УДК 519.999

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

© 2008 И.А. Зорина, В.Г. Ткачев[1]

В данной работе доказывается существование счетного семейства целых решений для широкого класса квазилинейных эллиптических уравнений. В частности, показывается, что построенные решения имеют полиномиальный рост на бесконечности и имеют топологическое строение аналогичное структуре гармонических полиномов

Ключевые слова: *целое решение, проблема Бернштейна, эллиптический тип, главная часть.*

1. Предварительные замечания

Известная теорема С.Н. Бернштейна [5] утверждает, что *целыми* (т.е. определенными во всей плоскости) решениями уравнения минимальных поверхностей

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

являются только линейные функции. Отметим, однако, что в многомерном случае, начиная с количества переменных $n = 8$, аналог теоремы Бернштейна перестает быть верным [8]. Результаты существования или отсутствия целых решений для квазилинейных уравнений эллиптического типа часто называют теоремами типа Бернштейна. Подробную библиографию по данной проблематике можно найти, например, в недавних обзорах [9, 10].

В рамках данной статьи нас будет интересовать проблема Бернштейна для следующего класса квазилинейных уравнений:

$$\begin{aligned} u_{xx}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_x^2 \right.&\left. +(\gamma-1)u_y^2\right) + 4u_{xy}\,u_xu_y + \\ &+u_{yy}\left(2\varepsilon + (\gamma+1)\,u_y^2 + (\gamma-1)\,u_x^2\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Всюду далее мы обозначаем левую часть уравнения символом $L_{\gamma,\varepsilon}[u]$ и предполагаем выполненным ограничение $|\gamma| \geqslant 1$. Случай $L_{\gamma,0}[u]$ будет называться вырожденным. Учитывая однородные свойства уравнения, можно,

[1]Зорина Ирина Андреевна (irina.zorina@list.ru), Ткачев Владимир Геннадьевич (tkatchev@math.kth.se), кафедра математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета, 400062, Россия, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

не ограничивая общности, считать параметр ε нормированным условием: $\varepsilon \in \{0, 1, -1\}$. Отметим, что при $\varepsilon\gamma > 0$ и $|\gamma| > 1$ уравнение $L_{\gamma,\varepsilon}[u] = 0$ имеет эллиптический тип и содержит в качестве частного случая уравнение минимальных поверхностей $L_{-1,-1}[u] = 0$.

Случай $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0$ является особенным и представляет собой уравнение так называемых ∞-гармонических функций, впервые подробно исследованное Г. Аронссоном [1] в 1968 г. Среди прочего, Г. Аронссон доказал, что для C^2-гладких решений уравнения параболического типа

$$L_{1,0}[u] \equiv u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0 \tag{1.2}$$

справедлива теорема Бернштейна. Позднее в [2] было установлено существование счетного семейства целых решений (1.2), имеющих полиномиальный рост на бесконечности и задаваемых в форме $u = \rho^k f(\theta)$, где ρ и θ — полярные координаты в плоскости независимых переменных. Полученные решения не являются, однако, целыми в классическом смысле, так как принадлежат лишь гельдерову классу $C^{1,\alpha}$. Существование целых квазирадиальных решений было обобщено позже в [3,4] на вырожденный случай $L_{\gamma,0}[u]$:

$$L_{\gamma,0}[u] = 0, \qquad 1 < |\gamma| \leqslant \infty. \tag{1.3}$$

Отметим, что последнее уравнение соответствует $\varepsilon = 0$ в уравнении (1.1) и имеет вид бездивергентной формы уравнения p-Лапласа для $p = 2\gamma/(\gamma-1)$. В недавней работе [11] одним из авторов заметки было получено представление решений Аронссона в явном виде и доказано, что каждое такое решение является вещественной степенью некоторой алгебраической функции. Таким образом, упомянутая выше гельдерова сингулярность решений носит характер "естественной" алгебраической особенности.

Вопрос о существовании *гладких* целых решений для уравнения вида (1.1) был впервые поставлен в 1994 г. Л. Саймоном в [10] в случае

$$L_{1,1}[u] \equiv (1 + u_x^2)u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy} = 0. \tag{1.4}$$

П.А. Безбородов [7] показал, что уравнение (1.4) имеет вещественно-аналитические (на самом деле алгебраические) целые решения вида $u(x, y) = f(x) + g(y)$, имеющее полиномиальный рост, т.е. $\limsup\limits_{x,y\to\infty} \dfrac{u(x, y)}{(x^2 + y^2)^{2/3}} > 0$. Недавно авторами в [12] было доказано существование счетного семейства целых N-решений уравнения (1.4) имеющих полиномиальный рост на бесконечности $\dfrac{N^2}{2N-1}$, где $N = 1, 2, \ldots$ пробегает натуральные числа (решение П.А. Безбородова соответствует 2-решению в этой иерархии).

Целью данной работы является распространение результатов [12] для уравнения (1.1) на общий эллиптический случай при условии $\gamma > 1$.

2. Основные результаты

В данном разделе сформулируем полученные результаты. Доказательству приводимых здесь утверждений посвящена оставшаяся часть статьи.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon = 1$ и $\gamma > 1$. Тогда для любого натурального $N \geqslant 1$ существует целое C^2-гладкое решение $u_N(x,y)$ уравнения (1.1), которое имеет на бесконечности полиномиальный рост

$$\limsup_{(x,y)\to\infty} \frac{u_N(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha_{N,\gamma}/2}} = C \neq 0,$$

$\alpha_{1,\gamma} = 1$ и при $N \geqslant 2$:

$$\alpha_{N,\gamma} = 1 + \frac{(N-1)(\gamma-1)}{\sqrt{N^2(\gamma^2-1)+(N-1)^2} - (N-1)\gamma}. \tag{2.1}$$

Ключевым в доказательстве теоремы 1 является следующее явное представление полученных решений.

