LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jens Jonasson

Tentamen i TATA09, Analys B för KB och TB
2008-12-19 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se kurshemsidan `www.mai.liu.se/~jejon/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna $\iint_D (x+5x^2y)\,dxdy$, där $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le y \le 2x \le 2\right\}$.

2. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 4xy^2 - 4y^2 - x + 2y$ i (eller på) kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ och $(1,1)$.

3. (a) Lös den partiella differentialekvationen
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^2, \quad (x, y > 0, \quad f \in \mathcal{C}^1),$$
t.ex. genom att använda variabelbytet $u = x^2y$, $v = y$. (2p)

   (b) Bestäm den lösning som uppfyller villkoret $f(1,y) = 0$. (1p)

4. (a) Punkterna $(0,0)$, $(0,-1)$ och $(\frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{3})$ ligger alla på kurvan $y^3 + y^2 - x^2 = 0$. Avgör för var och en av punkterna om kurvan implicit definierar en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x)$ i en omgivning av punkten. (1p)

   (b) Bestäm den punkt på ytan $z + \frac{x^2}{3} + y^2 = 0$ i vilken $(1,1,1)$ är en normalvektor. (1p)

   (c) Bestäm den stationära punkten till $f(x,y) = x^2y^2 + 2x^2 + e^y - y$ och avgör dess karaktär. (1p)

5. Beräkna $\iint_D \frac{2xy}{1+(x^2+9y^2)^2}\,dxdy$, där D är området som ges av $x^2 + 9y^2 \le 4$ och $0 \le 3y \le x$.

6. Beräkna volymen av området
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ x^2 + z^2 \ge 1\right\}.$$

7. (a) Definiera vad det betyder att en funktion $f(x,y)$ är differentierbar i en punkt (a,b). (1p)

   (b) Visa med hjälp av definitionen att funktionen $f(x,y) = \ln(x+y)$ är differentierbar i punkten $(1,0)$. (2p)

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2008-12-19

1. Området D ges av triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,2)$.

$$\iint_D (x+5x^2y)\,dxdy = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{2x}(x+5x^2y)\,dy\right)dx = \cdots = \frac{8}{3}$$

   Svar: 8/3

2. Funktionen är kontinuerlig och mängden kompakt så vi vet att största och minsta värde existerar.

   Funktionen har endast en stationär punkt $(1/2,1/2)$ som ligger i området.

   Randen delas upp i fyra linjesegment. På linjerna $(x,y)=(x,0)$, $(x,y)=(x,1)$ och $(x,y)=(1,y)$ blir funktionen f olika linjära envariabelfunktioner vilka inte ger några intressanta punkter bortsett från hörnpunkterna. På $(x,y)=(0,y)$ får vi $g(y)=f(0,y)=-4(y-1/4)^2+1/4$ som har sitt största värde då $y=1/4$. Vi får alltså en intressant punkt $(0,1/4)$. Tillsammans med hörnpunkterna får vi därmed sex kandidater till största/minsta värde: $f(1/2,1/2)=0$, $f(0,1/4)=1/4$, $f(0,0)=0$, $f(0,1)=-2$, $f(1,0)=-1$ och $f(1,1)=1$.

   Svar: Det största värdet är $f(1,1)=1$ och det minsta $f(0,1)=-2$.

3. (a) Med hjälp av kedjeregeln får vi $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy\dfrac{\partial f}{\partial u}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$. I de nya variablerna får vil därmed den enklare ekvationen $\dfrac{\partial f}{\partial v}=-2v$, vilket ger $f=-v^2+\varphi(u)=-y^2+\varphi(x^2y)$, där φ är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel.

   Svar: $f(x,y)=-y^2+\varphi(x^2y)$

   (b) $f(1,y)=0$ ger $\varphi(y)=y^2$.

