TAMS79: Föreläsning 10
Markovkedjor

Johan Thim*

11 december 2018

10.1 Markovkedjor

Vi ska nu betrakta en speciell tidsdiskret diskret stokastisk process, nämligen Markovkedjan. Vi börjar med en definition

Markovkedja

Definition. En diskret Markovprocess $\{X_n\}_{n\in\{0,1,2,\ldots\}}$ med diskret tid kallas för en **Markovkedja**. Kravet på processen är att

$$P\big(X_n = x_n \mid X_0 = x_0,\, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\big) = P\big(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}\big)$$

för alla $n \geq 2$ och $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$.

Med andra ord så har historian ingen betydelse för processen. Endast det tillstånd kedjan just nu befinner sig i har någon inverkan på framtiden.
Om Markovkedjan har ett ändligt tillståndsrum E säger vi att Markovkedjan är **ändlig**. Vidare har kedjan **ingångssannolikheter** $p_j(0) = P(X_0 = E_j)$ för alla $j \geq 0$. Funktionerna $p_j(n)$ beskriver generellt sannolikhetsfördelningen for tiden n, dvs $p_j(n) = P(X_n = E_j)$ är sannolikheten att kedjan vid tiden n befinner sig i tillstånd E_j. Vi kallar dessa sannolikheter för **absoluta sannolikheter**.
Kedjan kallas **tidshomogen** om $P\big(X_{n+1} = E_j \mid X_n = E_i\big) = p_{ij}$ är konstant för alla $n \geq 0$. Detta innebär att vi *alltid* har samma sannolikhet för övergångar mellan olika tillstånd i ett steg. Vi tänker oss p_{ij} som sannolikheten att flytta oss från tillståndet E_i till E_j i ett steg. Från detta följer att vi fullständigt kan karaktärisera en tidshomogen Markovkedja utifrån **övergångsmatrisen** $P = (p_{ij})$,

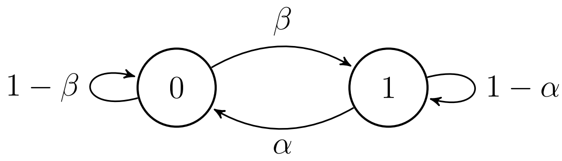
$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

där talet på rad i och kolonn j representerar övergångssannolikheten p_{ij} att kedjan går från tillstånd E_i till E_j med ett steg. Denna matris har egenskapen att varje radsumma blir ett, dvs

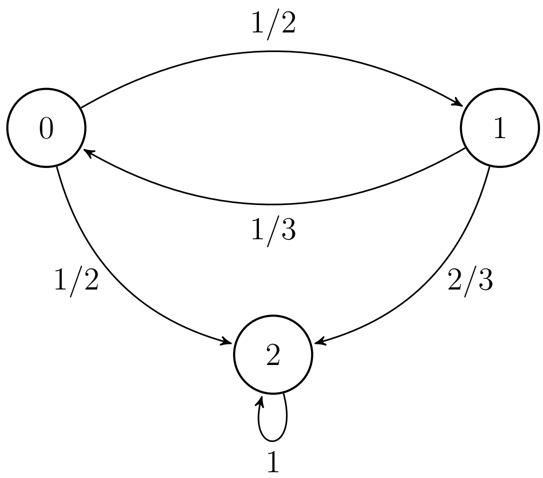
*johan.thim@liu.se

att $\sum_j p_{ij} = 1$ för varje i. Matriser som har denna egenskap tillsammans med kravet att varje element i matrisen är en sannolikhet kallas för **stokastiska matriser**. Ett tillstånd E_j som har $p_{jj} = 1$ kallar vi **absorberande**.
Vi kommer att anta tidshomogenitet om inget annat anges. Ofta beskrivs Markovkedjor med diagram; vi listar några exempel tillsammans med respektive övergångsmatris.

