LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för KB och TB (TATA09/TEN1)
2010-04-09 kl 8–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se kurshemsidan `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna integralen $\iint_D xy\,dxdy$, där $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$. (3p)

2. Lös följande problem. Motivera noggrant. (1+1+1p)

   (a) Undersök gränsvärdet
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

   (b) Undersök gränsvärdet
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2-y^2)}{x^2+y^2}.$$

   (c) Visa att $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, är partiellt deriverbar i origo.

3. Hitta och klassificera alla lokala extrempunkter för $f(x,y) = x^2y + 2xy + y^3/3$. (3p)

4. Finn en C^1-lösning $f(x,y,z)$ till systemet
   $$\begin{cases} f'_x = 2xy + z + e^x \sin(yz), \\ f'_y = x^2 + ze^x \cos(yz), \\ f'_z = x + ye^x \cos(yz), \end{cases}$$
   som uppfyller $f(1,0,0) = e^2$. (3p)

5. Bestäm konstanten D så att planet $2x + 4y + z = D$ tangerar ytan $z = x^2 - 3y^2$ i någon punkt. (3p)

6. Beräkna volymen av området som begränsas av $z = 0$, $2x + y + z = 4$ och $\max\{|x|, |y|\} \leq \frac{1}{2}$. (3p)

7. (a) Formulera implicita funktionssatsen i två variabler. (1p)

   (b) Visa att nivåkurvan $F(x,y) = 3x^2y - y^3 = -1$ definierar en C^2-funktion $y = f(x)$ i en omgivning av $(0,1)$. (2p)

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2010-04-09

1. Med polära koordinater transformeras området till $0 \le r \le 1$ och $0 \le \theta \le \pi/2$. Vi får

$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta\,drd\theta = \cdots = \frac{1}{8}.$$

Svar: 1/8.

2. (a) Byte till polära koordinater ger att gränsvärdet kan skrivas som

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0^+} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

för alla θ. Alltså blir gränsvärdet 0.

(a) Eftersom $\cos(x^2-y^2) \to 1$ då $(x,y)\to(0,0)$, och nämnaren går mot noll, så existerar inte gränsvärdet (ändligt).

(b) Direkt ifrån definitionen av partiell deriverbarhet har vi

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

ty $f(x,0) = 0$ för alla x. På samma sätt är $f'_y(0,0) = 0$. Funktionen är därför partiellt deriverbar i origo.

Svar: (a) 0. (b) Gränsvärde saknas. (c) Se ovan.

3. Gradienten blir

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy+2y \\ x^2+2x+y^2 \end{pmatrix}.$$

Då vi söker stationära punkter måste $\nabla f = 0$ i dessa ($f\in C^1$). Om $f'_x = 0$ får vi två möjligheter. Om $y=0$ ger $f'_y = 0$ att $x(x+2)=0$, så $x = 0,-2$. Om $x=-1$ måste $y^2 = 1$, så $y=\pm 1$. Våra stationära punkter blir alltså

$$(0,0) \qquad (-2,0) \qquad (-1,1) \qquad (-1,-1).$$

För att testa karaktären för f i dessa punkter behöver vi derivera igen:

$$f''_{xx} = 2y, \qquad f''_{xy} = 2x+2, \qquad f''_{yy} = 2y.$$

Låt $Q(h,k) = f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2$. I våra punkter får vi:

$(0,0)$:	$Q(h,k) = 4hk$	indefinit, sadelpunkt;
$(-2,0)$:	$Q(h,k) = -4hk$	indefinit, sadelpunkt;
$(-1,1)$:	$Q(h,k) = 2h^2+2k^2 = 2(h^2+k^2)$	positivt definit, lokal minpunkt;
$(-1,-1)$:	$Q(h,k) = -2h^2-2k^2 = -2(h^2+k^2)$	negativt definit, lokal maxpunkt.

Svar: Se ovan.

4. Den sista ekvationen implicerar att

$$f(x,y,z) = xz + e^x\sin(yz) + g(x,y),$$

där $g\in C^1$ är godtycklig. Alltså blir

$$f'_x(x,y,z) = z + e^x\sin(yz) + g'_x(x,y).$$

Jämnförelse med den första ekvationen i uppgiften visar att $g'_x(x,y) = 2xy$, så $g(x,y) = x^2y+h(y)$ för en godtycklig funktion $h \in C^1$. Vi har nu att

$$f(x,y,z) = xz + e^x \sin(yz) + x^2y + h(y),$$

så

$$f'_y(x,y,z) = ze^x \cos(yz) + x^2 + h'(y).$$

Jämnförelse med f'_y given i uppgiften visar att $h'(y) = 0$, så $h(y) = C$, där C är en godtycklig konstant. Alltså är

$$f(x,y,z) = xz + e^x \sin(yz) + x^2y + C.$$

Eftersom $f(1,0,0) = C$ så måste $C = e^2$.

Svar: $f(x,y,z) = xz + e^x \sin(yz) + x^2y + e^2$.

5. Om punkten (a,b,c) är tangeringspunkten mellan plan och yta så måste planets normal, $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^T$, vara parallell med ytans gradient, $\begin{pmatrix} 2a & -6b & -1 \end{pmatrix}^T$:

$$\begin{pmatrix} -2a \\ 6b \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \neq 0.$$

Vi ser att $\lambda = -1$, vilket ger att $b = 2/3$ och $a = -1$. Eftersom (a,b,c) ligger på ytan kan vi beräkna $c = a^2 - 3b^2 = -1/3$. Sätter vi in punkten i planets ekvation får vi

$$D = 2a + 4b + c = 1/3.$$

Svar: $D = 1/3$.

6. Objektet är en kvadratisk ”cylinder” skuren av två plan. Vi låter $D \subset \mathbf{R}^2$ ges av de punkter som uppfyller $\max\{|x|,|y|\} \leq \frac{1}{2}$. Volymen ges av

$$V = \iint_D \int_0^{4-2x-y} dzdxdy = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} (4 - 2x - y)\, dxdy = \cdots = 4.$$

Svar: 4 volymenheter.

7. (a) Se boken (s. 148).

   (b) Vi har $F'_x(x,y) = 6xy$ och $F'_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2$. I punkten $(0,1)$ är $F'_y(0,1) = -3 \neq 0$. Då F är en C^1-funktion och punkten $(0,1)$ ligger på nivåkurvan, så definierar $F(x,y) = -1$ lokalt en C^1-funktion $y = f(x)$ enligt implicita funktionssatsen. Derivatan av f ges av uttrycket

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))} = \frac{2f(x)}{f(x)^2 - x^2}.$$

För att visa att f är en C^2-funktion så deriverar vi uttrycket ovan implicit:

$$f''(x) = \frac{(f(x)^2 - x^2)2f'(x) - (2f(x)f'(x) - 2x)2f(x)}{(f(x)^2 - x^2)^2}.$$

Eftersom $f(x)^2 \neq x^2$ i en omgivning av $x = 0$ ($F'_y(0,1) \neq 0$) och $f'(x)$ är kontinuerlig (f är en C^1-funktion) så ser vi att f'' är definierad och kontinuerlig i en omgivning av $x = 0$.

Svar: Se ovan.