Неассоциативные алгебры: какая от них польза и какие применения?

Владимир Г. Ткачев

Linköping University

Предупреждение (Дисклеймер)

Я не ставлю целью

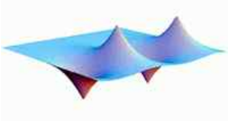
а) всем объяснить все про алгебры

б) заразить интересом заниматься алгебрами

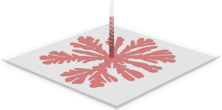
в) рассказать точнее про то, чем я занимаюсь более конкретно.

Но если рассказ будет слишком элементарным, то есть ссылка на мои более полные рассказы!

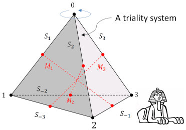
минимальные поверхности, теория потенциала



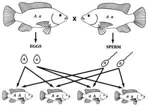
квадратурные области, теория моментов, задача Хеле-Шоу, мероморфный результант



Неассоциативные алгебры, проблема минимальных конусов, генетические алгебры, экзотические вязкие решения нелинейных УЧП (Надирашвили и Влэдуц)



Математические модели в популяционной динамике и инфекционных заболеваниях



Vladimir G. Tkachev

FÖLJ

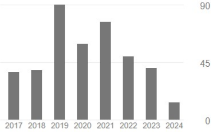
Linköpings Universitet
Verifierad e-postadress på liu.se - Startsida
Differential geometry   Minimal surfaces   Complex analysis   Non-associative algebras
Partial differential equations

TITEL	CITERAS AV	ÅR
Nonlinear elliptic equations and nonassociative algebras N Nadirashvili, V Tkachev, S Vlăduţ American Mathematical Soc.	52	2014
The resultant on compact Riemann surfaces B Gustafsson, VG Tkachev Communications in mathematical physics 286, 313-358	38	2009
Some properties of tubular minimal surfaces of arbitrary codimension VM Miklyukov, VG Tkachev Mathematics of the USSR-Sbornik 68 (1), 133	32 *	1991
Exact solution of three-level model of excited state electron transfer symmetry breaking in quadrupolar molecules AI Ivanov, VG Tkachev The Journal of Chemical Physics 151 (12)	30	2019
A non-classical solution to a Hessian equation from Cartan isoparametric cubic N Nadirashvili, V Tkachev, S Vlăduţ Advances in Mathematics 231 (3-4), 1589-1597	27	2012
Denjoy-Ahlfors theorem for harmonic functions on Riemannian manifolds and external structure of minimal surfaces VM Miklyukov, VG Tkachev Communications in Analysis and Geometry 4 (4), 547--587	24 *	1996
Minimal cubic cones via Clifford algebras V Tkachev Complex Analysis and Operator Theory 4 (3), 685-700	21	2010

Citeras av

VISA ALLA

	Alla	Sedan 2019
Citat	647	336
h-index	15	11
i10-index	27	12



Offentlig åtkomst

VISA ALLA

0 artiklar   5 artiklar
inte tillgänglig   tillgänglig
Enligt krav från finansiärer

Medförfattare

REDIGERA

Uno Wennergren
Linköpings Universitet

Vladimir Kozlov
Professor of Mathematics, Linko...