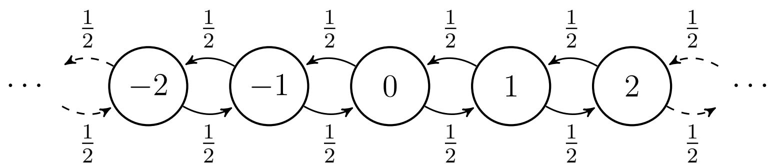
$$P = \begin{pmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$



10.2 Övergångar av högre ordning

För $i, j, n \geq 0$ låter vi $p_{ij}(n) = P\big(X_{n+k} = E_j \mid X_k = E_i\big)$, vilket är sannolikheten att med precis n steg förflytta sig från E_i till E_j på något sätt. Om kedjan är tidshomogen är detta uttryck oberoende av k, så vi kan lika gärna skriva

$$p_{ij}(n) = P\big(X_n = E_j \mid X_0 = E_i\big), \quad i, j, n \geq 0.$$

Vi låter matrisen $P(n) = (p_{ij}(n))$ bestå av dessa sannolikheter. Hur hänger $P(n)$ ihop med övergångsmatrisen P?

Övergångsmatris av ordning n

Sats. För alla heltal $n \geq 2$ gäller att $P(n) = P^n$.

Beviset för satsen kan göras till exempel med induktion på n. Vi visar basfallet $n = 2$:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(2) &= P\big(X_2 = E_j \mid X_0 = E_i\big) \\
&= \sum_k P\big(X_2 = E_j \mid X_1 = E_k,\, X_0 = E_i\big) \cdot P\big(X_1 = E_k \mid X_0 = E_i\big) \\
&= \sum_k P\big(X_2 = E_j \mid X_1 = E_k\big) \cdot P\big(X_1 = E_k \mid X_0 = E_i\big) \\
&= \sum_k p_{kj}(1) \cdot p_{ik}(1),
\end{aligned}
$$

vilket är elementet på rad i och kolonn j i matrisen P^2. Med samma teknik kan man visa att $P(n) = P \cdot P(n-1)$, så det sökta resultatet följer från induktionsaxiomet.

Chapman-Kolmogorov

Sats. Om $m, n \geq 0$ gäller att $P(m+n) = P(m)P(n) = P^{m+n}$.

10.3 Sannolikhetsfördelningar

Om vi vet ingångssannolikheterna $p_j(0)$ och övergångsmatrisen P för en tidshomogen Markovkedja, kan vi direkt beskriva fördelningen av sannolikheter efter ett godtyckligt antal steg n genom ekvationen

$$p(n) = p(0)P^n, \quad n \geq 0,$$

där vi låter $p(n)$ vara radvektorn $(p_0(n), p_1(n), p_2(n), \ldots)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Observera att $p(0)$ är radvektorn med ingångssannolikheter.
Allmänt kallar vi en vektor $\underline{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$ för en **sannolikhetsvektor** om $\sum_k \pi_k = 1$ och $\pi_k \geq 0$ för alla k.

Stationär fördelning

Definition. Låt $\underline{\pi}$ vara en sannolikhetsvektor. Om $\underline{\pi}$ uppfyller ekvationen $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$ kallar vi $\underline{\pi}$ för en **stationär fördelning**.

En stationär fördelning $\underline{\pi}$ uppfyller $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$, vilket medför att om vi låter vektorn $p(0)$ av ingångssannolikheter ges av $p(0) = \underline{\pi}$, så erhåller vi $p(n) = p(0)P^n = \underline{\pi}P^n = \underline{\pi}$ för alla n. Därav ordet stationär.

Asymptotisk fördelning

Definition. Om $\lim\limits_{n\to\infty} p(n) = \underline{\pi}$ för någon sannolikhetsvektor $\underline{\pi}$ som *inte* beror på ingångssannolikheterna (vektorn $p(0)$), så säger vi att $\underline{\pi}$ är kedjans **asymptotiska fördelning**.

Asymptotisk fördelning vs. stationär fördelning

Om en tidshomogen Markovkedja har en asymptotisk fördelning $\underline{\pi}$ så fås denna genom att lösa ekvationen $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$.