Лемма 1. Пусть $N \geqslant 2$ – произвольное натуральное число, $k = \dfrac{N}{N-1}$ и

$$f(\rho) = \rho^k F(a,b;c;-\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2), \tag{2.2}$$

где $F(a,b;c;t)$ — гипергеометрическая функция Гаусса с параметрами

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\Big(k + \frac{1}{\gamma-1} - \frac{\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}}{\gamma-1}\Big),\\ b &= \frac{1}{2}\Big(k + \frac{1}{\gamma-1} + \frac{\sqrt{k^2(\gamma^2-1)+1}}{\gamma-1}\Big),\\ c &= k+1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда параметрическое представление

$$\begin{aligned} x &= A_\rho \cos(2N-1)\theta + B_\rho \cos\theta,\\ y &= A_\rho \sin(2N-1)\theta - B_\rho \sin\theta,\\ u_N &= \mathcal{F}(\rho)\cos N\theta, \end{aligned} \tag{2.4}$$

задает однозначно определенную, C^2-гладкую во всей плоскости переменных x,y функцию $u_N(x,y)$, являющуюся решением уравнения (1.1). Здесь

$$A_\rho = \frac{1}{2\rho}\left(f'\rho - kf\right), \quad B_\rho = \frac{1}{2\rho}\left(f'\rho + kf\right), \quad \mathcal{F} = \rho f' - f. \tag{2.5}$$

Решение, заданное в форме (2.4) будем называть *N-решением* уравнения (1.1). Наряду с вещественным представлением $u_N(x,y)$, удобно использовать его комплексификацию $u_N(x+iy) = u_N(z)$, где $z = x+iy$ и

$$z = A_\rho e^{i(2N-1)\theta} + B_\rho e^{-i\theta}, \qquad u_N(z) = \mathcal{F}(\rho)\cdot \operatorname{Re} e^{iN\theta}.$$

Из этого представления, в частности, легко следует, что N-решения антисимметричны относительно поворотов на угол π/N в плоскости независимых переменных:

$$u_N(e^{\pi i \frac{n}{N}} z) = -u_N(z), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 1. Принимая во внимание упомянутую выше алгебраичность 2-решения для уравнения (1.4), интересным представляется прояснение феномена алгебраичности для общих N-решений уравнения (1.1). Подкрепляющим правдоподобность гипотезы алгебраичности N-решений уравнения (1.3) является тот факт, что конусами к N-решениям (1.1) являются N-решения уравнения (1.3), в отношении которых алгебраичность при $\gamma = 1$ и квазиалгебраичность при $|\gamma| > 1$ доказана в [11]. Отметим, однако, что уже в случае $N \geqslant 3$ вопрос открыт даже для уравнения (1.4).

Рассматривая полученные N-решения при $\varepsilon = 1$ и полагая $\gamma \to +\infty$, можно показать, что после подходящей ренормировки, в пределе получаются гармонические полиномы степени N, которые могут формально считаться N-решениями уравнения (1.1), отвечающими значению $\varepsilon = 1$ и $\gamma = \infty$. В общем же случае имеет место следующее утверждение, характеризующее связь N-решений u_N с гармоническими полиномами $\operatorname{Re} z^N$ следующим образом.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$0 < \frac{u_N(z)}{\operatorname{Re} z^N} \leqslant \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N}. \tag{2.6}$$

3. Построение решения основного уравнения

Квазилинейное уравнение (1.1) сводится с помощью преобразования Лежандра

$$\xi = u'_x, \quad \eta = u'_y, \qquad v(\xi, \eta) = x\xi + y\eta - u(x, y) \tag{3.1}$$

и последующей подстановки вида

$$\xi = \rho \cos \phi, \quad \eta = \rho \sin \phi, \qquad v(\xi, \eta) = \rho^k Y(-\frac{|\gamma - 1|}{2}\rho^2) \cos k\phi, \tag{3.2}$$

к гипергеометрическому уравнению

$$(1-t)tY'' + (k + 1 - t\,(k + 1 + \frac{1}{(\gamma - 1)}))Y' + \frac{k(k-1)}{2(\gamma - 1)}\, Y = 0. \tag{3.3}$$

Принимая во внимание, что преобразование Лежандра является инволюцией, мы имеем

$$x = v'_\xi, \quad y = v'_\eta, \quad u = \xi v'_\xi + \eta v'_\eta - v(\xi, \eta). \tag{3.4}$$

Для любого выбора решения $Y(t)$ гипергеометрического уравнения такая параметризация задает (вообще говоря, многозначное) решение уравнения (1.1) в окрестности любой точки (ξ, η) с ненулевым якобианом $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$. Далее мы ограничимся рассмотрением случая $k > 1$. (Такой выбор не принципиален, так как можно показать, используя основные преобразования гипергеометрической функции, что остальные случаи параметра k приводят либо к разрывным в нуле решениям основного уравнения (1.1), либо к перепараметризации в (2.3) и (2.4).)

Заметим далее, что единственным (с точностью до нормировки) ограниченным в окрестности нуля решением последнего уравнения является гипергеометрическая функция Гаусса $F(a, b; c; t)$ с параметрами a, b и c, заданными соотношениями (2.3). Остальные решения гипергеометрического имеют сингулярность в нуле вида $Y(t) \sim t^{-k}$, что влечет $u \sim \rho^{-k}$ при малых ρ, в то время как $x, y \sim \rho^{k-1}$. Последнее, в силу того, что $k > 1$ означает, что решение u имеет особенность в нуле. Таким образом, с точностью до постоянного множителя, мы имеем $Y(t) = F(a, b; c; t)$.

Чтобы мотивировать дальнейший выбор параметра k, мы кратко опишем рассуждения, аналогичные приведенным в [11]. Заметим, что непосредственная подстановка (3.1) в (2.4) приводит к следующей параметризации старых переменных:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \cos(k+1)\phi + \alpha_2 \cos(k-1)\phi, \\ y &= \alpha_1 \sin(k+1)\phi - \alpha_2 \sin(k-1)\phi, \\ u &= \alpha_3 \cos k\phi, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где функции α_k зависят только от ρ.

