УДК 517.54+517.968.74

НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИЗА*

В.Г. Ткачев

В работе ставится ряд вопросов, относящихся к анализу и геометрии. Среди них: уравнение Хеле — Шоу, комплексные моменты, однолистные многочлены, лемнискаты, целые решения квазилинейных уравнений.

Введение

Эта краткая заметка посвящена некоторым нерешенным задачам вещественного и комплексного анализа, которые можно было бы отнести к направлению «геометрический анализ», и которые отвечают исследованиям автора и его коллег в последнее время. Часть вопросов заимствована из работ различных авторов, часть возникла в настоящее время. Главное, что объединяет перечисленные далее проблемы — это используемые нами методы.

Один из таких методов основывается на анализе эволюции линий уровня некоторых функций (решения уравнений в частных производных, семейства однолистных отображений, линии уровня гармонических функций и т. д.) и опирается на использование теоремы Кронрода — Федерера [12], [2], или формулы коплощади (co-area). Опыт автора использования данного подхода связан прежде всего с теорией потенциала для минимальных поверхностей и минимальных трубок, впервые предложенной В.М. Миклюковым (см., например, [9], [10]). Мощность упомянутого приема подтверждается многочисленными способами модифицирования и адаптации под конкретные задачи из разных областей анализа и геометрии.

Проблемы, формулируемые нами, разные как по степени их формализации, сложности, так и по характеру предполагаемых исследований; решение некоторых доступно студентам старших курсов. Другие проблемы, цитируемые нами из математической литературы, стоят нерешенными уже на протяжении нескольких десятков лет. Комментарии к каждому из списков вопросов достаточно лаконичны, для более подробного ознакомления с материалом мы отсылаем читателя к соответствующим источникам.

Автор благодарен всем участникам семинара «Нелинейный анализ» за сделанные дополнения и замечания.

* Работа выполнена при поддержке автора грантом Президента РФ для молодых ученых-докторов наук № 00-15-99274.

1. Однолистные функции

1.1. Уравнение Хеле — Шоу

Формализации математической модели Хеле — Шоу и ее исследованию посвящено огромное количество математической литературы (см. библиографию более 600 источников до 1998 г. в [29]). Основные определения и факты содержатся в прекрасном недавнем обзоре [50]. Ниже мы останавливаемся на случае односвязной начальной области и одного источника, допускающем простую интерпретацию в терминах уравнения типа Левнера — Куфарева.

Пусть $w(z) = w(z,t)$ — семейство голоморфных и (локально) однолистных в (замкнутом) единичном круге D функций, t изменяется в некотором полуинтервале $[0;\, T)$, где T может принимать бесконечное значение. Обозначим через $\Omega(t) = w(D,t)$ образ круга.

Определение 1. *Семейство областей $\Omega(t)$ называется семейством Хеле — Шоу, если порождающие его функции $w(z,t)$ удовлетворяют следующему эволюционному уравнению*

$$w'_t(z,t) = w'_z(z,t)p(z,t), \tag{1}$$

где

$$p(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |w'(\,e^{i\theta},t)|^{-2}\,\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\theta.$$

функция $p(z,t)$ является оператором Шварца, восстанавливающим аналитическую в D функцию по ее вещественной части на ∂D, в нашем случае — по $1/|w'_z|^2$.

Другая эквивалентная форма записи уравнения (1) имеет вид

$$\mathrm{Re}[\overline{w'_t(z,t)}\cdot z w'_z(z,t)] = 1, \qquad \text{при} \quad |z| = 1.$$

Говорят, что класс $\mathcal{F}$ голоморфных (локально) однолистных функций (или ассоциированный с ним класс областей $\mathcal{F}_\Omega$) *инвариантный* [7], если для любой $w(z,0) \in \mathcal{F}$ решение уравнения Хеле — Шоу (1) принадлежит этому же классу при всех $t > 0$.

Примеры инвариантных классов:

- локально однолистные в D многочлены данной степени [31];
- звездные функции (и звездные области) [35];
- функции ограниченного вращения (δ-спиралеобразные и α-звездообразные) [6].

Примером **неинвариантного** класса является семейство *выпуклых* областей [35].

К количественным характеристикам, обобщающих понятие инвариантного класса, можно отнести изопериметрический дефект области (в [7] показано, что эта величина ограничена по времени своим начальным значением), различные внутренние геометрические характеристики области, а также характеристики соответствующего конформного униформизующего отображения. Данные свойства и понятия подробно обсуждаются в недавней диссертации О.С. Кузнецовой [5].

