В. М. Миклюков, В. Г. Ткачев УДК 519.3

О СТРОЕНИИ В ЦЕЛОМ ВНЕШНЕ ПОЛНЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В R^3

1. Пусть M — двумерное некомпактное ориентированное многообразие. Рассмотрим поверхность (M, x), заданную C^2-погружением x: $M \to \boldsymbol{R}^3$. Всюду ниже предполагается, что погружение собственно, т. е. прообраз всякого компактного множества $F \subset \boldsymbol{R}^3$ является компактом. Это означает, что поверхность (M, x) является *внешне полной* и замыкание $\overline{x(M)}$ множества $x(M)$ в $\boldsymbol{R}^3$ совпадает с $x(M)$.

Поверхность (M, x) называется *минимальной*, если ее средняя кривизна тождественно обращается в нуль.

Введем следующие понятия. Пусть V — плоскость в $\boldsymbol{R}^3$. Для произвольной точки $v \in V$ символом $N(v)$ обозначим число точек пересечения множества $x(M)$ (с учетом их кратности) с прямой, проходящей через точку v ортогонально плоскости V. Предположим, что при всех $v \in V$ выполнено $N(v) < \infty$. Нетрудно установить, что функция $N(v)$ измерима по Лебегу и для почти всех $t > 0$ определена величина

$$n(t, V) = \int_{|v|=t} N(v)\,|dv|.$$

Целью работы является доказательство следующего утверждения, отражающего некоторые специфические особенности строения в целом поверхности (M, x).

Теорема 1. *Пусть (M, x) — минимальная поверхность. Если для некоторой плоскости $V \subset \boldsymbol{R}^3$ выполнено*

$$x(M) \cap V = \varnothing$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n(t, V)}{t \ln t} = 0, \tag{1}$$

то (M, x) — плоскость.

Данная теорема представляет также определенный интерес в связи с задачей Калаби о существовании нетривиальных (т. е. отличных от плоскости) полных минимальных поверхностей в $\boldsymbol{R}^3$, расположенных в полупространстве. Отсутствие глобально минимальных нетривиальных поверхностей, лежащих в полупространстве, доказано Мирандой [1]. Отсутствие трубчатых в целом минимальных поверхностей в $\boldsymbol{R}^3$, расположенных в полупространстве, следует из результатов В. М. Миклюкова [2]. Пример внутренне полной нетривиальной минимальной поверхности, заключенной между двумя параллельными плоскостями в $\boldsymbol{R}^3$, построен Йорге и Ксавиером [3].

Из теоремы 1 следует, что для нетривиальных минимальных поверхностей „среднее“ число точек, лежащих над окружностью $|v| = t$, растет не слишком медленно. То же самое справедливо и при другом, описываемом ниже способе подсчета кратности числа точек. Пусть $S(t) = S(x_0, t)$ — сфера радиуса $t > 0$ с центром в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}^3$, $S(1) = S$ и пусть $\tau \in S$ — произвольная точка. Обозначим через $l(\tau)$ луч с началом в точке x_0, проходящей через точку τ, через $N_1(\tau, t)$ — число точек пересечения поверхности (M, x) с лучом $l(\tau)$, лежащих в шаре $B(x_0; t) = \{x \in \boldsymbol{R}^3 : |x - x_0| < t\}$. Пусть $N_1(\tau, t) < \infty$ при всех $\tau \in S$ и всех $t > 0$. Положим

$$n(t, S) = \int_S N_1(\tau, t)\, d\sigma_\tau,$$

где $d\sigma_\tau$ — элемент площади на сфере S.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть (M, x) — минимальная поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. Предположим, что для некоторой точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^3$ выполнено*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n(t,\,s)}{\ln t}=0. \tag{2}$$

Тогда если поверхность $(M,\ x)$ *расположена в полупространстве, то* $(M,\ x)$ — *плоскость.*

В своей существенной части доказательство теоремы 2 состоит в оценке скорости роста „логарифмической площади" множества $x(M)\cap B(x_0,\ t)$. Несколько более слабый результат получается, если вместо логарифмической площади оценивается площадь этого множества, либо площадь геодезического круга на поверхности $(M,\ x)$, как это делают Ченг и Яо [4]. Доказательство теоремы 1 является более специальным.

