Выпуск 3 1998

ВЕСТНИК ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1: Математика. Физика

Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика Вып. 3, 1998

УДК 517.95

ЗВЕЗДНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ*

В.Г. Ткачев

В работе изучаются внешние свойства звездных минимальных поверхностей. Устанавливается конечность периметра по Каччополи допустимых областей, являющихся проекцией такой поверхности на единичную сферу.

Введение

Собственно вложенная поверхность $\mathcal{M}$ называется *звездной* (относительно точки $O \in \mathbf{R}^{n+1}$), если она является границей звездообразного тела (относительно $a \in \mathbf{R}^{n+1}$). Другими словами, с точностью до движения в $\mathbf{R}^{n+1}$, поверхность $\mathcal{M}$ является графиком над стандартной сферой $\mathbf{S}^n \in \mathbf{R}^{n+1}$ с радиус-вектором

$$x(\theta) = a + e^{u(\theta)}\theta, \tag{1}$$

где θ пробегает точки области $\Omega \in \mathbf{S}^n$.

Родственный класс двумерных минимальных поверхностей, которые дают звездную кривую при пересечении с любой плоскостью $x_3 = const$ (или графиками над стандартным цилиндром в $\mathbf{R}^3$), изучался Й.Ниче в [2]. В частности, Ниче показал, что только катеноиды являются звездными относительно цилиндрических минимальных поверхностей при условии их полноты. В настоящей статье мы устанавливаем близкое к приведенному свойство для звездных минимальных поверхностей.

Оба рассмотренных выше класса могут быть описаны с помощью следующей единой конструкции. Рассмотрим расслоение $\mathcal{B} = (\mathbf{R}^{n+1}, E, \pi, F)$, где $\pi : \mathbf{R}^n \to E$ — гладкая проекция на n-мерное подмногообразие E в $\mathbf{R}^{n+1}$ со слоем F. Наибольший интерес представляют те случаи, когда слой F изометричен прямой или лучу. Более того, в некоторых случаях $\pi^{-1}(E)$ не обязан совпадать со всем $\mathbf{R}^n$.

Поверхность $\mathcal{M}$ называется *$\mathcal{B}$-звездной*, если существует гладкое пересечение $z : E \to \mathbf{R}^n$ с $\mathcal{B}$. Ниже мы приведем наиболее важные случаи $\mathcal{B}$-звездных гиперповерхностей в $\mathbf{R}^{n+1}$. Обозначим через Ω множество $\pi(\mathcal{M})$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{M}$ — график в $\mathbf{R}^{n+1}$ над гиперплоскостью $E = \{x|\ x_{n+1} = 0\}$. Тогда он является $\mathcal{B}$-звездным относительно стандартной ортогональной проекции $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \to E$. Если поверхность полная, то Ω совпадает с целым E.

Пример 2. Поверхности цилиндрического типа Ниче могут рассматриваться как $\mathcal{B}$-звездные, когда $E = \mathrm{Cyl}^2 \equiv \{x \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ и отображение проекции

$$\pi_N(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_3\right).$$

Тогда пересечение $z : \mathrm{Cyl}^2 \to \mathbf{R}^3$ можно параметризовать следующим образом:

$$z(r, \theta) = (e^{u(r,\theta)} \cos\theta;\ e^{u(r,\theta)} \sin\theta;\ r),$$

где $(r;\theta)$ — цилиндрические координаты.

Пример 3. Звездная поверхность (относительно точки a) является $\mathcal{B}$-звездной для центральной проекции

$$\pi_{\mathbf{S}}(x) = \frac{x - a}{|x - a|} : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{S}^n(a),$$

где $\mathbf{S}^n(a)$ — единичная сфера с центром в точке a. Точная форма соответствующего пересечения дается в (1).

*Работа выполнена при поддержке Министерства общего и профессионального образования РФ (грант 97-0-1.3-114).

Интересно отметить, что первый пример является предельным случаем третьего, когда полюс a стремится к бесконечности. Кроме того, во всех приведенных случаях Миклюков и Ткачев [4], Ткачев [1] получили, что такие поверхности имеют ограниченный проективный объем $V_n(\mathcal{M})$. В частности, это означает полиномиальный рост площади поверхностей. В двумерном случае такие поверхности конформно эквивалентны параболической римановой поверхности.

