LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för EMM och KB/TB (TATA09/TEN1) 2011-01-07 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Beräkna volymen av det begränsade området mellan paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 4$.

2. Beräkna följande gränsvärden om de existerar. Motivera annars varför gränsvärde saknas.

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(b)} \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} \frac{\sin x^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(c)} \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y-1}{\log(x+y)}$$

3. Hitta alla tangentplan till nivåytan $x^2+y^2+z = 3$ som innehåller punkterna $(1,0,5)$ och $(2,0,2)$.

4. Hitta maximum och minimum för $f(x,y) = \exp(y(x^2-1))$ på det begränsade området mellan eller på kurvorna $x = y^2$ och $x = 4$.

5. Visa att avbildningen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ som definieras av

$$(u,\ v) = F\,(x,\ y) = (e^x \cos y,\ e^x \sin y)$$

har en C^1-invers kring punkten $(u,v) = (0,1)$. Beräkna speciellt $x'_u(0,1)$, $x'_v(0,1)$, $y'_u(0,1)$ samt $y'_v(0,1)$. Finns det en global (som gäller för hela $\mathbf{R}^2$) C^1-invers? Motivera ditt svar.
Tips: $F(0,\pi/2) = (0,1)$.

6. Finn alla C^2-lösningar $z(x,y)$ till ekvationen

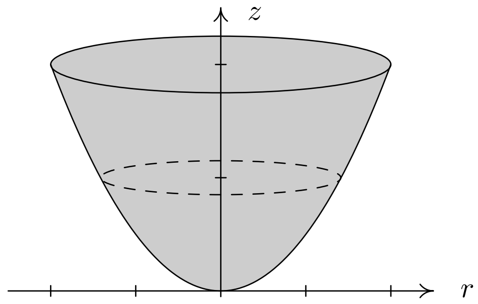
$$z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} + \frac{1}{x+y}\left(z'_x + z'_y\right) = -\frac{\sin(\sqrt{x+y})}{x+y}$$

i området där $x+y > 0$ och $y - x > 0$. *Tips: byt koordinater till* $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt{x-y}$ *och börja med att betrakta* z''_{uu}.

7. Beräkna $\iiint_D x\,dxdydz$ där D ges av $0 \le x+y+z \le 3$ och $2x^2+y^2+2xy-2xz+z^2 \le 4$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2011-01-07

1. Området kan beskådas i figuren nedan.



Figur 1: Integrationsområdet i uppgift 1.

Låt V vara området mellan ytorna, och $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ vara projektionen i xy-planet. Genom iteration av volymsintegralen erhåller vi

$$\iiint_V dxdydz = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{4} dz\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) r\,d\theta dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr = 8\pi,$$

där vi bytt till polära koordinater i dubbelintegralen.

Svar: Volymen är 8π volymenheter.

2. (a) Låt $f(x,y) = \sin(x^2)/(x^2+y^2)$. Om vi låter $y = 0$ erhåller vi $f(x,0) = \sin(x^2)/x^2$ som går mot ett då $x \to 0$. Om vi istället sätter $x = 0$ så får vi $f(0,y) = 0$, vilket går mot noll då $y \to 0$. Gränsvärde saknas alltså.

   (b) Vi har

$$\left|\frac{\sin(x^2)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2} \to 0$$

   då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$. Således är gränsvärdet lika med noll.

   (c) Vi gör ett variabelbyte, $(t,y) = (x-1,y)$, och beräknar att

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y-1}{\ln(x+y)} = \lim_{(t,y)\to(0,0)} \frac{t+y}{\ln(t+y+1)} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1$$

   ty $u = t + y \to 0$ då $(t,y) \to (0,0)$.

Svar: (a) Gränsvärde saknas. (b) 0. (c) 1.