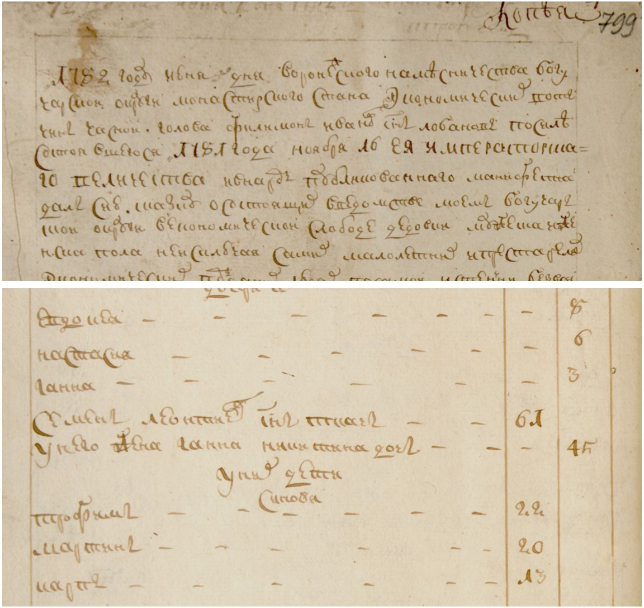
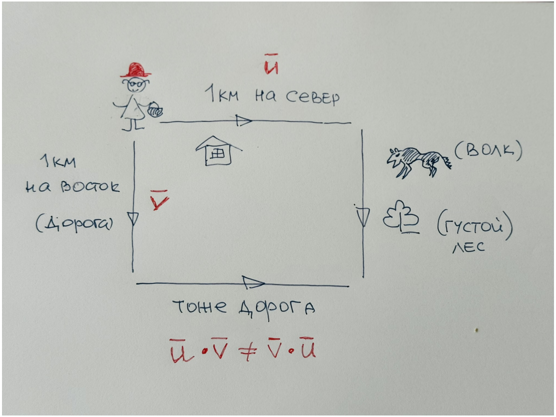


Figure: Перепись 1782 года по слободе Дедовка, Богучарский уезд

Некоммутативность:



Неассоциативность:

$$(\text{Охотник} + \text{Красная шапочка}) + \text{Волк} \neq \text{Охотник} + (\text{Красная шапочка} + \text{Волк})$$

Мотивация

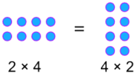
- Во-первых – почему вообще алгебры? Потому что это базовое понятие, это своего рода многомерные числа: можно складывать и умножеть, единственное что нельзя – делить (иногда можно, разумеется, но не всегда). Самые понятные примеры алгебр – **вещественные** числа ("измерять длины"), **комплексные** числа (присобленны к плоскости и даже больше) и **кватернионы** (фактически ответственны за векторное произведение).
- Поиски и исследование именно **неассоциативных** (или **некоммутативных**) структур не являются самоцелью. Так получается, что любая алгебра, которая **и** коммутативна **и** ассоциативна, изоморфна алгебре многочленов.
- Таким образом, получаются своеобразные качели (инь-янь):

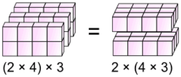
Основы и определения

- Алгебра = Векторное пространство + умножение связаннные законами дистрибутивности (то есть "открывания скобок")

- Сложение обозначается всегда $+$, а умножение по разному $x \cdot y$, $x \times y$, $x \bullet y$, xy и т.д. Стандартное умножение чисел коммутативно и ассоциативно:

$$x \cdot y = y \cdot x \qquad\qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$





- Более интересная алгебра – вектора в $\mathbb{R}^3$ с векторным произведением, которое **антикоммутативно** и **неассоциативно**:

$$x \times y = -y \times x$$

$$(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0 \quad (\textbf{алгебра Ли})$$

Умножение на x – дифференцирование, так как выполнено правило Лейбница

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z + y \times (x \times z)$$

Эпизод 1: И создал Гамильтон кватернионы...

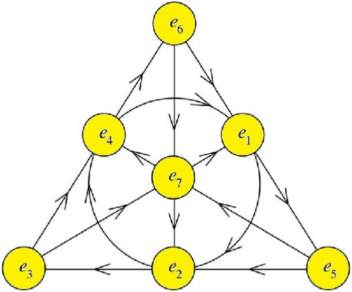
Сэр Гамильтон несколько лет работал над обобщением понятия комплексного числа и созданием полноценной системы "чисел" из троек действительных чисел, **триплетов**.

Задача о триплетах, беспрестанно занимавшая Гамильтона, оказалась крепким орешком. Вся его семья переживала с ним его неудачи. Сам он рассказывал, что стоило ему спуститься к завтраку, как один из его сыновей спрашивал: "*Ну, папа, можешь ли ты уже умножать триплеты?*" И папа **должен** был удрученно отвечать: "*Нет, я могу только складывать и вычитать их*".