1. Звездные поверхности: непараметрические методы

1.1. Главное уравнение

Ковариантная производная на сфере $\mathbf{S}^n$ и на поверхности $\mathcal{M}$ обозначается через ∇ и $\overline{\nabla}$ соответственно. Через div, Δ и $\mathrm{div}_{\mathcal{M}}$, $\Delta_{\mathcal{M}}$ обозначим дивергенцию и операторы Лапласа.

Предложение 1. *Пусть $x(\theta) = a + e^{u(\theta)}\theta$ — собственно вложенная звездная минимальная поверхность над областью $\Omega \subset \mathbf{S}^n$. Тогда $u(\theta)$ удовлетворяет уравнению*

$$\mathrm{div}\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = \frac{n}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}. \tag{2}$$

Кроме того, имеет место следующее граничное условие

$$\lim_{\theta\to\partial\Omega} u(\theta) = +\infty. \tag{3}$$

Функцию $u(x)$ назовем *полным решением* (2). Область Ω называется *допустимой*, если существует полное решение $u(\theta)$ в Ω. Граничное условие (3) эквивалентно собственности погружения x.

Доказательство. Чтобы проверить (2), применим непосредственное выражение для оператора Лапласа $\Delta_{\mathcal{M}}$ в локальных сферических координатах. Пусть θ — точка на $\mathbf{S}^n$; $E_1, \ldots, E_n$ — ортонормированный базис касательного пространства $T_\theta\mathbf{S}^n$ и $d\theta_1, \ldots, d\theta_n$ — сопряженный базис 1-форм в θ. Обозначим через $g_{ij}dx_i \otimes dx_j$ тензор метрики $\mathcal{M}$ и через $G^{-1} = \|g^{ij}\|$ обратную матрицу к g_{ij}. Тогда хорошо известно (см., например, [3]), что для любой достаточно гладкой функции f на $\mathcal{M}$ имеет место равенство

$$\Delta_{\mathcal{M}} f = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\mathrm{div}\,\sqrt{g}G^{-1}\nabla f, \tag{4}$$

где $g = \det\|g_{ij}\|$.

Чтобы получить g_{ij}, запишем

$$d\theta_i(x) = \nabla_{E_i}(e^{u(\theta)}\theta) = e^{u(\theta)}(E_i + \theta\langle\nabla u, E_i\rangle),$$

и, следовательно,

$$g_{ij} \equiv \langle d\theta_i(x), d\theta_j(x)\rangle = e^{2u(\theta)}(\delta_{ij} + u_i'u_j'),$$

где $\|\delta_{ij}\|$ — единичная матрица и $u_i' = \langle\nabla u, E_i\rangle$ — производная в направлении E_i. С помощью стандартных алгебраических вычислений получаем

$$g = \det\|g_{ij}\| = e^{2u(\theta)}(1 + \sum_{i=1}^{n} u_i'^2) = e^{2u(\theta)}(1 + |\nabla u|^2) \tag{5}$$

и

$$g^{ij} = e^{-2u(\theta)}\left(\delta_{ij} - \frac{u_i'u_j'}{1+|\nabla u|^2}\right).$$

Пусть e_k, $1 \le k \le n+1$ — стандартный ортогональный базис в $\mathbf{R}^{n+1}$. Известно, что каждая евклидова координатная функция x_k является гармонической на минимальной поверхности $\mathcal{M}$ [3, p. 34] и, следовательно, $\Delta_{\mathcal{M}} x_k = 0$. Отметим также, что для градиента выполняется: $|\overline{\nabla} x_k|^2 = 1 - \langle e_k, N\rangle^2$, где N — единичный вектор нормали к $\mathcal{M}$. Таким образом,

$$\Delta_{\mathcal{M}}|x|^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\Delta_{\mathcal{M}} x_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n+1}|\overline{\nabla} x_k|^2 = 2(n+1-|N|^2) = 2n. \tag{6}$$

Далее, подставляя (6) в (4) и применяя (5), получаем

$$n = \Delta_{\mathcal{M}} \frac{|x|^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{g}} \operatorname{div} \sqrt{g} G^{-1} \nabla (e^{2u(\theta)}) =$$

$$= \frac{e^{-nu(\theta)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \operatorname{div} \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, e^{(n+2)u(\theta)}\, G^{-1} \nabla u(\theta). \tag{7}$$

С помощью равенства

$$\sum_{i=1}^{n} g^{ij} u_i' = e^{-2u(\theta)} \frac{u_j'}{1+|\nabla u|^2}$$

из (7) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \operatorname{div} e^{nu(\theta)} \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} = n e^{nu(\theta)}.$$

Требуемая формула следует из последнего тождества.

