ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1999, том 367, № 2, с. 164–165

МАТЕМАТИКА

УДК 517.54+517.95

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ХЕЛЕ–ШОУ

© 1999 г. О. С. Кузнецова, В. Г. Ткачев

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 26.03.98 г.

Поступило 26.03.98 г.

1. Рассматриваемое ниже нелинейное уравнение возникает в ряде задач математической физики о плоском течении Хеле–Шоу вязкой жидкости со свободной границей [1, 2]. В последние десять лет интерес к этой проблематике усилился благодаря появившимся приложениям в задачах кристаллографии и полимерообразования, а также из-за глубокой связи решений уравнения Хеле–Шоу с задачами нелинейной теории потенциала и геометрической теорией конформных отображений [3, 4]. В своей общей постановке проблема Хеле–Шоу состоит в описании качественных свойств эволюционного семейства областей, которое порождается конечным числом точечных источников (или стоков) в начальной плоской области Ω. Отметим, что число источников и конфигурация начальной области существенно отражаются как на топологии задачи, так и на ее аналитических свойствах [5]. Всюду далее мы рассматриваем модельный случай начальной односвязной области и одного источника.

Обозначим через $B = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| \le 1\}$ замкнутый единичный круг. Пусть функция $w(z, t)\colon B \to \Omega_t$ является аналитическим решением нелинейного уравнения

$$\frac{\partial w(z,t)}{\partial t} = Qw'_z S\left(\frac{1}{\left|w'_z(e^{i\zeta}, t)\right|^2}\right), \qquad w(0,t) = 0, \quad w'_z(0,t) > 0, \tag{1}$$

где $S(u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u\,(e^{i\zeta}, t)\frac{e^{i\zeta}+z}{e^{i\zeta}-z}\,d\zeta$ – оператор Шварца, восстанавливающий аналитическую в B функцию по ее вещественной части на $\partial B = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = 1\}$. Параметр Q является нормированной мощностью источника и в случаях $Q = 1$ и $Q = -1$ описывает задачу с источником в начале координат или стоком соответственно. Начальная конфигурация области $\Omega = \Omega_0$ задается условиями $w(z, t)|_{t=0} = w(z)\colon B \to \Omega_0$. Тогда функция $w(z, t)$ описывает динамику перемещающейся границы $\partial\Omega_t$ области Ω_t для всего времени своего существования $[0, t^*)$. Всюду далее через $A(\Omega_t)$ обозначается площадь области Ω_t.

Локальная разрешимость краевой задачи (1) при начальных аналитических данных была в разное время установлена в [6, 7]. При этом случаи стока и источника имеют качественное различие. Именно, при $Q = -1$ задача плохо обусловлена и возможные особенности решений задачи Хеле–Шоу рассматривались в работах [1, 9].

2. Ниже мы рассматриваем (1) с $Q = 1$ (задача с источником). Одним из основных вопросов в этом случае является проблема описания начальных конфигураций Ω_0, для которых решение $w(z, t)$ существует на всей положительной полуоси $t \in [0, +\infty)$ и каждая функция $w(z, t)$ реализует однолистное конформное отображение круга B на Ω_t. Введем следующее определение.

Пусть M – класс односвязных областей, отвечающий некоторому геометрическому или функциональному условию. Будем говорить, что класс M является инвариантным относительно уравнения Хеле–Шоу, если для $\Omega_0 \in M$ решение $w(z, t)$ существует при всех $t \in [0, +\infty)$ и для любого $t \ge 0$ выполнено $\Omega_t \in M$.

Простейшим инвариантным классом является семейство звездных относительно начала координат областей. Другой нетривиальный пример – так называемые δ-спиралеобразные области, т.е. области, граница которых достижима с помощью логарифмических спиралей с фиксированным угловым параметром δ [8]. В качестве инвариантных классов с функциональным условием укажем класс квадратурных областей, т.е. областей с данным набором фиксированных комплексных моментов

$$M_n(\Omega) = \iint_\Omega z^n\,dxdy;$$

здесь n пробегает множество целых положительных чисел. В работе [2] показано, что для эволюционного семейства областей Ω_t моменты $M_n(\Omega_t)$ не зависят от t (см. также недавний обзор [3]).

