LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för EMM och KB/TB (TATA09/TEN1) 2011-04-26 kl 08–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Låt D vara triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$. Beräkna integralen
$$\iint_D e^{-x^2/2}\,dxdy.$$

2. (a) Undersök gränsvärdet av $x^2y/(x^2+x^3+y^2)$ då $(x,y)\to(0,0)$.
   (b) Låt $f\in C^2$. Antag att punkten (a,b,c) uppfyller att $\nabla f(a,b,c)=0$ och att
$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(a,b,c) & f''_{xy}(a,b,c) & f''_{xz}(a,b,c) \\ f''_{yx}(a,b,c) & f''_{yy}(a,b,c) & f''_{yz}(a,b,c) \\ f''_{zx}(a,b,c) & f''_{zy}(a,b,c) & f''_{zz}(a,b,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
   Vad för slags extrempunkt är (a,b,c)?

3. Hitta det största och minsta värdet för funktionen $f(x,y)=\exp(x(x-2)+y^2)$ på halvdisken $\{\,(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4\,\}$.

4. Finn samtliga tangentplan till ytan $2x^2+3y^2+z^2=15$ som innehåller linjen
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad t\in\mathbf{R}.$$

5. (a) Låt $f\in C^2$. Uttryck $f''_{xy}(x,y)$ i de nya koordinaterna $u=x^2+y^2$ och $v=x^2-y^2$.
   (b) Ange ett tillräckligt villkor för att $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ för alla x och y.

6. Låt V vara det begränsade området i $\mathbf{R}^3$ som ges av snittet mellan mängderna $z^2\geq 3(x^2+y^2)$ och $z^2\leq 4-x^2-y^2$. Beräkna
$$\iiint_V (z^3+2)\,dxdydz.$$

7. Visa att $x^4+2x^2y^2+y(y^3+\cos x)=2$ definierar en deriverbar funktion $y=f(x)$ nära punkten $(0,1)$. Visa sedan att $x=0$ är en lokal extrempunkt till $f(x)$ och avgör om det rör sig om ett minimum eller maximum.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2011-04-26

1. Vi ställer upp integralen enligt följande:

$$\iint_D e^{-x^2/2}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2/2}\,dydx = \int_0^1 xe^{-x^2/2}\,dx = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^1 = 1 - e^{-1/2}.$$

   Observera att vi inte kan börja med x-integralen innerst!

   Svar: $1 - e^{-1/2}$.

2. (a) Vi byter till polära koordinter, och finner att

$$\frac{x^2 y}{x^2 + x^3 + y^2} = \frac{r^3 \cos^2\theta \sin\theta}{r^2(1 + r\cos\theta)} = r\frac{\cos^2\theta\sin\theta}{1 + r\cos\theta} \to 0, \text{ då } r \to 0,$$

   eftersom kvoten i högerledet är begränsat av, e.g., 2, om $r \leq 1/2$.

   (b) Den kvadratiska formen $Q(h, k, l)$ blir

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= 4h^2 + 2(-2)hl + 4k^2 + 4l^2 \\ &= 4(h - l/2)^2 - l^2 + 4k^2 + 4l^2 \\ &= 4(h - l/2)^2 + 4k^2 + 3l^2 \geq 0 \end{aligned}$$

   med likhet omm $h = k = l = 0$. Sålunda är Q positivt definit och punkten i fråga ett minimum. Alternativt kan vi beräkna egenvärderna till matrisen (vilket ger $2, 4, 6$), som samtliga är positiva, så matrisen är mycket riktigt positivt definit.

   Svar: (a) gränsvärdet blir 0. (b) Punkten är ett (lokalt) minimum för f.

3. Eftersom funktionen är kontinuerlig och området är kompakt så vet vi att största och minsta värde existerar. Återstår att finna dessa. Direkt derivering ger:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2(x-1)\exp(x^2 - 2x + y^2) \\ f'_y(x,y) &= 2y\exp(x^2 - 2x + y^2) \end{aligned}$$

   Vi löser ekvationerna $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ för att hitta stationära punkter. Den enda punkten som uppfyller båda ekvationerna är $(x, y) = (1, 0)$, vilket är en punkt inom området.

   Randpunkter:

   - Låt $x = 0$. Vi har $g(y) = f(0, y) = \exp(y^2)$ för $-2 \leq y \leq 2$. Det är uppenbart att $g(y)$ har maximum för $y = \pm 2$ och minimum när $y = 0$.
   - Låt $x = 2\cos\theta$ och $y = 2\sin\theta$ för $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Vi har $g(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = \exp(4 - 2\cos\theta)$. Eftersom $4 - 2\cos\theta$ har maximum för $\theta = \pm\pi/2$ och minimum för $\theta = 0$, har $g(\theta)$ sitt max och min i samma punkter.

   Vi har redan undersökt hörnen ovan. Vi sammanfattar intressanta funktionsvärden:

$$f(1,0) = e^{-1} \quad f(0,\pm 2) = e^4 \quad f(0,0) = 1$$

   Svar: Största värdet blir e^4 och minsta värdet blir e^{-1}.

4. Låt $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$. Ytan vi söker tangentplan till är alltså nivåytan $F(x, y, z) = 15$. Låt (a, b, c) vara en punkt på ytan, dvs $F(a, b, c) = 15$. Tangentplanet i denna punkt har en normal som är parallell med $\nabla F(a, b, c)$. För att hela linjen skall ligga i planet krävs två saker:

   (i) Linjens riktningsvektor måste vara ortogonal mot planets normal.

