Tekniska högskolan i Linköping
Matematiska institutionen
Matematisk statistik,Jan Olheim

MATEMATIK:Statistik

92MA31 STN2 , 92MA37 STN2

TENTAMEN MÅNDAGEN DEN 14 JANUARI 2013 KL 8.00-12.00.

Hjälpmedel:Formler och tabeller för 92MA31/92MA37 samt räknedosa med tömda minnen.
Varje korrekt löst uppgift ger 3 poäng. Tredelade uppgifter ger 1 poäng per del.
För betyget godkänd krävs minst 8 poäng.För väl godkänd minst 14.
Jourhavande lärare: Jan Olheim,tel 28 14 53.

1. Den kontinuerliga slumpvariabeln X har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{x^3}{4} \qquad 0 \le x \le 2$$

Bestäm

a) väntevärdet E [X]

b) variansen V [X]

c) ett tal a så att $P(X \le a) = 0.75$

2. Låt X vara Bin (16 , 0.4) Beräkna

a) $P(X = 7)$

b) $P(X \ge 4)$

c) $P(X \le E[X] + 2\,D[X])$, där E[X] är väntevärdet och D[X] är standardavvikelsen.

3. Livslängden (i timmar) för en viss typ av pennor anses vara en slumpvariabel X , där lnX är N (μ, σ).
En studie i ett klassrum gav följande (logaritmerade) värden:

7.0 6.6 6.4 6.8 6.4 6.3

a) Bilda ett 95% konfidensintervall för μ (2p)
b) Verkar det rimligt att den verkliga förväntade livslängden är 1000 timmar ? (1p)

4. Man tror att minst 60% av svenska folket stöder monarkin.
För att undersöka detta väljer man ut n personer och frågar efter deras inställning till monarkin.
Ungefär hur stort måste n vara för att man skall kunna bilda ett approximativt 95% konfidensintervall av längden 0.10 för p ?
(p = andelen svenskar som stöder monarkin)

5. Låt den kontinuerliga tvådimensionella slumpvariabeln (X , Y) ha täthetsfunktionen

f (x,y) = 1/2 $\quad 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$

a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$

b) Är X och Y oberoende? Motivera.

c) Beräkna P (X < Y)

6. 4 flickor och 4 pojkar ställer sig slumpmässigt på ett led.

a) Hur stor är sannolikheten att alla pojkar hamnar bredvid varandra?

b) Hur stor blir sannolikheten i a) om man istället ställer sig i en ring?

c) Hur stor är sannolikheten att det blir varannan pojke,varannan flicka?

Sannolikheten i c) blir densamma,oavsett om man står på led eller i ring.
Välj själv vilket du vill räkna på.

1 92MA31/37-Lösningsförslag 130114

1.

a) E [X] = $\int x\ f(x)\ dx = \int_0^2 x\ \frac{x^3}{4}\ dx = \frac{8}{5} = 1.6$

b) E [X^2] = $\int_0^2 x^2\ \frac{x^3}{4}\ dx = \frac{8}{3}$
V [X] = E [X^2] - $E[X]^2 = \frac{8}{3} - (\frac{8}{5})^2 = \frac{8}{75} \approx 0.11$

c) P (X ≤ a) = $\int_0^a \frac{x^3}{4} = \ dx = \frac{a^4}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow a^4 = 12 \Rightarrow a \approx 1.86$

2.

X är Bin (16 , 0.4)
a) P (X = 7) = P(X≤7) - P(X≤6)=0.7161-0.5272=0.1889 (tabell)

b) P (X ≥4) = 1 - P (X ≤3) =1-0.0651 = 0.9349

c)E [X] = 16 ·0.4=6.4 D[X]= $\sqrt{16 \cdot 0.4 \cdot 0.6} \approx 1.96$
E[X] + 2D[X] = 10.3
P(X≤10.3) = P(X≤10) = 0.9809

3.

a) Sätt Y = ln X
$\bar{y} = 6.58 \quad s^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{5} = 0.0737 \Rightarrow s = 0.27$

$\frac{\bar{Y}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{6}}}$ är t(5)

95% konfidensintervall för μ:
$\bar{y} \pm 2.571 \cdot \frac{s}{\sqrt{6}}$ dvs 6.58 ± 0.28 eller (6.30,6.86)
b) ln1000 = 6.91 hamnar utanför intervallet.
Alt.: Intervall för förväntad livslängd:= ($e^{6.30}, e^{6.86}) = (545, 954)$
Slutsats: Den förväntade livslängden är mindre än 1000.

4.

X = antalet personer (av n) som stöder monarkin.
X är Bin (n , p) $\approx$ N (np , np(1-p)). $\hat{p} = \frac{X}{n}$
Vi får ett 95% intervall för p:

$(\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$

$1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx 0.05$ p = 0.6 ger n $\approx$ 369. (p = 0.5 ger n $\approx$ 384).

5.

$f_x(x) = \int_y f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{1}{2}dy = [\frac{y}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$ $0 \leq$ x ≤ 2
$f_y(y) = \int_x f(x,y)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}dx = [\frac{x}{2}]_0^2 = 1$ $0 \leq$ y ≤ 1

b) $f_x(x) \cdot f_y(y) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = f(x,y)$ X och Y är oberoende

c) P (X < Y) = $\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y \frac{1}{2}\, dxdy = \int_{y=0}^1 [\frac{x}{2}]_0^y\, dy = \int_0^1 \frac{y}{2}\, dy = [\frac{y^2}{4}]_0^1 = \frac{1}{4}$
Alt: (X,Y) är likformig på en rektangel med arean 2.
Området där X<Y blir en triangel med arean 1/2.
P(X<Y) = $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ Rita figur!

6.

Det finns 8 platser. Pojkarna (eller flickorna) kan placeras på $\binom{8}{4} = 70$ sätt (utan inbördes ordning).

a) antalet gynnsamma utfall = 5 (platserna 1-4,2-5,3-6,4-7,5-8)
b) antalet gynnsamma utfall = 8 (utfallen i a samt
6 7 8 1 , 7 8 1 2 , 8 1 2 3)
c) Endast 2 gynnsamma utfall: 1 3 5 7 resp 2 4 6 8
Sökta sannolikheter: 5/70 , 8/70 resp 2/70