Чтобы система (3.5) давала параметризацию однозначно заданной над плоскостью переменных x, y функцию u, необходима рациональность параметра k. Пусть $k = \dfrac{n}{N-1}$, где n и $N-1$ взаимно простые положительные числа. Очевидно, что $n \geqslant N$, т.к. $k > 1$. Полагая $\theta = \phi/(N-1)$, мы получаем

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \cos(n+N-1)\theta + \alpha_2 \cos(n-N+1)\theta, \\ y &= \alpha_1 \sin(n+N-1)\theta - \alpha_2 \sin(n-N+1)\theta, \\ u &= \alpha_3 \cos n\theta. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Поскольку числа $n+N-1$ и $n-N+1$ взаимно просты, мы предполагаем, что θ изменяется в интервале $[0, 2\pi]$. Тогда, чтобы отображение $(x(\theta), y(\theta))$ из (3.6) описывало замкнутую кривую без самопересечений, индекс этого отображения относительно начала координат должен быть равен 1. Мы можем предполагать, что $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ (это неравенство выполнено в силу свойства (iii) гипергеометрической функции в лемме 4, доказываемой ниже). Тогда искомый индекс равен $n - N + 1$. Следовательно, мы получаем, что $n = N$, то есть k имеет вид $k = N/(N-1)$, $N \geqslant 2$.

Таким образом, применяя полученные значения параметра k к (3.2) и учитывая гипергеометрическую природу уравнения (3.3), мы приходим к параметризации (2.3)–(2.4), которая локально является решением основного уравнения. Доказательство того факта, что (2.4) действительно образует целое, глобально однозначное и регулярное решение основного уравнения, требует более деликатного анализа и приводится в оставшейся части статьи.

4. Вспомогательные свойства гипергеометрических функций.

В изложении этого параграфа мы следуем [6]. Напомним, что гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;t)$ является регулярное в $t = 0$ решение $y(t)$ уравнения

$$t(1-t)\,y''(t) + (c-(a+b+1)\,t)\,y'(t) - ab\,y(t) = 0, \tag{4.1}$$

нормированное условием $y(0) = 1$. Всюду далее будет предполагается, что переменная t принимает вещественные неположительные значения. Известно, что в единичном круге функция $F(a,b;c;t)$ представима степенным рядом:

$$F(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\,(b)_k}{(c)_k} \cdot \frac{t^k}{k!}, \tag{4.2}$$

где $(a)_n = \dfrac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$ — символ Похгаммера и c не является целым отрицательным числом.

Далее, наравне с $F(a,b;c;t)$, будет использоваться сокращение $F(t)$, и под $F'(a,b;c;t)$ понимается производная $\dfrac{d}{dt}\,(F(a,b;c;t))$.

Заметим, что для производных гипергеометрической функции справедлива формула сдвига [6, стр. 71]::

$$\frac{d^n}{dt^n}F(a,b;c;t) = \frac{(a)_n\,(b)_n}{(c)_n}\,F(a+n,b+n;c+n;t), \tag{4.3}$$

а при $c > b > 0$ имеет место интегральное представление [6, стр. 72]:

$$F(a,b;c;t) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \int_0^1 \frac{z^{b-1}\,(1-z)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}\,dz \tag{4.4}$$

Кроме того при больших значениях $|t|$, в случае, когда разность $(a-b)$ не является целым числом, имеет место асимптотическое разложение

$$F(a,b;c;t) = \frac{\lambda_1}{|t|^a} + \frac{\lambda_2}{|t|^b} + O\left(\frac{1}{|t|^{a+1}}\right) + O\left(\frac{1}{|t|^{b+1}}\right), \tag{4.5}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a-b)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a-c)}, \qquad \lambda_2 = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b-c)}.$$

Как непосредственное следствие (4.2) отметим следующее соотношение

$$F'(a,b;c;t) = \frac{a}{t}(F(a+1,b;c;t) - F(a,b;c;t)). \tag{4.6}$$

Лемма 2. Пусть $c > 0$, $b > 0$, $a > -1$. Тогда для любого $t \leqslant 0$ выполнено: $F(a,b;c;t) > 0$ и

$$\operatorname{sgn} F'(a,b;c;t) = \operatorname{sgn} F''(a,b;c;t) = \operatorname{sgn}(a). \tag{4.7}$$

Доказательство. Поскольку при указанных в условии леммы значениях параметров гипергеометрической функции справедливо представление (4.4), подынтегральная функция в котором положительна при $t \leqslant 0$, то очевидно, что $F(a, b; c; t) > 0$.

Доказательство оставшихся знаковых соотношений сводятся к предыдущему с помощью (4.3) и условий леммы.

В условиях леммы 2 следующая функция является непрерывной при всех $t \leqslant 0$:

$$g(z) = \frac{z\,F'(a, b; c; t)}{F(a, b; c; t)}. \tag{4.8}$$

Лемма 3. Пусть выполнены неравенства

$$-1 < a < 0, \quad c > b > 0, \quad c \neq b + 1. \tag{4.9}$$

Тогда функция $g(t)$ положительна, возрастает при $t \leqslant 0$ и справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \to -\infty} g(t) = -a. \tag{4.10}$$

Доказательство. В силу (4.6) получаем

$$g(t) = a\frac{F(a + 1, b; c; t) - F(a, b; c; t)}{F(a, b; c; t)} = -a + a\frac{F(a + 1, b; c; t)}{F(a, b; c; t)}. \tag{4.11}$$

Тогда справедливость предельного равенства (4.10) следует из того, что $b > a$, и асимптотического представления (4.5):

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{F(a + 1, b; c; t)}{F(a, b; c; t)} =$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{|t|^a}{|t|^{a+1}} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2\,|t|^{-(b-a-1)} + O(|t|^{-1}) + O(|t|^{-(b-a)})}{\mu_1 + \mu_2\,|t|^{-(b-a)} + O(|t|^{-1}) + O(|t|^{-(b-a+1)})} = 0.$$

Кроме того, из леммы 2 следует, что функция $g(t)$ положительна при $t < 0$.

