LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för EMM (TATA09/TEN1)
2010-10-18 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna arean av ellipsen $(1/2)x^2 + 2y^2 \leq 1$. (3p)

2. Låt $f(x, y) = 2x + 3y - (x + 1)^3$ och $P = (-1, 1)$. Antag att vi står i punkten P. Hur snabbt växer eller avtar $f(x, y)$ i riktningen $v = (1\ -1)^T$? För vilka riktningar $v = (a\ b)^T$ (med $|v| = 1$) växer $f(x, y)$ initialt? (3p)

3. Finn och klassificera alla stationära punkter till $f(x, y) = (x^2 + xy)e^{y-x^2}$. (3p)

4. Finn alla C^1-lösningar $f(x, y)$ till ekvationen
$$2f'_x + f'_y = 3x - y.$$
Tips: gör ett linjärt variabelbyte, t ex $u = 2x + y$ och $v = x - 2y$. (3p)

5. Hitta alla tangentplan till ytan $z^2 = 18 - x^2 - y^2$ som är ortogonala mot vektorn $(1\ 0\ 1)^T$ och som innehåller punkten $(-2, 6, -4)$. (3p)

6. Hitta det största och minsta värdet för funktionen $f(x, y) = (x^2 + xy)e^{y-x^2}$ på området som begränsas av linjerna $x = -1/2$ och $y = 1 - x$ samt kurvan $y = x^2 - 1$. (3p)

7. (a) Visa att om $f(x, y)$ är differentierbar i en punkt (a, b) så är f även kontinuerlig i denna punkt. (1p)

   (b) Ge ett exempel på en partiellt deriverbar funktion som inte är kontinuerlig (och bevisa att ditt exempel har dessa egenskaper). (2p)

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2010-10-18

1. Ett byte till elliptiska koordinater, $x = \sqrt{2}r\cos\theta$ och $y = (r/\sqrt{2})\sin\theta$, ger området beskrivet av $0 < r < 1$ och $0 < \theta < 2\pi$ (gör ett linjärt byte först, t ex $\sqrt{2}u = x$ och $(v/\sqrt{2}) = y$, följt av ett byte till polära koordinater om det är svårt att se vad som händer). Jacobianen kan enkelt beräknas till $\sqrt{2}r/\sqrt{2} = r$. Vi får

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r d\theta\, dr = 2\pi \int_0^1 r\, dr = \pi.$$

Svar: π area-enheter.

Observera att vi inte direkt kan byta till polära koordinater då radien i så fall inte blir konstant. För givet θ så ges begränsningen på radien av uttrycket $\sqrt{2/(1+3\sin^2\theta)}$. Detta ger en jobbig integral att lösa. Självklart går det också att räkna ut integralen som i envariabelanalysen:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}\sqrt{2-x^2} - (-\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2})\, dx = \cdots = \pi.$$

2. Vi ser att f är C^1, så $f'_v(-1,1) = \nabla f(-1,1)\cdot v$. Vi beräknar

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2-3(x+1)^2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

och får i punkten P att

$$f'_v(-1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Om $v = (\, a\ b\,)^T$, där $|v| = 1$, så får vi $f'_v(-1,1) = 2a + 3b$. Således blir $f'_v(-1,1)$ positiv om och endast om $a > -3b/2$.

Svar: I riktningen $(\,1\ \ -1\,)^T$ avtar funktionen med hastigheten $\sqrt{2}/2$ enheter per längdenhet. Funktionen växer i alla riktningar $(\, a\ b\,)^T$ där $a > 3b/2$ ($a^2 + b^2 = 1$).

3. Direkt derivering ger:

$$\begin{aligned}
f'_x(x,y) &= (2x + y - 2x^3 - 2x^2y)e^{y-x^2} \\
f'_y(x,y) &= (x + x^2 + yx)e^{y-x^2} \\
f''_{xx}(x,y) &= 2(1 - 5x^2 - 3xy + 2x^4 + 2x^3y)e^{y-x^2} \\
f''_{xy}(x,y) &= (1 - 2x^2 + 2x + y - 2x^3 - 2x^2y)e^{y-x^2} \\
f''_{yy}(x,y) &= x(2 + x + y)e^{y-x^2}
\end{aligned}$$

Vi löser ekvationerna $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ för att hitta stationära punkter. Om $f'_y = 0$ så är endera $x = 0$ eller $y = -1 - x$. Två fall alltså. Om $x = 0$ så måste även $y = 0$. Om $y = -1 - x$, så får vi

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ eller } x = 1/2.$$

Våra punkter: $(0,0)$, $(-1,0)$ och $(1/2,-3/2)$.

I $(0,0)$ får vi $Q(h,k) = 2h^2 + 2hk = 2h(h+k)$, vilket visar att Q är indefinit och punkten $(0,0)$ är varken max- eller minpunkt.