Вопросы:

HS-1. Указать другие «естественные» инвариантные классы (имеющие, если возможно, прозрачную геометрическую или алгебраическую интерпретацию). В этом направлении, например, инвариантность класса звездных областей является с физической и геометрической точек зрения естественным фактом. В работе Сакаи и Густафссона [32] доказано, что, рассматривая постановку (1) в более слабом смысле, любая односвязная по прошествии некоторого конечного времени становится обязательно *звездной*; интересно было бы получить количественную формулировку такой теоремы.

HS-2. Правильно сформулировать и доказать *«теорему существования решения в целом»*: Если $\mathcal{F}$ — произвольный инвариантный класс, то решение существует для любого $t > 0$. Все известные на настоящее время приемы доказательства существования решения в общем случае, начиная с пионерской работы Виноградова и Куфарева [3], технически достаточно громоздки. Тем не менее для полиномиальных классов (как частного инвариантного случая) имеется красивое доказательство существования в [31].

HS-3. Дать эффективные оценки на время существования однолистного решения при данных однолистных полиномиальных начальных условиях или указать способ: как определить по начальному полиному $w(z,0)$ — будет ли *при любом* $t > 0$ решение однолистным полиномом?

HS-4. Описать внутреннюю динамику полиномов под действием потока Хеле — Шоу (через традиционные характеристики и инварианты полиномов). За отправную точку можно взять, например, теорему об инвариантном подклассе в [37].

HS-5. Распространить известные в евклидовом случае результаты для уравнения Хеле — Шоу на случай гиперболической плоскости H^2 (см. недавнюю работу Хеденмальма и Шиморина [34]).

1.2. Комплексные моменты

Комплексным *n-моментом* [46] области Ω называется комплексное число

$$M_n(\Omega) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} z^n \, dxdy. \tag{2}$$

Удобно также каждой (локально) однолистной в круге голоморфной функции $w(z)$ поставить в соответствие момент

$$M_n(w) = \frac{1}{\pi} \iint_{D} w^n(z) |w'(z)|^2 dxdy. \tag{3}$$

Хорошо известно, что

- комплексные моменты связаны с задачей Хеле — Шоу [45]:

  $$M_n(\Omega(t)) = M_n(\Omega(0)) + 2t\delta(n),$$

  где δ – стандартная функция Дирака;

- являются внешними лорановскими коэффициентами разложения преобразования Коши [24]
$$\widehat{\Omega}(\zeta) = \int_{\Omega} \frac{dxdy}{\zeta - z};$$

- для любого локально однолистного многочлена $P(z)$ его ненулевые моменты образуют конечное подмножество [31]
$$M_k(P) = 0, \qquad \text{при} \quad n \geq \deg P$$
и таким образом задают естественное отображение $\mu : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{R}^1 \times \mathbb{C}^{n-1}$ (или $\mu_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в случае многочленов с вещественными коэффициентами)

- известна формула Уллемар [49] (доказана в [38] Ткачевым и Кузнецовой) для якобиана $\det d\mu$ и $\det d\mu_{\mathbb{R}}$ в случае многочленов
$$\det d\mu_P = C_n V_{n,\mathbb{C}}(P'), \qquad \deg P = n.$$
В частности, из нее следует, что отображения моментов *локально инъективны* на пространстве *локально однолистных* в единичном круге многочленов.

Вопросы:

СМ-1. Доказать или опровергнуть свойство глобальной инъективности μ на пространстве однолистных многочленов (локальная инъективность подробно исследовалась Густафссоном [31]).

СМ-2. Указать структурные и геометрические свойства отображений μ и $\mu_{\mathbb{R}}$, в частности, радиусы инъективности или их аналоги.

СМ-3. Найти способ восстановления области (или функции) по ее моментам. Данная проблема сформулирована Х. Шапиро (см. [45]) и является нерешенной в общем случае в настоящее время. См. обсуждение данной проблемы для случая полигональных областей в [33], а также недавнюю работу [39].

СМ-4. Описать возможные классы, аналогичные полиномиальным областям (например, такими будут различные симметричные относительно начала координат области), для которых семейство моментов обладает «специальными» свойствами (симметрия, асимптотика на бесконечности и т. д.).

СМ-5. В ходе нашего доказательства формулы Уллемар использовалась форма (в определенном смысле двойственная дискриминанту многочлена)
$$V_{n,\mathbb{C}}(B) = |b_n|^{2n} \prod_{j,k=1}^{n} (z_j \overline{z}_k - 1),$$
где $B(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$ — произвольный многочлен степени n. Данная форма имеет также аналог $V_{n,\mathbb{R}}(B)$ для многочленов с вещественными коэффициентами и в обоих случаях может быть представлена в терминах результанта B и $B^*(z) = z^n \overline{B}(1/z)$. Интересно было исследовать форму $V_{n,\mathbb{C}}(B)$ более подробно (см. также работу автора по положительным тригонометрическим многочленам [48]).