Докажем теперь, что $\operatorname{sgn} g'(z) = \operatorname{sgn} a$. Отметим предварительно, что из формулы (4.6) следует соотношение

$$F''(a, b; c; t) = -\frac{1}{t}F'(a, b; c; t) + \frac{a}{t}(F'(a + 1, b; c; t) - F'(a, b; c; t)).$$

Используя это представление, преобразуем производную $g'(t)$ следующим образом:

$$g'(t) = \frac{1}{F^2}(F'F + tF''F - tF'^2) = \frac{a}{F^2(t)}\Big(F_1' \cdot F - F_1 \cdot F'\Big), \tag{4.12}$$

где $F = F(a, b; c; t)$, $F_1 = F(a{+}1, b; c; t)$, а F', F_1' и F'' — производные $F(a, b; c; t)$ и $F(a + 1, b; c; t)$ по переменной t соответствующих порядков. При этом, в силу леммы 2 и условия $-1 < a < 0$, имеют место неравенства

$$F > 0, \quad F(a + 1) > 0, \quad F' < 0, \quad F_1' > 0,$$

из которых, ввиду представления (4.12), очевидно следует, что $g'(t) < 0$.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $\gamma > 1$ и $N \geqslant 2$ — произвольное натуральное число и параметры a, b и c удовлетворяют (2.3), а A_ρ и B_ρ определены равенствами (2.5). Тогда

(i) функция $\dfrac{A_\rho}{B_\rho}$ положительна, возрастает и имеет место соотношение

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{A_\rho}{B_\rho} = \frac{a}{a-k}.$$

(ii) функции A_ρ и B_ρ строго положительны при всех $\rho > 0$.

(iii) для любого положительного ρ справедливы следующие неравенства: $B_\rho > A_\rho$, $B'_\rho > A'_\rho$ и

$$0 < \frac{A_\rho}{B_\rho} \leqslant \frac{1}{2N-1}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что неравенства (4.9) выполнены для параметров a, b и c определенных в лемме 1. В этом несложно убедиться с помощью непосредственных вычислений, используя тот факт, что $k > 1$. Далее, вводя замену переменной $t = \dfrac{1-\gamma}{2}\rho^2 \leqslant 0$, получим

$$\begin{aligned} A_\rho &= -\frac{(\gamma-1)\rho^{k+1}}{4} F' = \frac{1}{2} g(t)F(t)\rho^{k-1}, \\ B_\rho &= k\rho^{k-1}F - \frac{\gamma-1}{2}\rho^{k+1} F' = (k+g(t))F(t)\frac{\rho^{k-1}}{2}, \end{aligned}$$

где $g(t)$ задана соотношением (4.8). Тогда справедливость утверждения (i) следует из (4.10).

С другой стороны, в силу леммы 2 и полученных выше представлений, знак B_ρ совпадает со знаком $k+g(t)$, а знак A_ρ — со знаком $g(t)$. Следовательно, в силу леммы 3 и справедливости (i), заключаем, что выполнено утверждение (ii) леммы.

Для доказательства третьего утверждения леммы отметим, что

$$B_\rho - A_\rho = \frac{k}{\rho} f(\rho), \qquad B'_\rho - A'_\rho = 2k\rho^{k-2}\left(\frac{k-1}{2} + g(t)\right) F(a,b;c;t)$$

и обе разности положительны в силу лемм 2 и 3. Наконец, неравенство $0 < \dfrac{A_\rho}{B_\rho} \leqslant \dfrac{1}{2N-1}$ является следствием (i) и числового неравенства $\dfrac{a}{a-k} \leqslant \dfrac{1}{2N-1}$, которое устанавливается непосредственно.

5. Параметризация независимых переменных

В соответствии с выводами параграфа 3, параметризация (2.4) задает локальное решение основного уравнения. Рассмотрим параметризацию

$$\begin{aligned} x(\rho,\theta) &= A_\rho \cos(2N-1)\theta + B_\rho \cos\theta, \\ y(\rho,\theta) &= A_\rho \sin(2N-1)\theta - B_\rho \sin\theta, \end{aligned} \tag{5.1}$$

более подробно. Всюду далее будет предполагаться, что коэффициенты A_ρ и B_ρ и входящие в них параметры определены равенствами из леммы 1. Наряду с параметрическим представлением (5.1), мы будем также использовать *градиентное* отображение $W(\xi, \eta)$, порождающее (5.1) в полярных координатах $\xi = \rho\cos\theta$ и $\eta = \rho\sin\theta$, т.е.

$$W(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)).$$

В дальнейшем мы не делаем различия между данным отображением и его комплексификацией $W(\zeta)$, где

$$W(\zeta) = A_\rho e^{(2N-1)\theta i} + B_\rho e^{-\theta i}, \qquad \zeta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}. \tag{5.2}$$

Наша дальнейшая цель – показать, что W является гомеоморфизмом плоскости $\mathbb{R}^2(\xi,\eta)$ на плоскость $\mathbb{R}^2(x,y)$.

Лемма 5. Градиентное отображение W непрерывно во всей плоскости $\mathbb{R}^2(\xi,\eta)$ и инъективно переводит каждую окружность радиуса $\rho > 0$ с центром в начале координат в жорданову кривую, не проходящую через начало координат.

