LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för KB och TB (TATA09/TEN1)
2009-12-19 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se kurshemsidan `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna integralen $\iint_D \big(2(x^2+y^2) - 5xy\big)\,dxdy$, där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,2)$ och $(2,1)$. (3p)

2. Beräkna följande gränsvärden om dessa existerar. Motbevisa annars existens. (1+1+1p)

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x+y^2)}{\ln(x+y^2/2)}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \sin(x^2+\sqrt{y})e^{-x^2-y^2}$

3. Asociale Albin skall gå ut på en långpromenad och vill undvika att träffa människor i så stor utsträckning som möjligt. Vi beskriver Albins position med en koordinat i xy-planet (x och y-axlarna pekar i östlig respektive nordlig riktning). Befolkningstätheten ges (på ett ungefär) av funktionen $\rho(x,y) = \arctan(x^2+y) + \dfrac{15+\alpha(1+4x^2)}{32(1+4x^2)}$ personer per areaenhet, där α är en positiv konstant.

   (a) Om Albin utgår från punkten $(1,2)$ på kartan, vilken riktning skall han välja för att mängden människor skall avta så snabbt som möjligt och hur snabbt blir avtagandet (per längdenhet) i denna riktning? (2p)

   (b) Hur snabbt ändras befolkningstätheten (per längdenhet) om Albin istället väljer att gå i syd-västlig riktning? (1p)

4. Finn en lösning till $-yf'_x(x,y) + xf'_y(x,y) = 0$, $(x,y) \neq (0,0)$, så att $f(x,0) = \sin|x|$ för $x \neq 0$. Tips: Polära koordinater. (3p)

5. Låt $f(x,y) = (x^2y+y^2)e^{x^2-y^2}$.

   (a) Finn och undersök alla stationära punkter till f och avgör karaktär, om det går, genom studie av de kvadratiska formerna. (2p)

   (b) Vad blir minimum och maximum för f på eller i triangeln med hörn i $(0,0)$, $(-2,2)$ och $(2,2)$? (1p)

6. Beräkna volymen av området i $\mathbf{R}^3$ som begränsas av paraboloiden $z = x^2-2x+y^2+1$, xy-planet och ytan $2x+2y+z=4$. (3p)

7. Låt $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

   (a) Vad måste $f(0,0)$ definieras som (vilket tal) för att f skall bli kontinuerlig? (1p)

   (b) Med detta val, visa att f är differentierbar på hela $\mathbf{R}^2$. (1p)

   (c) Beskriv var f har sina lokala extrempunkter. Enklare ekvationer av envariabeltyp får användas i svaret. (1p)

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2009-12-19

1. Genom variabelbytet $u = y - 2x$, $v = y - x/2$ avbildas D på triangeln med hörn i $(-3, 0)$, $(0, 0)$ och $(0, 3/2)$. Vi får

$$\iint_D \big(2(x^2 + y^2) - 5xy\big)\, dxdy = \frac{2}{3}\int_{-3}^{0}\int_{0}^{(u+3)/2} 2uv\, dvdu = \ \cdots\ = -\frac{9}{8}.$$

Svar: $-9/8$.

2. (a) Den här uppgiften blev felskriven på tentan (tanken var $\ln(1 + x + y^2/2)$ i nämnaren), och blev därmed lite svårare. Gränsvärdet saknas faktiskt då $\ln(x + y^2/2)$ inte är definierad då $x \leq -y^2/2$. Om man närmar sig ifrån området där $x > -y^2/2$ får vi

$$\frac{\sin(2x + y^2)}{\ln(x + y^2/2)} \to 0,$$

då $(x, y) \to (0, 0)$. Detta följer av att $\sin(2x + y^2) \to 0$ och att $\ln(x + y^2/2) \to -\infty$.

(b) Låt $y = kx$, k en konstant. Då får vi

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2kx^2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Uppenbarligen kan ett gränsvärde inte existera.

(c) Eftersom sin är begränsad och $\exp(-x^2 - y^2) \to 0$ då $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ blir gränsvärdet 0.