Озарение пришло к нему в один из октябрьских дней 1843 года — во время прогулки по дублинскому мосту; так появились кватернионы. Кватеринионы потеряли коммутативность, но оставались еще ассоциативными. Так выглядит умножение кватеринонов:

$$i \star i = j \star j = k \star k = -1, \quad i \star j = k, \quad j \star i = -k, \quad \text{etc.}$$

Коммутативным законом у кватернионов пришлось пожертвовать, но прочие правила арифметики с некоторыми оговорками утряслись. Джон Грейвс, друг Гамильтона еще со времен колледжа, через два месяца объявил, что изобрел восьмимерную числовую систему и назвал их **октавами**. Однако пока дело дошло до публикации результатов, его опередил Артур Кэли, написав работу об эллиптических функциях, он сопроводил ее приложением, в котором описал **октонионы**. В силу этого исторического казуса открытие октонионов приписывается не тому человеку (они известны как числа Кэли, даже сегодня).



Несколько слов о приложениях октонионов от теоретической физики до Deep octonion networks, 2020

1,2,4,8,... Что дальше? Ничего. Если разговор о числах, 16 является очевидным следующим членом. Но если подразумевается алгебра определенного типа, следующего члена не существует. И оказывается, что это очень важно. Последнее число, скромная восьмерка, лежит в сердцевине математической системы, известной как октонионы. И эта система похоже является ключом, который позволит физикам соединить вместе квантовую теорию и гравитацию. Как ни странно не звучит, число 8 может привести нас к "Теории Всего".

System / Property	Reals $\mathbb{R}$	Complexes $\mathbb{C}$	Quaternions $\mathbb{H}$	Octonions $\mathbb{O}$
Self Conjugate	X			
Commutative	X	X		
Associative	X	X	X	
Normed	X	X	X	X
Division	X	X	X	X

×	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	e_{11}	e_8	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	-1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Спин-фактор, это **градуированная** алгебра, то есть сумма двух уровней: **чисел** (уровень 0, или "чет") и векторов (уровень 1, или "нечет"). **Градуировка** это правило когда произведение уровней i и k дает элемент уровня $i+k$. Например, произведение чисел или векторов между собой = число, а вектора на число будет вектор. Числовую часть называют **вещественной частью**, а векторную – **мнимою частью**. Вектора лежат в каком-нибудь пространстве, например $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} = (a, \mathbf{u}) \approx a + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$$

Складывать элементы будем как обычно, а умножать согласно

$$(a, \mathbf{u}) \bullet (b, \mathbf{v}) = (ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},\, a\mathbf{v} + b\mathbf{u})$$

($\cdot$ - обычное скалярное произведение). Умножение **коммутатитвно** и кроме того

$$\mathbf{x}^{\bullet 2} = (a, \mathbf{u})^{\bullet 2} = (b, \mathbf{v}) = (a^2 - |\mathbf{u}|^2,\, 2a\mathbf{u})$$

откуда сразу получается

$$\mathbf{x}^{\bullet 2} - 2a\mathbf{x} + \|\mathbf{x}\|^2 = 0$$

То есть **все** числа в такой алгебре удовлетворяют квадратному уравнению!

$$(a, \mathbf{u}) \bullet (b, \mathbf{v}) = (ab - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},\, a\mathbf{v} + b\mathbf{u})$$

Заметьте, что есть полная аналогия с комплексными числами, но не с кватернионами (они не коммутативны!). В некотором смысле, спин-факторы есть "последнее китайское ~~предупреждение~~ обобщение" комплексных чисел, сохраняющее присущую им градуировку и коммутативность.

