LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för KB/TB (TATA09/TEN1) 2010-12-20 kl 14–19

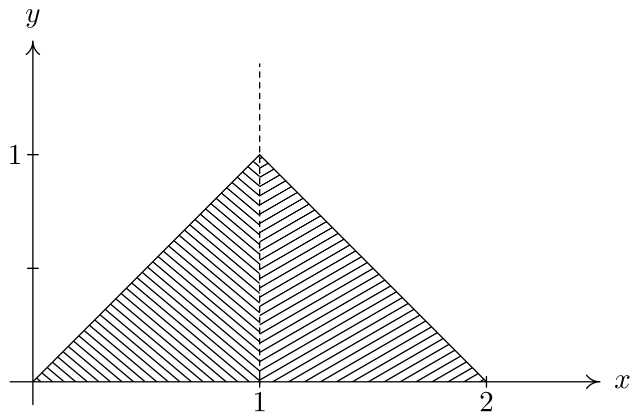
Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy$ om D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(2,0)$.
2. Låt $z(x,y)$ vara en funktion av två variabler.
   (a) Finn alla C^1-lösningar till ekvationen $z'_x = 0$.
   (b) Finn alla C^1-lösningar till ekvationen $z'_x = yz$.
3. Låt $f(x,y) = \exp\big((x-1)^2y + y^2 - 4y + 1\big)$. Bestäm största och minsta värde på den axelparallella rektangeln med hörn i $(-2,-1)$ och $(2,1)$.
4. Finn alla tangentlinjer till ellipsen $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ som går genom punkten $(1,0)$.
5. Låt D vara en enkel-kon (med $z \geq 0$) med spetsen i origo, radien 1 och höjden 3. Beräkna $\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$.
6. Hitta alla C^2-lösningar till $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = x + y$.
   Tips: Byt koordinater, $x = u + v$ och $y = u - v$.
7. (a) Låt funktionen $f(x,y)$ vara definierad enligt
   $$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2/(x+y), & x \neq y \text{ och } x \neq -y, \\ 1, & x = y, \\ 0, & x = -y \neq 0. \end{cases}$$
   Beräkna riktningsderivatan $f'_v(0,0)$ i riktningen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.
   (b) Visa att $f'_v(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot v$ om f är C^1 och v är en vektor med längd ett.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2010-12-20

1. Området kan beskådas i figuren nedan.



Figur 1: Integrationsområdet i uppgift 1.

Vi delar upp integralen i två delar kring linjen $x = 1$:

$$\iint_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x \cos(x+y)\,dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \cos(x+y)\,dydx$$
$$= \cdots = \frac{1}{2}\big(-1 + \cos 2 + 2\sin 2\big).$$

Svar: $\frac{1}{2}\big(-1 + \cos 2 + 2\sin 2\big)$.

2. (a) För att $z'_x(x,y) = 0$ så måste $z(x,y)$ vara konstant med avseende på x. Alltså måste z uppfylla $z(x,y) = g(y)$, där g är en godtycklig kontinuerligt deriverbar funktion.

   (b) Om $z'_x(x,y) = yz(x,y)$ så använder vi samma ”trick” som i envariabelanalysen. Vi skriver om som derivatan av en produkt:

$$0 = e^{-xy}\big(z'_x(x,y) - z(x,y)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(e^{-xy}z(x,y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-xy}z(x,y) = g(y),$$

   där g är en godtycklig kontinuerligt deriverbar funktion. Faktorn e^{-xy} är den så kallade integrerande faktorn. Sålunda erhåller vi svaret $z(x,y) = g(y)e^{xy}$.

Svar: (a) $z(x,y) = g(y)$ (b) $z(x,y) = g(y)e^{xy}$.

3. Låt $p(x,y) = (x-1)^2y + y^2 - 4y + 1$. Då kan vi skriva $f(x,y) = \exp(p(x,y))$. Direkt derivering ger:

$$f'_x(x,y) = 2(x-1)y\exp(p(x,y))$$
$$f'_y(x,y) = ((x-1)^2 + 2y - 4)\exp(p(x,y))$$

Vi löser ekvationerna $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ för att hitta stationära punkter. Om $f'_x = 0$ så är endera $x = 1$ eller $y = 0$. Två fall alltså.

- Om $x = 1$ så måste $y = 2$.
- Om $y = 0$ så måste $(x-1)^2 - 4 = 0$, vilket ger att $x = 3$ eller $x = -1$.

Våra punkter: $(-1,0)$, $(3,0)$ och $(1,2)$. Endast $(-1,0)$ är inom området vi betraktar.

