory of functions of a complex variable. Princeton, 1947.

[52] Ниче Й. (Nitsche J. C. C.) A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates // J. of Math. and Mech. 1962. V. 11. P. 293-302.

[53] Ниче Й. (Nitsche J. C. C.) Lectures on minimal surfaces. Vol 1.: Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1989.

[54] Оссерман Р. Минимальные поверхности // Усп. мат. наук. 1967. Т. XXII, Вып. 4. С. 55-136.

[55] Оссерман Р. (Osserman R.) The isoperimetric inequality // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V. 84. N 6. P. 1182-1238.

[56] Оссерман Р. (Osserman R.) The minimal surface equation // Sem. Nonlinear Part. Diff. Equat., New-York. 1984. C. 237-259.

[57] Оссерман Р., Шиффер М. (Osserman R., Schiffer M.) Double connected minimal surfaces // Arc. Rat. Mech. and Anal. 1975. V. 58, N 4. P. 285-306

[58] Pogorelov A.V. Geom.Dedic. 1972. V. 1. C.33-46.

[59] Погорелов А.В., Многомерное уравнение Монжа-Ампера. М.: Наука, 1988.

[60] Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением.– Новосибирск: Наука, 1982.

[61] Решетняк Ю. Г. О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. матем. ж. 1969. N 5. С. 1109-1138.

[62] Решетникова И. М., Ткачев В. Г. О гауссовом образе минимальных трубок с ненулевым углом вектора потока // Вестн. ВолГУ. 1996. Т. 1. Сер. Математика. С. 35-40.

[63] Риман Б. (Riemann B.) Qeuvres Mathematiques de Riemann.: Paris. Gautheriers-Villars, 1898.

[64] Розенберг Х., Тоубиана Э. (Rosenberg H., Toubiana E.) A cilindrical type complete minimal surface in a slab of $\mathbf{R}^3$ // Bull. Sc. Math. 1987. V. 3. P. 241-245.

[65] Саймон Л. (L. Simon) A Holder estimate for quasiconformal mappings between surfaces in Euclidean space, with application to graphs, having quasiconformal Gauss map // Acta math. 1977. V. 139. P. 19-51.

[66] Саймон Л. (L. Simon) Equation of mean curvature type in two independed variables // Pacif. J. Math. 1977. V. 69, N 1. P. 245-268.

[67] Саймон Л. (Simon L.) Entire solutions of the minimal surface equation // J. Diff. Geom. 1989. V. 30. C. 643-688.

[68] Саймон Л. (Simon L.) Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations // Geometry from Pac. Rim., Berlin – New York. de Gruyter, 1997. C. 343-362.

[69] Спрингер Дж. (Springer J.) Введение в римановы поверхности.– Пер. с англ.–М.: Мир, 1960.

[70] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии: Пер. с англ.–М.: Мир, 1970.

[71] Тейхмюллер (TeichmÏler) Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung // Deutsche Math. 1938. V. 3. P. 621-678.

[72] Ткачев В. Г. О некоторых свойствах средней кривизны графиков над областями в R^n // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314, N 1. С. 140-143.

[73] Ткачев В. Г. Некоторые оценки средней кривизны непараметрических поверхностей, заданных над областями в $\mathbf{R}^n$ // Укр. геом. сборник. 1992. Т. 35. С. 135-150.

[74] Ткачев В. Г. Внешние оценки радиуса обхвата эллиптических гиперповерхностей Волгогр.: Деп. в ВИНИТИ. 1992. N 2031–И 92. 17 С.

[75] Ткачев В. Г. Точная оценка снизу для первого собственного значения на минимальной поверхности // Мат. заметки. 1993. Т. 54, N 2. С. 99-107.

[76] Ткачев В. Г. (Tkachev V. G.) Finiteness of the number of ends of minimal submanifolds in Euclidean space // Manuscr. Math. 1994. V. 82. P. 313-330.

[77] Ткачев В. Г. Звездные минимальные поверхности и проблема Саймона// Сб. научн. статей, Вып. 4.– Вогоград: Издательство ВолГУ, 1996, С. 15-21

[78] Ткачев В. Г. Заметка о теореме Йоргенса-Калаби-Погорелова // Докл. АН России. 1995. Т. 340, N 3. С. 317-318.

