LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2006–03–13 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 + yz^3 = 11$ i punkten $(3, 2, 1)$.
   (b) Ekvationen $y = 2xe^{xy}$ definierar implicit en funktion $y = f(x)$ i en omgivning av origo. Ange $f(0)$ och $f'(0)$.
   (c) Rita graf och/eller nivåkurvor för funktionen $f(x, y) = |x| + 2|y|$.
   (1 poäng per deluppgift.)

2. Beräkna $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$, där området D är en parallellepiped med hörn i $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$ och $(1, 2)$.

3. Bestäm de stationära punkterna, och avgör deras karaktär, för funktionen $f(x, y) = x^3y - 7xy - 20x + 6y$.

4. Beräkna volymen av kroppen $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \le z^4 \le 1\right\}$.

5. (a) Är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k^2}$ konvergent eller divergent?
   (b) Är $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sin(k^2)}{k^2}$ konvergent eller divergent?
   (c) Bestäm konvergensradien R för potensserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + k^3}{2^k + k^2}\, x^k$.
   (1 poäng per deluppgift.)

6. Bestäm funktioner $A(x, y)$ och $B(x, y)$ så att den partiella differentialekvationen $Af'_x + Bf'_y = 0$ satisfieras av $f(x, y) = g(xy^2)$ för alla deriverbara funktioner g av en variabel.

7. Låt D vara rektangeln $0 \le x \le \pi/4$, $0 \le y \le \ln 2$. Beskriv den kurva i uv-planet som D:s rand avbildas på om $u = (e^y + e^{-y}) \cos x$ och $v = (e^y - e^{-y}) \sin x$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2006–03–13

1. (a) Normalen är $\nabla F(3,2,1) = (6,1,6)$ (där $F = x^2 + yz^3$).
   Svar: Tangentplanets ekvation är $6x + y + 6z = 26$.
   (b) $f(0) = 0$ per definition, $f'(0) = -F'_x(0,0)/F'_y(0,0) = 2$ (där $F = 2xe^{xy} - y$).
   (c) Nivåkurvan $f = C$ (där $C > 0$) är en romb med hörn i $(\pm C, 0)$ och $(0, \pm C/2)$, medan kurvan $f = 0$ enbart består av origo. Grafen liknar en pyramid vänd med spetsen neråt.

2. [Rättelse: Området är förstås en *parallellogram* och inget annat.]
   Variabelbytet $x = 3u + v$, $y = u + 2v$ ger $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (4u + 3v)\, 5\, du\, dv$.
   Alternativt kan man notera att linjen $x + y = 7/2$ delar området i två delar där integranden $x + y$ i den nedre vänstra halvan ligger lika mycket under $7/2$ som den ligger över $7/2$ i den övre högra. Volymen under grafen är alltså medelhöjden $7/2$ gånger områdets area 5.
   Svar: $35/2$.

3. De stationära punkterna bestäms av att $f'_x = 3x^2y - 7y - 20 = 0$ och $f'_y = x^3 - 7x + 6 = 0$. Den andra ekvationen ger $x = 1$, 2 eller -3, och den första ger sedan de motsvarande y-värdena $y = -5$, 4 respektive 1. Andraderivatorna $f''_{xx} = 6xy$, $f''_{xy} = 3x^2 - 7$ och $f''_{yy} = 0$ ger i de tre punkterna de kvadratiska formerna $Q = -30h^2 - 8hk$, $Q = 48h^2 + 10hk$ respektive $Q = -18h^2 + 40hk$, samtliga indefinita (man kan få Q att anta godtyckligt värde genom att fixera $h \neq 0$ och sedan variera k).
   Svar: Funktionen har sadelpunkter i $(1,-5)$, $(2,4)$ och $(-3,1)$.

4. Tvärsnittet för fixt $z \in [-1,1]$ är en cirkel med radien z^2, och därmed arean πz^4. Volym, således, $\displaystyle\int_{-1}^1 \pi z^4\, dz$. Alternativt, integrera över enhetscirkeln i xy-planet med polära koordinater: $2 \cdot 2\pi \displaystyle\int_0^1 (1 - \sqrt{r}) r\, dr$ (tvåan pga kroppens spegelsymmetri med avseende på xy-planet).
   Svar: $2\pi/5$.

5. (a) Konvergent, ty $\sin(k^{-2})/k^{-2} \to 1$ och $\sum k^{-2}$ är konvergent.
   (b) Absolutkonvergent (och därmed konvergent) enligt jämförelse med $\sum k^{-2}$, eftersom täljarens belopp är högst 1. (Obs att det inte är en Leibnizserie eftersom $\sin(k^2)$ byter tecken på oregelbundet sätt och termernas belopp inte avtar monotont. Leibniz' kriterium kan alltså inte åberopas!)
   (c) $R = 2/3$ enligt rotkriteriet (eller kvotkriteriet).

6. Kedjeregeln ger $Af'_x + Bf'_y = A\, y^2\, g'(xy^2) + B\, 2xy\, g'(xy^2)$, vilket blir noll (oberoende av vad g är) ifall man väljer t ex $A = 2x$ och $B = -y$.

7. **Svar**: Kurvan är sammansatt av linjesegmentet mellan $(\sqrt{2}, 0)$ och $(5/2, 0)$, den del av hyperbeln $u^2 - v^2 = 2$ som ligger mellan $(\sqrt{2}, 0)$ och $(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}})$ samt den del av ellipsen $(2u/5)^2 + (2v/3)^2 = 1$ som ligger mellan $(\frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}})$ och $(5/2, 0)$.