Randpunkter:

- Låt $x = 2$. Vi har $g(y) = f(2, y) = \exp(y^2 - 3y + 1)$ för $-1 \leq y \leq 1$. Vi deriverar och söker nollställen för derivatan:

$$g'(y) = (2y - 3)\exp(y^2 - 3y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3/2.$$

  Punkten $(2, 3/2)$ är utanför området.

- Låt $x = -2$. Vi har

$$\begin{aligned} g(y) &= f(-2, y) = \exp(y^2 + 5y + 1), \quad -1 \leq y \leq 1, \\ g'(y) &= (2y + 5)\exp(y^2 + 5y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -5/2. \end{aligned}$$

  Punkten $(-2, -5/2)$ är utanför området.

- Låt $y = 1$. Vi har

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, 1) = \exp((x-1)^2 - 2), \quad -2 \leq x \leq 2, \\ g'(x) &= (2x - 2)\exp((x-1)^2 - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

  Punkten $(1, 1)$ är av intresse.

- Låt $y = -1$. Vi har

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, -1) = \exp(-(x-1)^2 + 6), \quad -1 \leq y \leq 1, \\ g'(x) &= (2 - 2x)\exp(-(x-1)^2 + 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

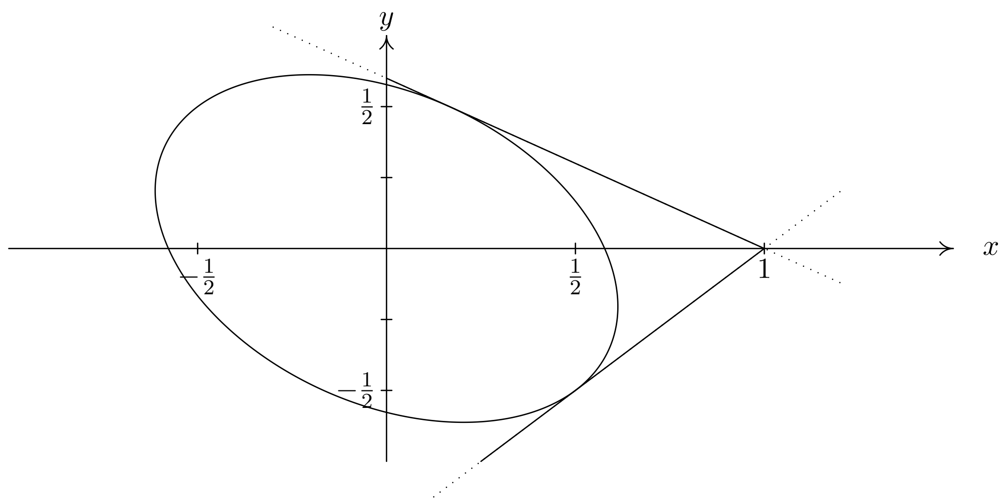
  Punkten $(1, -1)$ är av intresse.

Vi måste även undersöka hörnen. Vi sammanfattar intressanta funktionsvärden:

$$\begin{array}{lll} f(1,1) = e^{-2} & f(-2,1) = e^{7} & f(1,-1) = e^{6} \\ f(-2,-1) = e^{-3} & f(-1,0) = e & f(2,1) = e^{-1} \\ f(2,-1) = e^{5} & & \end{array}$$

Svar: Största värdet blir e^7 och minsta värdet blir e^{-3}.

4. I figuren nedan ser vi hur nivåkurvan ser ut och vilka tangenter vi är ute efter.



Figur 2: De två tangenterna till ellipsen som skär punkten $(1, 0)$.

Vi söker alltså punkterna på nivåkurvan $F(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ där linjerna tangerar. Kalla en sådan punkt för (a, b). Vi måste ha $3a^2 + 2ab + 3b^2 = 1$ då tangeringspunkten måste ligga på nivåkurvan. Vidare så måste normalen till nivåkurvan vara ortogonal mot vektorn mellan punkterna (a, b) och $(1, 0)$. Det vill säga,

$$0 = \nabla F(a,b) \cdot \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 6a^2 + 2ab - 6a - 2b + 6b^2 + 2ab.$$

