LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Jens Jonasson och Johan Thim

Tentamen i Analys B för KB och TB (TATA09/TEN1) 2009-08-24 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se kurshemsidan `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Låt $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq 2x - y \leq 1,\ 0 \leq -x + 2y \leq 2\}$ och beräkna integralen $\iint_D xy\,dxdy$.

2. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} xf'_y - yf'_x = xy\sin(x^2 - y^2), & x, y > 0 \\ f(x,x) = \frac{5}{4} + \sin(2x^2), & x > 0. \end{cases}$$
Tips: inför nya variabler $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$.

3. Låt $f(x,y) = (xy + y - 6)e^{x+y}$ och bestäm funktionens största och minsta värde i eller på triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(4,0)$ och $(0,4)$.

4. (a) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 - xy^2}$. (1p)

   (b) Bestäm ekvationerna för de linjer i planet som är parallella med vektorn $\bar{v} = (1, -1)$ och tangerar kurvan $2x^2 - y^2 + 2 = 0$. (1p)

   (c) Bestäm alla lokala minimipunkter till funktionen $f(x,y) = x^3 + x^2 + 3xy + 3y^2$. (1p)

5. Beräkna volymen av det område som ges av olikheterna
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}.$$

6. Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(\int_{-2}^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{0}^{1} \left(\int_{-2}^{-2x} f(x,y)\,dy \right) dx$, där $f(x,y) = (3x^2 + x - 2)\cos(y^2)$.

7. (a) Ge ett exempel på en kontinuerlig funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som inte är differentierbar i punkten $(1,2)$. (1p)

   (b) Ge ett exempel på en partiellt deriverbar funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ som inte är kontinuerlig i punkten $(1,2)$. (1p)

   (c) Antag att funktionen $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ är differentierbar i $(1,2)$ och visa att f då är partiellt deriverbar i $(1,2)$. (1p)

   Motivera noggrant!

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2009-08-24

1. Genom variabelbytet $u = 2x - y$, $v = -x + 2y$ avbildas D på rektangeln $E : 0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$ och vi får

$$\iint_D xydxdy = \frac{1}{27}\iint_E (2u+v)(u+2v)dudv = \cdots = \frac{35}{81}$$

Svar: $35/81$

2. Med kedjeregeln får vi $f'_x = 2x(f'_u + f'_v)$ och $f'_y = 2y(f'_u - f'_v)$. Differentialekvationen reduceras därmed till

$$\begin{aligned} &-4xyf'_v = xy\sin(x^2-y^2) \quad \Leftrightarrow \quad f'_v = -\frac{\sin v}{4} \\ \Leftrightarrow \quad & f(u,v) = \frac{\cos v}{4} + \varphi(u) \quad \Leftrightarrow \quad f(x,y) = \frac{\cos(x^2-y^2)}{4} + \varphi(x^2+y^2), \end{aligned}$$

där φ är en godtycklig deriverbar funktion av en variabel. Funktionen bestäms entydigt av det extra villkoret på lösningen:

$$f(x,x) = \tfrac{5}{4} + \sin(2x^2) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(2x^2) = 1 + \sin(2x^2),$$

vilket ger att $\varphi(t) = 1 + \sin t$.

Svar: $f(x,y) = 1 + \dfrac{\cos(x^2-y^2)}{4} + \sin(x^2+y^2)$

3. Största och minsta värde existerar då funktionen är kontinuerlig och området kompakt. Vi bestämmer först inre stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = e^{x+y}(xy+2y-6) = 0 \\ f'_y = e^{x+y}(xy+y+x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+2y-6 = 0 \\ xy+y+x-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cdots$$

vilket ger två lösningar $(x,y) = (-4,-3)$ och $(x,y) = (1,2)$, varav endast den sista tillhör den undersökta mängden. Vi får alltså en kandidat $f(1,2) = -2e^3$. Undersökningen av randen delas upp i fyra fall:

- $x = 0$, $0 < y < 4$: Låt $g(y) = f(0,y) = (y-6)e^y$. Då får vi $g'(y) = 0$ $\Leftrightarrow y = 5$, dvs vi får ingen kandidat.
- $0 < x < 4$, $y = 0$: $f(x,0) = -6e^x$ är strängt växande så vi får ingen kandidat.
- $0 < x < 4$, $y = 4-x$: Låt $h(x) = f(x,4-x) = (-x^2+3x-2)e^4$. Då får vi $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$, dvs vi får en kandidat $f(3/2,5/2) = e^4/4$.
- Hörnpunkterna ger ytterligare tre kandidater: $f(0,0) = -6$, $f(4,0) = -6e^4$ och $f(0,4) = -2e^4$.

Svar: Största värdet är $f(3/2,5/2) = e^4/4$ och minsta värdet är $f(4,0) = -6e^4$.

