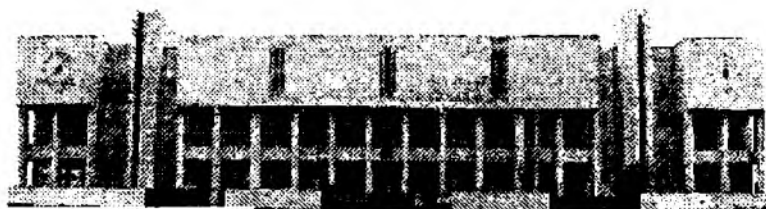


Выпуск 1

1996

**ВЕСТНИК
ВОЛГОГРАДСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

Серия: **Математика. Физика**



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

**ВЕСТНИК ВОЛГОГРАДСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Серия:

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

Научно-теоретический журнал

Выпуск 1

1996

Основан в 1996 году

Редакционный совет "Вестника ВолГУ":

д-р экон. наук, проф. О.В. Иншаков (председатель); д-р техн. наук, проф. Б.Н. Сипливыи (зам. председателя); д-р экон. наук, проф. М.М. Загорулько; д-р физ.-мат. наук, доц. А.И. Иванов; д-р ист. наук, проф. Д.М. Туган-Барановский; д-р филол. наук, проф. В.Б. Смирнов; д-р юрид. наук, проф. Ф.В. Глазырин; канд. экон. наук, доц. Е.Г. Русскова

Редакционная коллегия серии:

д-р физ.-мат. наук, доц. А.И. Иванов (отв. редактор); канд. физ.-мат. наук, доц. М.Б. Белоненко; канд. техн. наук, доц. В.Д. Захарченко; канд. физ.-мат. наук, доц. В.П. Заярный; канд. физ.-мат. наук, доц. А.М. Колодий; канд. физ.-мат. наук, доц. И.А. Вихлянцеv; канд. физ.-мат. наук, доц. А.Г. Лосев

Директор издательства ВолГУ Л.К. Кожевников



© Издательство Волгоградского
государственного университета, 1996

О ГАУССОВОМ ОБРАЗЕ МИНИМАЛЬНЫХ ТРУБОК С НЕНУЛЕВЫМ УГЛОМ ВЕКТОРА ПОТОКА

И.М. Решетникова, В.Г. Ткачев

В работе дается равномерная оценка снизу на диаметр гауссова образа сечений вложенных минимальных трубок произвольной размерности в терминах угла наклона вектор-потока трубки к ее оси. Как следствие, получена оценка протяженности двумерной минимальной трубки с конечной интегральной гауссовой кривизной.

1. Введение

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n и M — некомпактное $(n-1)$ -мерное риманово многообразие. Введем понятие трубки, следуя [1].

Определение 1. Поверхность $\mathcal{M} = (M, u)$, заданная C^2 -погружением $u : M \rightarrow \mathbf{R}^n$, называется *трубкой* с интервалом существования (или проекции) $t(\mathcal{M}) \subset O x_n$, если

- 1) $\forall t \in t(\mathcal{M})$ сечения $\Sigma_t = u^{-1}(u(\mathcal{M}) \cap \Pi_t)$, $\Pi_t = \{x \in \mathbf{R}^n : x_n = t\}$, непустые компактные множества;
- 2) $\forall t_1, t_2 \in t(\mathcal{M})$ порция \mathcal{M} , расположенная между двумя различными гиперплоскостями Π_{t_1} и Π_{t_2} , является компактом.

Длина интервала $t(\mathcal{M})$ обозначается далее $|t(\mathcal{M})|$ и называется временем существования трубки \mathcal{M} .

В данной работе мы рассматриваем только случай вложенных поверхностей, поэтому не будем делать различий в обозначениях, касающихся самого многообразия M и поверхности $\mathcal{M} = (M; u)$. Например, Σ_t одновременно означает как подмножество M , так и подмножество \mathbf{R}^n , соответствующее образу Σ_t при отображении u .

