LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2006–08–19 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = \max(y, x^2)$ på det område i $\mathbf{R}^2$ som begränsas av triangeln med hörn i $(0,2)$, $(2,0)$ och $(3,5)$.

2. Är serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(\ln k)}{\ln k}$ konvergent eller divergent?

3. Beräkna volymen av området

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0,\ x^2 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

4. Låt $f(x,y)$ vara en $\mathcal{C}^2$-funktion. Transformera uttrycket $x^2\, f''_{xx}$ till nya koordinater (u,v) definierade av $u = x$, $v = x^2 y$.

5. Måste en funktion $f(x,y)$ som är partiellt deriverbar i origo också vara kontinuerlig i origo? Ge bevis eller motexempel.

6. Låt f vara en kontinuerlig funktion av en variabel. Visa att

$$\int_0^x \left(\int_0^s f(t)\, dt \right) ds = \int_0^x (x - t)\, f(t)\, dt.$$

7. Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Är f differentierbar i origo?

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2006–08–19

1. Parabeln $y = x^2$ delar triangeln i två delar: D_1 till vänster, där $f = y$, och D_2 till höger, där $f = x^2$. På D_1 är $f(2,4) = 4$ och $f(1,1) = 1$ störst resp. minst, och på D_2 är $f(3,5) = 9$ och $f(1,1) = 1$ störst resp. minst. (Funktionerna y och x^2 är så enkla att detta bör inses utan några omfattande undersökningar.)

   Svar: Största värde $f(3,5) = 9$, minsta värde $f(1,1) = 1$.

2. **Svar**: Divergent, eftersom $\frac{\ln(\ln k)}{\ln k} > \frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$ (för $k > e^e$) och $\sum \frac{1}{k}$ är divergent.

3. För fixt $x \in [0,1]$ beskriver olikheterna $0 \le y \le 1 - x$ och $x^2 \le z \le 1$ en rektangel i yz-planet med arean $(1-x)(1-x^2)$, så volymen blir $\displaystyle\int_0^1 (1-x)(1-x^2)\,dx = 5/12$.

   Svar: $5/12$.

4. **Svar**: $x^2 f''_{xx} = u^2 f''_{uu} + 4uv f''_{uv} + 4v^2 f''_{vv} + 2v f'_v$.

5. De partiella derivatorna i origo beror bara av funktionens värden längs koordinataxlarna. Om exempelvis

$$f(x,y) = \begin{cases} 17, & \text{om } x = 0 \text{ eller } y = 0, \\ 43, & \text{annars,} \end{cases}$$

   så är $f'_x = f'_y = 0$ i origo, trots att f ej är kontinuerlig där.

   Svar: Nej, kontinuitet är inte nödvändigt för partiell deriverbarhet.

6. Vänsterledet beskriver en dubbelintegral över en triangel i st-planet med hörn i $(s,t) = (0,0)$, $(x,0)$ och (x,x). Om man byter integrationsordning och tar s innerst istället så blir den inre integralen $\displaystyle\int_t^x f(t)\,ds = (x-t)f(t)$, och högerledet erhålls. (Sensmoral: Man kan bestämma en primitiv till en primitiv till f med bara en integration istället för två!)

7. De partiella derivatorna i origo är $f'_x = 1$ och $f'_y = 0$, så för differentierbarhet krävs att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (1x + 0y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

   Detta är dock inte uppfyllt, eftersom

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\cos\varphi \sin^2\varphi$$

   saknar gränsvärde i origo.

   Svar: Nej, f är inte differentierbar i origo.