3. Normalen i punkten (a,b,c) till nivåytan $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z = 3$ ges av $\nabla F(a,b,c)$. Ett tangentplan till nivåytan som innehåller punkterna i uppgiften måste uppfylla följande ekvationer:

$$\begin{cases} 0 = \nabla F(a,b,c) \cdot (\,a-1, b, c-5\,), \\ 0 = \nabla F(a,b,c) \cdot (\,a-2, b, c-2\,), \\ 3 = a^2 + b^2 + c. \end{cases}$$

De två första ekvationerna säger att gradienten måste vara ortogonal mot vektorerna mellan tangeringspunkten och de punkterna som är givna. Den tredje betyder att (a,b,c) faktiskt ligger på ytan. Vi skriver om lite och erhåller

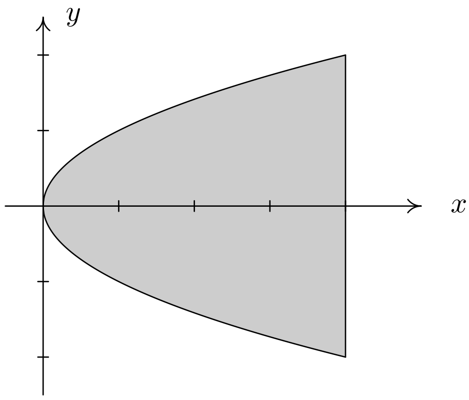
$$\begin{cases} a^2 - 2a + b^2 = 2, \\ a^2 - 4a + b^2 = -1, \\ \quad a^2 + b^2 + c = 3. \end{cases}$$

Ekvation 1 minus ekvation 2 ger att $a = 3/2$, vilket leder till att $b^2 = 11/4$. Vi finner alltså tangeringspunkterna $P = (3/2, \pm\sqrt{11}/2, -2)$, och planens ekvationer ges av

$$\nabla F(3/2, \pm\sqrt{11}/2, -2) \cdot [x-2, y, z-2] = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x \pm \sqrt{11}y + z = 8.$$

Svar: Två plan existerar: $3x \pm \sqrt{11}y + z = 8$.

4. Området vi betraktar finns uppritat i Figur 2.



Figur 2: Området i uppgift 4.

Området är kompakt och f är kontinuerlig, så maximum och minimum finns.

Vi börjar med att leta efter inre punkter som är stationära. Vi ser att

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 - 1 \end{pmatrix} \exp(y(x^2-1)) = 0$$

endast har lösningarna $(x,y) = (\pm 1, 0)$. Det är bara $(1,0)$ som ligger i området, och $f(1,0) = 1$.

På randkurvan $x = y^2$ undersöker vi $g(y) = f(y^2, y) = \exp(y^5 - y)$ för $-2 < y < 2$. Vi finner att $g'(y) = (5y^4 - 1)\exp(y^5 - y) = 0$ omm $y = \pm 5^{-1/4}$ (reella lösningar). Vi kan räkna ut att $g(\pm 5^{-1/4}) = \exp(\mp 4 \cdot 5^{-5/4})$. På randkurvan $x = 4$ har vi $h(y) = f(4, y) = \exp(15y)$ för $-2 < y < 2$, så $h'(y) \neq 0$. Vi måste också ta med hörnen: $f(4, \pm 2) = \exp(\pm 30)$.

Svar: Maximum är $\exp(30)$ och minimum är $\exp(-30)$.

Anmärkning: att maximum och minimum måste inträffa precis i hörnen kan man enkelt se om man tittar lite noggrannare på f.

5. Avbildningen som ges av F är C^1. Låt $u(x,y) = e^x \cos y$ och $v(x,y) = e^x \sin y$. Funktionalmatrisen ges då av

$$F'(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} u'_x(x,y) & u'_y(x,y) \\ v'_x(x,y) & v'_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar funktionaldeterminanten $J(x,y)$ och finner att $J(x,y) = \exp(2x)$, så $J \neq 0$ speciellt för $(x,y) = (0, \pi/2)$. Således existerar lokalt en C^1 invers till F kring punkten $(u,v) = (0,1)$

(ty $F(0,\pi/2)=(0,1)$) enligt inversa funktionssatsen. Derivatan för den inversa avbildningen kan fås ur sambandet

$$(F^{-1})'(0,1)=\begin{bmatrix} x'_u(0,1) & x'_v(0,1) \\ y'_u(0,1) & y'_v(0,1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^0\cos\frac{\pi}{2} & -e^0\sin\frac{\pi}{2} \\ e^0\sin\frac{\pi}{2} & e^0\cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har alltså $x'_u=0$, $x'_v=1$, $y'_u=-1$ samt $y'_v=0$.

