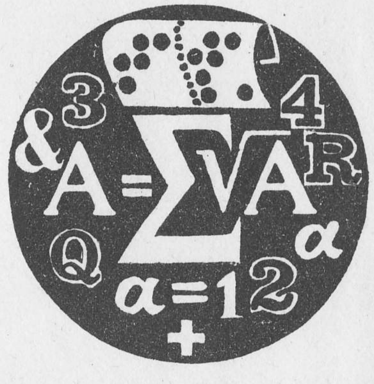
12 к.

13

МАТЕРИАЛЫ XXII ВСЕСОЮЗНОЙ НАУЧНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

«Студент и научно-технический прогресс»



МАТЕМАТИКА

В.Г.Ткачёв

Волгоградский университет

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЧЖЕНЯ И ЯО

В работе Чженя и Яо [I] получен следующий результат, обобщающий классическую теорему Бернштейна для решений уравнения минимальных поверхностей.

Пусть $H(t)$ – знакопостоянная на $\mathbb{R}^1$ функция и выполнено условие

$$H'(t)\geqslant 0. \tag{I}$$

Тогда всякое целое решение $f=f(x_1,\ x_2)$ уравнения

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\sqrt{1+|\nabla f|^2}\right)=H(f) \tag{2}$$

является линейной функцией.

Доказательство основано на разрабатываемой авторами технике оценок скорости роста объема геодезического шара на римановом многообразии.

В заметке будет показано, что этот результат является следствием теоремы Бернштейна и некоторого простого утверждения, приводимого ниже.

Введем необходимые определения. Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$, и пусть $A_i(x,\xi)$ $(i=1,2)$ – бэровские функции, определенные при каждом $x=(x_1,x_2)\in D$ и при любых значениях $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, причем выполнены соотношения

а) $\sum\limits_{i=1}^{2}\xi_i A_i(x,\xi)\geqslant 0,$

б) $\sum\limits_{i=1}^{2}A_i^2(x,\xi)\leqslant 1.$

Будем говорить, что локально липшицева в области D функция $f(x)$ является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{d}{dx_i}A_i(x,\xi)=H(f), \tag{3}$$

если для любой локально липшицевой финитной в области D функции $\varphi(x)$ справедливо равенство

$$\iint\limits_{D}\sum_{i=1}^{2}A_i(x,\nabla f)\,\varphi_{x_i}\,dx_1dx_2=-\iint\limits_{D}\varphi H(f)\,dx_1dx_2. \tag{4}$$

Очевидно, что в случае, когда функции A_i и $f(x)$ достаточно гладкие, функция $f(x)$ является решением уравнения (3) в обычном смысле.

Далее, для пары непересекающихся замкнутых множеств P, Q в $\mathbb{R}^2$ определим ёмкость конденсатора (P,Q) как

$$cap(P,Q)=\inf\iint\limits_{\mathbb{R}^2}|\nabla\varphi|^2dx_1dx_2,$$

где нижняя грань берется по всем локально липшицевым функциям φ таким, что $\varphi\equiv 1$ на P и $\varphi\equiv 0$ на Q.

Т е о р е м а. Пусть $H(t)$ – функция, удовлетворяющая условию (I), и $f(x)$ – решение уравнения (3) в области D. Тогда для любого компакта $F\subset D$ выполняется неравенство

$$\iint\limits_{F}H^2(f)\,dx_1dx_2\leqslant 4\,cap(F,\mathbb{R}^2\setminus D). \tag{5}$$

Доказательство основывается на следующих соображениях.

Пусть $\psi(x)$ – локально липшицева функция, равная I на F и финитная в D. Тогда, очевидно, $\varphi=\psi^2H(f)$ – функция того же класса. По определению решения уравнения (3) мы имеем

$$\iint\limits_{D}\sum_{i=1}^{2}A_i(x,\nabla f)\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi^2H(f))\,dx_1dx_2=-\iint\limits_{D}\psi^2H^2(f)\,dx_1dx_2.$$

Учитывая условие (I) на функцию $H(t)$ и свойство а), приходим к соотношению:

$$-2\iint\limits_{D}\psi H(f)\sum_{i=1}^{2}A_i(x,\nabla f)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx_1dx_2\geqslant\iint\limits_{D}\psi^2H^2(f)\,dx_1dx_2.$$