1.2. Допустимые области и полные решения

В отличие от случая минимальных графиков, основной особенностью уравнения (2) является *a priori* неопределенный класс областей Ω, которые допускают полные решения. Важным родственным вопросом является следующий: сколько различных полных решений уравнения (2) существует в данной допустимой области Ω? Мы называем два решения $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ различными, если разность $u_1(\theta) - u_2(\theta)$ не является постоянной в Ω. Последнее означает, что две соответствующие минимальные поверхности гомотетически эквивалентны в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Ниже мы получаем полный ответ в простейшем случае, когда Ω является полусферой в $\mathbf{S}^n$. Как вытекает из теоремы 4, полусферы суть единственные допустимые области в двумерном случае. В многомерном случае мы показываем, что граница допустимой области имеет самое большое конечное число компонент связности (см. следствие).

Для изучения свойств границы Ω приведем следующее определение, данное в [6].

Говорят, что открытое множество $E \subset \mathbf{S}^n$ *имеет конечный периметр* (по Каччополи) $\mathcal{C}(E)$, если характеристическая функция $\varphi_E(\theta)$ имеет ограниченную в существенном вариацию. Другими словами, эта величина определена, когда

$$\mathcal{C}(E) \equiv \sup \int_E \operatorname{div} X(\theta)\, d\theta < \infty, \tag{8}$$

где супремум берется по всем гладким векторным полям X на $\mathbf{S}^n$, таким, что $|X(\theta)| \le 1$.

Когда Ω является областью без гладкой границы, она имеет конечный периметр и эта величина совпадает с $(n-1)$-мерной мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть $u(\theta)$ — полное решение (2) в Ω. Тогда Ω имеет конечный периметр $\mathcal{C}(\Omega)$. Кроме того,*

$$\mathcal{C}(\Omega) \le n \int_\Omega \frac{d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta. \tag{9}$$

В частности, периметр ограничен мерой Лебега единичной n-мерной сферой ω_n.

Доказательство. Для того чтобы доказать конечность периметра, обозначим через A векторное поле

$$A(\theta) = \frac{\nabla u(\theta)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, \tag{10}$$

$\Omega(R) = \{\theta \in \Omega |\; u(\theta) < R\}$, и рассмотрим $\phi(\theta) = R - u(\theta)$. Тогда $\phi|_{\partial\Omega(R)} = 0$, и по формуле Стокса получаем

$$0 = \int_{\Omega(R)} \operatorname{div} \phi A(\theta)\, d\theta = \int_{\Omega(R)} (R - u(\theta)) \frac{n d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} - \int_{\Omega(R)} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta.$$

Поэтому

$$\int_{\Omega(R)} \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, d\theta = \int_{\Omega(R)} \frac{|\nabla u|^2}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta + \int_{\Omega(R)} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta =$$

$$\int_{\Omega(R)} \frac{1+n(R-u(\theta))}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta \le (1+Rn)\int_{\Omega(R)} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta. \tag{11}$$

Но $\Omega(R) \subset \Omega \subset \mathbf{S}^n$ и функция в записи последнего интеграла ограничена. Следовательно, величина

$$\mu_u \equiv \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta$$

является конечной и

$$\int_{\Omega(R)} \sqrt{1+|\nabla u|^2}\, d\theta \le (1+nR)\mu_u. \tag{12}$$

Заметим, что, в силу (3), $c = \min_{\theta\in\Omega} u(\theta) > -\infty$ и, применяя формулу ко-площади [5, §3.2], из (12) получаем

$$\mu_u(1+nR) \ge \int_{\Omega(R)} |\nabla u|\, d\theta = \int_c^R \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t))\, dt,$$

где $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа.