Однако, есть и нюансы. Напомню, что у комплексных чисел всего **одна комплексная единица**. А вот если их как минимум две, то умножение уже не ассоциативно:

$$\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2 = 0, \qquad \mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2 = -1,$$

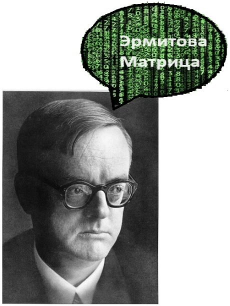
откуда следует, что алгебра неассоциативна:

$$(\mathbf{e}_1 \bullet \mathbf{e}_2) \bullet \mathbf{e}_2 = 0 \neq -\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \bullet (\mathbf{e}_2 \bullet \mathbf{e}_2)$$

Спин-факторы имеют ряд приложений в специальной теории относительности, так как их структура в точности следует структуре пространства Минковского и вообще **хорошо описывает конусы**. Но самое важное их приложение – в теории Йордановых алгебр. Для этого заметим, что

$$x^2 \bullet (x \bullet y) = x \bullet (x^2 \bullet y) \qquad \text{домашнее задание!}$$

Эпизод 3. Йордановы алгебры



В 1932 Паскаль Йордан предложил идею алгебраического основания квантовой механики, независимой от "невидимой", но всеопределяющей матричной структуры. Он попытался аксиоматизировать квантовую теорию так, чтобы алгебра наблюдаемых квантовой системы должна быть *формально вещественной алгеброй*, которая является *коммутативной* ($x \bullet y = y \bullet x$) и степенно-ассоциативной (закон ассоциативности справедлив для произведений, включающих только одну переменную x).
Но как *перемножить* две эрмитовых матрицы чтобы **произведение стало снова эрмитовым**?... К сожалению,

$$\text{Матрица} \cdot \text{Матрица} = \text{Матрица},$$
$$\text{Эрмитова матрица} \cdot \text{Эрмитова матрица} \neq \text{Эрмитова матрица}$$

В самом деле:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \color{red}{7} \\ \color{red}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда Йордан "симметризовал" произведение, вместо обычного матричного умножения он вводит антикоммутатор:

$$x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx),$$

например

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11/2 \\ 11/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Главный вопрос, который Йордан пытался решить: *Может ли квантовая теория основываться только на коммутативном и неассоциативном произведении, или нужно еще ассоциативное произведение xy где-то "на заднем плане"?*

Так появилось, ставшее уже знаменитым, определение: алгебра Йорданова если

$$x \bullet y = y \bullet x \qquad \text{коммутативность}$$

$$x^2 \bullet (x \bullet y) = x \bullet (x^2 \bullet y) \qquad \text{тождество Йордана}$$

Что интересного в Йордановых алгебрах и как их "классифицировать"? Чтобы понять как устроены молекулы нужно классифицировать "атомы", в алгебре они называются **простыми (неразложимыми) алгебрами.**
Год спустя после определения, появляется знаменитая классификация:

Йордан, Джон фон Нейман и Вигнер (1934)

Все **простые** Йордановые алгебры принажлежат одному из трех типов:

- **спин-факторы**;
- три **регулярные** семейства: эрмитовы **матрицы** над вещественными, комплексными числами и кватернионами;
- загадочная алгебра Эрмитовых матриц 3×3 над октонионами

Только перечиселение разных приложений этой загадочной алгебры Альберта займет целую лекцию, просто упомяну, что по каким-то (пока еще неясным) мистическим причинам все неприводимые формально вещественные йордановы алгебры проявляются во многих задачах геометрии, алгебры, анализа, УЧП, комбинаторики, теории группы, а также теоретической физике.

Типичный пример – уравнения Кортвега–де Фриза $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

С. Свинолупов и **В. Соколов** в 1990х установили интегрируемость системы

$$w^i_x = w^j_{xxx} - 6a^i_{jk} w^j w^k_x, \qquad a^i_{jk} = a^i_{kj} \tag{1}$$

с помощью Йордановых алгебр. А именно, они исследовали вопрос

Интегрируемость: Как описать конекретные $a^i_{jk} = a^i_{kj}$ так что (1) обладает обобщенными симметриями и законами сохранения?

