LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jens Jonasson

Tentamen i Analys B för KB och TB (TATA09/TEN1) 2009-04-16 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se kurshemsidan `www.mai.liu.se/~jejon/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Bestäm alla lokala maximi- och minimipunkter för funktionen
$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y^3.$$

2. Beräkna $\displaystyle\iint_D 2(x+y^2)\,dxdy$, där $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 \le 4\right\}$.

3. Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen
$$f(x,y) = \frac{x^2+2x+1}{1+x^2+y^2} \quad \text{på} \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0\right\}.$$

4. Beräkna volymen av det område som ges av olikheterna
$$0 \le 2x+y \le 1, \quad 0 \le -2x+y \le 1, \quad 0 \le z \le (y^2-4x^2)e^{2x+y}.$$

5. Bestäm de tangentplan till ytan $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 15$ som innehåller linjen $(x,y,z) = (0,-1,6) + t(0,2,3)$, $t \in \mathbf{R}$.

6. (a) Undersök gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$. (1p)

   (b) Låt $f(x,y) = e^{x+y}(x^3+4y-5)$. Visa att $|f'_{\bar{v}}(1,1)| < 45$ för varje riktning $\bar{v} = (v_1, v_2)$, $|\bar{v}| = 1$. (1p)

   (c) Visa att ekvationen $y^3 + 2y = x$ entydigt bestämmer en $\mathcal{C}^1$-funktion $y = f(x)$ i en omgivning av origo. Bestäm också Maclaurinutvecklingen av ordning två till $f(x)$. (1p)

7. Bestäm alla $\mathcal{C}^2$-lösningar till differentialekvationen
$$xf''_{xy} + yf''_{yy} - f'_y = x^3, \quad x,\ y > 0,$$
t.ex. genom att införa de nya variablerna $u = x$, $v = x\varphi(y)$ för lämpligt val av funktion $\varphi(y)$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2009-04-16

1.

$$\begin{cases} f'_x = -2x + 2y = 0 \\ f'_y = 2x - 4y + 6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x(3x-1) = 0. \end{cases}$$

Funktionen har alltså de två stationära punkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (1/3, 1/3)$.

$$f''_{xx} = -2, \quad f''_{xy} = 2, \quad f''_{yy} = -4 + 12y$$

I punkten $(0, 0)$ får vi den negativt definita kvadratiska formen

$$Q_1(h, k) = -2h^2 + 4hk - 4k^2 = -2(h-k)^2 - 2k^2,$$

och i $(1/3, 1/3)$ den indefinita kvadratiska formen

$$Q_2(h, k) = -2h^2 + 4hk = -2(h-k)^2 + 2k^2.$$

Funktionen har alltså endast en lokal extrempunkt, ett lokalt maximum i $(0, 0)$.

Svar: Funktionen har en lokal maximipunkt i $(x, y) = (0, 0)$.

2. Byte till polära koordinater $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ger

$$\iint_D 2(x + y^2)dxdy = 2\int_{r=0}^{2} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} r(1 + r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi)d\varphi \right) dr$$
$$= 16\pi.$$

Svar: 16π

3. Ett största/minsta värde existerar då området är kompakt och funktionen kontinuerlig. Bestämmer först inre stationära punkter till funktionen:

$$\begin{cases} f'_x = \dfrac{2(x+1)(1-x+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y = -\dfrac{2y(x+1)^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Vi ser att ekvationerna är uppfyllda precis då $(x, y) = (1, 0)$ eller $x = -1$, varav endast $(x, y) = (1, 0)$ ligger i D. Vi får alltså en kandidat $f(1, 0) = 2$.

Vi delar upp undersökningen av randen i tre fall:

(a) Linjesegmentet $x = 0$, $-2 < y < 2$. Vi ser att funktionen $f(0, y) = 1/(1+y^2)$ saknar minsta värde och har sitt största värde då $y = 0$. Vi får alltså en kandidat $f(0, 0) = 1$.

(b) Halvcirkeln $(x, y) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Vi ser att funktionen $f(2\cos\varphi, 2\sin\varphi) = \frac{1}{5}(2\cos\varphi + 1)^2$ saknar minsta värde och att det största värdet inträffar precis då $\varphi = 0$. Vi får alltså en kandidat $f(2, 0) = 9/5$.

(c) Hörnpunkterna ger två kandidater $f(0, \pm 2) = 1/5$.

Svar: Största värdet är $f(1, 0) = 2$, minsta värdet är $f(0, \pm 2) = 1/5$.