Из (3) и последнего свойства следует, что существует возрастающая последовательность $t_k \to \infty$ такая, что

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t_k)) \le n\mu_u + \frac{1}{k},$$

и с помощью теоремы Сарда получаем, что все $\partial\Omega(t_k)$ являются гладкими многообразиями в $\mathbf{S}^n$. В этом случае $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega(t_k))$ совпадает с $\mathcal{C}(\partial\Omega(t_k))$.

С другой стороны, последовательность характеристических функций $\varphi_{\Omega(t_k)}$ возрастает и поточечно сходится к φ_Ω. Таким образом,

$$\varphi_{\Omega(t_k)} \to \varphi_\Omega \qquad \text{в} \quad L_{1,loc}(\mathbf{S}^n).$$

Применяя свойство полунепрерывности вариации [6, теорема 1.9], заключаем, что Ω имеет конечный периметр и

$$\mathcal{C}(\Omega) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{C}(\Omega(t_k)) \le n\mu_u.$$

Теорема доказана.

На самом деле интересно, когда в (9) возникает равенство. Нам не известно, верно ли это в общем случае, однако равенство справедливо в случае, когда граница Ω является достаточно "хорошей". Для наших дальнейших применений достаточно предполагать, что граница $\partial\Omega$ является гладкой. С другой стороны, равенство справедливо даже в предположении, что $\partial\Omega$ имеет конечный периметр Минковского. Далее мы ограничимся только гладким случаем.

С этой целью предположим, что Ω имеет гладкую границу $\partial\Omega$ и рассмотрим множество

$$\Omega_\rho = \{\theta \in \Omega |\ \mathrm{dist}(\theta; \partial\Omega) > \rho\},$$

где ρ выбирается достаточно малым.Тогда

$$\lim_{\rho\to 0} \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_\rho) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = \mathcal{C}(\Omega), \tag{13}$$

и из $\operatorname{div} A(\theta) < n$ с помощью формулы Стокса получаем

$$\int_\Omega \operatorname{div} A\, d\theta = \int_{\Omega_\rho} \operatorname{div} A\, d\theta + \int_{\Omega\setminus\Omega_\rho} \operatorname{div} A\, d\theta \le \int_{\partial\Omega_\rho} \langle A(\theta), \nu\rangle +$$

$$+ n\mathcal{H}^n(\Omega\setminus\Omega_\rho) \le \int_{\partial\Omega_\rho} |A(\theta)| + n\mathcal{H}^n(\Omega\setminus\Omega_\rho) \le \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_\rho) + n\mathcal{H}^n(\Omega\setminus\Omega_\rho),$$

где ν — поле единичных векторов внешней нормали к $\partial\Omega_\rho$. Следовательно, из последнего неравенства и (13) при $\rho \to 0$ вытекает

$$\int_\Omega \operatorname{div} A\, d\theta \le \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) = \mathcal{C}(\Omega).$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть Ω — допустимая область с гладкой границей $\partial\Omega$. Тогда для любого полного решения $u(\theta)$ в Ω выполняется*

$$\mathcal{C}(\Omega) = n\mu_u = n\int_\Omega \frac{d\theta}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\, d\theta. \tag{14}$$

1.3. Проективный объем звездных поверхностей

В настоящем разделе мы устанавливаем связь между периметром допустимой области и проективным объемом соответствующей минимальной поверхности. Последнее понятие вводилось автором в недавней статье [1], а именно было доказано, что для любой собственно погруженной минимальной поверхности размерности n всегда существует конечный или бесконечный предел

$$V_n(\mathcal{M}) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int_{M_r(a)} \frac{dm}{|x(m)-a|^n} = \lim_{r\to\infty} \frac{n\operatorname{Vol}_n(M_r)}{r^n},$$

где $M_r = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : 1 < |x-a| < r\}$. В частности, если $V_n(\mathcal{M}) < \infty$, то площадь поверхности растет полиномиально.