Всюду далее мы полагаем, что поверхность \mathcal{M} является минимальной, т.е. ее средняя кривизна всюду обращается в нуль. В этом случае можно ввести важный геометрический инвариант такой поверхности, называемый вектор-поток. С этой целью рассмотрим произвольно регулярное значение t координатной функции $x_n(m) \equiv x_n \circ u(m)$. Тогда множество Σ_t является компактным подмногообразием M , вообще говоря несвязным. Пусть Σ — некоторая компонента связности Σ_t , оснащенная как подмногообразие полем ν внутренних нормалей, согласованным с направлением координатного вектора e_n в следующем смысле: $\langle \nu, e_n \rangle > 0$ всюду вдоль Σ . Заметим, что в силу регулярности значения t скалярное произведение $\langle \nu, e_n \rangle$ нигде не обращается в нуль на Σ , и поэтому выбор направления ν оправдан.

При фиксированном Σ выражение $F_\Sigma(x) = \int_\Sigma \langle x, \nu \rangle : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ является линейным функционалом от x и поэтому, в силу теоремы Рисса, найдется единственный вектор $J(\Sigma) \in \mathbf{R}^n$ такой, что

$$F_\Sigma(e) \equiv \int_\Sigma \langle e, \nu \rangle = \langle e, J(\Sigma) \rangle. \quad (1)$$

Обозначим далее через a^V ортогональную проекцию вектора $a \in \mathbf{R}^n$ на данное подпространство V и через $T = T_m M$ — касательное пространство в точке $m \in M$. Тогда, в силу нашего выбора,

$$\langle J(\Sigma), e_n \rangle = \int_\Sigma \langle e_n, \nu \rangle = \int_\Sigma |e_n^\top| > 0,$$

следовательно, $J(\Sigma) \neq 0$ и сонаправлен с e_n .

Определение 2. Назовем *циклом* Σ в Σ_t произвольное несвязное объединение $\bigsqcup_{i=1}^k \Sigma_i$ компонент связности $\Sigma_i \subset \Sigma_t$ с сохранением их ориентаций. Два ориентированных цикла Σ' и Σ'' *бордантны* друг другу в \mathcal{M} , или $\Sigma' \stackrel{\mathcal{M}}{\sim} \Sigma''$, если существует открытое подмножество $D \subset M$ такое, что $\partial D = (-\Sigma') \cup \Sigma''$ [2, с. 221]. Цикл называется *простым*, если он бордантно эквивалентен нулю, т.е. является краем некоторого компактного многообразия.

Следствием вышеприведенных определений является

Предложение 3. Для $\Sigma = \Sigma^1 \sqcup \dots \sqcup \Sigma^k$

$$J(\Sigma) = J(\Sigma^1) + \dots + J(\Sigma^k).$$

Кроме того, если $\Sigma' \stackrel{\mathcal{M}}{\approx} \Sigma''$, то $J(\Sigma') = J(\Sigma'')$.

Доказательство необходимо разве лишь для второго утверждения. С этой целью напомним [3, с. 309], что координатные функции минимальной поверхности являются гармоническими. Пусть $D \subset M$ — открытое множество, отвечающее определению бордантности, такое, что $\partial D = \Sigma' \cup \Sigma''$. Тогда для любого $e \in \mathbf{R}^n$

$$\langle J(\Sigma'), e \rangle - \langle J(\Sigma''), e \rangle = \int_{\partial D} \langle e, \nu \rangle = \int_{\partial D} \langle \nabla f, \nu \rangle = \int_D \Delta f = 0,$$

где $\nabla f = e^\top$ — градиент координатной функции $f = \langle e, u(m) \rangle$. □

Из последнего утверждения следует, что определение $J(\Sigma_t)$ не зависит от выбора $t \in t(\mathcal{M})$.

Определение 3. Величина $J(\mathcal{M}) = J(\Sigma_t)$ называется полным вектор-потокотом трубки \mathcal{M} .