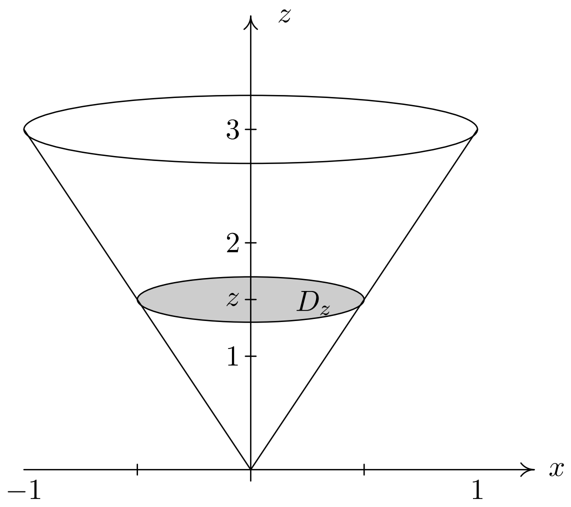
Om vi utnyttjar att $F(a, b) = 1$ så erhåller vi

$$2(3a^2 + 2ab + 3b^2) - 2(3a + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + b = 1.$$

Vi löser sedan $F(a, 1-3a) = 1$ och finner att $24a^2 - 16a + 2 = 0$, vilket ger lösningarna $a = 1/2$ och $a = 1/6$. Våra tangeringspunkter blir alltså $(1/2, -1/2)$ och $(1/6, 1/2)$. Från detta följer att tangenternas ekvationer blir $y = x - 1$ och $y = -(3/5)(x - 1)$.

Svar: Tangenterna ges av ekvationerna $y = x - 1$ och $y = -3(x - 1)/5$.

5. Området ges av en kon som är symmetrisk kring z-axeln. En figur kan beskådas nedan.



Figur 3: Integrationsområdet i uppgift 5.

Vi väljer att ha z-integralen ytterst och integrera över nivåytor i konen. Nivåytorna D_z är helt enkelt diskar som vi höjden z har radien $z/3$ (konen har höjden 3 och radien 1, så lutningen måste bli $1/3$). Radien är alltså en tredjedel av höjden överallt i konen. Vi erhåller

$$\begin{aligned}\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz &= \int_0^3 z \left(\iint_{D_z} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \right) dz \\ &= \int_0^3 z \int_0^{2\pi} \int_0^{z/3} r^2\,drd\theta\,dz \\ &= \frac{2\pi}{3^4} \int_0^3 z^4 dz = \frac{6\pi}{5}.\end{aligned}$$

Svar: $6\pi/5$.

6. Kedjeregeln ger att $z'_x = z'_u u'_x + z'_v + v'_x = (1/2)(z'_u + z'_v)$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = (1/2)(z'_u - z'_v)$. Vi utnyttjar kedjeregeln igen och räknar fram att

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{1}{4}\left(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}\right), \\ z''_{yy} &= \frac{1}{4}\left(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}\right), \\ z''_{xy} &= \frac{1}{4}\left(z''_{uu} - z''_{vv}\right). \end{aligned}$$

Ekvationen vi försöker lösa får då utseendet

$$\frac{1}{4}\big(4z''_{uu}\big) = x + y = 2u,$$

vilket leder till att

$$z'_u = u^2 + g(v) \quad \Leftrightarrow \quad z(u,v) = \frac{u^3}{3} + ug(v) + h(v),$$

där $g, h \in C^2$ är godtyckliga funktioner. Vi byter tillbaka till de ursprungliga koordinaterna och erhåller svaret nedan.

Svar: $z(x, y) = (x + y)^3/24 + (x + y)g(x - y) + h(x - y)$, där $g, h \in C^1$ är godtyckliga.

Observera att konstanterna (1/2 i t ex $u = (1/2)(x + y)$) är ”inbakade” i de godtyckliga funktionerna.

7. (a) Enligt definitionen av riktningsderivata har vi

$$f'_v(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + tv_1, 0 + tv_2) - f(0,0)}{t}.$$

Då $v = (1,1)/\sqrt{2}$ så är $v_1 = v_2$, och därför blir $f(tv_1, tv_2) = 1$ för alla t. Vidare så är $f(0,0) = 1$ enligt definition. Alltså,

$$f'_v(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0.$$

Observera att f ej är partiellt deriverbar i origo (varför?), vilket innebär att gradienten inte existerar. Det går alltså inte att använda $\nabla f \cdot v$.

(b) Om f är differentierbar i (a, b), så gäller att

$$f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a,b) = Atv_1 + Btv_2 + o\big(\sqrt{(tv_1)^2 + (tv_2)^2}\big)$$

då $t \to 0$, där $A = f'_x(a, b)$ och $B = f'_y(a, b)$. Det följer direkt från detta att

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a,b)}{t} &= \lim_{t\to 0}\left(f'_x(a,b)v_1 + f'_y(a,b)v_2 + \frac{o(t)}{t}\right) \\ &= \nabla f(a,b)\cdot v,\end{aligned}$$

ty $o(t)/t \to 0$ då $t \to 0$.