Кроме того, было показано [1], что значение проективного объема не зависит от выбора $a \in \mathbf{R}^{n+1}$ и может быть подсчитано с помощью формулы

$$V_n(\mathcal{M}) = n\int_{\mathcal{M}} \frac{\langle x(m)-a, N(m)\rangle^2}{|x(m)-a|^{n+2}}, \tag{15}$$

где $N(m)$ — нормаль к $\mathcal{M}$ в m. Как следствие, минимальная собственно погруженная поверхность имеет конечный проективный объем при условии, что кратность проекции ее на некоторую гиперсферу в $\mathbf{R}^{n+1}$ конечна. Ниже мы даем точное выражение проективного объема для звездных минимальных поверхностей.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{M}$ — звездная минимальная собственно вложенная гиперповерхность над $\Omega \subset \mathbf{S}^n$, заданная как в (1). Тогда*

$$V_n(\mathcal{M}) = n\mu_u, \tag{16}$$

где $V_n(\mathcal{M})$ — проективный объем $\mathcal{M}$.

Доказательство. С помощью рассмотренного выше инвариантного свойства $V_n(\mathcal{M})$ можно сделать вывод, что точка a в (16) совпадает с полюсом a в (1).

Для того чтобы найти $N(m)$, применим обозначения из доказательства предложения и отметим, что $\langle D_{E_i}x(\theta), N\rangle = 0$ для всех i, где D — стандартная ковариантная производная в $\mathbf{R}^{n+1}$. После дифференцирования получим

$$0 = e^{u(\theta)}\langle E_i + \theta\langle\nabla u(\theta), E_i\rangle, N\rangle = e^{u(\theta)}\langle E_i, N + \langle\theta, N\rangle\nabla u(\theta)\rangle,$$

и, в силу произвольности i, имеем

$$N + \langle\theta, N\rangle\nabla u(\theta) = \alpha\theta$$

для некоторого $\alpha \in \mathbf{R}$. Следовательно,

$$N = \frac{\theta - \nabla u(\theta)}{1+|\nabla u|^2}$$

и

$$\langle x, N\rangle = \frac{e^{u(\theta)}}{1+|\nabla u|^2}. \tag{17}$$

Таким образом, из (5) и (15) получаем следующее выражение в локальных координатах

$$V_n(\mathcal{M}) = n\int_\Omega \frac{\langle x, N\rangle^2\sqrt{g}}{|x^{n+2}|}\,d\theta = n\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\,d\theta,$$

что и требовалось.

Следствие 1. *Если Ω — полусфера в $\mathbf{S}^n$, то только гиперплоскости являются звездными минимальными гиперповерхностями над Ω.*

Доказательство. Действительно, в [1] доказано, что

$$V_n(\mathcal{M}) \geq \omega_n, \tag{18}$$

где ω_n — $(n-1)$-мерная мера Лебега единичной сферы $\mathbf{S}^{n-1}$ и равенство в (18) имеет место, если $\mathcal{M}$ - гиперплоскость. Утверждение следствия очевидно вытекает из теоремы 3 и теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть $\Omega\subset\mathbf{S}^n$ — допустимая область. Тогда число $\ell(\partial\Omega)$ различных компонент $\partial\Omega$ конечно и удовлетворяет*

$$\ell(\partial\Omega) \leq \frac{p\omega_{p+1}2^{p-1}}{\omega_p} = 2^{p-1}(p+1)\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{p+2}{2})\Gamma^{-1}(\frac{p+3}{2}),$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Для получения приведенной выше оценки отметим, что число граничных компонент Ω совпадает с числом концов соответствующей поверхности $\mathcal{M}$. Тогда требуемое неравенство непосредственно получается из следствия 3 из [1].

2. Параметрические методы

В настоящем разделе мы доказываем теорему типа Бернштейна для двумерных звездных минимальных поверхностей. Это означает, что запас допустимых областей в $\mathbf{S}^2$ состоит только из полусфер.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{M}$ — двумерная звездная минимальная поверхность в $\mathbf{R}^3$. Тогда $\mathcal{M}$ является плоскостью.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что поверхность $\mathcal{M}$ имеет площадь полиномиального роста. В частности, если мы рассмотрим геодезический шар $\mathcal{B}(r)$ с центром в a радиуса r, то

$$\mathcal{B}(r)\subset M_a(r),$$

и площадь геодезического шара имеет также квадратичный рост. Хорошо известно (см. [7], [4]), что в этом случае любая неотрицательная супергармоническая функция является постоянной.