   Svar: $f(x,y)=-y^2+x^4y^2$

4. (a) Låt $F(x,y)=y^3+y^2-x^2$. Enligt implicita funktionssatsen definierar nivåkurvan $F(x,y)=0$ en $\mathcal{C}^1$-funktion $y=f(x)$ i en omgivning av punkten (a,b) omm $F'_y(a,b)\neq 0$. $F'_y(0,0)=F'_y(2/3^{3/2},-2/3)=0$ och $F'_y(0,-1)=1$.

   Svar: Kurvan definierar lokalt en implicit $\mathcal{C}^1$-funktion $y=f(x)$ endast i punkten $(0,-1)$.

(b) Låt $F(x,y,z) = z + x^2/3 + y^2$ och (a,b,c) en punkt på nivåytan $F(x,y,z) = 0$, d.v.s. $c + a^2/3 + b^2 = 0$. Eftersom $\nabla F(a,b,c)$ är en normalvektor till ytan i (a,b,c), är $(1,1,1)$ också en normalvektor i samma punkt omm det finns ett tal λ sådant att

$$\begin{cases} \nabla F(a,b,c) = \lambda(1,1,1) \\ c + a^2/3 + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a/3 = \lambda \\ 2b = \lambda \\ 1 = \lambda \\ c + a^2/3 + b^2 = 0 \end{cases}$$

Svar: $(3/2, 1/2, -1)$.

(c)

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2xy^2 + 4x = 2x(y^2+1) = 0 \\ f'_y(x,y) = 2x^2y + e^y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

d.v.s. funktionens enda stationära punkt är $(0,0)$. Motsvarande kvadratiska form ges av $f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2 = 4h^2 + k^2$. Eftersom den kvadratiska formen är positivt definit har funktionen ett lokalt minimum i $(0,0)$.

Svar: Funktionens enda stationära punkt $(0,0)$ är en lokal minimipunkt.

5. D är det område i ellipsen $x^2 + 9y^2 = 4$ som ligger mellan linjerna $y = 0$ och $x = 3y$ i första kvadranten. Genom att först byta till variablerna $u = x$, $v = 3y$ och därefter till polära koordinater får vi

$$\iint_D \frac{2xy}{1 + (x^2+9y^2)^2} = \frac{2}{9}\int_{r=0}^{2}\left(\int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi}{1+r^4} d\varphi\right) dr =$$

$$= \frac{1}{72}\left[\ln(1+r^4)\right]_0^2 \cdot \left[-\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 17}{72}$$

Svar: $\frac{\ln 17}{72}$

6. Området D är ett klot med radie 2 och centrum i origo, med ett cylinderformat hål med radie 1 och y-axeln som symmetriaxel. Låt $E = \{(x,z) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + z^2 \le 4\}$ (en annulus), då ges volymen V av

$$V = \iiint_D dxdydz = \iint_E \left(\int_{y=-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} dy\right) dxdz =$$

$$= 2\iint_E \sqrt{4 - x^2 - z^2}\, dxdz$$

Genom att därefter byta till polära koordinater $x = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ får man

$$V = 2\int_{r=1}^{2}\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} r\sqrt{4-r^2}d\varphi\right) dr = \frac{4\pi}{3}\left[-(4-r^2)^{3/2}\right]_1^2 = 4\sqrt{3}\pi$$

Svar: $4\sqrt{3}\pi$

7. (a) f är differentierbar i (a,b) om det finns konstanter A och B och en funktion $\varrho : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sådana att $f(a+h,b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\varrho(h,k)$, där $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varrho(h,k) = 0$.

   (b) Om f är differentierbar måste $A = f'_x(1,0) = 1$ och $B = f'_y(1,0) = 1$. Därmed ges ϱ av

$$\varrho(h,k) = \frac{\ln(1+h+k) - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

   Eftersom $\ln(1+h+k) = h + k + O(r^2)$, där $r = \sqrt{h^2+k^2}$, får vi $\varrho(h,k) = O(r^2)/r = O(r) \to 0$ då $r \to 0$.