Svar: (a) 0 (b) Gränsvärde saknas (c) 0

3. Vi behöver ∇f:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} - \frac{15x}{4(1+4x^2)^2} \\ \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{bmatrix}.$$

I punkten $(1, 2)$ får vi $\nabla f(1, 2) = 20^{-1}[1, 2]^{\mathrm{T}}$. Funktionen f växer snabbast i gradientens riktning, och således långsammast i riktningen $-\nabla f(1, 2)$. Vektorn $v = -(1/\sqrt{5})[1, 2]^{\mathrm{T}}$ pekar ut den sökta riktningen. Hastigheten hos förändringen ges av riktningsderivatan i riktning v, dvs

$$f'_v(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{4\sqrt{5}}.$$

För uppgift (b) blir vektorn v istället $v = -(1/\sqrt{2})[1, 1]^{\mathrm{T}}$, så vi får

$$f'_v(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot v = -\frac{3}{20\sqrt{2}}.$$

Svar: (a) I riktning $[-1, -2]^{\mathrm{T}}$ blir avtagandet snabbast: $-1/4\sqrt{5}$. (b) $-3/20\sqrt{2}$.

4. Med kedjeregeln får vi $f'_\theta = -r\sin\theta f'_x + r\cos\theta f'_y = -yf'_x + xf'_y$. Differentialekvationen reduceras därmed till $f'_\theta = 0$, och följaktligen blir $f(r, \theta) = g(r)$ där g är en godtycklig deriverbar funktion utanför origo. Byter vi tillbaka till ursprungskoordinaterna blir

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Funktionen bestäms entydigt av det extra villkoret på lösningen:

$$\sin(|x|) = f(x, 0) = g(\sqrt{x^2}) = g(|x|),$$

vilket ger att $g(r) = \sin r$, $r > 0$.

Svar: $f(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

5. Gradienten blir

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy(1+x^2+y) \\ x^2+2y(1-x^2y-y^2) \end{bmatrix} e^{x^2-y^2}.$$

Då vi söker stationära punkter måste $\nabla f = 0$ i dessa ($f \in C^1$). Om $f'_x = 0$ får vi tre möjligheter. Om $x = 0$ ger $f'_y = 0$ att $y(1-y^2) = 0$, så $y = 0, \pm 1$ (tre lösningar). Om $y = 0$ måste $x = 0$. Tredje alternativet sker då $x^2 = -1-y$. Ekvationen $f'_y = 0$ ger då att $y^2 + y/2 - 1/2 = 0$, så $y = 1/2, -1$, av vilka bara $y = -1$ ger en lösning: $x = 0$ ($y = 1/2$ ger att $x^2 < 0$). Våra stationära punkter blir alltså

$$(0,0) \qquad (0,1) \qquad (0,-1).$$

För att testa karaktären för f i dessa punkter behöver vi derivera igen:

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2\,y\mathrm{e}^{x^2-y^2}\left(1+5\,x^2+y+2\,x^4+2\,x^2y\right), \\ f''_{xy} = -2\,x\mathrm{e}^{x^2-y^2}\left(-1-x^2-2\,y+2\,y^2+2\,x^2y^2+2\,y^3\right), \\ f''_{yy} = 2\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}\left(1-3\,x^2y-5\,y^2+2\,y^3x^2+2\,y^4\right). \end{cases}$$

Låt $Q(h,k) = [h,\ k]H(a,b)[h,\ k]^{\mathrm{T}}$, där $H(a,b)$ är Hessianen i (a,b). I våra punkter får vi:

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad H(0,1) = \begin{bmatrix} 4e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{bmatrix} \qquad H(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ur detta kan vi enbart utläsa att $(0,1)$ är en sadelpunkt (Q är indefinit). I punkterna $(0,0)$ och $(0,-1)$ är Q positivt respektive negativt semidefinit. Noggrannare undersökning krävs för att utreda karaktär.