1.3. Однолистные и локально однолистные многочлены

В многочисленных задачах, в том числе в перечисленных выше, возникает необходимость по тем или иным характеристикам многочлена установить свойство его однолистности. Несмотря на кажущуюся простоту формулировки проблемы, даже непосредственный анализ показывает сложность описания однолистных многочленов.

Известна классификация класса однолистных многочленов $\mathcal{P}_n$ степеней $n = 2$ и $n = 3$ [36], [23], однако, уже последний случай приводит к нетривиальным уравнениям границы $\partial\mathcal{P}_n$. Видимо, получение *явного* вида границы класса однолистных многочленов не представляет значительного интереса. В этом отношении возникают следующие проблемы:

UP-1. Найти тополого-алгебраическое или комбинаторное описание границы $\partial\mathcal{P}_n$, например, его стратификацию (см. задачи Арнольда [4], проблема 1985-25, где рассматривается стратификация для класса всех однолистных в круге функций). Интересно также получить косвенные критерии однолистности.

UP-2. В некоторых подклассах (таких, как звездные многочлены относительно начала координат) интерес представляет более детальная информация. Некоторые результаты в этом направлении имеются в работах [18]–[20], [37]. Например, используя связь данной проблемы с классом положительных тригонометрических многочленов [30], можно указать «достаточно точно» строение границы таких классов, однако нет каких-либо *критериев* (достаточные условия известны), как эффективно проверить принадлежность данному классу.

UP-3. В некоторых задачах интересно знать такие характеристики $\mathcal{P}_n$ или его подклассов, как объем (для нахождения соответствующей вероятностной меры), алгебраический тип границ и другие метрические и алгебраические инварианты.

UP-4. *Нечеткий вопрос*: найти удовлетворительное «объяснение» конечности ненулевых моментов для полиномов, а также внутреннюю связь этого класса с задачей Хеле — Шоу.

UP-5. В связи с задачей [UP-2] представляет значительный интерес полное описание (косвенное или явное) пространства положительных тригонометрических многочленов.

2. Лемнискаты

Лемнискатой $\Sigma_\tau(P)$ называется множество уровня $|P(z)| = \tau > 0$, где $P(z)$ — монический многочлен $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$. Ниже мы касаемся только метрических вопросов строения лемнискат. Относительно алгебро-топологического направления мы отсылаем к [22] и имеющейся там литературе.

