Tekniska högskolan i Linköping
Matematiska institutionen
Matematisk statistik,Jan Olheim

MATEMATIK:Statistik

92MA31 STN2 , 92MA37 STN2

TENTAMEN TISDAGEN DEN 13 AUGUSTI 2013 KL 8.00-12.00.

Hjälpmedel:Formler och tabeller för 92MA31/92MA37 samt räknedosa med tömda minnen.
Varje korrekt löst uppgift ger 3 poäng.
För betyget godkänd krävs minst 8 poäng.För väl godkänd minst 14.
Jourhavande lärare: Jan Olheim,tel 28 14 53.

1. I ett litet land långt från Sverige gäller följande:
30 % av befolkningen är internetansluten och 70 % har mobiltelefon.
15 % har både mobiltelefon och internetanslutning.

a) Hur stor andel av mobilägarna är internetanslutna ? (1.5p)
b) Hur stor andel saknar såväl mobil som internetanslutning? (1.5p)

2. I det gamla kortspelet Kille finns 21 par av kort (=42 kort totalt)
Det finns 12 par numrerade 1,2,3,....12 samt 9 par med figurer
såsom Husar,Värdshus och Svin. (Uttrycket" svinhugg går igen"
härstammar från Killespelet).
Antag att du får 5 kort ur kortleken. Beräkna sannolikheten att

a) du endast får "figurkort". (1.5p)
b) du får de bägge "Svinkorten" och minst två "sifferkort". (1.5p)
Exempel på Killekort:

3. För att testa effekten av B-vitamin som tillväxtstimulans för svampar fick 6 av 11 valda svampar ett tillskott av B-vitamin. Svamparnas slutvikter blev (i mg):

utan B	17.5	14.5	13.5	12.5	18.5	
med B	20.5	19.5	20.0	22.0	24.5	18.0

Bilda ett 95% konfidensintervall för skillnaden i förväntad vikt för de två stickproven, d.v.s. för $\mu_1 - \mu_2$
Normalfördelningar med samma standardavvikelse σ får antas.

4. Bromssträckan för en fullastad truck beror på truckens hastighet. En modell för detta är :

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$$

där Y_i = bromssträckan, x_i = hastigheten och alla ϵ_i antas oberoende och N (0 , σ)

Vid 50 observationer fick man följande:

$\sum_{i=1}^{50} x_i = 1000$ $\sum y_i = 225$ $\bar{x}$=20 $\bar{y} = 4.5$

$\sum x_i^2 = 23136$ $\sum y_i^2 = 1154.11$ $\sum x_i y_i$ =5127.2

$\hat{\sigma}$ = s = 0.5

a) Bestäm den skattade regressionslinjen (1 p)

b) Bilda ett 95% konfidensintervall för β
Verkar det rimligt med ett samband mellan y och x? (1.5 p)

c) Föreslå en modell som bättre beskriver verkligheten. (0.5 p)

5. Kulverten från A-huset till D-huset är 670 meter lång.
Detta vet inte Linus , utan han tänker stega upp avståndet.
Hans steglängd har väntevärde $\mu = 0.75$ m och standardavvikelse $\sigma = 0.1$ m. Han börjar med att ta 900 steg.

a) Hur stor är sannolikheten att han ”går in i väggen” , dvs att hans 900 steg överstiger 670 m? (1.5p)

b) Linnea har en steglängd med $\mu = 0.52$ m och $\sigma = 0.05$ m.
Hon tar 1300 steg.
Hur stor är sannolikheten att Linus 900 steg och Linneas 1300 steg skiljer sig åt med högst 2 meter? (1.5p)

6. Låt X ha täthetsfunktionen:

$$f(x) = 2x \quad 0 \leq x \leq 1$$

Låt Y ha täthetsfunktionen:

$$f(y) = 1/2 \quad 0 \leq y \leq 2$$

X och Y antas vara oberoende.

a) Hur ser den tvådimensionella (simultana) täthetsfunktionen f(x,y) ut? (1p)

b) Beräkna väntevärdet för produkten , dvs $E[X \cdot Y]$ (1p)

c) Beräkna $P(X > Y)$. (1p)

1 92MA31/37-Lösningsförslag 130813

1.