2. Рассмотрим поверхность $(M,\ x)$, заданную C^2-погружением $x(m):\ :M\to\mathbf{R}^3$. Стандартная метрика на $\mathbf{R}^3$ индуцирует при отображении $x(m)$ риманову метрику и связность на многообразии M. Через $\langle a,\ b\rangle$ обозначим скалярное произведение векторов в касательном расслоении.

В работе используется модульно-емкостная техника, разрабатываемая в [5]. Кратко введем необходимые понятия. Пусть $P,\ Q\in M$ — непересекающиеся замкнутые множества и $\varphi(m)$ — произвольная локально-липшицева функция, обращающаяся в 0 и 1 на множествах P и Q соответственно. Определим емкость конденсатора $(P,\ Q)$, полагая

$$\operatorname{cap}(P,\ Q)=\inf\int_M|\nabla\varphi|^2,$$

где символ $\nabla\varphi$ означает вектор-градиент φ в метрике многообразия M и $|\nabla\varphi|^2=\langle\nabla\varphi,\ \nabla\varphi\rangle$.

Будем говорить, что поверхность $(M,\ x)$ имеет *параболический конформный тип,* если для любого компакта $F\subset M$ существует исчерпание $A_k\subset A_{k+1}$, $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=M$, многообразия M последовательностью открытых множеств $A_k\supset F$ с компактными замыканиями, для которой выполнено

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{cap}(F,\ M\setminus A_k)=0. \tag{3}$$

Наряду с емкостью будет использовано следующее понятие. Пусть Γ — семейство локально спрямляемых дуг γ в M. Будем говорить, что измеримая по Лебегу, локально ограниченная в существенном функция $\rho(m)\geqslant 0$ является *допустимой* для семейства Γ, если для любой дуги $\gamma\in\Gamma$ выполнено

$$\int_\gamma\rho(m)\geqslant 1.$$

Величина

$$\operatorname{mod}\Gamma=\inf\int_M\rho^2(m),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным допустимым для семейства Γ функциям $\rho(m)$, называется *модулем* семейства Γ.

Имеет место

Лемма 1. *Пусть* $(P,\ Q)$ — *произвольный конденсатор и* Γ — *семейство локально спрямляемых дуг в* M, *соединяющих множества* P *и* Q. *Тогда*

$$\operatorname{cap}(P,\ Q)=\operatorname{mod}\Gamma. \tag{4}$$

Доказательство в основном следует доказательству соответствующего утверждения Фюгледе [6] для конденсаторов в $\mathbf{R}^n$ и поэтому опускается. Отдельные детали, связанные с необходимостью проведения рассуждений в римановой метрике общего вида, можно найти в [5], где аналогичное утверждение доказано для конденсаторов, расположенных на графиках липшицевых функций.

3. Следующее высказывание является в работе вспомогательным, однако, как признак параболичности конформного типа минимальной поверхности, оно имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Пусть (M, x) — минимальная поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. Если эта поверхность обладает свойством (1), либо свойством (2), то она имеет параболический конформный тип.*

Доказательство проведем сначала в более простом случае, а именно в предположении, что поверхность (M, x) удовлетворяет условию (2). Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0=0$. Пусть $F\subset M$ — компактное множество. Зафиксируем $r>0$ так, чтобы множество $x(F)$ содержалось в шаре $B(0, r)$. Выберем произвольно $R>r$ и обозначим через A_R множество $x(M)\bigcap B(0, R)$. Положим $A_R^*=x^{-1}(A_R)$. Ясно, что A_R^* есть открытое подмножество M, имеющее компактное замыкание.