Рассмотрим функцию

$$f(m) = \langle x(m), N(m)\rangle, \quad m\in M,$$

где $N(m)$ — единичная нормаль к $\mathcal{M}$, выбранная так же, как и в (17), тогда неравенство $f(m)\geq 0$ имеет место всюду в Ω. Кроме того,

$$\Delta_{\mathcal{M}} f(m) = -||A||^2 f(m), \tag{19}$$

где $||A||^2$ — длина второй фундаментальной формы $\mathcal{M}$.

Чтобы получить (19), заметим, что для любого касательного вектора $E\in T_m\mathcal{M}$ в силу формулы Гаусса-Вейнгартена

$$\overline{\nabla}_E f = \langle\overline{\nabla}_E x, N\rangle + \langle x, \overline{\nabla}_E N\rangle = \langle E, N\rangle + \langle x, -A(E)\rangle,$$

где A — вторая фундаментальная форма. Принимая во внимание ортогональность векторов E и N, получаем

$$\overline{\nabla}_E f = -\langle x, A(E)\rangle = -\langle A(x^{\top}), E\rangle,$$

где $x^{\top}$ — проекция x на касательное пространство в соответствующей точке. Таким образом,

$$\overline{\nabla} f = -A(x^{\top}).$$

Пусть Y — поле касательных векторов над $\mathcal{M}$. По определению оператора дивергенции для E_i — произвольного ортонормированного базиса $T_m\mathcal{M}$ получаем

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} A(Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} A(Y), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\nabla}_{E_i} A)(Y, E_i) + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{E_i} Y), E_i\rangle.$$

Первый член в последнем выражении упрощается в силу симметричности градиента от второй фундаментальной формы $\overline{\nabla} A$ (что эквивалентно уравнению Кодацци).

$$(\overline{\nabla}_{E_i} A)(Y, E_i) = \overline{\nabla} A(Y, E_i; E_i) = \overline{\nabla} A(E_i, E_i; Y) = (\overline{\nabla}_Y A)(E_i, E_i).$$

Следовательно, после суммирования и применения условия минимальности

$$\operatorname{div}_{\mathcal{M}} A(Y) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\nabla}_Y A)(E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{E_i} Y), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{E_i} Y), E_i\rangle.$$

Имеем

$$\overline{\nabla}_{E_i} x^{\top} = D_{E_i} x - D_{E_i} x^{\perp} = E_i + A^{x^{\perp}}(E_i),$$

где символ $\perp$ означает проекцию на нормальное пространство и A^{ν} — отображение Вейнгартена по отношению к вектору нормали ν. В нашем случае $\nu = x^{\perp} = N\langle N, x\rangle$ и, таким образом, по определению второй фундаментальной формы

$$\overline{\nabla}_{E_i} x^{\top} = E_i + \langle N, x\rangle A(E_i).$$

Используя последнюю формулу, получаем (19). Теорема доказана.

Summary

ON THE STARLIKE MINIMAL SURFACES

V.G. Tkachev

This article concerns to the external properties of the starlike minimal surfaces. It was proven that the Caccopoli perimeter is fitite for the projection of the starlike minimal surfaces on the unit sphere.

Литература

1. Tkachev V.G. Finiteness of the number of ends of minimal submanifolds in Euclidean space // Manuscripta Mathematica. 1994. V. 82. C. 313–330.

2. Nitsche J.C.C. A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates // J. of Math. and Mech. 1962. V. 11. C. 293–302.

3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.

4. Miklyukov V.M., Tkachev V.G. On the structure in the large of externally complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$// Sov. Math. Izv. VUZ. 1987. V. 31. C. 30–36.

5. Federer G. Geometric measure theory. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1969.

6. Джусти Э. Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989.

7. Cheng S.Y., Yau S.T., Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications // Comm. Pure Appl. Math. 1975. V. 28. C. 201–228.

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЕСТНИК ВОЛГОГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия 1

МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА

Научно-теоретический журнал

Выпуск 3

1998

Основан в 1996 году