Пусть S^{n-1} — стандартная единичная евклидова сфера в \mathbf{R}^n и $d(E)$ — диаметр подмножества $E \subset S^{n-1}$, подсчитанный в сферической метрике. Обозначим через $\gamma : M \rightarrow S^{n-1}$ гауссово отображение поверхности \mathcal{M} , сопоставляющее каждой точке $m \in M$ нормальный вектор $\gamma(m)$, и для данного подмножества $E \subset M$ через $\gamma(E)$ — его гауссов образ. Основная цель настоящей работы — доказательство следующего утверждения, описывающего структуру гауссова образа сечений минимальных трубок.

Теорема 1. Пусть \mathcal{M} — минимальная трубка в \mathbf{R}^n , $\Sigma \subset \Sigma(t)$ — некоторая простая связанная компонента с вектор-потокотом $J(\Sigma)$. Тогда диаметр гауссова образа $\gamma(\Sigma)$ компоненты Σ удовлетворяет неравенству

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2\alpha(\Sigma), \quad (2)$$

где $\alpha(\Sigma)$ — угол между $J(\Sigma)$ и e_n .

Как следствие, в разделе 4 мы получаем оценку интервала существования двумерных трубок. Действительно, в двумерном случае $\dim \Sigma = 1$ и, следовательно, все циклы простые (см. например [2, с. 224]). Кроме того, отметим, как следствие неравенства (2), что если угол между векторами $J(\Sigma)$ и e_n отличен от нуля, то гауссово отображение минимальной трубки не может стабилизироваться при приближении к любой компоненте края поверхности \mathcal{M} . В случае $\dim M = 2$ гауссово отображение минимальной трубки конформно и последнее замечание влечет, что поверхность \mathcal{M} должна иметь гиперболический конформный тип. Как следствие работы [1], интервал существования трубок с ненулевым углом наклона к оси Ox_n обязательно конечен.

В заключение отметим, что используя совершенно иной метод, пригодный лишь для двумерного случая и базирующийся на рассмотрении представления Вейерштрасса для минимальных поверхностей, в [4] вторым автором были получены аналогичные результаты.

2. Предварительные сведения из внешней алгебры

Будем обозначать через $\Lambda(\mathbf{R}^n)$ и $\Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ — внешнюю алгебру пространства \mathbf{R}^n и ее подпространство кососимметрических k -форм соответственно. Зафиксируем канонический базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в \mathbf{R}^n и обозначим через $\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ форму объема, порождающую ориентацию \mathbf{R}^n . Далее приводятся некоторые факты из внешней алгебры, которые могут быть найдены, например, в книге Стернберга [5]. Договоримся также записывать $a \simeq b$, если $a = \pm b$.

Для данного $u \in \Lambda(\mathbf{R}^n)$ определим оператор внутреннего умножения $u \lrcorner \cdot$ на $\Lambda(\mathbf{R}^n)$, полагая

$$\langle x, u \lrcorner y \rangle \equiv \langle u \wedge x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \Lambda(\mathbf{R}^n). \quad (3)$$

Через $*$ обозначим оператор Ходжа $\Lambda^k(\mathbf{R}^n) \rightarrow \Lambda^{n-k}(\mathbf{R}^n)$, полагая для любой k -формы x

$$*x = x \lrcorner \omega. \quad (4)$$

Перечислим некоторые стандартные свойства этих операторов (см. [5, с. 33]):

- (i) $**x = (-1)^{k(n-k)}x \simeq x, \quad \forall x \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n);$
- (ii) $x \wedge *y = \langle x, y \rangle \omega, \quad \forall x \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n), \forall y \in \Lambda^{n-k}(\mathbf{R}^n);$
- (iii) $\langle *x, *y \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n).$

Пусть $V \subset \mathbf{R}^n$ — ориентированное k -мерное подпространство и v_1, \dots, v_k — некоторый ортонормированный базис V (далее мы употребляем термин *репер*) с согласованной ориентацией. Тогда нетрудно видеть, что форма

$$\sigma(V) \equiv v_1 \wedge \dots \wedge v_k,$$

на самом деле, не зависит от выбора репера v_1, \dots, v_k . Определим также оператор

$$\pi_V(\xi) = *(\sigma(V) \wedge \xi).$$

Если $V \subset \mathbf{R}^n$ — ориентированное подпространство, $\dim V = n - 1$, и ξ — некоторый единичный вектор, ортогональный V (т.е. $\xi \in V^\perp$), то из свойства (ii) вытекает представление