Если $R_1<R_2<\ldots$ и $\lim\limits_{k\to\infty} R_k=\infty$, то последовательность множеств $A_{R_1}^*\subset\subset A_{R_2}^*\subset\ldots$ образует исчерпание многообразия M. Чтобы показать, что данное исчерпание обладает свойством (3), рассмотрим семейство Γ_R локально спрямляемых дуг $\gamma\in A_R^*$, соединяющих компакт F с множеством $M\diagdown A_R^*$. В силу равенства (4) нам достаточно показать, что нижний предел модуля семейства Γ_R равен нулю при $R\to\infty$.

Пусть $\Gamma(r, R)$ — семейство дуг, лежащих в $A_R^*\diagdown A_r^*$ и соединяющих множество A_r^* и $M\diagdown A_R^*$. Ясно что, $\operatorname{mod}\Gamma_R\leqslant\operatorname{mod}\Gamma(r, R)$. Нашей дальнейшей целью является подходящая оценка сверху величины $\operatorname{mod}\Gamma(r, R)$.

Выберем функцию $\rho(m)$, равную $|x(m)|^{-1}$ при $m\in A_R^*\diagdown A_r^*$ и обращающуюся в нуль при всех остальных значениях $m\in M$. Так как

$$|d|x(m)||\leqslant\frac{1}{|x(m)|}|\langle x(m), dx(m)\rangle|\leqslant|dx(m)|,$$

то для всякой дуги $\gamma\in\Gamma(r, R)$ выполнено

$$\int\limits_\gamma\rho(m)\geqslant\int\limits_\gamma\frac{|d|x(m)||}{|x(m)|}\geqslant\ln\frac{R}{r}.$$

Таким образом, функция $\rho_0(m)=\rho(m)(\ln(R/r))^{-1}$ является допустимой для семейства дуг $\Gamma(r, R)$ и потому

$$\operatorname{mod}\Gamma(r, R)\leqslant\frac{1}{\left(\ln\dfrac{R}{r}\right)^2}\int\limits_{A_R^*\diagdown A_r^*}\frac{1}{|x(m)|^2}. \tag{5}$$

Займемся оценкой интеграла в правой части (5), выражающего „логарифмическую площадь“ множества $A_R\diagdown A_r$. Прежде всего заметим, что в силу минимальности поверхности (M, x) для любого параллельного в $\boldsymbol{R}^3$ поля a выполнено равенство

$$\Delta\langle a, x(m)\rangle=0, \tag{6}$$

где Δ — оператор Лапласа в метрике поверхности (см. [7], с. 309). Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2}\Delta\ln^2|x|=1/|x|^2+(\langle x, n\rangle^2/|x|^4)(2\ln|x|-1),$$

где n — единичный вектор нормального расслоения над (M, x). Применяя к этому равенству формулу Стокса, получим

$$\int\limits_{A_R^*\diagdown A_r^*}\frac{1}{|x|^2}=\int\limits_{\partial(A_R^*\diagdown A_r^*)}\frac{\ln|x|}{|x|}\langle\nabla|x|, \nu\rangle-\int\limits_{A_R^*\diagdown A_r^*}\frac{\langle x, n\rangle^2}{|x|^4}(2\ln|x|-1)=$$

$$=\frac{\ln R}{R}\int\limits_{\partial A_R^*}\langle\nabla|x|, \nu\rangle-\frac{\ln r}{r}\int\limits_{\partial A_r^*}\langle\nabla|x|, \nu\rangle-\int\limits_{A_R^*\diagdown A_r^*}\frac{\langle x, n\rangle^2}{|x|^2}(2\ln|x|-1), \tag{7}$$

где ν — единичный вектор нормали к границе $\partial(A_R^*\diagdown A_r^*)$.

