LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jens Jonasson, Hans Lundmark

Tentamen i TATA09, Analys B för KB och TB 2008-08-22 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jejon/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm alla stationära punkter hos funktionen
$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$
och avgör deras karaktär.

2. Undersök följande gränsvärden:
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ (1p)
   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (1p)
   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1-2x^2}-1-\ln(1+y^2)}{x^2+y^2}$ (1p)

3. (a) Bestäm allmänna lösningen $f(x,y)$ till ekvationen $\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, t.ex. med hjälp av ett lämpligt linjärt variabelbyte. (2p)
   (b) Bestäm speciellt den lösning som uppfyller $f(x,0) = e^{-x^2}$. (1p)

4. Beräkna $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz$, där
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\}.$$

5. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen
$$f(x,y) = xye^{-x^2/4-y^2}$$
i eller på triangeln med hörn i $(0,0)$, $(2,2)$, och $(2,1/2)$.

6. Bestäm arean av det område i $\mathbf{R}^2$ som ges av $(x^2+y^2)^2 \le x^2 - y^2$.

7. Definiera vad som menas med att en funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tillhör klassen $\mathcal{C}^1$, och undersök sedan om detta gäller för
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{då } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2008-08-22

1. Gradienten $\nabla f = (3x^2 + 3y^2 - 15, 6xy - 12)$ har sina nollställen där cirkeln $x^2+y^2 = 5$ skär hyperbeln $xy = 2$, dvs för $(x, y) = \pm(1, 2)$ eller $\pm(2, 1)$. Den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen kring (x, y) är $Q = \pm 6(h^2 + 4hk + k^2) = \pm 6((h + 2k)^2 - 3k^2)$ för $(x, y) = \pm(1, 2)$ och $Q = \pm 12(h^2 + hk + k^2) = \pm 12((h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2)$ för $(x, y) = \pm(2, 1)$.

   Svar: Sadelpunkt i $\pm(1, 2)$, lokalt maximum i $(-2, -1)$, lokalt minimum i $(2, 1)$.

2. (a) Polära koordinater ger $r(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi) \to 0$ då $r \to 0$. **Svar**: 0.

   (b) Olika resultat beroende på om man närmar sig origo längs axlarna eller längs kurvan $x = y^2$ (t.ex.). **Svar**: Gränsvärde saknas.

   (c) Standardutvecklingar från envariabelanalysen, och sedan polära koordinater, ger $(-r^2 + O(r^4))/r^2 \to -1$ då $r \to 0$. **Svar**: -1.

3. (a) **Svar**: $f(x, y) = g(3x - y)$, där g är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel.

   (b) **Svar**: $f(x, y) = e^{-(x-y/3)^2}$.

4. Tvärsnittet för konstant x är en triangel med arean $(1 - x)^2/2$, så

$$\iiint_D x\,dxdydz = \int_{x=0}^{1} \frac{x(1-x)^2}{2}\,dx.$$

   Svar: 1/24.

5. Eftersom funktionen är kontinuerlig och området kompakt, vet vi att största/minsta värde existerar. Funktionen f har de fem stationära punkterna $(0, 0)$, och $(\pm\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$, varav endast $(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ är en inre punkt i området. Vi undersöker funktionen på de tre linjesegment som tillsammans utgör randen till området:

   I $y = x$, $0 < x < 2$.

$$g_1(x) := f(x, x) = x^2 e^{-5x^2/4}$$
$$g_1'(x) = 2x(1 - \tfrac{5}{4}x^2)e^{-5x^2/4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \text{ eller } x = \pm\tfrac{2}{\sqrt{5}}$$

   En kandidat $(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

   II $x = 4y$, $0 < y < 1/2$.

$$g_2(y) := f(4y, y) = 4y^2 e^{-5y^2}$$
$$g_2'(y) = 8y(1 - 5y^2)e^{-5y^2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y = 0 \text{ eller } y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{5}}.$$

   En kandidat $(4/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

III $x = 2$, $1/2 < y < 2$.

$$g_3(y) := f(2,y) = 2ye^{-1-y^2}$$
$$g_3'(y) = 2(1-2y^2)e^{-1-y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

En kandidat $(2, 1/\sqrt{2})$.

Största och minsta värdet av f antas i någon av punkterna ovan, eller i hörnpunkterna:

$\boxed{f(\sqrt{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 1/e}$, $\boxed{f(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}) = \tfrac{4}{5}e^{-1}}$, $\boxed{f(\tfrac{4}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}) = \tfrac{4}{5}e^{-1}}$,

$\boxed{f(2, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}e^{-3/2}}$, $\boxed{f(0,0) = 0}$, $\boxed{f(2,2) = 4e^{-5}}$, $\boxed{f(2, \tfrac{1}{2}) = e^{-5/4}}$.

Svar: Minsta värdet är $f(0,0) = 0$.
Största värdet är $f(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1/e$.

6. I polära koordinater ges området av $(r^2)^2 \leq r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi$, alltså $r^2 \leq \cos 2\varphi$. Det ser ut som ett ∞-tecken, med två lika stora öglor, en till vänster och en till höger (randen är en berömd kurva som kallas *lemniskata*). För att $\cos 2\varphi$ ska vara ickenegativt måste ju φ ligga i något av intervallen $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] + n\pi$ där $n \in \mathbf{Z}$, och om man går ett varv runt cirkeln så har man ett sådant vinkelintervall på höger sida och ett rakt mittemot till vänster. Arean blir därmed

$$\iint_D dxdy = \iint_E r\,drd\varphi = 2\int_{\varphi=-\pi/4}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,drd\varphi.$$

Svar: 1.

7. En funktion f sägs tillhöra $\mathcal{C}^1$ ifall f_x' och f_y' är kontinuerliga funktioner. I vårt fall är $f_y'(x,y) = -2x^3y/(x^2+y^2)^2$ för $(x,y) \neq (0,0)$, och detta uttryck saknar gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$. Detta innebär att f_y' inte är kontinuerlig i origo, så f tillhör alltså **inte** $\mathcal{C}^1$.