LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KB och TB 2008–03–27 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng (1 poäng per deluppgift på uppgift 1). Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~halun/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Rita området $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1,\ |x| \geq 1\right\}$.

   (b) Bestäm Taylorutvecklingen av ordning 2 kring origo för funktionen $f(x,y) = \sqrt{1 + 3x + y^2}$.

   (c) Definiera vad som menas med att en funktion $f : D \to \mathbf{R}$ (där $D \subseteq \mathbf{R}^n$) har strängt lokalt minimum i punkten $\boldsymbol{a} \in D$.

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D x\,dxdy$, där $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x + y \geq 1\right\}$.

3. Bestäm största och minsta värdet av funktionen
$$f(x,y) = \frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2} - xy - y^2 + 2y$$
på det område i R^2 som ges av olikheterna $x \leq 5$, $y \leq 0$, $x + y \geq 1$.

4. Beräkna volymen av det område D i R^3 som bestäms av olikheterna
$$0 \leq x - y \leq x + 2z \leq 2x + y + z \leq 1.$$

5. Visa att sambandet $\cos(xy) = y - 2x$ i någon omgivning av punkten $(x,y) = (0,1)$ implicit definierar en kontinuerligt deriverbar funktion $y = f(x)$. (Motivera noga!) Ange även $f(0)$ och $f'(0)$.

6. Bestäm allmänna lösningen $f(x,t)$ till den så kallade vågekvationen $f''_{tt} = c^2 f''_{xx}$ med hjälp av variabelbytet $u = x + ct$, $v = x - ct$. Förklara varför den lösning du får fram kan tolkas som en vågrörelse, ifall x är en rumsvariabel och t en tidsvariabel (c är bara en konstant).

7. Visa direkt ur definitionen av differentierbarhet att funktionen $f(x,y) = xy^2$ är differentierbar i punkten $(x,y) = (2,-1)$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2008–03–27

1. (a) Börja med en ellips med halvaxlarna 2 (i x-led) och 3 (i y-led), och ta bort en remsa i mitten mellan linjerna $x = -1$ och $x = 1$, så att det blir två ”linsformade” bitar kvar, en till höger och en till vänster.

   (b) Standardutvecklingen $(1+t)^{1/2} = 1 + t/2 - t^2/8 + O(t^3)$ ger $\sqrt{1+3x+y^2} = 1 + (3x+y^2)/2 - (3x+y^2)^2/8 + O(r^3) = 1 + 3x/2 - 9x^2/8 + y^2/2 + O(r^3)$, där $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

   (c) Se kurslitteraturen (Persson–Böijers, avsnitt 2.6, def. 7).

2. Direkt uträkning $\int_{x=0}^{1} \Big[xy\Big]_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx$ eller $\int_{y=0}^{1} \Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]_{x=1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy$ fungerar utmärkt. Ett tredje sätt att tänka är att området D kan fås genom att från kvartscirkelskivan $D_1 = \{x^2+y^2 \le 1,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$ ta bort triangeln $D_2 = \{x+y < 1,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$:

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \iint_{D_1} x\,dxdy - \iint_{D_2} x\,dxdy \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{1}(r\cos\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi - \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x} x\,dy\right)dx.\end{aligned}$$

   Svar: 1/6.

3. Området är kompakt och funktionen kontinuerlig, så existensen av största och minsta värde är garanterad. $\nabla f = (x-y, y^2-x-2y+2) = (0,0)$ ger de stationära punkterna $(1,1)$ och $(2,2)$, båda utanför det givna området. Randen består av tre linjestycken vars inre undersöks i tur och ordning (jag sparar hörnen till sist):

   - $y = 0$, $1 < x < 5$. $f(x,0) = x^2/2$ är strängt växande på intervallet ifråga, alltså inga intressanta punkter i det inre av intervallet.
   - $y = 1-x$, $1 < x < 5$. $g(x) = f(x, 1-x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{4}{3}$ har derivatan $g'(x) = -x^2 + 3x - 2$ med nollställena $x = 1$ och $x = 2$, vilket ger den intressanta punkten $(2,-1)$ i intervallets inre.
   - $x = 5$, $-4 < y < 0$. $h(y) = f(5,y) = \frac{y^3}{3} - y^2 - 3y + \frac{25}{2}$ har derivatan $h'(y) = y^2 - 2y - 3$ med nollställena $y = -1$ och $y = 3$, vilket ger den intressanta punkten $(5,-1)$ i intervallets inre.

   De intressanta värdena är alltså $f(2,-1) = \frac{2}{3}$ och $f(5,-1) = \frac{85}{6}$ tillsammans med hörnen $f(1,0) = \frac{1}{2}$, $f(5,0) = \frac{25}{2}$, $f(5,-4) = -\frac{77}{6}$.

   Svar: $f(5,-1) = \frac{85}{6}$ är störst, $f(5,-4) = -\frac{77}{6}$ är minst.

4. I nya variabler $u = x - y$, $v = x + 2z$, $w = 2x + y + z$ blir villkoren $0 \le u \le v \le w \le 1$ (kalla detta område E). Volymskalan är

$$\left|\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = |-5| = 5,$$

så

$$\iiint_D dxdydz = \iiint_E \frac{1}{5}\, dudvdw = \frac{1}{5}\int_{w=0}^{1}\left(\int_{v=0}^{w}\left(\int_{u=0}^{v} du\right) dv\right) dw.$$

Svar: Volymen av D är $1/30$. (Se nästa sida för alternativ metod.)