Аналогичным образом из равенства (6) следует $\Delta \ln|x| = (2/|x|^4)\langle x, n\rangle^2$ и, далее,

$$\frac{1}{R}\int_{\partial A_R^*}\langle\nabla|x|, \nu\rangle - \frac{1}{r}\int_{\partial A_r^*}\langle\nabla|x|, \nu\rangle = 2\int_{A_R^*\setminus A_r^*}\frac{\langle x, n\rangle^2}{|x|^4}. \tag{8}$$

Объединяя (7) и (8), приходим к равенству

$$\int_{A_R^*\setminus A_r^*}\frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{r}\ln\frac{R}{r}\int_{\partial A_r^*}\langle\nabla|x|, \nu\rangle + \int_{A_R^*\setminus A_r^*}\frac{\langle x, n\rangle^2}{|x|^4}\left(1 + 2\ln\frac{R}{|x|}\right).$$

Заметим, что

$$\int_{A_R^*\setminus A_r^*}\frac{\langle x, n\rangle^2}{|x|^4}\left(1+2\ln\frac{R}{|x|}\right) \leqslant \left(1+2\ln\frac{R}{r}\right)\int_{A_R^*\setminus A_r^*}\frac{|\langle x, n\rangle|}{|x|^3} \leqslant \left(1+2\ln\frac{R}{r}\right)\cdot n(R, S),$$

и поэтому

$$\int_{A_R^*\setminus A_r^*}\frac{1}{|x|^2} \leqslant \frac{1}{r}\ln\frac{R}{r}\int_{\partial A_r^*}|\nabla|x|| + \left(1+2\ln\frac{R}{r}\right)\cdot n(R, S).$$

Подставляя найденную оценку в (5) и переходя к пределу при $R \to \infty$, получаем необходимое утверждение.

Теперь предположим, что поверхность (M, x) удовлетворяет условию (1). Пусть e_1, e_2, e_3 — стандартный базис R^3, $x = \sum_{i=1}^{3} x^i e_i$. Не ограничивая общности, можно считать, что плоскость V совпадает с плоскостью $x^3 = 0$. Тогда $N(x^1, x^2) = N(v)$, где $v = (x^1, x^2, 0)$, есть число точек на $x(M)$, имеющих надлежащие первые две координаты. В соответствии с условием (1) будем считать, что $x^3(M) > 0$ на M. Положим в дальнейшем $D(R, \eta) = \{m \in M : |v(m)| < R, x^3 < \eta\}$.

Как и ранее, для заданного компактного множества $F \subset M$ выберем $r > 0$ так, чтобы $F \subset D(r, r)$. В качестве исчерпания многообразия M возьмем последовательность множеств $D(R_k, R_k)$, где $R_k > r$, $R_k \nearrow \infty$. Фиксируем $R = R_k$ и положим $\Gamma(r, R)$ — семейство локально спрямляемых дуг, соединяющих $D(r, r)$ и $M \setminus D(R, R)$. Рассмотрим $\rho(m) = |x(m)|^{-1}$ при $m \in D(R, R)\setminus D(r, r)$ и равную 0 в остальных $m \in M$. Аналогично первому случаю нетрудно показать, что функция $\rho_0(m) = \rho(m)\ln(R/r\sqrt{2})$ допустима для семейства $\Gamma(r, R)$, и потому

$$\operatorname{mod}\Gamma(r, R) \leqslant \frac{1}{\left(\ln\dfrac{R}{r\sqrt{2}}\right)^2}\int_{D(R, R)\setminus D(r, r)}\frac{1}{|x|^2}. \tag{9}$$

Оценим сначала интеграл $\int_{E(h)} 1/|x(m)|^2$ по множеству $E(h) = D(R, h)\setminus D(r, h)$. Положим $f(m) = (1/|v(m)|)\operatorname{arctg}(x^3(m)/|v(m)|)$. Пользуясь формулой Стокса, будем иметь

$$\int_{E(h)}\langle\nabla x^3, \nabla f\rangle = \int_{\partial E(h)} f\langle\nabla x^3, \nu\rangle, \tag{10}$$

где ν — единичный вектор нормали к $\partial E(h)$. Нетрудно вычислить значения нужных градиентов

$$\nabla x^3 = e_3^T, \quad \nabla v = v^T/|v|,$$

где e^T — проекция поля e на касательное пространство в соответствующей точке. Следовательно

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial |v|}\nabla |v|+\frac{\partial f}{\partial x^3}\nabla x^3=\frac{e_3^T}{|x|^2}-\frac{v^T}{|v|^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^3}{|v|}+\frac{x^3|v|}{|x|^2}\right)$$

