LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2007–03–12 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm alla plan som tangerar ytan $z = x^2 + y^2$ och innehåller punkterna $(x, y, z) = (2, 1, 3)$ och $(0, 0, -5)$.

2. Beräkna $\iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, där D är det område i $\mathbf{R}^2$ som begränsas av triangeln med hörn i $(x, y) = (0, 0)$, $(3, -1)$ och $(2, 6)$.

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y$ då $x^2 \leq y \leq 1$.

4. (a) Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} x^n$. (1p)

   (b) Ange summan av serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ på sluten form. (1p)

   (c) Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n}$ konvergent eller divergent? (1p)

5. Bestäm den funktion $f(x, y) \in C^1(\mathbf{R}^2)$ som uppfyller den partiella differentialekvationen $x f'_x + 2y f'_y = x^2$ i området $y > 0$, och dessutom uppfyller villkoret $f(x, 1) = x^2$. (Tips: använd variabelbytet $u = x^2/y$, $v = y$.)

6. Låt $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + 7y^2$. Visa följande: f har exakt ett lokalt minimum, och inga andra stationära punkter, men f har ändå inte något minsta värde på $\mathbf{R}^2$.

7. Beräkna volymen av det område i $\mathbf{R}^3$ som definieras av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $0 \leq y \leq x \leq z$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2007–03–12

1. Om tangeringspunkten är (a, b, a^2+b^2) så är $\nabla(x^2+y^2-z) = (2a, 2b, -1)$ där, och tangentplanets ekvation blir därmed $2a(x-a) + 2b(y-b) - (z - (a^2+b^2)) = 0$, dvs $2ax + 2by - z = a^2 + b^2$. Denna ekvation ska satisfieras av de två givna punkterna, vilket ger $4a + 2b - 3 = a^2 + b^2$ respektive $-(-5) = a^2 + b^2$. Detta ekvationssystem för de två obekanta a och b har lösningarna $(a, b) = (1, 2)$ och $(a, b) = (\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$, så det finns alltså två plan med de önskade egenskaperna.

   Svar: $2x + 4y - z = 5$ och $\frac{22}{5}x - \frac{4}{5}y - z = 5$.

2. Variabelbytet $x = 3u + 2v$, $y = -u + 6v$ avbildar D på triangeln $E = \{u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \leq 1\}$. Integralen blir därmed

   $$\iint_E \big((3u+2v)^2+(-u+6v)^2\big) 20\, du\, dv = 200 \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{1-u} (u^2+4v^2)\, dv\, du.$$

   Ett annat sätt (som dock ger mycket jobbigare uträkningar) är

   $$\int_{x=0}^{2} \int_{y=-x/3}^{3x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx + \int_{x=2}^{3} \int_{y=-x/3}^{20-7x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx.$$

   Svar: 250/3.

3. Kompakt mängd, kontinuerlig funktion, så max och min existerar.

   - Stationära punkter: $(x, y) = (0, \frac{1}{4})$ och $(2, \frac{1}{4})$, varav bara den första ligger i den angivna mängden. Värdet där är $f(0, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{16}$.
   - Kurvsegmentet $y = x^2$, $|x| < 1$: $g(x) = f(x, x^2) = x^4 + x^3 - \frac{7}{2}x^2$ har derivatan $g'(x) = x(x-1)(4x+7)$ med nollstället $x = 0$ i intervallet. Intressant punkt: $f(0, 0) = 0$.
   - Linjesegmentet $y = 1$, $|x| < 1$: $h(x) = f(x, 1) = x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}$ har derivatan $h'(x) = 3x(x-2)$, också med nollstället $x = 0$ i intervallet. Intressant punkt: $f(0, 1) = \frac{1}{2}$.
   - Områdets hörn: $f(-1, 1) = -\frac{7}{2}$, $f(1, 1) = -\frac{3}{2}$.

   Svar: Största värdet är $f(0, 1) = \frac{1}{2}$, minsta värdet är $f(-1, 1) = -\frac{7}{2}$.

4. (a) **Svar**: $R = 1/2$. (Använd rot- eller kvotkriteriet.)

   (b) **Svar**: $-\ln(1 - x^2)$ (för $|x| < 1$). Antingen känner man igen att det sånär som på tecknet är standardutvecklingen för $\ln(1 + t)$ med $t = -x^2$ insatt, eller så kan man döpa den givna serien till $f(x)$ och beräkna dess derivata

   $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\, x^{2n-1}}{n} = 2x \sum_{n=1}^{\infty} (x^2)^{n-1} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

(geometrisk serie med kvot x^2), vilket integreras upp till $f(x) = -\ln(1-x^2) + C$, där villkoret $f(0) = \sum_1^\infty \frac{0^{2n}}{n} = 0$ ger $C = 0$.