Подход Свинолупова: определим для (1) N-мерную коммутативную алгебру J со структурными коэффициентами a^i_{jk}, т.е.

$$e_j \bullet e_k = e_k \bullet e_j := \sum_i a^i_{jk} e_i,$$

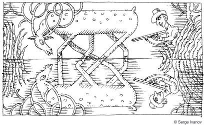
в некотором базисе e_i. Тогда разные базисы порождают эквивалентные алгебры. Пусть $W = e_i w^i \in J$, тогда (1) становится УЧП в алгебре J:

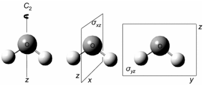
$$W_t = W_{xxx} - 6W \bullet W_x$$

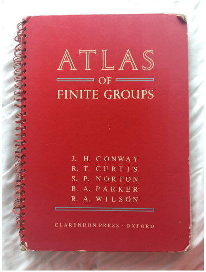
Свинолупов (1991). Уравнения (1) обладают обобщенными законами сохранения тогда и только тогда когда J будет Йорданова алгебра!

Многообразие алгебр тут не заканчивается, а только начинается. Я только еще расскажу о паре важных классов.

- Группа – это объект, где можно умножать и находить обратный элемент по "естественным" (ассоциативным) правилам. Например группа целых чисел по сложению.
- Группы опысывают симметрии и любая симметрия – это часть какой-то группы.
- Чем больше группа симметрий, тем "круглее", или симметричнее, объект.
- Знаменитая теорема Нётер говорит, что каждая группа симметрии порождает "закон сохранения" (и наоборот)
- Как и числа, группы разлагаются на произведение **простых** (как простые числа 2, 3, 5, 7, 11,. . .).
- Простые группы можно все переписать, это долгая история, но сегодня они уже все известны
- Есть несколько (18) регулярных бесконечных семейств, но есть и нерегулярные – "спорадические" (всего 26).
- И вот среди спорадических есть самая большая, "последняя" – группа Монстр! Формально, каждый **элемент** этой группы требует **4Гб данных памяти**







Мистерия группы Монстр: *Moonshine*

Группа Монстер Фишера-Гриса $\mathbb{M}$ имеет огромное число элементов

$$2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71\cdot \approx 8\cdot 10^{53}$$

Это группа симметрий **неассоциативной алгебры Гриса** $V_{\mathbb{M}}$ размерности 196884.

Monstrous moonshine: McKay сидя на "чужой" конференции по теории чисел внезапно заметил, что коэффициенты ряда Лорана j-инварианта ($q = e^{2\pi i\tau}$) в точности совпадает с *размерностями* **представления** группы Монстер!

$$j(\tau) = \frac{(\theta_2^3+\theta_3^3+\theta_4^3)^3}{8\eta^{24}} = \frac{1}{q} + 744 + (196884)q + \dots$$

В 1988, И. Френкель, Lepowsky и Meurman построили градуированную **алгебру вершинных операторов**

$$V^{\sharp} = \oplus_{n\geq 0} V_n \qquad \boxed{V_2 = V_{\mathbb{M}}}$$

Замечательно, что Монстр можно "породить" всего из **трех** инволюций ("отражений")! Другое замечательное свойство алгебры Гриса это то, что она алгебра рассыпается на 4 интересных подпространства:

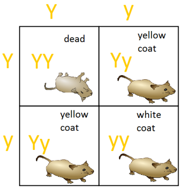
$$A = A_1 \oplus A_0 \oplus A_{\frac{1}{4}} \oplus A_{\frac{1}{32}}$$

которые премножаются по $\mathbb{Z}_2$-градуированным **правилам Изинга** (*правила слияния* – это правила, которые определяют разложение тензорного произведения двух представлений группы в прямую сумму неприводимых представлений.)

$\star$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
1	1	$\emptyset$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
0	$\emptyset$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$1, 0$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$1, 0, \frac{1}{4}$

Эпизод 5: Генетические алгебры

В популяциях с различными генетическими признаками каждая конкретная популяция характеризуется частотами этих признаков, например, частоты генов или генотипов. Эти частоты собираются в виде **вектора**, и **выпуклые** комбинации таких векторов описывают смеси популяций, так что **сложение** векторов и **умножение на константы** имеют смысл.