$$\xi \simeq *\sigma(V). \tag{5}$$

Лемма 1. Для любых $a \in \Lambda^r(\mathbf{R}^n), b \in \Lambda^k(\mathbf{R}^n)$ выполнено

$$a \dashv (*b) = *(b \wedge a).$$

Доказательство. Имеем для любого $\xi \in \Lambda^{n-k-r}(\mathbf{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \langle a \dashv *b, \xi \rangle &= \langle *b, a \wedge \xi \rangle = \langle b \dashv \omega, a \wedge \xi \rangle = \\ &= \langle \omega, b \wedge a \wedge \xi \rangle = \langle (b \wedge a) \dashv \omega, \xi \rangle = \langle *(b \wedge a), \xi \rangle. \end{aligned}$$

В силу произвола в выборе ξ имеем $*(b \wedge a) = a \dashv *b$, что и требовалось доказать. \square

Лемма 2. Пусть $V \subset \mathbf{R}^n$ — подпространство, $\dim V = k$, и V^\perp — его ортогональное дополнение. Тогда для $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$x^{V^\perp} = \sigma(V) \dashv (\sigma(V) \wedge x). \tag{6}$$

Доказательство. Выберем в V ориентированный репер v_1, \dots, v_k и дополним его до ориентированного репера \mathbf{R}^n : $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}$. Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ — произвольный вектор и $x = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k + y_1 w_1 + \dots + y_{n-k} w_{n-k}$ — его ортогональное разложение. Тогда для любого v_i имеем

$$\langle \sigma(v) \dashv (\sigma(v) \wedge x), v_i \rangle = \langle \sigma(v) \wedge x, \sigma(v) \wedge v_i \rangle = 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle \sigma(v) \dashv (\sigma(v) \wedge x), w_\alpha \rangle &= \langle \sigma(v) \wedge x, \sigma(v) \wedge w_\alpha \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} \langle \sigma(v) \wedge w_j, \sigma(v) \wedge w_\alpha \rangle = \sum_{j=1}^{n-k} y_j \delta_{j\alpha} = y_\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, по определению внутреннего умножения,

$$\sigma(v) \dashv (\sigma(v) \wedge x) = y_1 w_1 + \dots + y_{n-k} w_{n-k} = x^{V^\perp},$$

что и требовалось доказать. \square

3. Доказательство теоремы 1

Обозначим далее через Π гиперплоскость в \mathbf{R}^n , задаваемую уравнением $x_n = 0$, через $T \equiv T_m \Sigma$ — касательное пространство к сечению Σ (рассматриваемому как подмногообразию Π) и $\gamma = \gamma(m)$ — вектор внешней нормали к поверхности \mathcal{M} в точке m . Пусть вектора $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$ образуют ориентированный репер в T и $\tau \equiv \sigma(T)$ — элемент объема в $T_m \Sigma$.

Лемма 3. Пусть ξ и η — единичные вектора, такие, что вектора $\xi, \eta, \tau_1, \dots, \tau_{n-2}$ образуют ориентированный репер в \mathbf{R}^n . Тогда для любого вектора $q \in \mathbf{R}^n, \|q\| \neq 0$, имеем

$$\langle q, \xi \rangle \simeq \langle \eta, \pi_T(q) \rangle.$$

Доказательство. Из свойства (5) находим, что

$$\xi \simeq *(\eta \wedge \tau),$$

и, используя (iii) и лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \langle q, \xi \rangle &\simeq \langle q, *(\eta \wedge \tau) \rangle \simeq \langle q, *(\tau \wedge \eta) \rangle \simeq \langle q, \eta \lrcorner * \tau \rangle \simeq \\ &\simeq \langle \eta \wedge q, * \tau \rangle \simeq \langle \eta, q \lrcorner * \tau \rangle \simeq \langle \eta, *(\tau \wedge q) \rangle \simeq \langle \xi, \pi_T(q) \rangle \end{aligned}$$