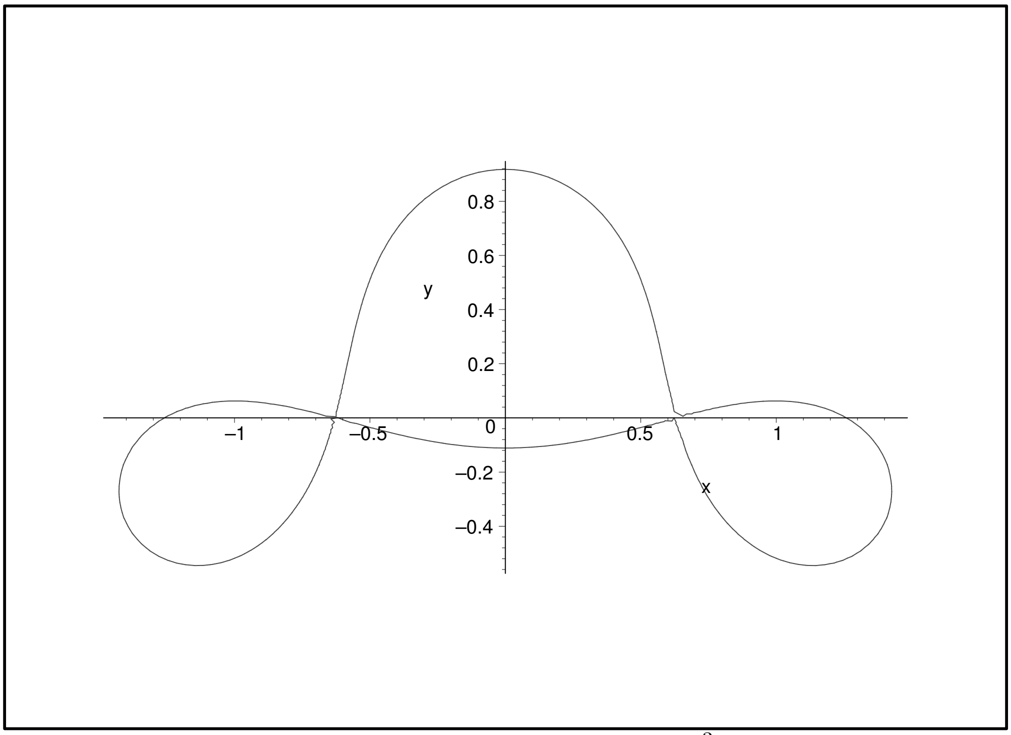

Рис. 1. Лемниската многочлена $P(z) = z^3 - 3az + ib$

2.1. Гипотеза Эрдеша

Гипотеза в разное время формулировалась Эрдешом в списке его нерешенных задач (см. [27], [26]): доказать, что при фиксированном $n = \deg P$ максимальное значение *длины* лемниската $\Sigma_1(P)$ имеет для многочленов $Q_n(z) = z^n - 1$. Различные результаты о лемнискатах были получены Поммеренке [41]–[44], который впервые установил, что длины лемнискат данной степени ограничены в совокупности и имеют вид $O(n^2)$. Данная грань была улучшена Борвейном [17]: $\sup_{\deg P = n} |\Sigma_1(P)| = O(n)$.

В настоящее время известно, что:

- экстремальный многочлен (и, соответственно, лемниската) для любого n существует (Еременко, Хейман [28]); при этом все критические значения $P(\zeta_k)$, где $P'(\zeta_k) = 0$ должны лежать на этой лемнискате (далее мы называем такие полиномы *экстремальными*);

- верхняя оценка длины лемнискат $|\Sigma_1(P)| < 9,2 \deg P$ [28]; гипотетическая оценка $|\Sigma_1(P)| \le |\Sigma_1(Q_n)| = 2n + o(1)$;

- индикатриса длины лемнискаты

$$\Phi(t) = \ln |\Sigma_{e^t}(P)| - \frac{t}{n}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и выпукла вне конечного множества критических значений многочлена [8];

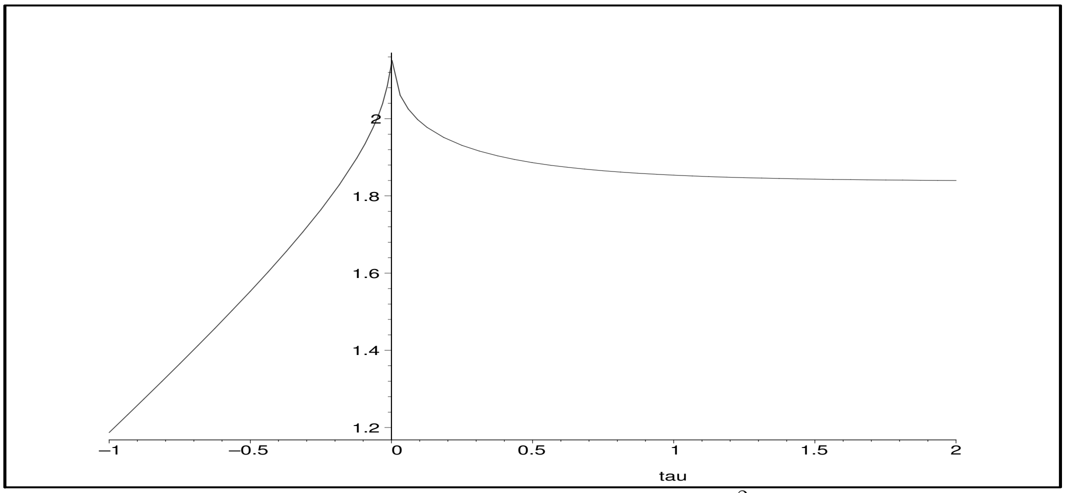

Рис. 2. Индикатриса для $Q_2(z) = z^2 - 1$

- в работе Батлера [21] (см. также [25]) найдена точная формула для длины $|\Sigma_\tau(Q_n)|$ в терминах гипергеометрической функции:

$$|\Sigma_\tau(Q_n)| = \begin{cases} \tau\ {}_2F_1(a, a; 1; \tau^2), & \tau \in [0, 1]; \\ \tau^{1/n}\ {}_2F_1(a, a; 1; 1/\tau^2), & \tau \in [1, +\infty]. \end{cases}, \tag{4}$$

  где $a = \frac{n-1}{n}$;

- имеются явные формулы для производных функции длины лемнискаты $H(t) = |\Sigma_{e^t}(P)|$ (Ткачев, 2002):

$$H^{(k)}(\tau) = \int_{\Sigma_\tau(P)} \operatorname{Re} w_k(z)\ |dz|,$$

  где

$$w_k(z) = A^k[1], \qquad A[f] = 2f'\frac{P}{P'} + f\left(\frac{P}{P'}\right)'.$$

  Здесь предполагается, что e^t не равно критическому значению.