Половое размножение приводит к коммутативной, но **неассоциативной** мультипликативной структуре, которая отражает формальное представление законов Менделя. Тогда можно определить **соотношения эволюции менделевской популяции гамет (половых клеток)**. Простейший пример – уравнения Менделя для двух зигот,

$\bullet$	e_1	e_2
e_1	e_1	$0.5e_1 + 0.5e_2$
e_2	$0.5e_1 + 0.5e_2$	e_2

	A	a
A	A	$pA + qa$
a	$pA + qa$	a

Согласно этим уравнениям, умножение неассоциативно:

$$e_1 \bullet (e_1 \bullet e_2) = 0.5e_1 \bullet e_1 + 0.5e_1 \bullet e_2 = 0.75e_1 + 0.25e_1$$
$$(e_1 \bullet e_1) \bullet e_2 = e_1 \bullet e_2 = 0.5e_1 + 0.5e_2$$

Что мы ищем? В простейшем случае **равновесие**, то есть **идемпотент** $c \bullet c = c$:

Эпизод 5: Генетические алгебры

Линейная комбинация $x = t_1 e_1 + t_2 e_2$ означает **популяцию**, тогда закон равновесия

$$
\begin{aligned}
x \bullet x &= (t_1 e_1 + t_2 e_2) \bullet (t_1 e_1 + t_2 e_2) \\
&= (t_1^2 + 2 t_1 t_2 \cdot 0.5) e_1 + (2 t_1 t_2 \cdot 0.5 + t_2^2) e_2 = x = t_1 e_1 + t_2 e_2
\end{aligned}
$$

приводит к системе

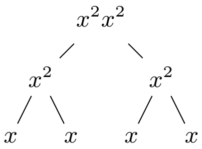
$$
\begin{cases} t_1^2 + t_1 t_2 & = t_1 \\ t_1 t_2 + t_2^2 & = t_2 \end{cases}
$$

Такая система "всегда" имеет $2 \times 2 = 4$ решения, три из которых тривиальны: $0, e_1, e_2$. А нетривиальные решения будут **целая линия идемпотентов**:

$$
x = t\, e_1 + (1 - t) e_2, \quad t \in \mathbb{R}.
$$

В реальности все несколько сложнее и нужно контролировать несколько поколений. Для этого выводятся генетические закономерности, которые затем можно перевести на математический язык. Например самое известное **генетическое уравнение**, уравнение Бернштейна, выражает принцип стационарности во втором поколении:

$$
(x \bullet x) \bullet (x \bullet x) = \omega^2(x)\, x \bullet x
$$



Родственный контекст: Неассоциативный лес

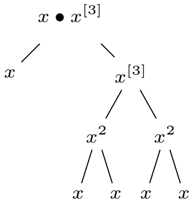
В общем случае все может еще более нетривиально:

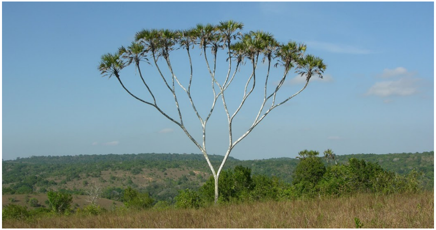
$$(x \bullet x) \bullet ((((x \bullet x) \bullet x) \bullet x) \bullet (x \bullet x)) = x^{[2]} \bullet (x^4 \bullet x^{[2]}).$$

Например, так выглядит неассоциативная формула Тейлора (для уравнения коагуляции Смолуховского, Malham (2024):