Eftersom, e.g., $F(0,\pi/2+2\pi)=F(0,\pi/2)=(0,1)$, är F ej injektiv, så en global invers kan inte existera. Avbildningen F har alltså med andra ord ingen global invers (men kring varje punkt går det bra att hitta en lokal invers). Hur ser uttrycken för den inversa avbildningen ut? Försök lösa ut x och y som funktioner av u och v!

Svar: Se ovan. $x'_u=0$, $x'_v=1$, $y'_u=-1$ samt $y'_v=0$. Se ovan.

6. Vi ser att $x=(u^2+v^2)/2$ och att $v=(u^2-v^2)/2$. Kedjeregeln ger att

$$z'_u=z'_x x'_u+z'_y y'_u=u(z'_x+z'_y).$$

Vi deriverar igen, och finner att

$$\begin{aligned} z''_{uu}&=\frac{\partial}{\partial u}\big(u(z'_x+z'_y)\big)=z'_x+z'_y+u\big(z''_{xx}u+2z''_{yy}+z''_{yy}\big) \\ &=z'_x+z'_y+(x+y)\big(z''_{xx}u+2z''_{yy}+z''_{yy}\big). \end{aligned}$$

Alltså kan vi skriva vänsterledet i den givna ekvation som $z''_{uu}/(x+y)$. Ekvationen är alltså ekvivalent med

$$z''_{uu}=-\sin u \qquad \Leftrightarrow \qquad z(u,v)=\sin u+u\widetilde{h}(v)+\widetilde{g}(v),$$

där $\widetilde{h},\widetilde{v}\in C^2$ är godtyckliga funktioner. Vi byter tillbaka till de ursprungliga koordinaterna och erhåller svaret nedan.

Svar: $z(x,y)=\sin\sqrt{x+y}+\sqrt{x+y}\,h(x-y)+g(x-y)$, där $g,h\in C^2$ är godtyckliga.

7. För att kunna beräkna integralen behöver vi reda ut vad det är för slags område. Vi börjar med att kvadratkomplettera termerna:

$$2x^2+y^2+2xy-2xz+z^2=\big(x^2+2xy+y^2\big)+\big(x^2-2xz+z^2\big)=(x+y)^2+(x-z)^2.$$

Vi gör ett variabelbyte i trippelintegralen: $u=x+y$, $v=x-z$ och $w=x+y+z$. En enkel kontroll visar att detta byte är inverterbart på hela $\mathbf{R}^3$ (kontrollera determinanten för ekvationssystemet). Området ges då av olikheterna

$$\begin{cases} 0\le w\le 3, \\ u^2+v^2\le 4. \end{cases}$$

Detta är en cylinder med w som symmetriaxel, höjden 3, botten i origo, samt radien 2. Funktionaldeterminanten för bytet kan beräknas till

$$J_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Vi byter även till cylindriska koordinater (alternativt iterera integralen längs w axeln och byt till polära koordinater i dubbelintegralen): $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ och $w=w$. Funktionaldeterminanten blir

$$J_2=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=r$$

och gränserna ges av $0 < r \leq 2$ samt $0 < \theta \leq 2\pi$. Integranden kan skrivas

$$x = w + v - u = w + r(\sin\theta - \cos\theta),$$

så vi kan nu beräkna integralen:

$$\begin{aligned}
\iiint_D x\,dxdydz &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big(w + r(\sin\theta - \cos\theta)\big)|J_1 J_2|\,d\theta dr dw \\
&= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big(wr + r^2(\sin\theta - \cos\theta)\big)\,d\theta dr dw \\
&= 2\pi \int_0^3 \int_0^2 wr\,drdw = 4\pi \int_0^3 w\,dw = 18\pi.
\end{aligned}$$

Integralerna över cos och sin ger bidraget noll eftersom vi integrerar över en hel period.

Svar: 18π.