Доказательство. При заданных параметрах (2.3) функция $F\left(a, b; c, -\dfrac{|\gamma-1|}{2}\rho^2\right)$ является вещественно аналитической при всех значениях $\rho \geqslant 0$. Действительно, т.к. справедливо представление [6, стр. 76]

$$F(a,b;c,z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c, \frac{z}{z-1}\right), \tag{5.3}$$

то требуемое свойство гладкости будет следовать из соотношения

$$F(a,b;c,-\frac{(\gamma-1)}{2}\rho^2) = \left(1+\frac{\gamma-1}{2}\rho^2\right)^{-a} F\left(a, c-b; c, \frac{\rho^2}{\rho^2+\dfrac{2}{\gamma-1}}\right)$$

и того факта, что $\dfrac{\rho^2}{\rho^2+\dfrac{2}{\gamma-1}} < 1$ (напомним также, что при нашем выборе параметров всегда выполнены соотношения (4.9)). Отсюда следует непрерывность (на самом деле вещественная аналитичность) функций A_ρ и B_ρ, а, значит и непрерывность $W(\xi,\eta)$ в проколотой плоскости. Непрерывность в нуле следует из непосредственного разложения гипергеометрических функций в ряд в окрестности нуля.

Для доказательства второй части утверждения леммы предположим противное. Применим комплексную форму записи отображения $W(\zeta)$ и предположим, что найдутся две точки $\zeta_k = \rho e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, на окружности $|\zeta| = \rho$, образы которых совпадают: $W(\zeta_1) = W(\zeta_2)$. Тогда, используя комплексное представление (5.2), получим

$$\frac{B_\rho}{A_\rho} = \frac{e^{(2N-1)\theta_1 i} - e^{(2N-1)\theta_2 i}}{e^{-\theta_2 i} - e^{-\theta_1 i}} = h_1 h_2 [h_1^{2N-2} + h_1^{2N-3} h_2 + \cdots + h_2^{2N-2}]$$

где $h_k = e^{i\theta_k}$. Отсюда следует, что $|B_\rho/A_\rho| \leqslant 2N-1$. Однако, в силу леммы 4, верно обратное. Полученное противоречие доказывает инъективность отображения $W(\zeta)$ на окружности $|\zeta| \equiv \rho$.

Наконец, из оценки

$$|W(\zeta)|^2 = A_\rho^2 + B_\rho^2 + 2A_\rho B_\rho \cos 2N\theta \geqslant (B_\rho - A_\rho)^2$$

и леммы 4 следует, что образ окружности $|\zeta| \equiv \rho$ проходит через начало координат только при $\rho = 0$.

Лемма 6. Якобиан градиентного отображения $W(\zeta)$ отрицателен при $\zeta \neq 0$.

Доказательство. Заметим, что для доказательства леммы достаточно найти якобиан в полярной системе координат. Непосредственные вычисления дают

$$J(\rho,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = (2N-1)A'_\rho A_\rho - B'_\rho B_\rho + ((2N-1)A_\rho B'_\rho - A'_\rho B_\rho)\cos 2N\theta.$$

Проверим следующее неравенство

$$\Delta = ((2N-1)A'_\rho A_\rho - B'_\rho B_\rho)^2 - ((2N-1)A_\rho B'_\rho - A'_\rho B_\rho)^2 > 0.$$

Отметим, что справедливо представление

$$\Delta = -\left[(2N-1)^2 A_\rho^2 - B_\rho^2\right] \cdot \left(B'_\rho - A'_\rho\right)\left(A'_\rho + B'_\rho\right),$$

где, согласно лемме 4, первый множитель отрицателен при $\rho = |\zeta| > 0$, а два других положительны. Таким образом, $\Delta > 0$, откуда заключаем, что якобиан отображения W имеет постоянный знак.

В силу непрерывности якобиан сохраняет свой знак всюду в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. При $\theta = 0$ и $\rho > 0$ в силу леммы 4 справедлива оценка

$$J(\rho,0) = \left((2N-1)\frac{A_\rho}{B_\rho} - 1\right)(A'_\rho + B'_\rho)B_\rho < 0,$$

что и доказывает утверждение леммы.

Следствие 1. Градиентное отображение $W(\zeta)$ (5.1) является гомеоморфизмом комплексной плоскости на себя.

Доказательство. В силу отрицательности якобиана, отображение W локально инъективно всюду вне начала координат. В то же время, отображение W инъективно на каждой окружности $\mathbb{T}_\rho = \{\zeta : |\zeta| = \rho\}$, $\rho > 0$. Отсюда несложно заключить, что для каждого $\rho > 0$ найдутся $\rho_1 < \rho < \rho_2$ такие, что отображение $W(\zeta)$ будет инъективно в кольце $\mathbb{T}(\rho_1, \rho_2) = \{\zeta : \rho_1 < |\zeta| < \rho_2\}$. Покажем, что ρ_2 можно выбрать равным $+\infty$. С этой целью, обозначим через ρ'_2 точную верхнюю грань тех ρ_2, при которых отображение $W(\zeta)$ будет инъективно в кольцевой окрестности $\mathbb{T}(\rho_1, \rho_2)$, и предположим, что $\rho'_2 < \infty$. Тогда найдутся точки $\zeta_2 \in \mathbb{T}_{\rho_2}$ и $\zeta_1 \in \mathbb{T}(\rho_1, \rho'_2) \cup \mathbb{T}_{\rho_1}$, такие, что $W(\zeta_1) = W(\zeta_2)$. Заметим, что внутри кольца $\mathbb{T}(\rho_1, \rho'_2)$ отображение $W(\zeta)$ является гомеоморфизмом и, значит, $W(\zeta)$ инъективно в некоторой кольцевой окрестности окружности $\mathbb{T}_{\rho_2'}$. Отсюда несложно заключить, что замыкание образа $W(\mathbb{T}(\rho_1, \rho_2'))$ есть двусвязная область с границами $W(\mathbb{T}_{\rho_1})$ и $W(\mathbb{T}_{\rho_2'})$. В силу сказанного выше, ни одна точка из кольца $\mathbb{T}(\rho_1, \rho_2')$ и окружности $\mathbb{T}_{\rho_1}$ не может быть в прообразе $W^{-1}(T_{\rho_2'})$, что противоречит выбору ζ_1. Полученное противоречие показывает, что $\rho_2 = \infty$. Аналогично показывается что ρ_1 может быть выбрано нулевым. Таким образом, $W(\zeta)$ инъективно во всей проколотой плоскости $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и, поскольку $W(\zeta)$ непрерывно и $W(0) = 0$, то отображение $W(\zeta)$ глобально инъективно.