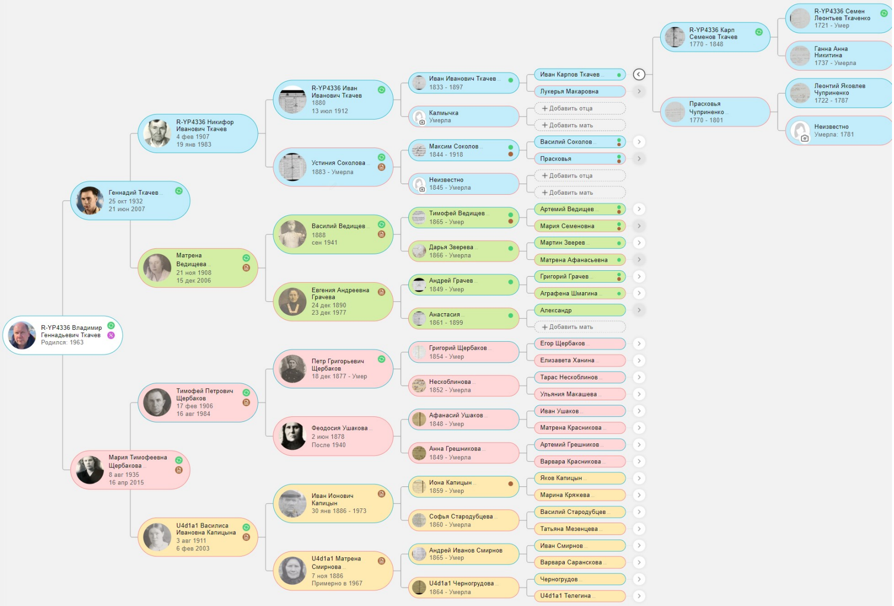
$$g(t) = \xi + t\xi \bullet \xi + \frac{1}{2}t^2 \cdot 2\xi \bullet (\xi \bullet \xi) + \frac{1}{6}t^3(4\xi \bullet (\xi \bullet (\xi \bullet \xi)) + 2(\xi \bullet \xi) \bullet (\xi \bullet \xi)) + \dots,$$

Иногда более естественно работать с **бинарными деревьями** вместо произведений





Реальное бинарное дерево в Африке


R-YP4336 Владимир Геннадьевич Ткачев
Родился: 1963
Геннадий Ткачев
25 окт 1932
21 июн 2007
Мария Тимофеевна Щербакова
8 авг 1935
16 апр 2015
R-YP4336 Никифор Иванович Ткачев
4 фев 1907
19 янв 1983
Матрена Ведищева
21 ноя 1908
15 дек 2006
Тимофей Петрович Щербаков
17 фев 1906
16 авг 1984
U4d1a1 Василиса Ивановна Капицына
3 авг 1911
6 фев 2003
R-YP4336 Иван Иванович Ткачев
1880
13 июл 1912
Устиния Соколова
1883 - Умерла
Василий Ведищев
1888
сен 1941
Евгения Андреевна Грачева
24 дек 1890
23 дек 1977
Петр Григорьевич Щербаков
18 дек 1877 - Умер
Феодосия Ушакова
2 июн 1878
После 1940
Иван Ионович Капицын
30 янв 1886 - 1973
U4d1a1 Матрена Смирнова
7 ноя 1886
Примерно в 1967
Иван Иванович Ткачев
1833 - 1897
Калмычка
Умерла
Максим Соколов
1844 - 1918
Неизвестно
1845 - Умерла
Тимофей Ведищев
1865 - Умер
Дарья Зверева
1866 - Умерла
Андрей Грачев
1849 - Умер
Анастасия
1861 - 1899
Григорий Щербаков
1854 - Умер
Нескоблинова
1852 - Умерла
Афанасий Ушаков
1848 - Умер
Анна Грешникова
1849 - Умерла
Иона Капицын
1859 - Умер
Софья Стародубцева
1860 - Умерла
Андрей Иванов Смирнов
1865 - Умер
U4d1a1 Черногрудова
1864 - Умерла
Иван Карпов Ткачев
Лукерья Макаровна
Добавить отца
Добавить мать
Василий Соколов
Прасковья
Добавить отца
Добавить мать
Артемий Ведищев
Мария Семеновна
Мартин Зверев
Матрена Афанасьевна
Григорий Грачев
Аграфена Шмагина
Александр
Добавить мать
Егор Щербаков
Елизавета Ханина
Тарас Нескоблинов
Ульяния Макашева
Иван Ушаков
Матрена Красникова
Артемий Грешников
Варвара Красникова
Яков Капицын
Марина Кряжева
Василий Стародубцев
Татьяна Мезенцева
Иван Смирнов
Варвара Саранскова
Черногрудов
U4d1a1 Телегина
R-YP4336 Карп Семенов Ткачев
1770 - 1848
Прасковья Чуприненко
1770 - 1801
R-YP4336 Семен Леонтьев Тканенко
1721 - Умер
Ганна Анна Никитина
1737 - Умерла
Леонтий Яковлев Чуприненко
1722 - 1787
Неизвестно
Умерла: 1781

Вы хочете звездных алгебр? Их есть у меня!

