LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KB och TB
2007–12–20 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng (1 poäng per deluppgift på uppgift 4). Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm alla stationära punkter, och avgör deras karaktär, för funktionen $f(x,y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2$.

2. Bestäm konstanten D så att planet $2x + 4y + z = D$ tangerar ytan $z = x^2 - 3y^2$ i någon punkt.

3. Beräkna $\displaystyle\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(4,0)$ och $(2,2)$.

4. (a) Undersök $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^6}$.

   (b) Rita området $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |2x+y| \leq |x-3y|\}$.

   (c) Bestäm vinkeln mellan kurvan $(x(t), y(t)) = (t^3, t\cos(\pi t))$ och kurvan $3x^2 + y^2 = 4$ i punkten $(x,y) = (-1,1)$.

5. Bestäm alla $\mathcal{C}^1$-funktioner $f(x,y)$ som uppfyller $2f'_x - 3f'_y = x + 2y$ och $f(x,0) = x^2$. (Ledning: finn lämpligt linjärt variabelbyte.)

6. Vilka värden kan xy^2z^3 anta då x, y och z är tre icke-negativa tal med summan ett?

7. Beräkna volymen av det område D i $\mathbf{R}^3$ som definieras av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $x^2 + xy \leq z \leq 1 - \frac{1}{2}y^2$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2007–12–20

1. Gradienten

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x^2y - x - 1)(2xy - 1) + 2(x^2 - 1)2x \\ 2(x^2y - x - 1)x^2 \end{pmatrix}$$

är noll om och endast om $x^2y - x - 1 = 0$ och $x^2 - 1 = 0$. (Observera att detta syns mycket tydligare ifall man **inte** multiplicerar ihop något! Notera också att fallet $x^2 = 0$ inte ger någon lösning eftersom $f'_x = 2 \neq 0$ då $x = 0$). Detta ger punkterna $(x, y) = (1, 2)$ och $(-1, 0)$, och där är $f = 0$. Eftersom f är en summa av två kvadrater så är $f \geq 0$ överallt och det är därför uppenbart att $f = 0$ är funktionens minsta värde; båda punkterna är därför lokala minima (t.o.m. globala).

Man kan förstås även undersöka teckenkaraktären med Taylorutveckling som vanligt! Enklast är i så fall att sätta in $x = a + h$, $y = b + k$ och samla högre ordningens termer i varje parentes för sig, så blir det snyggt och prydligt kvadratkompletterat direkt:

$$\begin{aligned} f(1+h, 2+k) &= \Big((1+h)^2(2+k) - (1+h) - 1\Big)^2 + \Big((1+h)^2 - 1\Big)^2 \\ &= \Big(3h + k + O(r^2)\Big)^2 + \Big(2h + O(r^2)\Big)^2 \\ &= (3h+k)^2 + (2h)^2 + O(r^3), \\ f(-1+h, 0+k) &= \Big((-1+h)^2k - (-1+h) - 1\Big)^2 + \Big((-1+h)^2 - 1\Big)^2 \\ &= \Big(h - k + O(r^2)\Big)^2 + \Big(-2h + O(r^2)\Big)^2 \\ &= (h-k)^2 + (-2h)^2 + O(r^3). \end{aligned}$$

Svar: $f(1, 2) = 0$ och $f(-1, 0) = 0$ är lokala minima.

2. I tangeringspunkten (a, b, c) ska planets normalvektor $(2, 4, 1)$ vara parallell med ytans normalvektor $(-2a, 6b, 1)$. Detta ger $a = -1$, $b = \frac{2}{3}$, och därmed $c = a^2 - 3b^2 = -\frac{1}{3}$. För att (a, b, c) ska uppfylla planets ekvation måste högerledet D vara lika med vänsterledet $2a + 4b + c$, alltså $\frac{1}{3}$.

   Svar: $D = 1/3$.

3. Det linjära variabelbytet $u = y + x$, $v = y - x$ överför området på en triangel E med hörn i $(u, v) = (0, 0)$, $(4, -4)$ och $(4, 0)$. Integralen blir

$$\iint_E e^{v/u} \frac{du dv}{2} = \frac{1}{2} \int_{u=0}^{4} \left(\int_{v=-u}^{0} e^{v/u}\, dv \right) du.$$

   Svar: $4(1 - e^{-1})$.

4. (a) Gränsvärdet existerar ej (ty noll längs axlarna, nollskilt längs kurvan $x^2 = y^3$).