Сюръективность отображения $W(\zeta)$ на $\mathbb{C}$ легко следует из непрерывности $W(\zeta)$ и справедливости следующей оценки

$$|W(\zeta)|^2 = A_\rho^2 + B_\rho^2 + 2A_\rho B_\rho \cos 2N\theta \geqslant B_\rho - |A_\rho| \geqslant k|\zeta|^{k-1},$$

где $k - 1 > 0$. Для доказательства последнего неравенства напомним, что $a < 0$ и, согласно лемме 2, функция $F(a, b; c; -\frac{|\gamma-1|}{2}\rho^2)$ положительная и возрастающая по ρ, а значит справедлива оценка

$$|W(\zeta)|^2 \geqslant B_\rho - A_\rho = k\rho^{k-1}F(a, b; c; -\frac{|\gamma - 1|}{2}\rho^2) \geqslant k|\zeta|^{k-1}.$$

Из доказанного выше следует, что $W(\rho, \theta)$ является гомеоморфизмом и, значит, утверждение доказано.

6. Доказательство теоремы 1

Доказанная в разделе 5. гомеоморфность отображения W означает, что полученная в лемме 1 параметризация задает глобально определенные однозначные решения уравнения (1.1).

При этом, в силу леммы 6 и вещественной аналитичности функций A_ρ и B_ρ при $\rho > 0$, отмеченной в доказательстве 5, построенные решения (2.4)–(2.5) также вещественно аналитичны. Доказательство C^2-гладкости решения $u_N(x, y)$ в начале координат $(x, y) = 0$ сводится к нахождению пределов частных производных первого и второго порядков при $\rho = 0$. Непосредственным вычислением легко убедиться, что указанные производные непрерывны в начале координат, а их пределы при $\rho \to 0$ равны нулю.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что

$$\limsup_{(x,y)\to\infty} \frac{u_N(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\alpha_{N,\gamma}/2}} = C \neq 0,$$

где $\alpha_{N,\gamma}$ определено (2.1).

Для оценки роста функции $u_N(x, y)$ рассмотрим ее поведение на окружностях фиксированного радиуса $x^2 + y^2 = R^2$. Построив соответствующую функцию Лагранжа $L(\rho, \theta, \lambda) = u_N(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$ и исследовав систему $\nabla L = 0$, убеждаемся, что необходимым условием экстремума для функции $u_N(\rho, \theta)$ на окружностях $x^2+y^2 = R^2$ будет выполнение соотношения $\sin N\theta = 0$. Поскольку при $\sin N\theta = 0$ выполнены равенства $x^2 + y^2 = (A_\rho + B_\rho)^2$ и

$|u_N| = \mathcal{F}(\rho)$, то, опираясь на формулы (2.5), (4.6) и (4.5), приходим к следующей оценке при $\rho \to \infty$

$$A_\rho + B_\rho = \rho^{k-1}\,[(k-2a)\,F(a) + 2a\,F(a+1)] = \rho^{k-1-2a} \cdot \left(\frac{(k-2a)\,2^a\,\lambda_1}{|\gamma-1|^a} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right)$$

и

$$\mathcal{F}(\rho) = \rho^k\,[(k-2a-1)\,F(a) + 2a\,F(a+1)] = \rho^{k-2a} \cdot \left(\frac{(k-2a-1)\,2^a\,\lambda_1}{|\gamma-1|^a} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right).$$

Отсюда следует справедливость указанной в формулировке теоремы 1 оценки роста, поскольку $\alpha_{N,\gamma} = \dfrac{k-2a}{k-2a-1}$, где $k = N/(N-1)$, а параметр a определен (2.3). Таким образом, все утверждения теоремы доказаны.

7. Доказательство теоремы 2

Пусть $z(\rho,\theta) = x(\rho,\theta) + iy(\rho,\theta)$, где $x(\rho,\theta)$ и $y(\rho,\theta)$ определены соотношениями (2.4), тогда

$$z^N(\rho,\theta) = (A_\rho e^{i(2N-1)\theta} + B_\rho e^{-i\theta})^N = e^{-i\tau}(A_\rho e^{2i\tau} + B_\rho)^N,$$

где $N\theta = \tau$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} Q(\rho,\tau) &= \frac{\operatorname{Re} z^N}{\cos\tau} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}\,\left(B_\rho + A_\rho\,e^{2i\tau}\right)^N\right) = \\ &= \sum_{j=0}^{N} \frac{\cos(2j-1)\tau}{\cos\tau}\,C_N^j B_\rho^{N-j} A_\rho^j. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Поскольку

$$\frac{\cos(2j-1)\tau}{\cos\tau} = \frac{T_{2j-1}(\cos\tau)}{\cos\tau},$$

где T_{2j-1} — многочлены Чебышева нечетного порядка, то последнее выражение в (7.1) является многочленом от $\cos^2\tau$ с непрерывными коэффициентами, зависящими только от ρ. Таким образом, $Q(\rho,\tau)$ является непрерывной функцией обоих аргументов и ее поведение определяется полностью на интервале $0 \leqslant \tau < \frac{\pi}{2}$.

Лемма 7. Пусть $N \geqslant 1$ и $B > (2N-1)A > 0$ — произвольные вещественные числа. Тогда для всех $\tau \in [0; \frac{\pi}{2})$

$$-\frac{\pi}{2} < \arg\left(\frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}\,\left(B + A\,e^{2i\tau}\right)^N\right) \leqslant 0. \tag{7.2}$$

В частности, $Q(\rho,\tau)$ является строго положительной при всех τ.