P (I) = 0.3   P (M) = 0.7   P (I ∩ M) = 0.15

a) P (I | M) $=\frac{P(I\cap M)}{P(M)} = \frac{0.15}{0.7}$ =0.21

b) P (I* ∩ M*) = 1 - P (I ∪ M) = 1 - (P (I) + P (M)
- P (I ∩ M)) = 1 - (0.3+0.7-0.15)=0.15

2.

m = antalet sätt att välja 5 kort av 42 = $\binom{42}{5}$ = 850 668

a) g= antalet sätt att välja 5 kort av 18 = $\binom{18}{5}$ = 8568

P(bara figurkort) = g/m = 8568/850668 = 0.0101

b) g1 = två svinkort,två sifferkort,ett figurkort = $\binom{2}{2}\binom{24}{2}\binom{16}{1}$ = 4416

g2 = två svinkort,tre sifferkort = $\binom{2}{2}\binom{24}{3}$ = 2024

P(sökt) = $\frac{g1+g2}{m} = \frac{4416+2024}{850668}$ = 0.0076

3.

$\bar{x} = 15.3$ $s_1 = 2.5884$
$\bar{y} = 20.75$ $s_2 = 2.2528$

sammanvägt $s^2 = \frac{(5-1)s_1^2+(6-1)s_2^2}{5+6-2} = 5.80 \Rightarrow$ s=2.41

$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{s\cdot\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}}$ är t (9) vilket ger ett 95% intervall

$I_{\mu_1-\mu_2}$: -5.45 $\pm 2.262 \cdot 2.41 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}$ dvs -5.45 ± 3.30

Intervallet innehåller inte 0. Slutsats $\mu_1 < \mu_2$
B-vitamin stimulerar tillväxten.
(Ett uppåt begränsat intervall ger samma slutsats).

4.

Enligt formelsamlingen:
$S_{xx} = 23136 - \frac{(1000)^2}{50} = 3136$

$S_{xy} = 5127.2 - \frac{1000 \cdot 225}{50} = 627.2$

a) $\hat{\beta} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 0.20$
$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x} = 4.5 - 0.2 \cdot 20 = 0.5$ ger $\hat{y} = 0.5 + 0.2x$

b) $\frac{\hat{\beta} - \beta}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}}}$ är t(48)-fördelad.

95 % ger tabellvärdet 2.01

Ett intervall för β blir : $\hat{\beta} \pm 2.01 \cdot \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}}$

Observerat intervall : 0.2 $\pm$2.01 $\cdot \frac{0.5}{\sqrt{3136}}$ dvs 0.2 $\pm$0.018
Intervallet innehåller inte 0. Samband verkar rimligt.

c) Förslag: $Y_i = \alpha + \beta \cdot x_i + \gamma \cdot x_i^2 + \epsilon_i$
Ev kan konstanttermen α tas bort.

5.

a) X = summan av Linus 900 steg
X är N (900 $\cdot$ 0.75 , $\sqrt{900} \cdot 0.1$) = N (675 , 3)

P (X > 670) = 1 - P (X < 670) = 1 - $\Phi(\frac{670-675}{3}) = 1 - \Phi(-\frac{5}{3})$

$= \Phi(\frac{5}{3}) = \Phi(1.67) = 0.9525$

b) Y = summan av Linneas 1300 steg
Y är N (1300 $\cdot$ 0.52 , $\sqrt{1300} \cdot 0.05$) = N(676 , 1.80)

X-Y är N(675-676,$\sqrt{900 \cdot 0.1^2 + 1300 \cdot 0.05^2}) = N(-1, 3.5)$

P ($\mid X - Y \mid < 2$) = P (-2 < X - Y < 2) = $\Phi(\frac{2+1}{3.5}) - \Phi(\frac{-2+1}{3.5})$

$= \Phi(0.86) - \Phi(-0.29) = \Phi(0.86) + \Phi(0.29) - 1 = 0.8051 + 0.6141 - 1 \approx 0.42$

6.

a) f(x,y) = $f_x(x) \cdot f_y(y)$ vid oberoende

dvs f(x,y) = 2x $\cdot \frac{1}{2}$ = x $\quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

b) E (X Y) = E (X)$\cdot$ E (Y) vid oberoende

E (X) = $\int x \cdot f_x(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = [\frac{2x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}$

E (Y) = $\int f_y(y)dy = \int_0^2 y \cdot \frac{1}{2}dy = [\frac{y^2}{4}]_0^2 = 1$

E (X Y) = $\frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

c) P (X > Y) = $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x \quad dydx = \int_{x=0}^1 x \cdot [y]_0^x \quad dx$

= $\int_{x=0}^1 x \cdot xdx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$