4. Låt D vara området som ges av $0 \le 2x + y \le 1$, $0 \le -2x + y \le 1$. Volymen ges av dubbelintegralen

$$V = \iint_D (y^2 - 4x^2) e^{2x+y} dxdy.$$

Genom variabelbytet $u = y + 2x$, $v = y - 2x$ avbildas D på mängden $E = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : \ 0 \le u, v \le 1\}$ och

$$V = \tfrac{1}{4} \iint_E uve^u dudv = \tfrac{1}{4} \int_0^1 ue^u du \int_0^1 vdv = \tfrac{1}{8}.$$

Svar: $1/8$

5. Låt $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ och låt (a, b, c) vara en godtycklig punkt på ytan, dvs $F(a, b, c) = 15$. Tangentplanets ekvation i punkten (a, b, c) ges av

$$0 = \nabla F(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) \quad \Leftrightarrow \quad 2ax + 3by + cz = 15.$$

Detta tangentplan innehåller den givna linjen omm linjens riktningsvektor är ortogonal mot planets normal och *en* av linjens punkter (t.ex. $(0, -1, 6)$) ligger i planet. Vi får därmed följande tre ekvationer:

$$2a^2 + 3b^2 + c^2 = 15, \qquad \begin{bmatrix} 4a \\ 6b \\ 2c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0, \quad -3b + 6c = 15,$$

som har lösningarna $(a, b, c) = (\pm 2, -1, 2)$.

Svar: $\pm 4x - 3y + 2z = 15$

6. (a) Låt $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$. Vi ser att gränsvärdet inte existerar eftersom t.ex.

$$\lim_{t \to 0} f(0, t) = 0, \quad \lim_{t \to 0} f(t^3, t) = \tfrac{1}{2},$$

d.v.s. funktionen närmar sig olika tal då (x, y) närmar sig $(0, 0)$ längs olika kurvor.

Svar: Gränsvärdet existerar inte.

(b) Vi har

$$|f'_{\bar{v}}(1,1)| = |\nabla f(1,1) \cdot \bar{v}| \leq |\nabla f(1,1)||\bar{v}| = |\nabla f(1,1)| = 5e^2 < 45.$$

(c) Låt $F(x, y) = y^3 + 2y - x$. Eftersom $F(0, 0) = 0$ och $F'_y(0, 0) = 2 \neq 0$ ger implicita funktionssatsen att nivåkurvan $F(x, y) = 0$ kan uttryckas som en en funktionskurva $y = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^1$, på ett unikt sätt i en omgivning av origo. Genom implicit derivering av ekvationen $y^3 + 2y = x$ får vi $f'(x) = y' = 1/(3y^2 + 2)$ och speciellt $f'(0) = 1/2$. Ytterligare en derivation ger $f''(x) = y'' = -6yy'/(3y^2 + 2)^2$ och speciellt $f''(0) = 0$. Maclaurinutvecklingen blir därmed

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + O(x^3) = \frac{x}{2} + O(x^3).$$

Svar: $f(x) = x/2 + O(x^3)$

7. Med hjälp av kedjeregeln finner vi

$$f'_y = x\varphi'(y)f'_v, \quad f''_{xy} = \varphi'(y)\left(f'_v + f''_{uv} + \varphi(y)f''_{vv}\right),$$
$$f''_{yy} = x\varphi''(y)f'_v + x^2(\varphi'(y))^2 f''_{vv}.$$

Sätter vi in dessa uttryck i differentialekvationen och dividerar med x får vi

$$y\varphi''(y)f'_v + x\varphi'(y)f''_{uv} + x\varphi'(y)\left(\varphi(y) + y\varphi'(y)\right)f''_{vv} = x^2.$$

Om vi kan välja $\varphi(y)$ så att koefficienten framför f''_{vv} blir noll så får vi en hanterbar ekvation (observera att vi inte kan välja φ s.a. $\varphi'(y) = 0$), t.ex. $\varphi(y) = 1/y$. Låter vi $g = f'_v$ reduceras ekvationen ovan till

$$y\frac{2}{y^3}f'_v - \frac{x}{y^2}f''_{uv} = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad g'_u - \frac{2}{u}g = -\frac{u^3}{v^2}.$$

Vi förlänger med den integrerande faktorn $1/u^2$ och får

$$\frac{1}{u^2}g'_u - \frac{2}{u^3}g = -\frac{u}{v^2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{u^2}g\right)'_u = -\frac{u}{v^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad f'_v = g = -\frac{u^4}{2v^2} + u^2\tilde{\psi}(v) \quad \Leftrightarrow \quad f(u, v) = \frac{u^4}{2v} + u^2\psi(v) + \tau(u)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x, y) = \frac{x^3 y}{2} + x^2\psi(x/y) + \tau(x),$$

där $\psi, \tilde{\psi}, \tau$ är godtyckliga $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel.

Svar: $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{2} + x^2\psi(x/y) + \tau(x)$