Доказательство. Поскольку, в силу условий леммы $B - A > 0$, то

$$\operatorname{Re}(B + A\,e^{2\tau i}) > 0,$$

а значит для любого $0 \leqslant \tau < \dfrac{\pi}{2}$ найдется $\sigma = \sigma(\tau)$ такое, что $|\sigma| < \dfrac{\pi}{2}$ и

$$B + A\,e^{2\tau i} = |B + A\,e^{2i\tau}| \cdot e^{i\sigma}.$$

Кроме того, из последнего равенства следует, что

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{A\sin 2\tau}{B + A\cos 2\tau} > 0, \tag{7.3}$$

а значит, τ и σ имеют одинаковые знаки. Таким образом

$$\arg\left(\frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}\left(B + A\,e^{2i\tau}\right)^N\right) = N\sigma(\tau) - \tau = N\operatorname{arctg}\frac{A\sin 2\tau}{B + A\cos 2\tau} - \tau. \tag{7.4}$$

Дифференцируя последнее выражение относительно переменной τ, убеждаемся, что знак производной определяется ее числителем, для которого справедлива цепочка неравенств:

$$(2N-1)AB\cos 2\tau - B^2 + (2N-1)A^2 \leqslant (B+A)((2N-1)A - B) < 0.$$

Таким образом, функция $N\sigma(\tau) - \tau$ убывает на множестве $\tau \in [0; \frac{\pi}{2})$. Поскольку

$$\arg\frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}\left(B + A\,e^{2i\tau}\right)^N\Big|_{\tau=0} = 0, \qquad \lim_{\tau\to\frac{\pi}{2}-0}\arg\frac{e^{-i\tau}}{\cos\tau}\left(B + A\,e^{2i\tau}\right)^N = -\frac{\pi}{2},$$

мы получаем неравенство (7.2). Заключение леммы о положительности Q вытекает из свойств A_ρ и B_ρ в лемме 4.

Исследуем теперь поведение функции $Q(\rho,\tau)$ на прообразах окружностей $|z|^2 = x^2 + y^2 = R^2$. Используя параметрическое представление решения (2.4), найдем уравнения этих кривых

$$A_\rho^2 + B_\rho^2 + 2A_\rho B_\rho\cos 2\tau = R^2. \tag{7.5}$$

Заметим, что функция $\rho = \rho(\tau)$, задаваемая неявно (7.5), полностью определена своими значениями на интервале $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$. При этом

$$\rho(0) < \rho(\tau) < \rho(\frac{\pi}{2}). \tag{7.6}$$

Действительно, обозначим для краткости

$$A_0 = A_{\rho(0)}, \quad B_0 = B_{\rho(0)}, \quad A_1 = A_{\rho(\frac{\pi}{2})}, \quad B_1 = B_{\rho(\frac{\pi}{2})}.$$

Тогда в силу (7.5)

$$B_\rho^2 + A_\rho^2 + 2A_\rho B_\rho\cos 2\tau = (B_0 + A_0)^2 = (B_1 - A_1)^2 = R^2. \tag{7.7}$$

В то же время, учитывая, что $B_\rho > A_\rho \geqslant 0$, имеем

$$(B_\rho - A_\rho)^2 \leqslant B_\rho^2 + A_\rho^2 + 2A_\rho B_\rho\cos 2\tau \leqslant (B_\rho + A_\rho)^2,$$

а, значит, выполнены неравенства

$$(B_\rho - A_\rho)^2 \leqslant (B_1 - A_1)^2, \qquad (B_0 + A_0)^2 \leqslant (B_\rho + A_\rho)^2.$$

В силу леммы 4 функции $B_\rho - A_\rho$ и $B_\rho + A_\rho$ положительны и возрастающие по переменной ρ, откуда получаем (7.6).

Для получения параметризации функции Q вдоль кривой (7.5) воспользуемся (7.1) и (7.3):

$$Q(\rho(\tau),\tau)=\frac{R^N\cos\left(\tau-N\operatorname{arctg}\frac{A_\rho\sin 2\tau}{B_\rho+A_\rho\cos 2\tau}\right)}{\cos\tau},\qquad 0\leqslant\tau<\frac{\pi}{2}. \tag{7.8}$$

В силу леммы 7 справедливо $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arg\dfrac{z^N}{\cos\tau}<0$, откуда

$$0\leqslant-\arg\frac{z^N}{\cos\tau}=\tau-N\operatorname{arctg}\frac{A_\rho\sin 2\tau}{B_\rho+A_\rho\cos 2\tau}\leqslant\tau\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно выполнено неравенство

$$\cos\left(\tau-N\operatorname{arctg}\frac{A_\rho\sin 2\tau}{B_\rho+A_\rho\cos 2\tau}\right)\geqslant\cos\tau.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$Q(\rho(\tau),\tau)\geqslant R^N\equiv Q(\rho(0),0). \tag{7.9}$$

Перейдем теперь к доказательству оценки (2.6) в формулировке теоремы 2. Согласно параметрическому представлению (2.4), имеем

$$U_N(\rho,\tau)=\frac{u_N(z)}{\operatorname{Re}z^N}=\frac{\mathcal{F}(\rho)\cos\tau}{\operatorname{Re}z^N}=\frac{\rho\,(B_\rho+(2N-1)A_\rho)}{NQ(\rho,\tau)}. \tag{7.10}$$

В силу леммы 7, функция U_N непрерывна и положительна при $\rho>0$. Далее отметим, что

$$\frac{1}{N}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho(B_\rho+(2N-1)A_\rho)\Big)=(\rho f'-f)'=\rho\, f''=\rho\,(A_\rho+B_\rho)'>0$$

ввиду утверждения (iii) леммы 4, откуда заключаем, что числитель в правой части (7.10) — возрастающая функция по ρ и поэтому на интервале $0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ имеем

$$\rho(B_\rho+(2N-1)A_\rho)\leqslant\rho_1\,(B_1+(2N-1)A_1),\qquad \rho=\rho(\tau).$$