5. Skriv om ekvationen som $F(x,y) = 2x - y + \cos xy = 0$. Gradienten är $\nabla F = (2 - y\sin xy, -1 - x\sin xy)$. Punkten $(0,1)$ ligger på nivåkurvan $F = 0$, funktionen F är kontinuerligt deriverbar, och $F'_y(0,1) = -1 \neq 0$. Förutsättningarna i implicita funktionssatsen är därmed uppfyllda, och den kan därför åberopas för att visa påståendet. Per definition är $f(0) = 1$ (eftersom $y = f(x)$ måste vara 1 när x är 0 ifall kurvan ska gå genom punkten $(0,1)$), och derivatan $f'(0) = 2$ fås ur det faktum att $\nabla F(0,1) = (2,-1)$ ska vara normal till kurvan (rita figur).

6. Kedjeregeln ger först $f'_x = f'_u + f'_v$ och $f'_t = c(f'_u - f'_v)$, och i nästa steg $f''_{xx} = f''_{uu} + 2f''_{uv} + f''_{vv}$ samt $f''_{tt} = c^2(f''_{uu} - 2f''_{uv} + f''_{vv})$. Ekvationen $f''_{tt} = c^2 f''_{xx}$ blir därmed i de nya variablerna helt enkelt $f''_{uv} = 0$, med allmän lösning $f = g(u) + h(v)$ där g och h är godtyckliga (tillräckligt snälla) funktioner av en variabel.

   Svar: $f(x,t) = g(x + ct) + h(x - ct)$.

   För fixt t är grafen för uttrycket $g(x + ct)$ (betraktat som funktion av x) likadan som grafen för $g(x)$ förutom att den är förskjuten ct steg åt vänster. För varje tidsenhet flyttar sig alltså grafen c längdenheter åt vänster, så termen $g(x + ct)$ representerar en fortskridande våg som rör sig åt vänster med hastigheten c. På samma sätt representerar termen $h(x - ct)$ en våg som rör sig åt höger. Den allmänna lösningen till vågekvationen är alltså en superposition av två vågor, en vänstergående och en högergående.

7. Insättning ger $f(2 + h, -1 + k) - f(2, -1) = (2 + h)(-1 + k)^2 - 2 = h - 4k + 2k^2 - 2hk + hk^2 = A_1 h + A_2 k + \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h,k)$, där $A_1 = 1$, $A_2 = -4$, och där

$$\rho(h,k) = \frac{2k^2 - 2hk + hk^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

   då $(h,k) \to (0,0)$ (visas lätt med polära koordinater i hk-planet). Alltså är definitionen av differentierbarhet uppfylld, vsv.

4. **Alternativ metod.** (Rekommenderas **inte**, förutom som träning!)

Eftersom ganska många försökte (och ingen lyckades) att integrera direkt, utan variabelbyte, så ska jag även visa hur man gör det. Börja med att dela upp kedjan av olikheter i sina beståndsdelar så att man kan manipulera dem var för sig:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x-y, \\ x-y &\leq x+2z, \\ x+2z &\leq 2x+y+z, \\ 2x+y+z &\leq 1. \end{aligned}$$

Den första olikheten $0 \leq x-y$ beror inte på z; de resterande tre blir efter förenkling

$$-\tfrac{1}{2}y \leq z, \qquad \begin{aligned} z &\leq x+y, \\ z &\leq 1-2x-y. \end{aligned}$$

Man kan alltså integrera i z-led från $-\frac{1}{2}y$ till $\min(x+y, 1-2x-y)$ för varje punkt (x,y) i det område E i xy-planet som definieras av att $0 \leq x-y$ och $-\frac{1}{2}y \leq x+y$ och $-\frac{1}{2}y \leq 1-2x-y$. Förenkling av dessa olikheter visar att E är en triangel som begränsas av linjerna $y=x$ och $2x+3y=0$ och $4x+y=2$. (Rita figur! Hörnen blir $(0,0)$, $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ och $(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$.)

För att hantera uttrycket $\min(x+y, 1-2x-y)$ tittar man lämpligen på var de två ingående deluttrycken är lika: $x+y = 1-2x-y$ om och endast om $3x+2y=1$; detta är en linje som delar triangeln E i två deltrianglar. (Rita! Linjen går genom hörnet $(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$ och skär den motstående sidan i punkten $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$.) I den vänstra delen E_1 är $x+y \leq 1-2x-y$, och i den högra delen E_2 är det tvärtom. Volymen blir alltså

$$\iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{z=-\frac{1}{2}y}^{\min(x+y,1-2x-y)} dz \right) dxdy =$$
$$\iint_{E_1} \left(\int_{z=-\frac{1}{2}y}^{x+y} dz \right) dxdy + \iint_{E_2} \left(\int_{z=-\frac{1}{2}y}^{1-2x-y} dz \right) dxdy.$$

Både E_1 och E_2 ligger snett i xy-planet, och måste i sin tur tudelas om man ska integrera i xy-koordinater. Om vi t.ex. tar x-integralen innerst får vi klyva E_1 längs linjen $y=0$ och E_2 längs linjen $y=\frac{1}{5}$:

$$\iint_{E_1} = \int_{y=-\frac{2}{5}}^{0} \int_{x=-\frac{3}{2}y}^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y} + \int_{y=0}^{\frac{1}{5}} \int_{x=y}^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y}$$
$$\iint_{E_2} = \int_{y=-\frac{2}{5}}^{\frac{1}{5}} \int_{x=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}y} + \int_{y=\frac{1}{5}}^{\frac{2}{5}} \int_{x=y}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}y}$$

Tråkig uträkning av de fyra bidragen ger slutligen den totala volymen $\frac{1}{135} + \frac{1}{108} + \frac{1}{80} + \frac{1}{240} = \frac{1}{30}$.