и

$$\frac{|e_3^T|^2}{|x|^2}=\frac{\langle v^T,\ e_3^T\rangle}{|v|^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x^3}{|v|}+\frac{x^3|v|}{|v|^2+(x^3)^2}\right)+\langle\nabla f,\ \nabla x^3\rangle. \tag{11}$$

В силу ортогональности e_3 и v в $\boldsymbol{R}^3$ имеем

$$\langle v^T,\ e_3^T\rangle=-\langle v,\ n\rangle\langle e_3,\ n\rangle,\ |e_3^T|^2=1-\langle e_3,\ n\rangle^2$$

и из (11) получаем

$$\frac{1}{|x|^2}=\frac{\langle e_3,\ n\rangle}{|v|^2}\left[\frac{\langle e_3,\ n\rangle}{1+\xi^2}-\frac{\langle v,\ n\rangle}{|v|}\left(\operatorname{arctg}\xi+\frac{\xi}{1+\xi^2}\right)\right]+\langle\nabla f,\ \nabla x^3\rangle,$$

где $\xi=x^3/|v|$. Используя неравенство Коши, приходим к оценке

$$\frac{1}{|x|^2}\leqslant\frac{|\langle e_3,\ n\rangle|}{|v|^2}\left[\frac{1}{(1+\xi^2)^2}+\left(\operatorname{arctg}\xi+\frac{\xi}{1+\xi^2}\right)^2\right]^{1/2}+\langle\nabla f,\ \nabla x^3\rangle\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{|\langle e_3,\ n\rangle|}{|v|^2}+\langle\nabla f,\ \nabla x^3\rangle.$$

Подставляя найденную оценку в (10), будем иметь

$$\int\limits_{E(h)}\frac{1}{|x|^2}\leqslant\frac{\pi}{2}\int\limits_{E(h)}\frac{|\langle e_3,\ n\rangle|}{|v|^2}+\int\limits_{\partial E(h)}f\langle e_3^T,\ \nu\rangle\leqslant\frac{\pi}{2}\int\limits_{v_0(E(h))}N(x^1,\ x^2)\frac{dx^1dx^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}+\int\limits_{\partial E(h)}f\cdot\langle e_3^T,\ \nu\rangle. \tag{12}$$

Пусть $L(h)$, γ_t — части границы $\partial E(h)$, лежащие на множествах $x^3=h$, $|v|=t$ соответственно. Нетрудно видеть справедливость равенства

$$\int\limits_{L(h)}\langle e_3^T,\ \nu\rangle\frac{1}{|v|}\operatorname{arctg}\frac{h}{|v|}=-\int\limits_{\gamma_r\cup\gamma_R}\langle e_3^T,\ \nu\rangle\frac{1}{|v|}\operatorname{arctg}\frac{h}{|v|}+\int\limits_{E(h)}\left\langle\nabla\left(\frac{1}{|v|}\operatorname{arctg}\frac{h}{|v|}\right),\ \nabla x^3\right\rangle. \tag{13}$$

Проводя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, убеждаемся в истинности следующих оценок

$$\left|\int\limits_{\partial E(h)}f\cdot\langle e_3^T,\ \nu\rangle\right|=\left|\int\limits_{L(h)}\frac{\langle e_3^T,\ \nu\rangle}{|v|}\operatorname{arctg}\frac{h}{|v|}+\int\limits_{\gamma_r\cup\gamma_R}\frac{\langle e_3^T,\ \nu\rangle}{|v|}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{|v|}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{E(h)}\left\langle\nabla\left(\frac{1}{|v|}\operatorname{arctg}\frac{h}{|v|}\right),\ \nabla x^3\right\rangle-\int\limits_{\gamma_r\cup\gamma_R}\frac{\langle e_3^T,\ \nu\rangle}{|v|}\left(\operatorname{arctg}\frac{h}{|v|}-\operatorname{arctg}\frac{x^3}{|v|}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\int\limits_{v_0(E(h))}\frac{N(x^1,\ x^2)}{|v|^2}dx^1dx^2+\frac{\pi}{2}\int\limits_{\gamma_r\cup\gamma_R}|\langle e_3^T,\ \nu\rangle|\frac{1}{|v|}. \tag{14}$$