Отсюда, используя б), получаем:

$$2\iint\limits_{D}|\psi H(f)|\cdot|\nabla\psi|\,dx_1dx_2\geqslant\iint\limits_{D}\psi^2H^2(f)\,dx_1dx_2$$

и с помощью неравенства Коши заключаем, что

$$\iint\limits_{D}\psi^2H^2(f)\,dx_1dx_2\leqslant 4\iint\limits_{D}|\nabla\psi|^2dx_1dx_2. \tag{6}$$

Учитывая, что $\psi\equiv 1$ на F, и переходя в (6) к нижней грани по ψ, будем иметь нужное неравенство.

В качестве применения этой теоремы докажем теорему Чженя и Яо в несколько более сильном варианте, а именно – не предполагая знакопостоянства функции $H(t)$. С этой целью заметим, что в операторе (2) функции $A_i(x,\xi)$ имеют вид

$$A_i(x,\xi)=\xi_i\Big/\sqrt{1+\xi_1^2+\xi_2^2}\,,\quad i=1,2,$$

и очевидным образом удовлетворяют условиям а), б). При этом решения уравнения (3) понимаются в классическом смысле. Используя свойство параболичности конформного типа евклидовой плоскости, т.е. существование исчерпания пространства $\mathbb{R}^2$ открытыми множествами

$$F_i\supset F:\ F_i\subset F_{i+1},\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i=\mathbb{R}^2,$$

такого, что

$$\lim_{n\to\infty} cap(F,\mathbb{R}^2\setminus F_i)=0,$$

мы будем иметь для любого целого решения f уравнения (2) соотношение:

$$\iint_F H^2(f)\,dx_1\,dx_2=0.$$

В силу произвола в выборе F заключаем, что $H(f)=0$ всюду в $\mathbb{R}^2$. Используя классическую теорему Бернштейна, убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Литература

1. Cheng S.Y., Yau S.T. Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications.- Communs Pure and Appl. Math., 1975, v. 28, N 3, p. 333 - 354.

Д.В.Тураев
Горьковский университет

БИФУРКАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМЕ С ДВУМЯ ПЕТЛЯМИ СЕПАРАТРИС

Рассмотрим двупараметрическое семейство гладких динамических систем S_μ, заданных на двумерном гладком многообразии. Предполагается, что S гладко зависит от $\mu=(\mu_1,\mu_2)$ и S_0 имеет изолированное состояние равновесия O типа седло с двумя петлями сепаратрис, которые обозначим через Γ_1 и Γ_2. Предполагается также, что седловая величина $\sigma=\lambda_1+\lambda_2$ (где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения системы в точке O при $\mu=0$) отлична от нуля и отрицательна.

Существует окрестность точки O такая, что при всех достаточно малых μ уравнения векторного поля в этой окрестности имеют вид:

$$\dot\xi=\lambda_1(\mu)\xi+f(\xi,\eta;\mu)\xi,$$
$$\dot\eta=\lambda_x(\mu)\eta+g(\xi,\eta;\mu)\eta,$$

где $\lambda_1(\mu)<0$, $\lambda_2(\mu)>0$ – корни характеристического уравнения в точке O.

Уравнения устойчивых сепаратрис в этой окрестности будут $\eta=0$, а неустойчивых – $\xi=0$. Выберем достаточно малое $d>0$ и построим секущие к устойчивым сепаратрисам $\Pi_1:\xi=d$, $\Pi_2:\xi=-d$ и секущие к неустойчивым сепаратрисам $\Pi_3:\eta=d$, $\Pi_4:\eta=-d$. По условию при $\mu=0$ сепаратрисы образуют петли. Из этого следует, что при малых μ и малых ξ траектории, выходящие из точек (ξ,d) секущей Π_3 (или из точек $(\xi,-d)$ секущей Π_4), возвращаются в окрестность и пересекаются с секущей Π_1 (секущей Π_2). Таким образом, определены отображения последования $T_1:\Pi_3\to\Pi_1$ и $T_2:\Pi_4\to\Pi_2$. Примем, что T_1 и T_2 имеют вид:

$$T_1:\eta=\mu_1+A_1(\mu)\xi+\ldots,\quad T_2:\eta=\mu_2+A_2(\mu)\xi+\ldots$$