LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B för EMM och KB/TB (TATA09/TEN1) 2011-08-27 kl 14–19

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Låt D vara området i första kvadranten där $1 \le x \le e$ och $0 \le y \le \ln x$. Beräkna integralen
$$\iint_D xe^y \, dxdy.$$

2. Undersök om följande gränsvärden existerar, och beräkna gränsvärdet i de fall det är möjligt.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \ln(x^2+y^2)$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x-y|$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3-xy(x-y)}{x-y}$

3. Finn och klassificera alla stationära punkter för funktionen $f(x,y) = x^4+y^4-4xy+1$. Bestäm även globalt maximum om det existerar. Motivera annars varför maximum saknas.

4. Visa att ytorna $3x^2+2y^2+z^2 = 9$ och $x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24 = 0$ tangerar varandra i punkten $(1,1,2)$, dvs att de har ett gemensamt tangentplan i denna punkt.

5. Hitta den C^1-lösning till ekvationen
$$yz'_x + xz'_y = 2xy(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}, \qquad x>0,\ y>0,$$
som uppfyller $z(x, x/2) = x^4 \exp(3x^2/4)$ för $x > 0$.
Tips: byt koordinater till $u = x^2+y^2$ och $v = x^2-y^2$.

6. Låt V vara det begränsade området i $\mathbf{R}^3$ som ges av snittet mellan mängderna definierade av $z^2 \ge x^2+y^2$, $x^2+y^2 \le 1$ och $0 \le z \le 2$. Beräkna
$$\iiint_V (x+y+z)\, dxdydz.$$

7. Låt $F(x,y)$ vara av klass C^1 och ha egenskapen att $\nabla F(a,b) \ne 0$ (alltså minst en av $F'_x(a,b)$ och $F'_y(a,b)$ är skild från noll). Låt Γ vara kurvan som ges av ekvationen $F(x,y) = 2$. Vidare låter vi $F(a,b) = 2$.

   (a) Visa att nära punkten (a,b) finns en parametrisering av kurvan Γ.

   (b) Visa att tangentvektorn i punkten (a,b) till kurvan Γ är vinkelrät mot $\nabla F(a,b)$.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2011-08-27

1. Vi itererar dubbelintegralen och beräknar

$$\iint_D xe^y\,dxdy = \int_1^e \int_0^{\ln x} xe^y\,dydx = \int_1^e x\big(e^{\ln x} - 1\big)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^3-1}{3} - \frac{e^2-1}{2}.$$

2. (a) Vi byter till polära koordinter, och finner att

$$y^2\ln(x^2+y^2) = r^2\sin^2\theta\,\ln(r^2) = 2\sin^2\theta\, r^2\ln r \to 0, \text{ då } r \to 0,$$

eftersom $r^\alpha \ln r \to 0$ för $\alpha > 0$.

(b) Eftersom $f(x,y) = |x-y|$ är kontinuerlig i båda argumenten följer att gränsvärdet blir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x-y| = |0-0| = 0.$$

(c) Vi faktoriserar täljaren, och ser att

$$\frac{x^3-y^3-xy(x-y)}{x-y} = \frac{(x^2+y^2)(x-y)}{x-y} = x^2+y^2 \to 1+1 = 2, \text{ då } (x,y)\to(1,1).$$

Svar: (a) gränsvärdet blir 0. (b) gränsvärdet blir 0. (c) gränsvärdet blir 2.

3. Funktionen i fråga är kontinuerligt deriverbar, så alla extrempunkter måste ha $\nabla f = 0$. Vi beräknar gradienten och söker efter stationära punkter:

$$\nabla f = (4x^3-4y, 4y^3-4x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

Från detta följer att $y^9 = y$, eller ekvivalent, att $y(y^8-1) = 0$. Vi får alltså $y = 0$ som en tänkbar lösning, vilket ger $x = 0$. Den andra faktorn har endast två reella lösningar (varför?): $y = \pm 1$. Vi finner alltså tre stycken stationära punkter: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$. Vi behöver andraderivatorer för att bestämma punkternas karaktär. Låt

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12a^2 & -4 \\ -4 & 12b^2 \end{pmatrix}.$$

Matrisen $H(0,0)$ har egenvärdena ± 4, så punkten $(0,0)$ är indefinit. I punkten $(1,1)$ får matrisen $H(1,1)$ egenvärderna 8 och 16, båda positiva, så punkten är positivt definit. Dvs $(1,1)$ är en minpunkt. För punkten $(-1,-1)$ får matrisen $H(-1,-1)$ samma egenvärden som $H(1,1)$, så även detta är en minpunkt.

Funktionen saknar globalt maximum. Vi kan se det genom att, t ex, betrakta vad som händer längs linjen $y = 0$ (x-axeln). Vi ser att $f(x,0) = x^4 + 1 \to \infty$ då $x \to \infty$. Något största värde kan vi alltså inte hitta.

