ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 340, № 3, с. 317 - 318

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.951

# ЗАМЕТКА О ТЕОРЕМЕ ЙОРГЕНСА–КАЛАБИ–ПОГОРЕЛОВА

 В. Г. Ткачев

Представлено академиком А.В. Погореловым 14.12.93 г.

Поступило 14.12.93 г.

1. Пусть $S_k(A)$ означает $k$-ю главную симметрическую функцию собственных чисел матрицы $A$, т.е.

$$\det(A+tI) = \sum_{k=0}^{n} S_k(A)t^{n-k}.$$

Хорошо известна следующая (см. [1 - 4])

Теорема A (Йоргенс–Калаби–Погорелов). *Пусть $f(x)$ – выпуклая, определенная во всем $\mathbb{R}^n$ функция, удовлетворяющая уравнению*

$$S_n(\mathrm{Hess}\, f) \equiv \det(\mathrm{Hess} f) = 1,$$

*где* $\mathrm{Hess} f$ *– гессиан функции* $f(x_0 = f(x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда $f(x)$ является многочленом второй степени, т.е.*

$$f(x) = a + \langle b, x\rangle + \langle x, Ax\rangle, \tag{1}$$

*где $A$ – постоянная $(n\times n)$-матрица с* $\det A = 1$ *и угловые скобки означают скалярное произведение.*

Естественным, с нашей точки зрения, является вопрос: до каких пор остается в силе утверждение сформулированной выше теоремы в случае, когда $f(x)$ есть выпуклое целое решение следующего общего уравнения:

$$L[f] \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(x)S_i(\mathrm{Hess} f) = 0. \tag{2}$$

Здесь на непрерывные коэффициенты $a_k(x)$, вообще говоря, не налагается требование постоянности.

Недавно А.А. Борисенко в [5] доказал теоремы лиувиллева типа для специальных случаев оператора $L$:

$$\begin{aligned} L[f] &= S_n(\mathrm{Hess} f) - S_1(\mathrm{Hess} f) = \\ &= \det(\mathrm{Hess} f) - \Delta f = 0; \end{aligned} \tag{3}$$

$$L[f] = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k S_{2k+1}(\mathrm{Hess} f) = 0. \tag{4}$$

Как следует из [5], единственные целые выпуклые решения уравнений (3) и (4) с линейным асимптотическим ростом на бесконечности суть линейные функции. Техника доказательства этого утверждения основывается на специальных интегральных оценках. При этом указывается, что решения (3) и (4) описывают специальные лагранжевы многообразия, задаваемые в непараметрической форме.

Цель настоящей заметки – установить следующее утверждение, обобщающее [5] в различных направлениях и отвечающее на поставленный вопрос в случае, когда коэффициенты оператора $L[f]$ удовлетворяют условию квазипостоянности:

(Q) либо $a_k(x) \equiv 0$ на $\mathbb{R}^n$, либо существуют строго положительные постоянные $\mu_1$, $\mu_2$ такие, что $\mu_1 \le |a_k(x)| \le \mu_2$.

А именно, имеет место

Теорема. *Пусть $f(x)$ – целое выпуклое решение класса $C^2$ уравнения (2). Пусть выполнено (Q) и*

$$\varlimsup_{\|x\|\to\infty} \frac{|f(x)|}{\|x\|^2} = 0. \tag{5}$$

*Тогда $f(x)$ – линейная функция.*

Замечание. Пример, приводимый в конце заметки, показывает, что существуют операторы $L$, для которых выполняется предположение (Q), и решение асимптотически растет как $\|x\|^2$ и отлично от квадратичного полинома. Таким образом, (5) является оптимальным условием в указанном смысле.

2. Будем использовать стандартное обозначение $A \ge B$, если разность $A - B$ есть положительно-полуопределенная матрица. Обозначим далее $J = J(L)$ – множество всех индексов $i$, $0 \le i \le n$, для которых $a_i(x) \ne 0$.

Лемма. *Пусть $A(x) \ge 0$ – непрерывная $(n \times n)$-матрица, удовлетворяющая уравнению*

$$L(A(x)) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(x)S_i(A(x)) = 0, \tag{6}$$

*при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда либо $S_i(A(x)) = 0$ для любого $i \in J$, либо существуют номер $k \in J$ и постоянная $\sigma_0$, зависящие только от $\mu_1$, $\mu_2$, для которых*

$$S_k(A(x)) \ge \sigma_0 > 0.$$

Доказательство основывается на следующих аргументах. Заметим, что $S_k(A(x)) \ge 0$ в силу положительной полуопределенности $A(x)$. Таким

*Волгоградский государственный университет*

образом, если все коэффициенты $a_k(x)$ имеют один знак, то для $i \in I$ выполнено $S_i(A(x)) \equiv 0$.