[79] Ткачев В. Г. Минимальные гиперповерхности являющиеся графиками относительно сферы // Международ. конф. по геом. в целом, Черкассы, 11-16 сент. 1995.

[80] Ткачев В. Г. (Tkachev V. G.) External geometry of p-minimal surfaces // Geometry from Pac. Rim., Berlin – New York. de Gruyter, 1997. C. 363-376.

[81] Ткачев В. Г. (Tkachev V. G.) Minimal tubes and coefficients of holomorphic functions in annulus // Bull. de la Soc. Sci. de Lódź., Recherches sur deform., Paris. 1995. V. XX. P. 19-26.

[82] Ткачев В. Г. Теорема о радиусе просвета минимальной поверхности // Мат. заметки. 1996. Т. 59, N 6. С. 909-913.

[83] Ткачев В. Г. (Tkachev V. G.) Starlike minimal hypersurfaces // Abstr. of Conf. on Differ. Geometry, Budapest. July 27-30. 1996.: Budapest. 1996. P. 116.

[84] Ткачев В. Г. Минимальные трубки конечной интегральной кривизны // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. N 1. 181-190.

[85] Уайт Б. (White B.) Complete surfaces of finite total curvature // J. Diff. Geom. 1987. V. 26. P. 315-326.

[86] Уайтсмен А., Ксавье Ф. (Weitsman A., Xavier F.) Some function theoretic properties of the Gauss map for hyperbolic complete minimal surfaces // Mich. Math. J. 1987. V. 34. P. 275-283.

[87] Фанг И., Миикс В. (Fang Y., Meeks W.H.) Some global properties of complete surfaces of finite topology in $\mathbf{R}^3$ // Topology. 1991. V.30, N1. P. 9-20.

[88] Федерер Г. Геометрическая теория меры: Пер. с англ.–М.: Наука, 1987.

[89] Финн Р. (Finn R.) On problem of type, with application to elliptic partial differential equations // J. Rat. Mech. Anal. 1954. V. 3. P. 789-799.

[90] Фоменко А. Т. Вариационные методы в топологии.– М.: Наука, 1982.

[91] Фугледе Б. (Fuglede B.) Extremal length and functional completetion // Acta Math. 1957. V. 98, N 3-4. P. 171-219.

[92] Харди Г.Г., Литлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства.– М.: ГИИЛ, 1948.

[93] Хардт Р. (Hardt R.) Singularities of harmonic maps // Bull. Amer. Math. Soc. 1997. V. 34, N 1. P. 15-34.

[94] Хенойнен Й., Килпелайнен Т., Мартио О. (J. Heinonen, T. Kilpelainen, O. Martio) Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford Univ. Press, London, 1993.

[95] Хирш М. Дифференциальная топология: Пер. с англ.–М.: Мир, 1979.

[96] Хоффман Д. (Hoffman D.) Lower bounds on the first eigenvalue of the Laplacian operator of Riemannian submanifolds // Minimal Submanifolds and geodesics. Kaigai Publ. Tokyo. 1978. P. 61-73.

[97] Хоффман Д., Миикс У. (Hoffman D., Meeks W. H.) Embedded minimal surfaces of finite topology // Ann. of Math. 1990. V. 131. P. 1-34.

[98] Хейнман У., Кеннеди П. Субгармонические функции: Пер. с англ.–М. Мир, 1980.

[99] Циммер В. (Ziemer W. P.) Extremal length as capacity // Mich. Math. J. 1970. V. 17 P. 117-128.

[100] Чен К. (Chen Q.) On the volume growth and the topology of complete minimal submanifolds of a Euclidean space // J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 1995. V. 2., C.657-669.

[101] Ченг С., Яо С. Т. (Cheng S.Y., Yau S.T.) Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. **28**(1975), P. 201-228.

[102] Чирка Е.М. Комплексные аналитические множества.– М.: Наука, 1985.

[103] Шиффман М. (Schiffman M.) On surfaces of stationary area bunded of two circles, or convex curves, in parallel planes // Ann. of Math. 1956. V. 63. P. 77-90.

[104] Шоен Р. (Schoen R. M.) Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces // J. Diff. Geom. 1983. V. 18. P. 791-809.

[105] Энгелькинг Р. Общая топология. М: Мир, 1986.