En asymptotisk fördelning är alltså en stationär fördelning. Varför?
Eftersom $p(n) = p(0)P^n \to \underline{\pi}$ enligt antagande (asymptotisk fördelning existerar), kan vi i gränsvärde erhålla

$$\begin{array}{ccc} p(0)P^{n+1} & = & (p(0)P^n)P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{\pi} & = & \underline{\pi}P \end{array}$$

då $n \to \infty$. Observera att motsatsen *inte* gäller. En stationär fördelning behöver inte vara den asymptotiska fördelningen.

Exempel

Med $\alpha, \beta \in (0,1)$, låt en Markovkedja ha övergångsmatrisen $P = \left(\begin{smallmatrix} 1-\beta & \beta \\ \alpha & 1-\alpha \end{smallmatrix}\right)$. Finn alla stationära fördelningar och bestäm (om den finns) den asymptotiska fördelningen.

Lösning: Vi börjar med att skriva ut ekvationen $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0(1-\beta) + \pi_1\alpha, \\ \pi_1 = \pi_0\beta + \pi_1(1-\alpha), \\ \ \ 1 = \pi_0 + \pi_1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_0 = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\ \pi_1 = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}, \end{cases}$$

där vi utnyttjat att $\pi_0 + \pi_1 = 1$ (annars får vi oändligt många lösningar). Lösningen är entydig så det finns bara en stationär fördelning, så om en asymptotisk fördelning existerar måste den sammanfalla med vektorn ovan. Så hur visar vi att en asymptotisk fördelning existerar? Ett sätt är att helt enkelt räkna ut gränsvärdet. Det visar sig ganska bökigt att räkna ut $P^2, P^3, \ldots$ (testa), så vi använder lite linjär algebra. Man kan nästan gissa att egenvärdena till P ges av $\lambda = 1$ och $\lambda = 1 - \alpha - \beta$. Lös annars sekularekvationen $\det(P - \lambda I) = 0$. Motsvarande egenvektorer kan beräknas till

$$v_1 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad v_2 = s\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Vi skapar en transformationsmatris T med v_1 och v_2 som kolonner. Matrisen T och dess invers ges av

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad T^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi diagonaliserar P genom $P = TDT^{-1}$ där D är diagonalmatrisen med egenvärdena på diagonalen. Då erhåller vi

$$\begin{aligned} P^n = (TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1} &= T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}^n T^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha + \beta(1-\alpha-\beta)^n & \beta - \beta(1-\alpha-\beta)^n \\ \alpha - \alpha(1-\alpha-\beta)^n & \beta + \alpha(1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix} \\ &\to \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

eftersom $|1-\alpha-\beta| < 1$. Alltså måste

$$p(n) = p(0)P^n \to \underline{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}, \quad n \to \infty,$$

oberoende av ingångssannolikheten $p(0)$. Detta är alltså den asymptotiska fördelningen $\underline{\pi}$. Detta är en ganska lång beräkning för att komma fram till att den stationära fördelning i detta fall är den asymptotiska. Det finns många satser som garanterar existens av asymptotiska fördelningar. En av dessa (utan bevis) är följande.

Existens av asymptotisk fördelning

Sats. Om man i en ändlig kedja kan finna ett $n > 0$ så att alla element i någon kolonn av matrisen P^n är positiva, så existerar en asymptotisk fördelning.

I exemplet ovan kan vi alltså direkt säga att en asymptotisk fördelning existerar, och eftersom kedjan bara har en stationär fördelning måste denna även vara den asymptotiska!