Волгоградский государственный университет

3. Пусть Ω – произвольная односвязная область в комплексной плоскости и $\lambda \geq 0$. Обозначим через $\lambda \cdot \Omega$ область, гомотетичную Ω с коэффициентом λ. Для данных двух областей A и B с компактным замыканием обозначим через $d(A; B)$ расстояние по Хаусдорфу, т.е. наибольшее из чисел $\inf\{r: A_r \supset B\}$ и $\inf\{r: B_r \supset A\}$. Здесь для $r \geq 0$ через A_r обозначена r-окрестность множества A. Напомним, что семейство A_r сходится к B при $r \to r_0$, или $A_r \to B$, если выполнено

$$\lim_{r \to r_0} d(A_r, B) = 0.$$

Через $\delta(\Omega)$ обозначим изопериметрический дефект данного компактного множества Ω со спрямляемой границей, т.е.

$$\delta(\Omega) = \frac{1}{4\pi} p^2(\Omega) - A(\Omega),$$

где $p(\Omega)$ – периметр Ω.

Сформулируем основной результат заметки.

Теорема 1. *Пусть M – произвольный инвариантный класс и $\Omega_0 \in M$. Пусть $\{\Omega_t\}$ – эволюционное семейство, соответствующее решению уравнения* (1) *с начальной областью Ω_0. Тогда для любого $t \geq 0$*

$$\delta(\Omega_t) \leq \pi c_0 - A_0,$$

где A_0 – площадь $A(\Omega_0)$ начальной области.

Хорошо известно, что площадь области Ω_t удовлетворяет соотношению $A(\Omega_t) = 2Qt + A(\Omega_0) = 2t + A_0$ [2]. Используя классические свойства изопериметрического неравенства и хаусдорфовой метрики, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть M – произвольный инвариантный класс и $\Omega_0 \in M$. Пусть $\omega_t = \frac{1}{\sqrt{2t + A_0}} \Omega_t$, где Ω_t – область, соответствующая решению уравнения* (1) *с начальной областью Ω_0. Тогда имеет место сходимость*

$$\omega_t \to B,$$

где B – замкнутый единичный круг с центром в нуле и A_0 – площадь $A(\Omega_0)$ начальной области.

Замечание. Подчеркнем, что указанная сходимость к единичному кругу имеет место для произвольного класса M. Отметим также, что утверждение, аналогичное теореме 1, но в более слабой форме, получено методами теории потенциалов в недавней работе [3].

Доказательство сформулированных выше утверждений опирается на изучение субгармонических функций, ассоциированных с решениями уравнения Хеле–Шоу, а также на изучение связей между конформными и геометрическими характеристиками эволюционного семейства областей Ω_t.

Авторы выражают признательность В.М. Миклюкову и Д.В. Прохорову за полезное обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полубаринова-Кочина П.Я.* // ДАН. 1945. Т. 47. В. 4. С. 254–257.
2. *Richardson S.* // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. № 4. P. 609–618.
3. *Sakai M.* // Lect. Notes Math. 1982. V. 934.
4. *Gustafsson B., Sakai M.* // Nonlinear Anal. 1994. V. 22. P. 1221–1245.
5. *Entov V.M., Etingof P.I.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1991. V. 44. P. 507–535.
6. *Виноградов Ю.П., Куфарев П.П.* // ПММ. 1948. Т. 12. С. 181–198.
7. *Elliot C.M., Janovsky V.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1981. V. 88. P. 93–107.
8. *Кузнецова О.С.* // Тез. конф. “Алгебра и анализ”. Казань: Изд-во КазГУ, 1997. С. 131–132.
9. *Hohlov Y.E., Howison S.D.* // Quart. Appl. Math. 1994. V. 54. P. 777–789.