Также недавно автором заметки установлена связь функции длины лемнискаты $H(t)$ с вещественной проблемой моментов Стилтьеса — Гамбургера. Именно, последовательность производных $H^{(k)}(t)$ является *позитивной* (см. [1]), а следовательно, приводит к представлению функции $H(t)$ в виде преобразования Лапласа некоторой меры на $\mathbb{R}$.

Вопросы:

Lem-1. Получить решение задачи Эрдеша; при этом представляется особенно интересным количественный ответ — найти отклонение максимальной длины от длины многочлена $P(z)$ в терминах его критических значений (например, возможный кандидат — квадратичное отклонение $\omega(P) = \sum_{j>i} |P(\zeta_j) - P(\zeta_i)|^2$, где ζ_k — нули производной).

Lem-2. Доказать, что в критических значениях функция $|\Sigma_\tau(P)|$ имеет *каспы* (заострения). Выяснить структуру данных каспов: интересно узнать, имеют ли особенности алгебраический характер (связанного с кратностью критического значения).

Lem-3. Установить структурные свойства $|\Sigma_\tau(P)|$; например, для $q(\tau) = |\Sigma_\tau(Q_n)|$ имеет место свойство

$$q(1/\tau) = \frac{q(\tau)}{\tau^{(1+n)/n}}.$$

Возможно, наиболее «красивые» свойства $|\Sigma_\tau(P)|$ должны получаться для экстремальных полиномов (в этом случае есть лишь одно критическое значение).

Lem-4. Найти дифференциальное уравнение для $p(\tau) = H(\ln \tau)$; в случае Q_n оно известно (Ткачев, 2002):

$$n^2(1-\tau^2)\tau^2\, p''(\tau) - n\tau(n + (n-2)\tau^2)\, p'(\tau) + p(\tau)(n^2 - \tau^2) = 0.$$

Как и выше, наиболее перспективный случай экстремальных многочленов (в этом случае, ввиду единственной особой точки, видимо, достаточно уравнения гипергеометрического типа).

Lem-5. Найти связь длин l_k, $k = 1, \ldots, n$ компонент лемнискаты $\Sigma_1(P)$ для экстремального многочлена $P(z)$ вида $F(l_1, \ldots, l_n) = 0$. Представляется вероятной алгебраичность F. Возможно при этом получение качественной информации об F (например, выпуклость и т. д.), а также структурных свойств F в зависимости от группы критических точек ζ_k.

Lem-6. Выяснить комбинаторно-топологическое строение экстремальных лемнискат (некоторые результаты получены Боевым, 2002) и стратификацию многообразия таких лемнискат.

Lem-7. Найти любое эффективное описание экстремальных многочленов (через дифференциально-функциональные соотношения, алгебраические инварианты и т. д.). В качестве примера приведем свойство дискриминанта: $|\operatorname{Dis}(P)| = n^n$.

3. Алгебраические и целые решения квазилинейных уравнений

Поясним основные вопросы лишь на одном примере. Рассмотрим уравнение

$$L_{\varepsilon,\gamma}[u] \equiv u_{xx}(2\varepsilon+(\gamma+1)u_x^2+(\gamma-1)u_y^2)+4u_{xy}u_xu_y+u_{yy}(2\varepsilon+(\gamma+1)u_y^2+(\gamma-1)u_x^2) = 0, \quad (5)$$

где $u(x,y)$ — некоторая C^2-функция. Нас интересуют вопросы, связанные с существованием определенных в целой плоскости $\mathbf{R}^2$ (другими словами, *целых*) решений данного уравнения при различных значениях параметров ε, $\gamma \in \mathbf{R}$.

Исследование именно **целых** решений берет свое начало от целых голоморфных функций, где свойство *целостности* в определенном смысле означает максимально возможную продолжимость, что типично для постановки вопроса в плоскости $\mathbb{C}$. Есть несколько типичных для целых функций свойств, в зависимости от контекста:

- неограниченность (теорема Лиувилля);
- несуществование (теорема Бернштейна);
- параметры роста в особых точках (теоремы Фрагмена — Линделефа).