4. (a) Gränsvärdet bestäms enkelt genom byte till polära koordinater

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-xy^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2}{r^2-r^3\cos\varphi\sin^2\varphi} =$$
$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{1-r\cos\varphi\sin^2\varphi} = 1.$$

Svar: 1

(b) Låt $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2$ och (a,b) en punkt på nivåkurvan $f(x,y) = 0$. Kurvans normal i (a,b) ges av $\nabla f(a,b) = (4a,-2b)$, så vi söker alltså lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla f(a,b)\cdot \bar{v} = 0 \\ f(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b = 0 \\ 2a^2-b^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (a,b) = \pm(1,-2).$$

De sökta tangentlinjerna ges därmed av

$$0 = \nabla f(a,b)\cdot(x-a,y-b) \quad \Leftrightarrow \quad x+y = \pm 1.$$

Svar: $x+y=\pm 1$

(c) Vi bestämmer först alla stationära punkter genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2+2x+3y = 0 \\ f'_y = 3x+6y = 0, \end{cases}$$

som har lösningarna $(x,y) = (0,0)$ och $(x,y) = (-1/6, 1/12)$. Karaktären av en stationär punkt (x,y) kan bestämmas från den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = f''_{xx}(x,y)h^2 + 2f''_{xy}(x,y)hk + f''_{yy}(x,y)k^2 =$$
$$= (6x+2)h^2 + 6hk + 6k^2.$$

I $(0,0)$ får vi alltså den kvadratiska formen $2h^2+6hk+6k^2 = 2(h+3k/2)^2+3k^2/2$ som är positivt definit, vilket ger att $(0,0)$ är en lokal minimipunkt. I $(-1/6,1/12)$ får vi $h^2+6hk+6k^2 = (h+3k)^2-3k^2$ som är indefinit, vilket innebär att punkten är en sadelpunkt.

Svar: Funktionen har en lokal minimipunkt i $(0,0)$.

5. Låt D beteckna den givna mängden. D ges i rymdpolära koordinater av olikheterna $0 < r \leq \sqrt{6}$ och $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/4$, så volymen ges av

$$V = \iiint_D dxdydz = \int_{r=0}^{\sqrt{6}} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=\pi/6}^{\pi/4} r^2 \sin\theta d\theta \right) d\varphi \right) dr =$$
$$= 4\sqrt{6}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2\pi(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}).$$

Svar: $2\pi(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

6. Summan av de två itererade enkelintegralerna kan skrivas som *en* dubbelintegral $I = \iint_D f(x,y)dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(-1,-2)$ och $(1,-2)$. Vi får därmed

$$I = \int_{y=-2}^{0} \cos(y^2)\left(\int_{x=y/2}^{-y/2}(3x^2+x-2)dx\right)dy =$$
$$= \int_{-2}^{0} 2y\left(1-\frac{y^2}{8}\right)\cos(y^2)dy = \left\{t = y^2\right\} = \int_4^0\left(1-\frac{t}{8}\right)\cos t dt =$$
$$= \{\text{ Partiell integration }\} = \frac{\cos 4}{8} - \frac{\sin 4}{2} - \frac{1}{8}.$$

Svar: $\dfrac{\cos 4}{8} - \dfrac{\sin 4}{2} - \dfrac{1}{8}$

7. (a) Tag t.ex. $f(x,y) = |x-1|$. Funktionen är definierad och kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^2$ men inte partiellt deriverbar, ty

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = 1 \neq -1 = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h}.$$

(b) Tag t.ex.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} & \text{om } (x,y) \neq (1,2) \\ 0 & \text{om } (x,y) = (1,2). \end{cases}$$

f är partiellt deriverbar, ty då $(x,y) \neq (1,2)$ kan den ses som en kvot av summor och produkter av partiellt deriverbara funktioner och i $(1,2)$ har vi

$$f'_x(1,2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = 0,$$

och helt analogt $f'_y(1,2) = 0$. Funktionen är dock inte kontinuerlig i $(1,2)$ ty $\lim_{t\to 0} f(1+t, 2+t) = 1/2$ men $\lim_{t\to 0} f(1, 2+t) = 0$, så gränsvärdet $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$ existerar ej.

(c) Eftersom f är differentierbar i $(1,2)$ finns det konstanter A och B sådana att

$$f(1+h, 2+k) - f(1,2) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k),$$

där $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) = 0$. Genom att sätta $k=0$ och dividera med h får vi

$$\frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = A \pm \rho(h,0) \to A \text{ då } h \to 0,$$

d.v.s. den partiella derivatan $f'_x(1,2)$ existerar. Att $f'_y(1,2)$ existerar visas helt analogt genom att istället sätta $h = 0$ och dividera med k i uttrycket ovan.