LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KeBi
2007–08–21 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng (1 poäng per deluppgift på uppgift 4 och 5). Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm alla stationära punkter, och avgör deras teckenkaraktär, för funktionen $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 - xy^2 - \frac{2}{3}y^3$.

2. Beräkna $\iint_D x^2\,dxdy$ där området D beskrivs av $x^2 + 4y^2 \leq 1$ och $x + 2y < 0$.

3. Bestäm allmänna lösningen $f(x, y)$ till differentialekvationen
$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = y.$$
(Ledning: byt variabler till $u = x$ och $v = y - x^2$.)

4. (a) Rita området $D = \big\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |y| \leq |x|\big\}$.

   (b) Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 2y^2 + 1}$.

   (c) Bestäm tangentplanet till ytan $x^2 + y^3 + z^4 = 3$ i punkten $(1, 1, 1)$.

5. (a) Är serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k^2 + k^3}$ konvergent eller divergent?

   (b) Bestäm konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{5^k + 7^k}$.

   (c) Visa att $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n}$ för alla $n \geq 1$.

6. Beräkna volymen av området $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 \leq y \leq z \leq x\big\}$.

7. Elliptiska koordinater (u, v) i planet (undantaget intervallet $[-1, 1]$ på x-axeln) definieras av sambanden $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$, där $u > 0$ och $0 \leq v < 2\pi$. Visa att det är ett ortogonalt koordinatsystem, dvs att koordinatkurvorna $u =$ konstant och $v =$ konstant skär varandra ortogonalt.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2007–08–21

1. $\nabla f = (x - y^2, 4y - 2xy - 2y^2) = (0,0)$ ger de stationära punkterna $(x, y) = (0,0)$, $(1,1)$ och $(4,-2)$. Taylorutveckling ger, efter kvadratkomplettering och med $r = \sqrt{h^2 + k^2}$, att

$$\begin{aligned} f(0+h, 0+k) &= \frac{1}{2}h^2 + 2k^2 + O(r^3), \\ f(1+h, 1+k) &= \frac{5}{6} - (h+k)^2 + \frac{3}{2}h^2 + O(r^3), \\ f(4+h, -2+k) &= \frac{16}{3} + 2(h+k)^2 - \frac{3}{2}h^2 + O(r^3). \end{aligned}$$

   Svar: Lokalt minimum i $(0,0)$, sadelpunkt i $(1,1)$ och $(4,-2)$.

2. Variabelbytet $u = x$, $v = 2y$, följt av övergång till polära koordinater i (u, v)-planet, ger att integralen är lika med

$$\iint_{\substack{u^2+v^2 \le 1 \\ u+v \le 0}} u^2 \, \frac{du dv}{2} = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{1} \left(\int_{\varphi=3\pi/4}^{7\pi/4} r^2 \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) r \, dr.$$

   Svar: $\pi/16$.

3. Ekvationens vänsterled $f'_x + 2xf'_y$ är enligt kedjeregeln lika med $(f'_u + (-2x)f'_v) + 2xf'_v = f'_u$, medan högerledet är lika med $y = v + x^2 = v + u^2$. Ekvationen blir alltså i nya variabler $f'_u = v + u^2$, vilket enkelt integreras upp till $f = uv + \frac{1}{3}u^3 + g(v) = x(y - x^2) + \frac{1}{3}x^3 + g(y - x^2)$.

   Svar: $f(x, y) = xy - \frac{2}{3}x^3 + g(y - x^2)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

4. (a) Linjerna $y = x$ och $y = -x$ delar planet i fyra kilformade tårtbitar (höger, vänster, uppe, nere), varav den högra och den vänstra tillsammans utgör området D.

   (b) Bytet $x = 1 + h$ och $y = k$ ger $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^3 + 3h^2 + 3h}{h^2 + 2k^2}$. Om man närmar sig origo längs k-axeln så får man noll, medan om kan kommer längs positiva h-axeln så får man ∞. Gränsvärdet existerar alltså inte.

   (c) $\nabla(x^2 + y^3 + z^4) = (2, 3, 4)$ i punkten $(1, 1, 1)$, vilket ger tangentplanets normal. Planets ekvation blir alltså $2x + 3y + 4z = 9$.

5. (a) Konvergent enligt jämförelsekriteriet för positiva serier, eftersom $0 < 1/(k + k^2 + k^3) < 1/k^3$ och $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^3)$ är konvergent.
   (b) $R = 7$, enligt rotkriteriet eller kvotkriteriet.
   (c) $\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}$ är undersumma till (och därmed mindre än) integralen $\int_n^{\infty} x^{-2} dx = 1/n$.

6. Tvärsnittet för fixt $x = c \in [0, 1]$ ges av $c^2 \leq y \leq z \leq c$, vilket är en halv kvadrat med sidan $c - c^2$ och därmed arean $\frac{1}{2}(c - c^2)^2$. Volymen blir alltså

$$\iiint_D dxdydz = \int_{x=0}^{1} \tfrac{1}{2}(x - x^2)^2 dx.$$

Alternativ metod: Kroppens projektion E i (x, y)-planet ges av $x^2 \leq y \leq x$, alltså det begränsade området mellan parabeln $y = x^2$ och linjen $y = x$. Detta ger

$$\iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=y}^{x} dz \right) dxdy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{x} (x - y)\, dy \right) dx.$$

Svar: 1/60.

7. Kurvorna $u =$ konstant (som för övrigt är ellipser med brännpunkter i $(\pm 1, 0)$) har tangentvektor $(x'_v, y'_v) = (-\cosh u \sin v, \sinh u \cos v)$. Kurvorna $v =$ konstant (som är hyperbler med samma brännpunkter) har tangentvektor $(x'_u, y'_u) = (\sinh u \cos v, \cosh u \sin v)$. Skalärprodukten mellan dessa tangentvektorer är identiskt noll, vilket visar att kurvorna skär varandra ortogonalt överallt.