При переходе от комплексного анализа к решениям PDE, появляется дополнительный атрибут понятия *целый*, связанный с необходимым запасом дифференцируемости. Пример уравнения Аронссона (7), рассмотренного впервые в работах [13]–[16], показывает, что целых решений в стандартном понимании (как минимум C^2-гладких) не существует. В то же время мы показали, что счетное семейство так называемых N-решений, найденных Аронссоном, состоит из *алгебраических* функций.

Свойство быть алгебраической функцией, с одной стороны, означает, что такая функция может допускать *естественные* сингулярности, с другой, она непродолжима, как наиболее элементарный объект алгебры и анализа после многочленов.

3.1. Вырожденный случай $\varepsilon = 0$

Говорят, что решение $u(x, y)$ *квазирадиально*, если оно допускает однородную форму

$$u(x, y) = \rho^k f(\theta), \tag{6}$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и θ — полярный угол в плоскости (x, y). Для определенности мы всюду далее также предполагаем, что $k > 1$.

Отправная точка: уравнение Аронссона

$$u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2 = 0, \tag{7}$$

или его дивергентный вид

$$\operatorname{div} |\nabla u|^{p-2}\nabla u = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}.$$

Аронссон (1984) показал, что последнее уравнение имеет счетное семейство квазирадиальных решений (далее, N-решения).

В частности, Аронссон показал, что существуют решения класса $C^{1+\frac{1}{3}}(\mathbb{R}^2)$. Однако предложенные им различные представления решений $u(x, y)$ носят неявный характер. Недавно автором получено явное параметрическое представление для квазирадиальных решений (5), при $\varepsilon = 0$. При этом мы показываем, что все квазирадиальные N-решения (7) суть *алгебраические* функции.

Нам представляется важным следующий вопрос: *при каких рациональных показателях γ существуют алгебраические квазирадиальные решения* (5). Данный интерес также мотивирован тем обстоятельством, что имеет место совпадение «особых значений» параметра γ, для которых существуют алгебраические квазирадиальные решения, и классических значений *показателей адиабаты* идеального s-атомного газа $\gamma = \frac{2s+3}{2s+1}$, $s \in \mathbb{N}$.

В настоящее время известно, что при рациональном $\gamma = p/q \neq 1$ существуют алгебраические решения $L_{0,\gamma}[u] = 0$ тогда и только тогда, когда диофантово уравнение

$$N^2p^2 - q^2(2N-1) = y^2 \tag{8}$$

имеет целочисленное решение $(N, y) \in \mathbb{N}^2$. Описаны некоторые свойства таких значений γ.

Вопросы:

Ar-1. Найти явный вид алгебраических N-решений уравнения Аронссона; также интересно указать их структурные и симметрические свойства. Пример 2-решения:

$$u = x^{4/3} - y^{4/3}, \qquad \text{или} \qquad 27x^4y^4u^3 = (x^4 - y^4 - u^3)^3$$

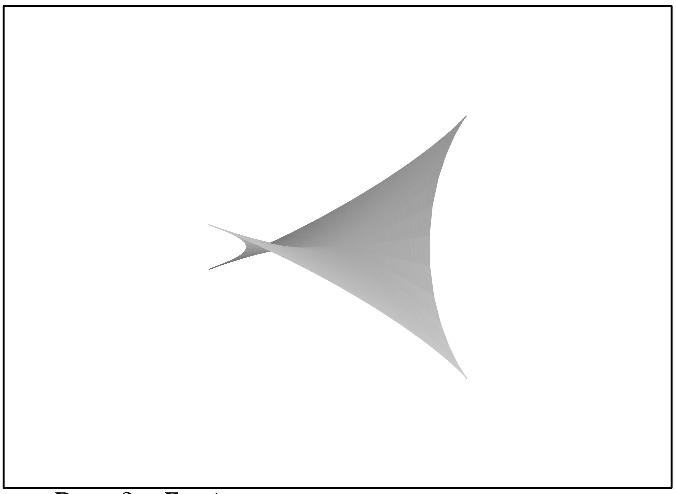

Рис. 3. График квазирадиального решения

Ar-2. Описать полное множество решений диофантова уравнения (8). Интересно также установить связь для найденных γ с алгебраическим видом соответствующих решений.

Ar-3. Найти аналоги порождаемости N-решений (то есть рекуррентные соотношения между ними) по аналогии с теорией интегрируемых и конечнозонных систем, уравнениями типа солитонов.