   (b) Likhet gäller då $2x + y = \pm(x - 3y)$, dvs då $x + 4y = 0$ eller $3x - 2y = 0$. Dessa två linjer delar planet i fyra bitar där olikheten (av kontinuitetsskäl) antingen är sann i hela biten eller falsk i hela. Insättning av en punkt från varje bit visar att olikheten är sann i de två bitar som innehåller y-axeln, och D är alltså unionen av dessa (inklusive randen).

   (c) Den första kurvans tangent i punkten, $(x'(t), y'(t))|_{t=-1} = (3, -1)$, är parallell med den andra kurvans normal i punkten, $\nabla(3x^2 + y^2)|_{(x,y)=(-1,1)} = (-6, 2)$, så kurvorna skär varandra i rät vinkel där.

5. Den ena variabeln måste vara (en multipel av) $3x+2y$ för att få en PDE med bara en derivata inblandad. Hur man väljer den andra variabeln spelar mindre roll. Till exempel: med variablerna $u = 3x + 2y$, $v = y$ erhålls $-3f'_v = \frac{1}{3}(u + 4v)$, vars allmänna lösning är

$$f = -\frac{1}{9}(uv + 2v^2) + g(u) = -\frac{1}{9}(3xy + 4y^2) + g(3x + 2y).$$

   Den fria envariabelfunktionen g bestäms av det extra villkoret $f(x, 0) = g(3x) = x^2$, alltså $g(u) = \frac{1}{9}u^2$. Den sökta lösningen blir därmed $f(x, y) = -\frac{1}{9}(3xy + 4y^2) + \frac{1}{9}(3x + 2y)^2 = x^2 + xy$.

   (Något enklare räkningar fås om man tar $v = x$ eller $v = x + 2y$ istället.)

   Svar: $f(x, y) = x^2 + xy$.

6. Lös ut x ur $x + y + z = 1$, och studera $f(y, z) = (1 - y - z)y^2z^3$ då $y \geq 0$, $z \geq 0$ och $y + z \leq 1$. Detta område i yz-planet är kompakt, och f är kontinuerlig (ty polynom), så f har säkert ett största och ett minsta värde. Längs hela randtriangeln är $f = 0$ (uppenbart f:s minsta värde i området), och övriga intressanta punkter fås genom att sätta $\nabla f = \big(yz^3(2 - 3y - 2z), y^2z^2(3 - 3y - 4z)\big)$ till noll. Den enda lösningen i områdets inre är $(y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, och där antas följaktligen det största värdet: $xy^2z^3 = \frac{1}{6}(\frac{1}{3})^2(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{432}$. (Och alla mellanliggande värden antas förstås också, eftersom f är kontinuerlig.)

   Svar: Uttryckets värde varierar mellan noll (då någon av variablerna är noll) och $1/432$ (då $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$).

7. Kroppens projektion E på xy-planet ges av $x^2 + xy \leq 1 - \frac{1}{2}y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; alltså den del av den snett liggande ellipsen $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1$ som ligger i första kvadranten. Med nya koordinater $u = x + \frac{1}{2}y$, $v = \frac{1}{2}y$ erhålls istället en cirkelsektor F i uv-planet: $u^2 + v^2 \leq 1$, $u \geq v \geq 0$. (Den inversa variabelbytet är $x = u - v$, $y = 2v$, och där ser man att $x \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v$ och $y \geq 0 \Leftrightarrow v \geq 0$.) Volymen av D blir därmed

$$\begin{aligned}
\iiint_D dxdydz &= \iint_E \Big((1 - \tfrac{1}{2}y^2) - (x^2 + xy) \Big) dxdy \\
&= \iint_F (1 - u^2 - v^2) \frac{dudv}{1/2} = 2 \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=0}^{1} (1 - r^2) r \, dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Alternativ: betrakta tvärsnittet för fixt $x \in [0, 1]$, vilket är området i yz-planets första kvadrant ovanför linjen $z = x^2 + xy$ och under parabeln $z = 1 - \frac{1}{2}y^2$. Detta tvärsnitt har arean

$$A(x) = \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}-x} \Big((1 - \tfrac{1}{2}y^2) - (x^2 + xy) \Big) dy = \frac{2x^3}{3} - x + \frac{(2 - x^2)^{3/2}}{3},$$

och volymen av D blir $\int_{x=0}^{1} A(x)\, dx = \pi/8$. (Det blir lite jobbigare räkningar i denna variant; termen $(2 - x^2)^{3/2}$ hanteras lämpligen med variabelbytet $x = \sqrt{2} \sin t$ följt av omskrivning av $\cos^4 t$ till en summa med hjälp av Eulers formler.)

Svar: $\pi/8$.