Применяя теперь (7.9) и (7.7), заключаем

$$0<U_N(\rho(\tau),\tau)\leqslant\frac{\rho_1\,(B_1+(2N-1)A_1)}{N\cdot R^N}=\frac{\rho_1\,(B_1+(2N-1)A_1)}{N(B_1-A_1)^N}\equiv\phi(\rho_1).$$

Покажем, что $\phi(\rho)\equiv\dfrac{\rho\,(B_\rho+(2N-1)A_\rho)}{N(B_\rho-A_\rho)^N}$ является убывающей функцией. С этой целью, найдем производную этой функции, предварительно применив (2.5):

$$\phi'(\rho)=\left(\frac{\rho f'-f}{(\frac{k}{\rho}f)^N}\right)'=k\,\frac{\rho^2 f''\,f-N(\rho\, f'-f)^2}{\rho^2(\frac{k}{\rho}f)^{N+1}}.$$

Переписывая числитель последней дроби в обозначениях (2.2)

$$\rho^2 f''\,f-N(\rho\, f'-f)^2=2t\rho^{2k}([F'F+tF''F-tF'^2]+tF''F-(2N-1)tF'^2),$$

где $t = -\dfrac{(\gamma-1)\rho^2}{2}$, заметим, что в последнем выражении в силу леммы 2 $t(F''F-(2N-1)F'^2)>0$, и $F'F+tF''F-tF'^2 = F^2\cdot g'(t)>0$ согласно лемме 3 (под $g(t)$, как и ранее, понимается функция, определенная (4.8)).

Таким образом функция $\phi(\rho)$ убывающая, и, значит,

$$\phi(\rho_1) \leqslant \lim_{\rho\to+0}\phi(\rho).$$

Для нахождения предела воспользуемся (2.5) и (4.2), откуда $B(\rho)\sim k\rho^{k-1}$ в окрестности $\rho=0$, где $k=\dfrac{N}{N-1}$. Тогда

$$\lim_{\rho\to 0}\phi(\rho) = \lim_{\rho\to 0}\frac{(1+\frac{(2N-1)A}{B})\rho}{N\cdot B^{N-1}(1-\frac{A}{B})^N} = \lim_{\rho\to 0}\frac{k\rho^{k-1}\cdot\rho}{N(k\rho^{k-1})^N} = \frac{(N-1)^{N-1}}{N^N}.$$

Таким образом, все утверждения теоремы 2 доказаны.

Литература

[1] Aronsson, G. On the partial differential equation $u_{xx}u_x^2+2u_{xy}u_xu_y+u_{yy}u_y^2 = 0$ / G. Aronsson // Ark. Mat. – 1968. – No. 69. – P. 395–425.

[2] Aronsson, G. On certain singular solutions of the partial differential equation $u_x^2u_{xx}+2u_xu_yu_{xy}+u_y^2u_{yy}=0$ / G. Aronsson // Manuscripta Math. – 1984. – No. 47. – P. 133–151.

[3] Aronsson, G. Construction of singular solutions to the p-harmonic equation and its limit equation for $p=\infty$ / Aronsson G. // Manuscripta Math. – 1986. – No. 56. – P. 135–158.

[4] Aronsson, G. Representation of a p-harmonic function near a critical point in the plane / G. Aronsson // Manuscripta Math. – 1989. – No. 66. – P. 73–95.

[5] Bernstein, S.N. Sur un theoreme de geometrie et ses application aux equations aux derivees partielles du type elliptiqe / S.N. Bernstein // Comm. Soc. Math. – Kharkov. – 1915—1917. – T. 2. – P. 38–45.

[6] Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.:Наука, 1973. – 296 с.

[7] Безбородов, П.А., Контрпример к гипотезе Саймона / П.А. Безбородов // Тезисы Трудов Международной конференции по анализу и геометрии, Новосибирск, 30 авг.–3 сент. 1999. – Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999. – С. 10–11.

[8] Bombieri, E. Minimal cones and the Bernstein problem / E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Giusti // Invent. Math. – 1969. – V. 7. – C. 243–268.

[9] Geometry., V. Minimal surfaces. Edited by R. Osserman / V. Geometry // Encyclopaedia of Mathematical Sciences. – No. 90. – Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[10] Simon, L. Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations / L. Simon // Geometry from Pac. Rim. – Berlin, New York: de Gruyter, 1997. – P. 343–362.

[11] Tkachev, V.G. Algebraic structure of γ-harmonic functions / V.G. Tkachev // Pacific Journal Math. – 2006. – V. 226. – No. 1. – P. 179–200.

[12] Зорина И.А.Целые решения уравнения Саймона / И.А. Зорина, В.Г. Ткачев //Геометрический анализ и его приложения: труды международной школы-конференции, г. Волгоград, 24–30 мая 2004 г. – Волгоград, Изд-во ВолГУ, 2005. – С. 55–74

Поступила в редакцию 21/*VII*/2008;
в окончательном варианте — 21/*VII*/2008.

ON ENTIRE SOLUTIONS OF A QUASILINEAR PDE WITH A QUADRIC PRINCIPAL PART

 I.A. Zorina[2] V.G. Tkachev[3]

In the present paper, we prove the existence of a countable family of entire solutions for a wide class of quasilinear equations. In particular, we show that all obtained solutions have a polynomial growth and their topological structure is similar to that of harmonic polynomials.

Keywords: *entire solution, Bernstein problem, elliptic type, principal part.*

Paper received 21/*VII*/2008.
Paper accepted 21/*VII*/2008.

[2]Zorina Irina Andreevna (`irina.zorina@list.ru`), Dept. of Mathematical Analysis and Function Theory, Volgograd State University, Samara, 400062, Russia.

[3]Tkachev Vladimir Gennadjevich (`tkatchev@math.kth.se`), Dept. of Mathematical Analysis and Function Theory, Volgograd State University.