Ar-4. Особый интерес представляет многомерный случай. Несложно получить соответствующее уравнение для аналога квазирадиальных решений, представимых в виде $u = f(\theta)r^\alpha$, где θ — локальная координата на единичной гиперсфере. При этом особый акцент в исследовании многомерных аналогов квазирадиальных решений делается на решения специального уравнения $|\nabla\phi| = 1$, где ∇ — ковариантная производная на гиперсфере (в двумерном случае существует глобально определенное на окружности S^1 решение ϕ, равное полярному углу).

3.2. Общий случай

В случае $\varepsilon = \pm 1$ ситуация усложняется. Целые решения (они уже не квазирадиальные) существуют и выражаются в терминах *гипергеометрической* функции. В этой связи возникают следующие вопросы:

Sim-1. Найти полное описание N-решений уравнения Саймона

$$L_{1,1}[u] = u_{xx}(u_x^2 + 1) + 2u_{xy}u_x u_y + u_{yy}(u_y^2 + 1) = 0.$$

Sim-2. Будут ли эти решения алгебраическими при всех N? Это так при $N = 1, 2$. В общем случае это приводит к изучению свойств монодромии конфлюентной гипергеометрической функции (функции Куммера) ${}_1F_1(a, c; x)$.

Sim-3. Найти полное описание N-решений уравнения $L_{\pm,\gamma}[u] = 0$. Это тесно связано с конусами решений для предельных случаев $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$.

Sim-4. Есть ли связь алгебраичности для данного γ, при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$?

Sim-5. При каких парах (ε, γ) имеет место свойство Бернштейна?

Summary

SOME UNSOLVED PROBLEMS OF ANALYSIS

V.G. Tkachev

We discuss some problems concerning analysis and geometry. Among them are the Hele-Shaw equation, complex moments, univalent polynomials, lemniscates and entire solutions to quasilinear equations.

Литература

1. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Наука, 1961.

2. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.

3. Виноградов Ю.П., Куфарев П.П. Об одной задаче фильтрации // Прикл. матем. и мех. 1948. Т. 12. С. 181–198.

4. Задачи Арнольда. М.: ФАЗИС, 2000. 454 с.

5. Кузнецова О.С. Геометрические и функциональные свойства решений задачи Хеле — Шоу: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Волгоград. 2000, 103 с.

6. Кузнецова О.С., Прохоров Д.В. О геометрических свойствах решений уравнения Хеле — Шоу // Вестник ВолГУ. Математика. Физика. 1999. Сер. 1. Вып. 4. С. 21–27.

7. Кузнецова О.С., Ткачев В.Г. Асимптотические свойства решений уравнения Хеле — Шоу // Доклады РАН. 1999. Т. 367, № 2. С. 164–165.

8. Манкаева Г.А., Ткачев В.Г. О логарифмической выпуклости длины лемниската // Модели и дискретные структуры: Сб. научн. тр. Элиста. Джангар. 2002. С. 111–119.

9. Миклюков В.М. Об одном новом подходе к теореме Бернштейна и близким вопросам уравнений типа минимальной поверхности // Мат. сб. 1979. Т. 108 № 2. С. 268–289.

10. Миклюков В.М. О некоторых свойствах трубчатых в целом минимальных поверхностей в $\mathbb{R}^n$ // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. № 3. С. 549–552.

11. Миклюков В.М. Некоторые признаки параболичности и гиперболичности граничных множеств поверхностей // Изв. РАН. Сер.: Матем. 1996. Т. 60, № 4. С. 111–158.

12. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.

13. Aronsson G. Extension of functions satisfying Lipschitz conditions // Ark. For. Mat. 1966. V. 69. № 1. P. 551–561.

14. Aronsson G. On the partial differential equation $u_x^2u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+u_y^2u_{yy}=0$ // Ark. For. Mat. 1967. V. 69. № 1. P. 395–425.

15. Aronsson G. On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+u_y^2u_{yy}=0$ // Manuscripta Math. 1984. V. 47. № 1. P. 133–151.

16. Aronsson G. Construction of singular solutions to the p-harmonic equation and its limit equation for $p=\infty$ // Manuscripta Math. 1986. V. 56. № 1. P. 135–158.

17. Borwein P. The arc length of the lemniscate $\{|P(z)|=1\}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. P. 797–799.

18. Brannan A. Coefficient regions for univalent polynomials of small degree // Mathematika. 1967. V. 14. P. 165–169.

19. Brannan A. On univalent polynomials // Glasgow Math. J. 1970. V. 11. P. 102–107.

20. Brannan A., Brickman L. Coefficient regions for starlike polynomials // Ann. Univ. Mariae-Curie Skladowska, Sect. A. 1975. V. 29. P. 15–21 (1977).

