LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2007–06–11 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^2 - x - y^2 + 2y + 1$ då (x,y) ligger på eller inuti triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,0)$.

2. Bestäm alla lokala maxima och minima för $f(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + y^4$.

   (Tips: Vad gäller teckenkaraktären i origo, titta inte på andraderivatorna utan undersök istället direkt funktionens värden längs axlarna.)

3. Beräkna $\iiint_D (x-y)\,dxdydz$, där D är det begränsade område i $\mathbf{R}^3$ som ligger mellan paraboloiden $z = x^2+y^2$ och planet $z = 11+2x-4y$.

4. Är serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n\sin\tfrac{1}{n}\right)$ konvergent eller divergent?

5. Visa att ekvationen $(x+y)\cos(x-2y) = 3$ implicit definierar en funktion $y = f(x)$ i en omgivning av punkten $(x,y) = (2,1)$. Bestäm $f(2)$, $f'(2)$ och $f''(2)$.

6. Transformera differentialekvationen $\dfrac{\partial f}{\partial r} = 0$ $(r > 0)$ från planpolära koordinater (r,φ) till cartesiska koordinater (x,y). Förklara varför funktioner på formen $f(x,y) = g(y/x)$ (där $x \neq 0$ och g är en $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel) bör vara lösningar till den ekvation som då erhålls, och verifiera genom insättning att så verkligen är fallet.

7. Låt
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{om } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{om } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   Undersök vilka av följande egenskaper f har i origo: kontinuerlig, partiellt deriverbar (med avseende på x respektive y), differentierbar.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2007–06–11

1. Största och minsta värde existerar, eftersom f är kontinuerlig och området är kompakt. Funktionens enda stationära punkt $(x, y) = (\frac{1}{2}, 1)$ ligger utanför området, så max och min antas på randen:

   - $f(x, 0) = x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \in [\frac{3}{4}, 3]$ då $x \in [0, 2]$.
   - $f(x, x) = x + 1 \in [1, 2]$ då $x \in [0, 1]$.
   - $f(x, 2 - x) = x + 1 \in [2, 3]$ då $x \in [1, 2]$.

   Svar: Största värdet är $f(2, 0) = 3$, minsta värdet är $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{3}{4}$.

2. $\nabla f = (0, 0)$ ger de stationära punkterna $(x, y) = (0, 0)$, $(3, 3)$ och $(3, -3)$. Eftersom $f(x, 0) = 2x^3$ är positivt för $x > 0$ och negativt för $x < 0$, så har funktionen varken lokalt maximum eller lokalt mimimum i origo. Taylorutveckling kring $(3, \pm 3)$ ger $f(3 + h, \pm 3 + k) = -27 + 18\big[(h \mp k)^2 + k^2\big] + O(r^3)$, där $r^2 = h^2 + k^2$, med positivt definit kvadratisk form i båda fallen.

   Svar: Funktionen har lokalt minimum i punkterna $(x, y) = (3, \pm 3)$.

3. Områdets projektion E i xy-planet ges av $x^2 + y^2 \leq 11 + 2x - 4y$, dvs $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 \leq 16$. Variabelbytet $u = x - 1$, $v = y + 2$ följt av polära koordinater i uv-planet ger

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x - y)\, dxdydz &= \iint_E \left(\int_{z=x^2+y^2}^{11+2x-4y} (x - y)\, dz \right) dxdy \\
&= \iint_{u^2+v^2 \leq 16} (u - v + 3)(16 - u^2 - v^2)\, dudv \\
&= \int_{r=0}^{4} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} (r \cos\varphi - r \sin\varphi + 3)(16 - r^2)\, r\, d\varphi \right) dr \\
&= 2\pi \cdot 3 \left[8r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{4} = 6\pi \cdot 64.
\end{aligned}$$

   Svar: 384π.

4. Maclaurinutveckling ger $n \sin \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{6n^2} + O(\frac{1}{n^4})$ då $n \to \infty$, så

$$\frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{1/n^2} \to \frac{1}{6} \quad \text{då } n \to \infty.$$

   Eftersom $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$ är konvergent, så är även den givna serien det, enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

   Svar: Konvergent.

5. Sätt $F(x,y) = (x+y)\cos(x-2y)$. Då är $F(2,1) = 3$, så punkten ligger verkligen på den givna kurvan, och $F'_y(2,1) = 1 \neq 0$, så påståendet följer av implicita funktionssatsen. Per konstruktion blir $f(2) = 1$, medan derivatorna fås ur implicit derivering av sambandet

$$(x + f(x))\cos(x - 2f(x)) = 3.$$

Derivering av båda led med avseende på x ger (om man skriver f istället för $f(x)$ för att spara plats)

$$(1 + f')\cos(x - 2f) - (x + f)\sin(x - 2f)\,(1 - 2f') = 0,$$

varvid insättning av $x = 2$, $f(2) = 1$ ger $1 + f'(2) = 0$, alltså $f'(2) = -1$. En derivering till ger

$$\begin{aligned} &f''\cos(x - 2f) - 2(1 + f')\sin(x - 2f)\,(1 - 2f') \\ &\qquad - (x + f)\Big[\cos(x - 2f)(1 - 2f')^2 + \sin(x - 2f)\,(-2f'')\Big] = 0, \end{aligned}$$

och insättning av $x = 2$, $f(2) = 1$, $f'(2) = -1$ ger slutligen $f''(2) - 0 - (2+1)[3^2 + 0] = 0$, alltså $f''(2) = 27$.

Svar: $f(2) = 1$, $f'(2) = -1$, $f''(2) = 27$.

6. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{r} = \frac{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (x^2 + y^2 \neq 0), \end{aligned}$$

så ekvationen är ekvivalent med $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Funktioner på formen $f(x,y) = g(y/x) = g(\sin\varphi/\cos\varphi)$ beror inte på r när de uttrycks i polära koordinater, och de uppfyller därför $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$. För en sådan funktion blir, enligt kedjeregeln, $\frac{\partial f}{\partial x} = g'(y/x)\frac{-y}{x^2}$ och $\frac{\partial f}{\partial y} = g'(y/x)\frac{1}{x}$, och därmed blir $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x\frac{-y}{x^2} + y\frac{1}{x})g'(y/x) = 0$, vilket var vad som skulle kontrolleras.

7. Eftersom $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$, så är f inte kontinuerlig i origo, och därmed ej heller differentierbar. Däremot är f partiellt deriverbar, med $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, eftersom f är konstant (noll) längs koordinataxlarna.