Предположим теперь, что существуют точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и номер $k \in I$ такие, что $S_k(A(x_0)) > 0$. В этом случае найдутся по крайней мере уже два коэффициента противоположного знака (причем в силу условия (Q) и требования непрерывности это свойство выполнено во всем $\mathbb{R}^n$). Перепишем (6) в виде

$$|a_{i_1}|S_{i_1}(A) + \ldots + |a_{i_m}|S_{i_m}(A) = \\ = |a_{j_1}|S_{j_1}(A) + \ldots + |a_{j_p}|S_{j_p}(A),$$

где $i_1 < \ldots < i_m$, $j_1 < \ldots < j_p$, $i_1 < j_1$, и покажем, что индекс $k = i_1$ удовлетворяет заключению леммы. Действительно,

$$S_{i_1}(A) \le b_1 S_{j_1}(A) + \ldots + b_p S_{j_p}(A), \qquad (7)$$

где $b_k = |a_{j_k}|/|a_{i_1}| \le \mu_2/\mu_1$. Теперь, используя неравенство между симметрическими функциями [6, предложение 3.2.2]

$$\left(\frac{S_k(A)}{C_n^k}\right)^m \le \left(\frac{S_m(A)}{C_n^m}\right)^k,$$

при $1 \le m \le k \le n$ получим из (7)

$$S_{i_1}(A) \le \frac{\mu_2}{\mu_1}\sum_{i=1}^{p} \alpha_k (S_{i_1}(A))^{\nu_k},$$

где $\nu_k = j_k/i_1 > 1$ и $\alpha_k = C_n^{j_k}(C_n^{i_1})^{-\nu_k}$.

Заметим, что левая часть уравнения

$$\frac{\mu_2}{\mu_1}\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \sigma^{\nu_k - 1} = 1$$

является возрастающей функцией, и пусть $\sigma = \sigma_0$ – его единственный положительный корень. Тогда, ввиду положительности $S_{i_1}(A(x_0))$, заключаем, что $S_{i_1}(A(x_0)) \ge \sigma_0$. Но по непрерывности $A(x)$ последнее неравенство выполнено во всем $\mathbb{R}^n$, и лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$ – *выпуклое решение уравнения* (2). *Тогда либо* $\det(\mathrm{Hess} f) \equiv 0$ *в* $\mathbb{R}^n$, *либо существует номер* $k \in I$ *такой, что для всех* $x \in \mathbb{R}^n$

$$S_k(\mathrm{Hess} f) \ge \sigma_0 > 0, \qquad (8)$$

*где* $k$, $\sigma_0$ *из предыдущей леммы.*

3. Приведем схему доказательства теоремы. Пусть сначала (8) выполнено всюду в $\mathbb{R}^n$. Можно считать, рассматривая, если нужно, подходящий сдвиг $f \to \pm f(x) + \langle a, x\rangle$, что решение – всюду неотрицательная функция. Ввиду условия (5) выберем для данного $\varepsilon > 0$ число $p$ так, что $f(x) \le \le \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2 + p$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Но функция $g(x) = = \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2 - f(x)$ равномерно стремится к бесконечности вдоль последовательностей $x_m \to \infty$. Следовательно, $g(x)$ достигает своего минимума в некоторой конечной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и:

$$(\mathrm{Hess}\, g)(x_0) = \mathrm{Hess}\left(\frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2\right) - (\mathrm{Hess} f)(x_0) \ge 0,$$

откуда находим $(\mathrm{Hess} f)(x_0) \le \varepsilon I$, где $I$ – единичная матрица.

Поскольку $(\mathrm{Hess} f)(x_0)$ – положительно-полуопределенная матрица, то, используя принцип мажоризации (см. [7, следствие 4.3.3]), получим

$$S_i(\mathrm{Hess} f(x_0)) \le S_i(\varepsilon I) = \varepsilon^i C_n^i, \quad 1 \le i \le n.$$

Но наше предположение $S_k(\mathrm{Hess} f(x)) \ge \sigma_0$ противоречит произволу в выборе $\varepsilon > 0$. Таким образом, выполняется вторая альтернатива следствия, т.е. $\det(\mathrm{Hess} f) \equiv 0$. Данное уравнение может быть исследовано аналогично рассуждениям, изложенным в [5], и в итоге мы получаем, что $f(x)$ – линейная функция. Теорема доказана.

4. Пример. Пусть $\alpha(t)$ – положительная функция, отличная от постоянной, такая, что $0 < q \le \alpha(t) \le q^{-1}$ при заданном $q < 1$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i} (x_i - t)\,\alpha(t)\,dt,$$

для которой $\mathrm{Hess} f = \|(x_i)\delta_{ij}\|$. Следовательно, функция $f(x)$ выпуклая и является решением уравнения

$$S_n(\mathrm{Hess} f) - \omega(x) S_0(\mathrm{Hess} f) = 0$$

с $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(x_1) \ldots \alpha(x_n)$. Нетрудно видеть, $q^n \le \omega(x) \le q^{-n}$, т.е. коэффициенты $a_k(x)$ удовлетворяют (Q) и, более того,

$$\frac{q}{2}\|x\|^2 \le |f(x)| \le \frac{1}{2q}\|x\|^2,$$

т.е. $f(x)$ имеет квадратичный асимптотический рост.

Статья выполнена при финансовой поддержке фонда Дж. Сороса "Культурная инициатива" (1993 г.).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jörgens K.* // Math. Ann. 1954. V. 127. P. 130 - 134.
2. *Calabi E.* // Mich. Math. J. 1958. V. 5. P. 105 - 126.
3. *Pogorelov A.V.* // Geom. Dedic. 1972. V. 1. P. 33 - 46.
4. *Погорелов А.В.* Многомерное уравнение Монжа–Ампера. М.: Наука, 1988.
5. *Борисенко А.А.* // Мат. заметки. 1992. Т. 52. С. 22 - 25.
6. *Маркус М., Минк М.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
7. *Джонсон К.Р., Хорн Р.А.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.