I $(-1,0)$ får vi $Q(h,k) = (-4h^2 - 2hk - k^2)e^{-1} = -4e^{-1}((h + k/4)^2 + 3k^2/16)$ så Q är negativt definit. Punkten $(-1,0)$ är alltså en maxpunkt.

I $(1/2,-3/2)$: $Q(h,k) = (e^{-7/4}/2)(7h^2 + 2hk + k^2) = 7(e^{-7/4}/2)((h + k/7)^2 + 6k^2/49)$, så positivt definit. Punkten $(-1,0)$ är alltså en minpunkt.

Svar: Tre stationära punkter: $(0,0)$ som är indefinit, $(-1,0)$ som är en maxpunkt och $(1/2,-3/2)$ som är en minpunkt.

4. Kedjeregeln ger att $f'_x = f'_u u'_x + f'_v + v'_x = 2f'_u + f'_v$ och $f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = f'_u - 2f'_v$. Det visar sig också att vi kan skriva $3x - y = u + v$ (invertera koordinatbytet). Vår ekvation reduceras till

$$2(2f'_u + f'v) + (f'_u - 2f'_v) = 5f'_u = u + v.$$

Integrering medför att $f(u, v) = (1/5)(u^2/2 + uv) + g(v)$, där $g \in C^1$ är godtycklig. Vi byter tillbaks till de gamla koordinaterna, och får svaret nedan.

Svar: $(4x^2 - xy - 3y^2/2)/5 + g(x - 2y)$, där $g \in C^1$ är en godtycklig funktion.

5. Ytan i fråga är sfären $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 18$. I en punkt (a, b, c) på ytan ges gradienten av $\nabla F(a, b, c) = 2(a\ b\ c)^T$. Ett tangentplan i punkten (a, b, c) måste ha en normal som är parallell med $\nabla F(a, b, c)$, så om planen vi söker har normalvektorer som även är parallella med $(1\ 0\ 1)^T$ så måste

$$2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

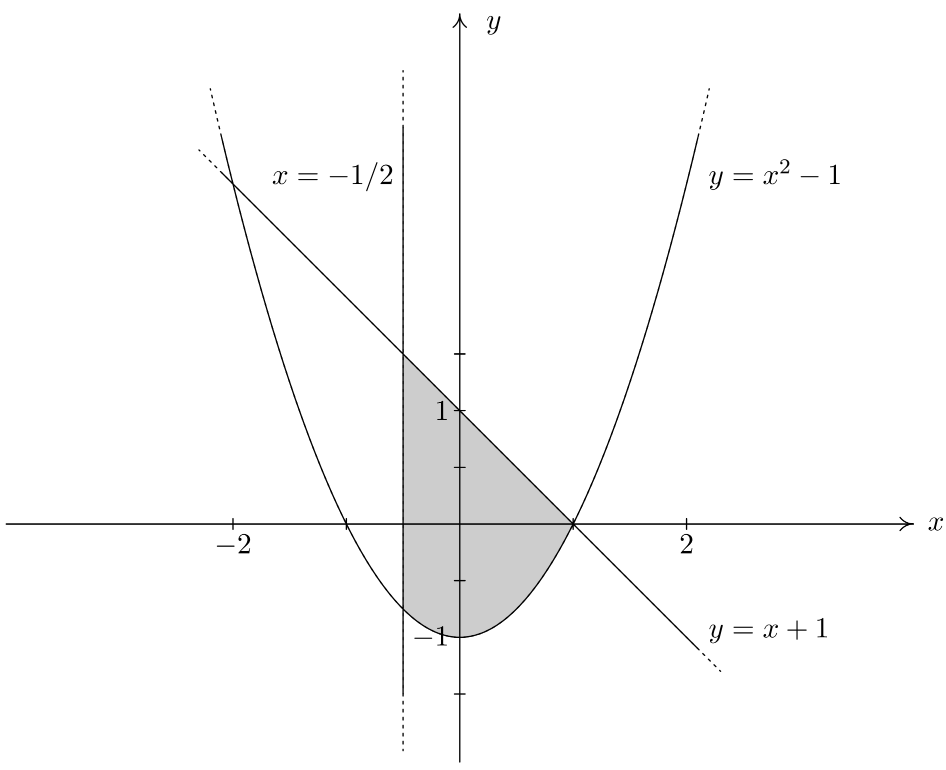
för något $\lambda \in \mathbf{R}$. Om vi löser systemet får vi $a = \lambda/2$, $b = 0$ och $c = \lambda/2$. Då även $F(a, b, c) = 18$ finner vi att $\lambda = \pm 6$. Vi får alltså två möjliga tangeringspunkter: $p = (3, 0, 3)$ och $q = (-3, 0, -3)$. Planen blir

$$T_p : \quad x + z = 6 \qquad \text{och} \qquad T_q : \quad x + z = -6.$$

Endast T_q innehåller punkten $(-2, 6, -4)$.