что и требовалось проверить. \square

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Пусть $\eta = \eta(m)$ — поле единичных нормалей к Σ как подмногообразию Π_t , ориентированное так, что пара $(T; \eta)$ образует ортонормированный репер Π . Тогда, применяя лемму 2, получим для любого вектора $q \in \mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle \pi_T(q), e_n \rangle &= \int_{\Sigma} \langle *(\tau \wedge q), e_n \rangle \simeq \int_{\Sigma} \langle \tau \wedge q, *e_n \rangle \simeq \\ &\simeq \int_{\Sigma} \langle \tau \wedge q, \tau \wedge \eta \rangle \simeq \int_{\Sigma} \langle q, \tau \lrcorner (\tau \wedge \eta) \rangle \simeq \int_{\Sigma} \langle q, \eta \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Действительно, как вложенное компактное подмногообразие Π_t без края, простой цикл Σ является границей некоторой компактной области $\Omega \subset \Pi_t$. Тогда, применяя формулу Стокса, получим:

$$\int_{\partial\Omega} \langle q, \eta \rangle = \int_{\Omega} \operatorname{div} q = 0.$$

Таким образом, из (7) следует тождество:

$$\int_{\Sigma} \langle \pi_T(q), e_n \rangle = 0. \quad (8)$$

Выберем теперь вектор q произвольно так, чтобы выполнялось соотношение $\langle q, J(\Sigma) \rangle = 0$. В этом случае, учитывая взаимную ортогональность нормалей γ, ν и касательного пространства $T_m \Sigma$, из (1) и леммы 3 последовательно получаем:

$$0 = \int_{\Sigma} \langle q, \nu \rangle = \int_{\Sigma} \langle \pi_T(q), \gamma \rangle,$$

и, используя (8), приходим к равенствам

$$\int_{\Sigma} \langle \pi_T(q), \gamma \pm e_n \rangle = 0. \quad (9)$$

В силу регулярности значения t оба выражения $\gamma \pm e_n$ не обращаются в нуль нигде на Σ . Поэтому вдоль Σ корректно определены векторные поля

$$v_{\pm}(m) = \frac{e_n \pm \gamma(m)}{\|e_n \pm \gamma(m)\|}.$$

Используя (9) и теорему о среднем, получим, что найдутся две точки m_- и m_+ в Σ , для которых выполнено

$$\langle \pi_{T_{\pm}}(q), v_{\pm} \rangle = 0, \tag{10}$$

где $T_{\pm} = T_{m_{\pm}}M$ и $v_{\pm} = v_{\pm}(m_{\pm})$.

Заметим теперь, что набор $(v_-, v_+, \tau_1, \dots, \tau_{n-2})$ образует ориентированный репер \mathbf{R}^n . Тогда, применяя к (10) лемму 3, будем иметь

$$0 = \langle \pi_{T_+}(q), v_+ \rangle \simeq \langle v_-, q \rangle$$

в точке m_- и соответственно в точке m_+ :

$$0 = \langle \pi_{T_-}(q), v_- \rangle \simeq \langle v_+, q \rangle.$$

Избавляясь от знаменателей в определении векторов v_{\pm} , из последних равенств получим

$$\langle q, e_n \pm \gamma(m_{\pm}) \rangle = 0.$$

Вычитая одно равенство из другого, получим

$$\langle \gamma(m_+) - \gamma(m_-), q \rangle = 2q_n,$$

где $q_n = \langle q, e_n \rangle$ — n -я координата q . Наконец, применяя неравенство Коши-Буняковского к последнему тождеству, приходим к неравенству

$$\|\gamma(m_+) - \gamma(m_-)\| \geq \frac{2q_n}{\|q\|}. \tag{11}$$

Учитывая, что $\gamma(m_{\pm})$ — точки на единичной сфере, принадлежащие гауссову образу компоненты Σ , получим $\|\gamma(m_+) - \gamma(m_-)\| = 2 \sin \frac{\beta}{2}$, где β — угол между $\gamma(m_+)$ и $\gamma(m_-)$. С другой стороны, по определению сферического диаметра подмножества $\gamma(\Sigma) \subset S^{n-1}$, выполнено неравенство $d(\gamma(\Sigma)) \geq \beta$. Таким образом, из (11) будем иметь:

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2 \arcsin \frac{q_n}{\|q\|}.$$

Найдем максимальное значение правой части последнего неравенства. Пусть $\alpha(\Sigma)$ — угол между векторами $J(\Sigma)$ и e_n . Тогда, учитывая ортогональность q вектор-потoku $J(\Sigma)$, легко определить, что

$$\max_{q \perp J(\Sigma)} \frac{q_n}{\|q\|} = \sin \alpha(\Sigma)$$

и, таким образом,

$$d(\gamma(\Sigma)) \geq 2\alpha(\Sigma),$$

что завершает доказательство теоремы 1 полностью. □

4. Приложения

Продемонстрируем применение доказанного результата для случая двумерных минимальных трубок. Как уже отмечалось выше, гауссово отображение таких поверхностей конформно. Пусть \mathcal{M} — сначала двусвязная вложенная трубка. Тогда можно считать, что \mathcal{M} конформно эквивалентна некоторому кольцу и, как показано в [1], ее конформный модуль равен:

$$\text{mod } \mathcal{M} = \frac{|t(\mathcal{M})|}{\langle J(\mathcal{M}), e_3 \rangle}.$$

В силу конформности гауссова отображения, для любого касательного вектора $X \in T_m M$ выполнено

$$\|d\gamma_m(X)\| = \lambda(m)\|X\|,$$

где $\lambda(m)$ — некоторая гладкая функция. При этом для гауссовой кривизны имеет место равенство — $K(m) = -\lambda^2(m)$.

Имеем для любого $t \in t(\mathcal{M})$

$$\int_{\Sigma_t} \lambda ds = \int_{\gamma(\Sigma_t)} ds_1 \geq 2d(\gamma(\Sigma_t)),$$

где ds_1 — сферическая метрика. Применяя теорему 1, получим

$$\int_{\Sigma_t} \lambda ds \geq 4\alpha(\mathcal{M}), \quad (12)$$

где $\alpha(\mathcal{M})$ — угол между вектор-потокком $J(\mathcal{M})$ и e_3 .

Используя теперь определение конформного модуля ([6]),

$$\text{mod } \mathcal{M} = \inf_{\varrho \geq 0} \frac{\int_{\mathcal{M}} \varrho^2 dS}{\left(\inf_t \int_{\Sigma_t} \varrho ds \right)^2},$$

где dS — элемент площади \mathcal{M} , и полагая $\varrho = \lambda$, получим из (12)

$$\text{mod } \mathcal{M} \leq \frac{\int_{\mathcal{M}} (-K) dS}{16\alpha^2(\mathcal{M})}.$$

Напомним, что выражение $G(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} K dS$ называется интегральной гауссовой кривизной поверхности \mathcal{M} . Учитывая выражение для конформного модуля трубки, получим следующую оценку на время существования:

$$|t(\mathcal{M})| \leq \frac{J_3(\mathcal{M})|G(\mathcal{M})|}{16\alpha^2(\mathcal{M})}.$$

В недавно направленной в печать работе вторым автором было показано, что последняя оценка может быть распространена на двумерные погруженные минимальные трубки произвольного топологического типа.

Summary

ON THE GAUSSIAN IMAGE OF MINIMAL TUBES WITH NONDEGENERATE ANGLE OF FLOW-VECTOR

I.M. Reshetnikova, V.G. Tkachev

We prove an uniformal estimate of the minimal tubes Gaussian image diameter in the case of arbitrary dimension in terms of the angle between the axe of the tube and its flow-vector. As a consequence we obtain an estimate of the length of twodimensional tube with finite total Gaussian curvature.

Литература

1. Миклюков В.М. О некоторых свойствах трубчатых в целом минимальных поверхностей в \mathbb{R}^n // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. N 3. С. 549–552.
2. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 2.
4. Tkachev V.G. Minimal tubes and coefficients of holomorphic functions in annulus // Generalizations of Complex Analysis and Applications in Physics, Abstracts of Banach Center Symposium. Warsaw, June 13-19, 1994. P. 70.
5. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
6. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.