Största och minsta värde existerar i området då funktionen är kontinuerlig och triangeln kompakt. Inre stationära punkter är bara $(0,1)$. Möjlig kandidat $f(0,1) = e^{-1}$. Randen består av tre delar:

- $y = x$, $0 < x < 2$: Låt $g(x) = f(x,x) = x^3 + x^2$. Då får vi $g'(x) \neq 0$ för $0 < x < 2$, dvs vi får ingen kandidat.
- $y = -x$, $-2 < x < 0$: $g(x) = f(x,-x) = -x^3 + x^2$. Vi får $g'(x) \neq 0$ for $-2 < x < 0$, så vi får ingen kandidat.
- $-2 < x < 2$, $y = 2$: Låt $g(x) = f(x,2) = (2x^2+4)e^{x^2-4}$. Då får vi $g'(x) = 0$ omm $x = 0$, dvs vi får en kandidat $f(0,2) = 4e^{-4}$.
- Hörnpunkterna ger ytterligare tre kandidater: $f(0,0) = 0$, $f(-2,2) = 12$ och $f(2,2) = 12$.

Svar: (a) Stationära punkter är $(0,0)$ och $(0,\pm 1)$. I punkten $(0,1)$ har f en sadelpunkt, medan de andra punkterna är semidefinita.
(b) Största värdet på triangeln är $f(\pm 2, 2) = 12$ och minsta värdet är $f(0,0) = 0$.

6. Paraboloiden och planet $2x + 2y + z = 4$ skär varandra precis där

$$(x-1)^2 + y^2 = 4 - 2x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Projektionen av området i xy-planet blir alltså $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$. Volymen kan då beskrivas med

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \int_{z=(x-1)^2+y^2}^{4-2(x+y)} 1\,dz\,dxdy \\ &= \iint_D \left((x-1)^2 + y^2 - 4 + 2(x+y)\right)dxdy \\ &= \iint_D \left(4 - x^2 - (y+1)^2\right)dxdy. \end{aligned}$$

Byte till polära koordinater (med centrum i $(0, -1)$, dvs $x = r\cos\theta$ och $y = -1 + r\sin\theta$) ger nu att

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r(4 - r^2)\, dr d\theta = 8\pi.$$

Svar: 8π volym enheter.

7. (a) Eftersom

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

så måste $f(0,0) = 1$ för att f skall vara kontinuerlig.

(b) Vi visar att $f \in C^1$, vilket implicerar att f är differentierbar. Utanför origo är detta enkelt uppfyllt (varför?). I origo ser vi att, t. ex.,

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{-2}\sin h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + O(h^4) - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} O(h^3) = 0, \end{aligned}$$

och att gränsvärdet för $f'_x(x,y)$ då $(x,y) \to (0,0)$ stämmer överens med detta:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)2x - 2x\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2x\,\frac{r^2(1+O(r^4)) - (r^2 + O(r^6))}{r^4} \\ &= 2xO(r^2) \to 0, \quad \text{då } r = \sqrt{x^2+y^2} \to 0. \end{aligned}$$

Alltså är f'_x kontinuerlig i origo. På samma sätt kan man visa att även f'_y har denna egenskap. Sålunda tillhör f klassen C^1.

(c) Låt $g(r) = \sin(r)/r$, $r \neq 0$, och $g(0) = 1$. Eftersom $f(x,y) = g(x^2+y^2)$ kan vi utläsa mycket ur den enklare envariabelfunktionen. För r nära 0 ser vi att

$$g(r) = \frac{r - r^3/3! + O(r^5)}{r} = 1 - r^2(1/6 + O(r^2)),$$

så g har ett maximum för $r = 0$. Om $r \neq 0$ så blir $g'(r) = r^{-2}(r\cos r - \sin r)$. Derivatan blir alltså noll precis då $\sin(r)/r = \cos r$, d.v.s. då funktionerna $g(r)$ och $\cos(r)$, $r > 0$, skär varandra.

Svar:

(a) $f(0,0) = 0$.

(b) Se lösning.

(c) f har extrempunkter på cirklar med radie given av lösningar till ekvationen $\sin(r)/r = \cos r$. Varannan maximum och varannan minimum, där vi börjar med ett maximum i origo (cirkeln med radie 0).