Q. Jl R. astr. Soc. (1968) **9**, 388–400.

Stars of Higher Multiplicity

David S. Evans

The study of star clusters and of binary stars has, in each case, produced astronomical results of the greatest importance. Star clusters are characterized by large numerical membership and relatively weak gravitational binding. They have been studied mainly to determine the photometric and spectroscopic properties of their member stars. The

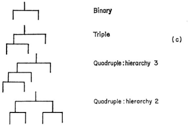
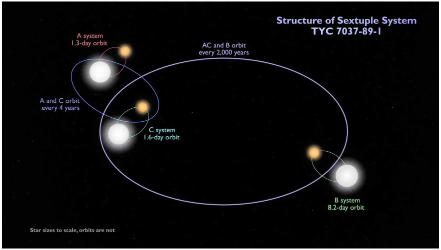


FIG. 2. Mobile diagrams for (a) planets, (b) planets and satellites, (c) multiple stars.



В таких случаях оказывается важным изучить главные элементы, называемые **идемпотентами**, то есть для которых операция умножения нейтральна:

$$c \bullet c = c$$

Из таблицы видно, что все элементы $(\mathbb{Z}_7, \odot)$ – идемпотенты:

$$x \odot x = \frac{1}{2}(x + x) \mod 7 = x$$

На практике идемпотенты часто означают:

- проекции
- состояния равновесия
- оптимальные состояния и т.д.

Для этого рассмотрим следующий важный в приложениях пример.

Рассмотрим сложение целых чисел (точнее их остатков от деления на 7) по закону:

$$x \odot y = \frac{1}{2}(x+y) \mod 7$$

Например

$$\bar{1} \odot \bar{2} = \frac{1}{2}(\bar{1}+\bar{2}) = \frac{\bar{3}}{2} = \frac{\bar{3}+\bar{7}}{2} = \bar{5}$$

Получится такая таблица сложения:

$\odot$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	5	2	6	3	7	4
2	5	2	6	3	7	4	1
3	2	6	3	7	4	1	5
4	6	3	7	4	1	5	2
5	3	7	4	1	5	2	6
6	7	4	1	5	2	6	3
7	4	1	5	2	6	3	7

Очевидно, что $x \odot y = y \odot x$ (то есть сложение коммутативно), но

$$\bar{3} \odot (\bar{1} \odot \bar{2}) = \bar{3} \odot \bar{5} = \bar{4} \neq (\bar{3} \odot \bar{1}) \odot \bar{2} = \bar{2} \odot \bar{2} = \bar{2}$$

Значит умножение **неассоциативно**! Другими словами, у выражения

$$\bar{3} \odot \bar{1} \odot \bar{2}$$

нет смысла, пока не расставишь скобки!

Метод Пирса

Как же работать с неассоциативными алгебрами? Самый традиционный метод – разложение Пирса, нужно разбить алгебру на блоки, умножение между которыми устроено не так запутанно. Пирс впервые применил свой метод в 1800е к матрицам и аналогичным ассоциативным алгебрам. Тогда получается вот что:

$$\mathbb{A} = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{A}_\alpha$$

а умножение между блоками согласно правилам слияния (fusion rules), например градуировка "чет-нечет" или правила Изинга, или общие правила вида

$$\mathbb{A}_\alpha \mathbb{A}_\beta \subset \bigoplus_{\gamma \in \theta(\alpha,\beta)} \mathbb{A}_\gamma, \qquad \theta(\alpha,\beta) \text{ – это правила слияния}$$

Разложение Пирса – важный метод в "алгебраическом анализе".

Например, любая Йорданова алгебра удовлетворяет правилам слияния:

$\star$	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	$\emptyset$	$\frac{1}{2}$
0	$\emptyset$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1, 0$

Спасибо за терпение!