21. Butler J.P. The perimeter of a rose // Amer. Math. Monthly. 1991. V. 98. № 2, P. 139–143.

22. Catanese F., Paluszny M., Polynomial-lemniscates, trees and braids // Topology. 1991. V. 30. № 4. P. 623–640.

23. Cowling V.F., Royster W.C. Domains of variability for univalent polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 19(1968). 767–772.

24. Cherednichenko V.G. Inverse Logarithmic Potential Problem. Utrecht. The Netherlands. 1996.

25. Elia M., Galizia Angeli M.T. The length of a lemniscate // Publ. Inst. Math. Beograd (N.S.) 1984. V. 36(50) C. 51–55.

26. Erdös P. Extremal Problems on Polynomials // Approximation Theory II. Academic Press (1976). P. 347–355.

27. Erdös P., Herzog F. Piranian G. Metric properties of polynomials // J. D'Analyse Math. № 6. 1958. P. 125–148.

28. Eremenko A., Hayman W. On the length of lemniscates // Mich. Math. J. 1999. T. 46. P. 409–415.

29. Gillow K., Howison S.D. A bibliography of a free and moving boundary problems for Hele-Shaw and Stokes flows // Доступна на сайте: http://www.maths.ox.ac.uk/∼howison/Hele-Shaw.

30. Gluchoff A., Hartmann F. Univalent polynomials and non-negative trigonometric sums // Amer. Math. Month. 1998.

31. Gustafsson B. On a differential equation arising in a Hele-Shaw flow moving boundary problem // Ark. för Mat. 22(1984). № 2. S. 251–268.

32. Gustafsson B., Sakai M. Some geometric properties of solutions of a Hele-Shaw flow moving boundary problem // Proc. of Conf. Free Boundary: Problems and Applications. Montreal, 1990.

33. Gustafsson B., Putinar M. On exact quadrature formulas for harmonic functions on polyhedra // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 1427–1432.

34. Hedenmalm H., Shimorin S. Hele-Shaw flow on hyperbolic surfaces // J. Math. Pures Appl. 2002. V. 22. P. 187–222.

35. Hohlov Yu., Prokhorov D., Vasil'ev A. On geometrical properties of free boundaries in the Hele-Shaw flows moving boundary problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. 1998. V. 1. P. 3–13.

36. Kössler M. Simple polynomials // Czechoslovak Math. J. 1951. № 76. S. 5–15.

37. Кузнецова О.С. О полиномиальных решениях задачи Хеле — Шоу // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 5. С. 1084–1093.

38. Kouznetsova O.S., Tkachev V.G. Univalent polynomials and Ullemar conjecture // In Abstracts of IX Oporto Meeting on Geometry, Topology and Physics. Oporto, Portugal, 2000.

39. Milanfar P., Verghese G.C., Clem Karl W., Wilsky A.S. Reconstructing polygons from moments with connections to array processing // IEEE Trans. Signal Proc. 43(1995). № 2. P. 432–443.

40. Piranian G. The length of a lemniscate // Amer. Math. Month. 1980. V. 87. P. 555–556.

41. Pommerenke Ch. On some metric properties of polynomials with real zeros // Mich. Math. J. 6(1959). P. 377–384.

42. Pommerenke Ch. On some problems of Erdös, Herzog and Piranian // Mich. Math. J. 6(1959). P. 221–225.

43. Pommerenke Ch. On some metric properties of polynomials II // Mich. Math. J. 8(1961). P. 49–54.

44. Pommerenke Ch. On metric properties of complex polynomials // Mich. Math. J. 1961. V. 8. P. 97–115.

45. Richardson S. Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 56, № 4. P. 609–618.

46. Sakai M. Quadrature Domains. Lecture Notes in Math. N.Y.: Springer-Verlag. 1982.

47. Shapiro H.S. The Schwarz function and its Generalization to Higher Dimensions. N.Y.: Wiley. 1992.

48. Tkachev V.G. Positive trigonometric polynomials // Труды кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского госуниверситета. Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2002. С. 161–173.

49. Ullemar C. Uniqueness theorem for domains satisfying quadrature identity for analytic functions. TRITA-MAT 1980-37, Mathematics: Preprint of Royal Inst. of Technology, S-100-44. Stockholm.

50. Varchenko A.N., Etingof P.I. Why the Boundary of a Round Drop Becomes a Curve of Order Four. Univ. Lecture Series. V. 3. Providence R.I. 1992.