10.4 Vidare klassificering av Markovkedjor

Vi kallar ett tillstånd E_j **tillgängligt** från tillstånd E_i om $p_{ij}(n) > 0$ för något $n \geq 0$; vi skriver $E_i \to E_j$. Om både $E_j \to E_i$ och $E_i \to E_j$ säger vi att tillstånden **kommunicerar** och skriver $E_i \leftrightarrow E_j$. Kommunikation är en ekvivalensrelation på mängden av alla tillstånd. Med detta menar vi att

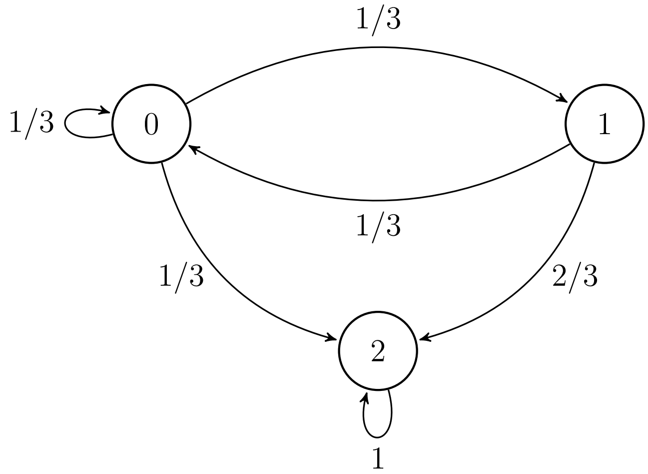
(i) $E_i \leftrightarrow E_i$ för alla tillstånd E_i;
(ii) $E_i \leftrightarrow E_j$ medför att $E_j \leftrightarrow E_i$;
(iii) Om $E_i \leftrightarrow E_j$ och $E_j \leftrightarrow E_k$ så gäller att $E_i \leftrightarrow E_k$.

En ekvivalensrelation på en mängd delar in mängden i så kallade ekvivalensklasser. Vi säger att två tillstånd som kommunicerar med varandra tillhör samma **klass**. En Markovkedja där alla tillstånd kommunicerar med varandra (vi har endast en klass) kallas **irreducibel**. Finns det flera klasser kallar vi kedjan **reducibel**.
Låt $f_{ii}^{(n)}$ vara sannolikheten att kedjan efter n steg för första gången sedan starten i E_i åter igen befinner sig i E_i. Vi låter $f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$ vara sannolikheten att kedjan någon gång återvänder till tillstånd E_i. Om $f_{ii} = 1$ kallar vi tillståndet E_i **beständigt** och om $f_{ii} < 1$ kallas E_i **obeständigt**. Om ett tillstånd är obeständigt finns en positiv sannolikhet $1 - f_{ii}$ att kedjan *aldrig* återvänder till E_i.
Varje tillstånd i en Markovkedja är alltså beständigt eller obeständigt.
Om E_i är beständigt, låt den stokastiska variabeln T_i vara antalet steg innan kedjan återvänder till E_i. Om $E(T_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty$ (det förväntade antalet steg är ändligt) kallar vi E_i för **positivt beständigt**. Om $E(T_i) = \infty$ kallas tillståndet **noll-beständigt**.
Det är även sant att dessa beständighetsegenskaper för tillstånd måste delas av hela klasser i en Markovkedja. Om ett tillstånd i klassen till exempel är positivt beständigt så är alla tillstånd i klassen det.

Exempel

Låt $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vara övergångsmatrisen för kedjan X_n. Rita upp Markovkedjan och klassificera alla tillstånd. Beräkna alla stationära fördelningar och den asymptotiska fördelningen (om den existerar).

Lösning: Figur:



Vi undersöker nu vilka tillstånd som är beständiga. Först ut är E_0:

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Tillståndet är obeständigt. Vi fortsätter med E_1:

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \cdots = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{6}.$$

Även E_1 är obeständigt. Om vi tittar närmare på E_2 ser vi att tillståndet är absorberande (och därmed beständigt); $f_{22} = 1$. Detta tillstånd är även positivt beständigt (självklart).
Vi löser ekvationen $\underline{\pi} = \underline{\pi} P$ för att hitta stationära vektorer:

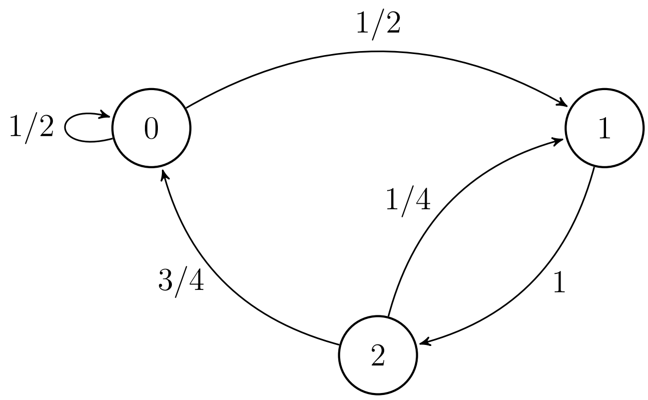
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{3} & = & \pi_0 \\ \frac{\pi_0}{3} & = & \pi_1 \\ \frac{\pi_0}{3} + \frac{2\pi_1}{3} + \pi_2 & = & \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 & = & 1 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \pi_0 & = & 0 \\ \pi_1 & = & 0 \\ \pi_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Inte så förvånande resultat med tanke på att tillstånd två är absorberande.
I matrisen P är alla element i kolonn tre skilda från noll, så enligt satsen ovan existerar en asymptotisk fördelning, som måste vara den unika stationära lösningen vi fann ovan.

Exempel

Låt $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ vara övergångsmatrisen för kedjan X_n. Visa att P är en övergångsmatris, rita upp Markovkedjan och klassificera alla tillstånd. Bestäm alla stationära fördelningar och finn den asymptotiska fördelningen om denna existerar.

Lösning: Eftersom alla rader summerar till ett och alla element ligger i $[0,1]$ så är P en stokastisk matris, och därmed en övergångsmatris för en Markovkedja. Vilken? Vi ritar en figur:



Vi undersöker nu vilka tillstånd som är beständiga. Först ut är E_0:

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{4} + 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{3}{4} + 0 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{3}{4} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3} = 1.$$

Eftersom termer i en geometrisk serie avtar så snabbt, så följer det även att

$$E(T_0) = \sum_{n=1} n f_{00}^{(n)} < \infty.$$

Tillståndet E_0 är alltså positivt beständigt. Vi fortsätter med E_1:

$$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = 0 + 1\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot 2 = 1.$$

På samma sätt som ovan så avtar termerna i den geometriska serien så snabbt att

$$E(T_1) = \sum_{n=1} n f_{11}^{(n)} < \infty.$$

Tillståndet E_1 är alltså positivt beständigt. Det visar sig att f_{22} blir numeriskt likadan (betrakta figuren ovan) så även detta tillstånd är positivt beständigt. Alltså samma för alla tillstånd. Är denna kedja irreducibel?

För att hitta alla stationära tillstånd löser vi ekvationssystemet $\underline{\pi} = \underline{\pi}P$, dvs

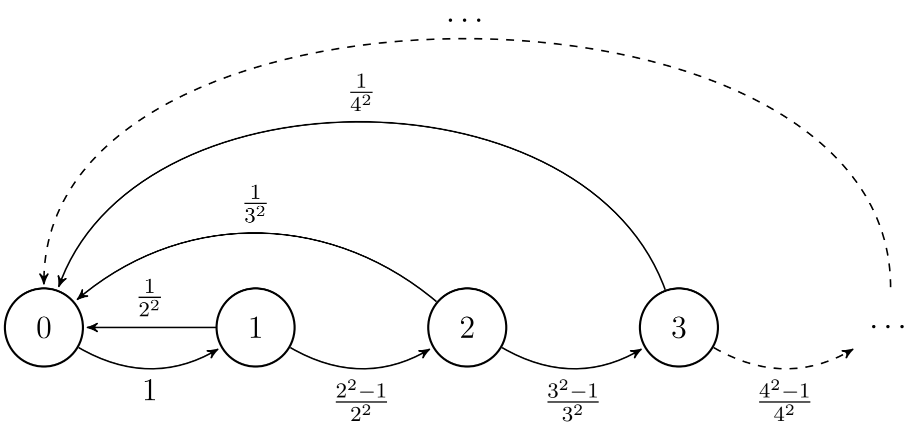
$$\begin{cases} \frac{\pi_0}{2} + \frac{3\pi_2}{4} & = & \pi_0 \\ \frac{\pi_0}{2} + \frac{\pi_2}{4} & = & \pi_1 \\ \pi_1 & = & \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 & = & 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_0 & = & \frac{3}{7} \\ \pi_1 & = & \frac{2}{7} \\ \pi_2 & = & \frac{2}{7} \end{cases}$$

