LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2005–08–18 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Avgör om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cos\frac{1}{k^2}$ är konvergent eller divergent.

2. Beräkna volymen av den begränsade mängden mellan ytan $z = x^2 + y^2$ och planet $2x + 2y + z = 1$ i $\mathbf{R}^3$.

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)(x + \frac{1}{4})$ på området $D = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$.

4. Beräkna $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} |x - y|\, dx\, dy$.

5. Bestäm allmänna lösningen $f(x, y)$ till differentialekvationen
$$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$
(Ledning: polära koordinater.)

6. ”Paraboliska koordinater” (u, v) i planet definieras av variabelbytet
$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases} \qquad (u \geq 0,\ v \text{ godtyckligt}).$$
Motivera denna benämning genom att i xy-planet skissa hur några typiska kurvor $u =$ konstant och $v =$ konstant ser ut.

7. Låt $f(x, y) = (x^3+y^3)/(x^2+y^2)$ om $(x, y) \neq (0, 0)$, och sätt $f(0, 0) = 0$. Beräkna $f'_x(0, 0)$ och $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x, y)$. Kommentar?

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2005–08–18

1. **Svar**: Divergent, eftersom termerna inte går mot noll då $k \to \infty$.

2. Skärning då $x^2+y^2 = 1-2x-2y$, dvs på cirkeln $(x+1)^2+(y+1)^2 = 3$. Polära koordinater med centrum i $(-1,-1)$ ger volymen

$$2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3-r^2) r\, dr.$$

   Svar: $9\pi/2$.

3. På randen är $f = 0$. Stationära punkter: $\nabla f = (0,0)$ omm

$$-2x(x+\frac{1}{4}) + (1-x^2-y^2) = 0 \qquad \text{och} \qquad -2y(x+\frac{1}{4}) = 0.$$

   Den andra ekvationen ger $y = 0$ eller $x = -\frac{1}{4}$. I fallet $x = -\frac{1}{4}$ reduceras den första ekvationen till $1-x^2-y^2 = 0$, så de y-värden man löser ut kommer att ge två punkter som ligger på randen och därmed inte behöver undersökas separat. I fallet $y = 0$ ger den första ekvationen $-2x^2 - x/2 + 1 - x^2 = 0$, med lösningarna $x = -\frac{2}{3}$ och $x = \frac{1}{2}$, alltså två stationära punkter i områdets inre.

   Svar: Maximum $f(\frac{1}{2},0) = \frac{9}{16}$, minimum $f(-\frac{2}{3},0) = -\frac{25}{108}$.

4. Den del av området där $x-y$ är negativt ger lika stort bidrag till integralen som den del där $x-y$ är positivt. Integralen är alltså lika med

$$2 \iint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ x-y\ge 0}} (x-y)\, dx\, dy = 2\int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \int_0^1 (r\cos\varphi - r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi.$$

   Svar: $4\sqrt{2}/3$.

5. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y},$$

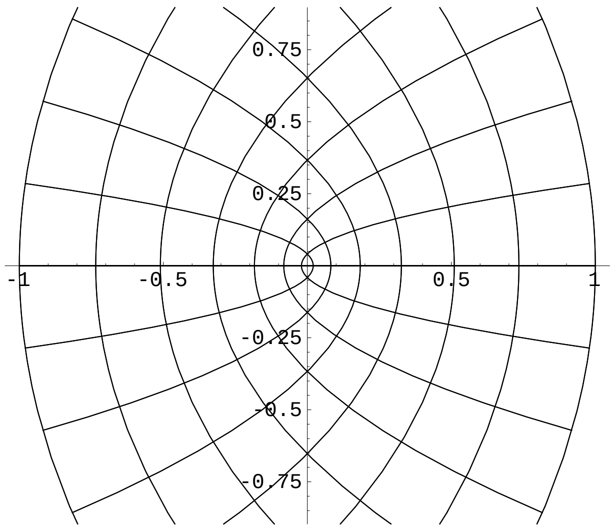
   så ekvationen är helt enkelt $\partial f/\partial\varphi = 0$, med lösningen $f = g(r^2)$ (eller $g(r)$ om man så vill, men med r^2 slipper man rottecken i svaret).

   Svar: $f(x,y) = g(x^2+y^2)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion.

6. Eliminering av v ger $x = u^2 - (y/2u)^2$, vilket för konstant $u > 0$ är en parabel med spetsen åt höger, i punkten $(u^2, 0)$. Det urartade fallet $u = 0$ ger $x = -v^2$, $y = 0$, alltså negativa x-halvaxeln.

   På samma sätt ger eliminering av u kurvan $x = (y/2v)^2 - v^2$, vilket för konstant $v \neq 0$ är en parabel vänd åt motsatt håll jämfört med kurvorna $u =$ konstant. Ur $y = 2uv$ ser man att positiva (negativa) v svarar mot parabelns övre (nedre) halva. Fallet $v = 0$ ger positiva x-halvaxeln.

   (Man kan även visa att u-parablerna och v-parablerna skär varandra i rät vinkel, så att koordinatsystemet är ortogonalt.)



7. $f(x, 0) = x$ ger $f'_x(0, 0) = 1$, medan $f'_x = (x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)/(x^2 + y^2)^2$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ saknar gränsvärde i origo (ty olika gränsvärden längs olika linjer $y = kx$). Funktionen f'_x är alltså inte kontinuerlig i origo.