Заметим далее, что

$$|\langle e_3^T,\ \nu\rangle|=|\langle e_3,\ \nu\rangle|\leqslant|e_3^W|,$$

где W — двумерное нормальное пространство вдоль $\gamma_r\cup\gamma_R$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\gamma_r\cup\gamma_R}|\langle e_3^T,\ \nu\rangle|\frac{1}{|v|}\leqslant\frac{n(R)}{R}+\frac{n(r)}{r},$$

где $n(R)=n(R,\ V)$. Окончательно на основе (12), (14), получим

$$\int\limits_{E(h)}\frac{1}{|x|^2}\leqslant\frac{\pi}{2}\left[\frac{n(R)}{R}+\frac{n(r)}{r}+2\int\limits_r^R\frac{n(t)}{t^2}dt\right]. \tag{15}$$

Завершающий шаг доказательства связан с оценкой интеграла $\int\limits_{E(a,\,b)} 1/|x|^2$, где $E(a,\ b)=\{m\in M: x^3(m)\in(a,\ b),\ |v(m)|<r\}$, $0<a<b$. С этой целью заметим сначала, что

$$\int\limits_{E(a,\,b)}\frac{1}{|x^3|^2}=\int\limits_{E(a,\,b)}\left(\frac{\langle e_3,\ n\rangle^2}{|x^3|^2}-\left\langle\nabla\left(\frac{1}{x^3}\right),\ \nabla x^3\right\rangle\right)=\int\limits_{E(a,\,b)}\frac{\langle e_3,\ n\rangle^2}{|x^3|^2}-\int\limits_{\partial E(a,\,b)}\frac{1}{x^3}\langle e_3^T,\ \nu\rangle. \tag{16}$$

Очевидна оценка первого интеграла

$$\int\limits_{E(a,\,b)}\frac{\langle e_3,\ n\rangle^2}{|x^3|^2}\leqslant\frac{1}{a^2}\int\limits_{E(a,\,b)}|\langle e_3,\ n\rangle|\leqslant\frac{1}{a^2}\int\limits_0^r n(t)\,dt,$$

а также равенство

$$0=\int\limits_{\partial E(a,\,b)}\langle e_3^T,\ \nu\rangle=\int\limits_{L(b)}\langle e_3^T,\ \nu\rangle+\int\limits_{L(a)}\langle e_3^T,\ \nu\rangle+\int\limits_{\gamma_r}\langle e_3^T,\ \nu\rangle.$$

Последний интеграл ограничен независимо от a, b

$$\left|\int\limits_{\gamma_r}\langle e_3^T,\ \nu\rangle\right|\leqslant n(r),$$

и, следовательно, полагая $a=0$ имеем

$$\left|\int\limits_{L(b)}\langle e_3^T,\ \nu\rangle\right|\leqslant n(r).$$

Возвращаясь к (16), будем иметь

$$\int\limits_{E(a,\,b)}\frac{1}{|x^3|^2}\leqslant\frac{1}{a^2}\int\limits_0^r n(t)\,dt+\frac{2n(r)}{a}+\frac{n(r)}{b}.$$

Откуда заключаем, что

$$\int\limits_{E(a,\,\infty)}\frac{1}{|x|^2}\leqslant\int\limits_{E(a,\,\infty)}\frac{1}{|x^3|^2}\leqslant c(r,\ a)=\frac{1}{a^2}\int\limits_0^r n(t)\,dt+\frac{2n(r)}{a}.$$

Замечая, что $D(R,\ R)\diagdown D(r,\ r)=E(R)\bigcup E(r,\ R)$, будем иметь

$$\int\limits_{D(R,\,R)\diagdown D(r,\,r)}\frac{1}{|x|^2}\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\frac{n(r)}{r}+\frac{n(R)}{R}+\int\limits_r^R\frac{2n(t)}{t^2}\,dt\right)+c(r),$$

и, учитывая условие (1), при $R=R_k\to\infty$ будем иметь требуемое утверждение.