Eftersom till exempel P^2 har hela kolonn ett skild från noll så vet vi att en asymptotisk fördelning existerar, och denna måste vara den stationära fördelningen ovan (eftersom det bara finns en).

Exempel

Låt X_n vara en oändlig Markovkedja med tillstånden $E_0, E_1, E_2, \ldots$ och övergångssannolikheterna $p_{i0} = \frac{1}{(i+1)^2}$ för $i \geq 1$ och $p_{i,i+1} = 1 - \frac{1}{(i+1)^2}$ för $i \geq 0$. Övriga $p_{ij} = 0$. Avgör om E_0 är beständigt.

Lösning:



Vi ser att $f_{00}^{(1)} = 0$ och att för $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f_{00}^{(n)} &= \frac{1}{n^2} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{1}{n^2} \prod_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-2) \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{2 \cdot 3 \cdots n \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-2)! \cdot n!}{n! \cdot n!} = \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{1}{2n(n-1)}. \end{aligned}$$

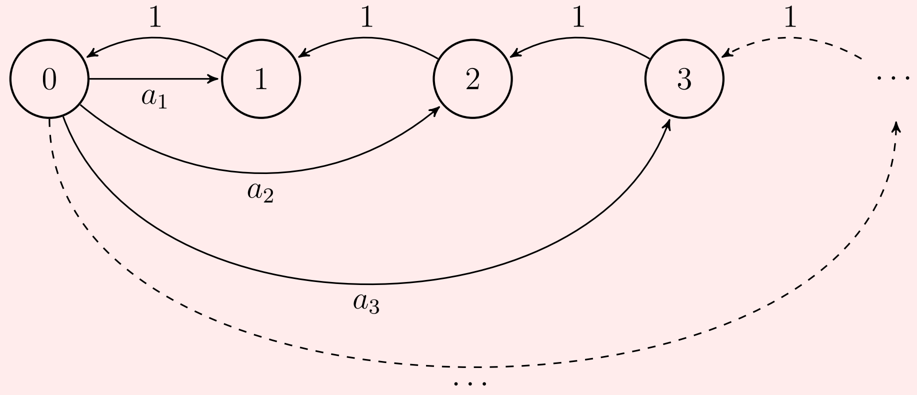
För att räkna ut f_{00} delar vi upp $f_{00}^{(n)}$ i partialbråk och utnyttjar att summan blir en teleskopsumma:

$$\begin{aligned} f_{00} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n(n-1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{k \to \infty} \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tillståndet E_0 blir alltså obeständigt!

Exempel

Låt X_n vara den oändliga Markovkedjan med följande tillståndsdiagram:



Om $a_k = \dfrac{6}{k^2\pi^2}$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$, klassificera tillståndet E_0.

Vi ser att $f_{00}^{(n)} = a_{n-1}$ om $n \geq 2$ och att $f_{00}^{(1)} = 0$. Vi undersöker om E_0 är beständigt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1$$

enligt välkänd matematisk formel. Tillståndet är alltså beständigt. Vidare,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geq \frac{6}{\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

Alltså är E_0 noll-beständigt!

Vad hade hänt om $a_k = \dfrac{90}{k^4\pi^4}$? Man kan visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, så E_0 är beständigt. Blir det nollbeständigt? Faktiskt så blir det *inte* så eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^3}\, dx < \infty.$$

Om $a_k = Ck^{-\alpha}$ för lämplig konstant $C > 0$, vart går gränsen på α för att E_0 skall vara positivt beständig?