(ii) Vektorn mellan en punkt på linjen och tangeringspunkten (a, b, c) måste också vara ortogonal mot normalen.

Gradienten blir $\nabla F(a, b, c) = 2\,[\,2a,\ 3b,\ c\,]^T$. Vi får därmed ekvationerna

$$\begin{aligned}
&F(a, b, c) = 15, \\
&\nabla F(a, b, c) \cdot [\,0,\ 2,\ 3\,]^T = 0, \\
&\nabla F(a, b, c) \cdot \big((a, b, c) - (0, -1, 6)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Från den andra erhåller vi att $c = -2b$. Den tredje implicerar att

$$4a^2 + 6b(b + 1) + 2c(c - 6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2F(a, b, c) + 6b - 12c = 0,$$

vilket ger $15 = 6c - 3b$. Vi får alltså $c = 2$ och $b = -1$. Vi sätter in detta i den första ekvationen ovan och ser att $2a^2 = 8$, eller $a = \pm 2$.

Ekvationerna för de plan vi söker kan då skrivas $\pm 4x - 3y + 2z = D$, där konstanten D kan bestämmas genom att sätta in, t ex, punkten $(0, -1, 6)$ (som ligger i planet): $D = 0 + 3 + 12 = 15$.

Svar: Tangentplanen ges av ekvationerna $\pm 4x - 3y + 2z = 15$.

5. (a) Vi använder kedjereglerna $f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$:

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_u 2x + f'_v 2x\right) = 2x\left(f''_{uu} 2y + f''_{uv}(-2y) + f''_{vu} 2y + f''_{vv}(-2y)\right) = 4xy\left(f''_{uu} - f''_{vv}\right)$$

där vi använt produktregeln och $z = f'_u$ respektive $z = f'_v$. Vi måste ersätta faktorn xy med u och v, så vi löser ut och finner att $x^2 = (u + v)/2$ och $y^2 = (u - v)/2$, så

$$f''_{xy} = 2\sqrt{u^2 - v^2}\left(f''_{uu} - f''_{vv}\right).$$

(b) Det ”naturliga” kravet är att funktionen f tillhör klassen C^2. Andra tillräckliga krav skulle till exempel kunna vara att f är ett polynom, eller varför inte att f är lika med 0.

Svar: (a) $f''_{xy} = 2\sqrt{u^2 - v^2}\,(f''_{uu} - f''_{vv})$. (b) se ovan.

6. Området $z^2 \geq 3(x^2 + y^2)$ är en dubbelkon, och $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ är ett klot. Integrationsområdet är alltså en dubbel ”glasstrut.” Om vi tittar på konen ser vi att om $y = 0$ får vi $z = \sqrt{3}|x|$ som avgränsning i xz-planet. Lutningen på konen är alltså $\sqrt{3}$. Vi byter till rymdpolära koordinater och finner att området V kan beskrivas av

$$0 \leq r \leq 2, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 - \arctan(\sqrt{3}) = \pi/6, \\ \pi/2 + \arctan(\sqrt{3}) = 5\pi/6 \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

där θ är vinkeln mot z-axeln. Eftersom området är symmetrisk med avseende på xy-planet så kommer integralen över z^3 att ge noll som slutresultat. Vi erhåller alltså, efter att ha nyttjat samma symmetri en gång till,

$$\iiint_V (z^3 + 2)\,dxdydz = 2\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} 2r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi dr = \frac{64}{3}\pi(1 - \sqrt{3}/2) = \frac{32\pi(2 - \sqrt{3})}{3}.$$

7. Låt $F(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + y\cos x$. Klart att $F \in C^1$, och vi kan enkelt räkna ut att

$$\begin{aligned}
F'_x(x, y) &= 4x^3 + 4xy^2 - y\sin x, \\
F'_y(x, y) &= 4x^2y + 4y^3 + \cos x.
\end{aligned}$$

I punkten $(0,1)$ är $F'_x(0,1) = 0$ och $F'_y(0,1) = 5$. Implicita funktionssatsen ger att det existerar en funktion $f \in C^1$ så att $F(x, f(x) = 2$ i en omgivning av $(0,1)$. Vidare får vi att

$$f'(x) = -\frac{F'_x(0,1)}{F'_y(0,1)} = 0,$$

så f har en extrempunkt i origo. För att klassificera $x = 0$ räknar vi ut ett uttryck för $f''(x)$ som gäller nära $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f''(x) = & -\frac{d}{dx}\left(\frac{4x^3 + 4xf(x)^2 - f(x)\sin x}{4x^2 f(x) + 4f(x)^3 + \cos x}\right) \\
= & \frac{(8xf(x) + 4x^2 f'(x) + 12f(x)^2 f'(x) - \sin x)(4x^3 + 4xf(x)^2 - f(x)\sin x)}{(4x^2 f(x) + 4f(x)^3 + \cos x)^2} \\
& - \frac{(4x^2 f(x) + 4f(x)^3 + \cos x)(12x^2 + 4f(x)^2 + 8xf(x)f'(x) - f(x)\cos x - f'(x)\sin x)}{(4x^2 f(x) + 4f(x)^3 + \cos x)^2},
\end{aligned}$$

och med $x = 0$, $f(0) = 1$ och $f'(0) = 0$ reducerar detta till $f''(0) = -15/25 = -3/5$, så det rör sig alltså om ett lokalt maximum!