Svar: Det enda planet som uppfyller villkoren är $x + z = -6$.

6. Eftersom området är kompakt och funktionen är kontinuerlig så vet vi att maximum och minimum för funktionen existerar inom området. Vi känner även igen funktionen från uppgift 3, så vi vet att $(0, 0)$, $(-1, 0)$ och $(1/2, -3/2)$ är de enda stationära punkterna. Återstår att se vilka som ligger inom området vi studerar. Vi skissar upp området i figuren nedan.



Figur 1: Området i uppgift 6. Vi söker max och min på det skuggade området.

Randen till området består av tre segment:

(a) Linjen $x = -1/2$.
Låt $\varphi(y) = f(-1/2, y) = \frac{1}{4}(1-2y)e^{y-1/4}$. Vilka y är intressanta? Vi undersöker när linjen $x = -1/2$ skär $y = x^2 - 1$ respektive $y = 1 - x$, och får fram att $-3/4 < y < 3/2$. Vidare så är $\varphi'(y) = -\frac{1}{4}(1+2y)e^{y-1/4}$, så endast $y = -1/2$ är av intresse.

(b) Linjen $y = 1 - x$.
Låt $\varphi(x) = f(x, 1-x) = xe^{1-x-x^2}$. För vilka x? Linjen $y = 1 - x$ skär kurvan $y = x^2 - 1$ i punkterna $x = 1$ och $x = -2$. Men linjen $x = -1/2$ begränsar också, så vi har $-1/2 < x < 1$. Derivering ger $\varphi'(x) = (1 - x - 2x^2)e^{1-x-x^2}$, och om vi löser $\varphi'(x) = 0$ finner vi att $x = 1/2$ och $x = -1$ är de enda lösningarna. Endast $x = 1/2$ är intressant.

(c) Kurvan $y = x^2 - 1$.
Låt $\varphi(x) = f(x, x^2-1) = (x^2 + x^3 - x)e^{-1}$, $-1/2 < x < 1$. Vi deriverar och får uttrycket $\varphi'(x) = (3x^2 + 2x - 1)e^{-1}$. Nollställen finner vi i $x = 1/3$ och i $x = -1$. Endast $x = 1/3$ ligger inom området.

Vi ser att endast $(0, 0)$ ifrån de stationära punkterna ligger inom området, och eftersom denna punkt visade sig vara indefinit så kommer den ej att ge ett maximum eller minimun.

Hörnen då? Ja, dom finns. Fler intressanta punkter: $(1, 0)$, $(-1/2, -3/4)$ samt $(-1/2, 3/2)$. Vi sammanställer:

$$
\begin{aligned}
f(-1/2,-1/2) &= \frac{1}{2}e^{-3/4}, & f(1/2,1/2) &= \frac{1}{2}e^{1/4},\\
f(1/3,-8/9) &= -\frac{5}{27}e^{-1}, & f(1,0) &= e^{-1},\\
f(-1/2,-3/4) &= \frac{5}{8}e^{-1}, & f(-1/2,3/2) &= -\frac{1}{2}e^{5/4}.
\end{aligned}
$$

Möjligen behöver man fundera över om $(1/2)e^{1/4} > e^{-1}$, men detta inses ganska enkelt genom att multiplicera båda sidor med e^1 och sedan uppskatta med $(1/2)e^{1/4+1} > (1/2)e^1 > (1/2)2 = 1$.

Svar: Maximum är $(1/2)e^{1/4}$ och minimum är $-(1/2)e^{5/4}$.

Observera att frågan är tvetydigt ställd. Man skulle kunna tänka sig att det lika gärna är området till vänster om $x = -1/2$ i figur 1 som efterfrågas. Eller kanske till och med hela området mellan $x^2 - 1$ och $1 - x$ (d v s båda bitarna).

7. (a) Om f är differentierbar i (a, b), så gäller att

$$f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) = Ah_1 + Bh_2 + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

då $h_1^2 + h_2^2 \to 0$, där A och B är reella konstanter. Det följer direkt från detta att

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

(b) Till exempel kan vi välja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0),\\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

som inte är kontinuerlig i origo men partiellt deriverbar överallt. Att funktionen inte är kontinuerlig kan ses genom att låta $y = kx$: $f(x, kx) = 2kx^2/(x^2 + k^2x^2) = 2k/(1 + k^2)$, vilket beror på k. Vi visar att $f'_x(0, 0)$ existerar:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

På samma sätt ser vi att $f'_y(0, 0) = 0$.