4. Доказательство теорем 1 и 2. Не умаляя общности, можем считать, что поверхность $(M,\ x)$ находится в полупространстве $x^3>0$. На основании лемм 1, 2 мы заключаем о параболичности типа поверхности $(M,\ x)$. Предположим, что $x^3(m)\neq\text{const}$ при $m\in M$.

Фиксируем произвольную точку $m_0\in M$ и постоянную $c>x^3(m_0)$. Обозначим через O компоненту связности множества $\{m\in M: x^3(m)<c\}$, содержащую точку m_0. Ясно, что множество O не пусто. Рассмотрим функцию $w(m)$, равную $c-x^3(m)$ на множестве O и обращающуюся в нуль вне O.

Пусть $F\subset O$ — компактное множество и пусть $A_1\subset A_2\subset\ldots$ — исчерпание M последовательностью открытых множеств $A_k\supset F$ с компактными замыканиями, для которых выполнено свойство (3). Пусть $\varphi(m)$ — липшицева функция, допустимая при вычислении емкости конденсатора $(F;\ M\diagdown A_k)$. Функция $w_1(m)=w(m)\cdot\varphi^2(m)$ есть липшицева функция с компактным носителем, содержащимся в $\overline{O}\bigcap\overline{A}_k$. Пользуясь формулой Стокса, на основании (6), имеем

$$\int\limits_M\langle\nabla w_1,\ \nabla x^3\rangle=-\int\limits_M w_1\,\Delta x^3=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_O \varphi^2 \cdot |\nabla x^3|^2 = -2 \int\limits_O \varphi w \cdot \langle \nabla\varphi, \nabla x^3 \rangle.$$

Поскольку всюду на O выполнено $|w(m)| \leqslant c$, то

$$\int\limits_O \varphi^2 |\nabla x^3|^2 \leqslant 2c \Big(\int\limits_O \varphi^2 |\nabla x^3|^2 \Big)^{1/2} \cdot \Big(\int\limits_O |\nabla\varphi|^2 \Big)^{1/2},$$

поэтому

$$\int\limits_O \varphi^2 |\nabla x^3|^2 \leqslant 4c^2 \int\limits_O |\nabla\varphi|^2.$$

Так как $\varphi(m) = 1$ на F, то, минимизируя правую часть данного неравенства по всем функциям $\varphi(m)$, заключаем, что

$$\int\limits_F |\nabla x^3|^2 \leqslant 4c^2 \cdot \operatorname{cap}(F, M \setminus A_k).$$

Учитывая теперь свойство (3) исчерпания, устанавливаем

$$\int\limits_F |\nabla x^3|^2 = 0.$$

Откуда в силу произвола выбора компакта $F \subset O$ приходим в выводу, что $\nabla x^3 = 0$ всюду на O. Тем самым $x^3 = \mathrm{const}$ на O, что противоречит определению множества O. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miranda M. Frontiere minimal con ostacoli.— Ann. Univ. Ferrara, 1971, Sez. 7, v. 16, № 2, p. 29—37.

2. Миклюков В. М. О некоторых свойствах трубчатых минимальных поверхностей в R^n.— ДАН СССР, 1979, т. 247, № 3, с. 549—552.

3. Jorge L. P. de M. and Xavier F. A complete minimal surface in R^3 between two parallel planes.— Ann. Math., 1980, v. 112, № 1, p. 203—206.

4. Cheng S. Y., Yau S. T. Differential equations on Riemannian manifold and their geometric applications.— Communs. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, № 3, p. 333—354.

5. Миклюков В. М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности.— Матем. сб., 1979, т. 108 (150): 2, с. 268—289.

6. Fuglede B. Extremal length and functional complection.— Acta Math., 1957, v. 98, № 3—4, p. 171—219.

7. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981, т. 2. 414 с.

г. Болгоград

Поступила
23.05.1984