(c) **Svar**: Konvergent. Termerna med udda n är noll, och de kvarvarande termerna bildar Leibnizserien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k}$ (sätt $n = 2k$ för att se detta; notera att $\cos(k\pi) = (-1)^k$).

5. I nya variabler övergår ekvationen i $2vf'_v = uv$ (för $v > 0$). Alltså $f'_v = u/2$, så den allmänna lösningen till PDEn är $f = uv/2 + g(u) = x^2/2 + g(x^2/y)$, där g är en godtycklig C^1-funktion av en variabel. Det extra villkoret $x^2 = f(x,1) = x^2/2 + g(x^2)$ ger $g(u) = u/2$.

   Svar: $f(x,y) = x^2/2 + x^2/2y$.

6. Stationära punkter fås ur $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x(1+y)^3 \\ 3x^2(1+y)^2 + 14y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Den första ekvationen ger $x = 0$ (vilket ger $y = 0$ vid insättning i den andra ekvationen) eller $y = -1$ (vilket inte är möjligt enligt den andra ekvationen). Alltså är $(x,y) = (0,0)$ den enda stationära punkten. Maclaurinutveckla f (enklast genom att helt enkelt multiplicera ut polynomet och samla alla termer av grad tre och högre i resttermen): $f(x,y) = x^2 + 7y^2 + O(r^3)$, där $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Den kvadratiska formen $x^2 + 7y^2$ är positivt definit, vilket visar att f har lokalt minimum i origo. Men exempelvis $f(1,y) = (1+y)^3 + 7y^2 \to -\infty$ då $y \to -\infty$, så f antar godtyckligt stora negativa värden (minsta värde saknas).

7. I rymdpolära koordinater blir villkoren $0 \le r \le 1$ och $0 \le r\sin\varphi\sin\theta \le r\cos\varphi\sin\theta \le r\cos\theta$, vilket ger att vinklarna måste uppfylla $0 \le \varphi \le \pi/4$ och $\tan\theta \le 1/\cos\varphi$. Volymen blir alltså

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{\theta=0}^{\arctan\frac{1}{\cos\varphi}} \int_{r=0}^{1} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\right),$$

   där den sista integralen kan beräknas med variabelbytet $t = \cos\varphi$ följt av $s = t^2$.

   Alternativ: området kan skrivas som $0 \le y \le x \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$, så projektionen E på xy-planet ges av villkoren $0 \le y \le x$ och $0 \le x \le \sqrt{1-x^2-y^2}$, vilket uttryckt i planpolära koordinater blir $0 \le \varphi \le \pi/4$ respektive $r\cos\varphi \le \sqrt{1-r^2}$, dvs $r \le (1+\cos^2\varphi)^{-1/2} =: g(\varphi)$. Volymen blir då

$$\iint_E \left(\int_{z=x}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \right) dx\, dy = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{g(\varphi)} \left(\sqrt{1-r^2} - r\cos\varphi\right) r \, dr \, d\varphi,$$

   vilket leder till samma uttryck som ovan.

Ännu en framkomlig väg (om än lite knölig) är att beräkna arean $A(z)$ av kroppens tvärsnitt för fixt $z \in [0,1]$, dvs skärningen mellan cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$ (med radien $R = \sqrt{1 - z^2}$) och triangeln $0 \leq y \leq x \leq z$ (en halv kvadrat med sidan z). Ifall $z\sqrt{2} \leq R$, dvs om $0 \leq z \leq 1/\sqrt{3}$, så ligger triangeln helt inuti cirkeln, och tvärsnittsarean blir triangelns area: $A(z) = z^2/2$. Ifall $R \leq z$, dvs om $1/\sqrt{2} \leq z \leq 1$, så skär triangeln ut en cirkelsektor med vinkeln 45° ur cirkeln, så tvärsnittsarean blir en åttondel av cirkelns area: $A(z) = \pi(1 - z^2)/8$. Det besvärliga fallet är när $1/\sqrt{3} \leq z \leq 1/\sqrt{2}$, då triangeln skär ut en cirkelsektor som ovan, förutom att det längst till höger fattas en bit med arean

$$\begin{aligned} B(z) &= \int_{x=z}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx \\ &= (1 - z^2)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\right) - \frac{1}{2}z\sqrt{1 - 2z^2}, \end{aligned}$$

så att tvärsnittsarean blir $A(z) = \pi(1 - z^2)/8 - B(z)$. Kroppens volym blir då till slut

$$\int_0^1 A(z)\,dz = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{z^2}{2}\,dz + \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{\pi(1 - z^2)}{8}\,dz - \int_{1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{2}} B(z)\,dz,$$

där arcsin-termen i $\displaystyle\int B(z)\,dz$ kan hanteras med partiell integration (integrera $1 - z^2$, derivera arcsin; i steget därpå sätter man lämpligen $t = z^2$ följt av $s = \sqrt{1 - 2t}$ för att få en rationell funktion).

Svar: $\pi/36$.