Svar: Tre stationära punkter finns. En sadelpunkt i $(0,0)$ och två lokala minpunkter i $(1,1)$ och $(-1,-1)$. Globalt maximum saknas.

4. För att visa att ytorna tangerar varandra i punkten $(1,1,2)$ måste vi visa att de har ett gemensamt tangentplan i denna punkt. Detta innebär att punkten måste ligga på **båda** ytorna, och gradienterna av de båda uttrycken måste vara parallella. Att dessa villkor är tillräckliga kan ses från det faktum att gradienterna ger tangentplanens normaler, och om de två ytorna skall ha samma tangentplan i punkten måste dessa vektorer vara parallella. Att sedan planen har en gemensam punkt (alltså tangeringspunkten $(1,1,2)$) ser sedan till att det måste röra sig om samma tangentplan i de båda fallen.

Vi låter $F(x,y,z) = 3x^2+2y^2+z^2$ och $G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-8x-6y-8z+24$ och beräknar:

$$\nabla F(x,y,z) = (6x, 4y, 2z) \qquad \text{och} \qquad \nabla G(x,y,z) = (2x-8, 2y-6, 2z-8).$$

Eftersom $F(1,1,2) = 9$ och $G(1,1,2) = 0$ så skär åtminstone ytorna varandra i den punkten. Vi undersöker gradienterna:

$$\nabla F(1,1,2) = (6,4,4) \qquad \text{och} \qquad \nabla G(1,1,2) = (-6,-4,-4).$$

Vi ser tydligt att dessa vektorer är parallella.

Svar: Se ovan.

5. Kedjeregeln ger $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = 2x(z'_u + z'_v)$ och $z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2y(z'_u - z'_v)$. Vi sätter in detta i ekvationen och erhåller

$$2yx(z'_u + z'_v) + 2xy(z'_u - z'_v) = 2xy(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}.$$

Eftersom $x > 0$ och $y > 0$ kan vi förkorta bort faktorn xy utan problem. Vi ersätter även övriga x och y med motsvarande uttryck i de nya koordinaterna. Ekvationen reduceras nu till

$$2z'_u = ue^v \qquad \Leftrightarrow \qquad z(u,v) = \frac{u^2}{4}e^v + g(v), \qquad g \in C^1,$$

så

$$z(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{4}e^{x^2-y^2} + g(x^2-y^2), \quad x > 0,\ y > 0. \tag{$*$}$$

Villkoret på $z(x, x/2)$ ger nu att

$$x^4 e^{3x^2/4} = \frac{1}{4}\left(\frac{5x^2}{4}\right)^2 e^{3x^2/4} + g(3x^2/4),$$

så

$$g(3x^2/4) = x^4\left(1 - \frac{1}{4}\frac{25}{16}\right)e^{3x^2/4}.$$

Funktionen $g(t)$ blir alltså, med $t = 3x^2/4$,

$$g(t) = \frac{16}{9}t^2\frac{39}{64}e^t = \frac{13}{12}t^2e^t, \quad t > 0.$$

Vi sätter in detta i Ekvation $(*)$ och erhåller

$$z(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{4}e^{x^2-y^2} + \frac{13}{12}(x^2-y^2)^2e^{x^2-y^2}.$$

Svar: $z(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^2}{4}e^{x^2-y^2} + \frac{13}{12}(x^2-y^2)^2e^{x^2-y^2}$, $x > 0$, $y > 0$.

6. Området $z^2 \geq x^2+y^2$ är en dubbelkon med lutning 1 och spetsen i origo. Området $x^2+y^2 \leq 1$ en cylinder med radie 1 och z-axeln som symmetriaxel. Det är klart att de två volymerna skär varandra vid $z = 1$ (och $z = -1$ för den delen). När $0 \leq z \leq 1$ så är konen innesluten i cylindern, och för $1 \leq z \leq 2$ så befinner sig cylindern inne i konen. Om vi skall integrera över snittet mellan dessa två områden, och med $0 \leq z \leq 2$, så får vi alltså två olika delar naturligt.

Vi ställer upp integralen enligt följande:

$$\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^1 \iint_{D_z} (x+y+z)\,dxdy\,dz + \int_1^2 \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x+y+z)\,dxdy\,dz$$

där $D_z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 \leq z^2\}$. Eftersom både D_z och området $x^2+y^2 \leq 1$ är symmetriska kring z-axeln så kommer integralerna av x och y att försvinna av symmetriskäl. Vi beräknar integralerna m.a.p. z:

$$\int_0^1 \iint_{D_z} z\,dxdy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z rz\,drd\theta\,dz = \pi \int_0^1 z^3\,dz = \frac{\pi}{4}$$

och

$$\int_1^2 \iint_{x^2+y^2\leq z^2} z\,dxdy\,dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 rz\,drd\theta\,dz = \pi \int_1^2 z\,dz = \frac{3\pi}{2},$$

där vi utnyttjat polära koordinter. Svaret blir alltså

$$\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz = \frac{7\pi}{4}.$$

7. Om $F'_x(a,b) \neq 0$ finns en C^1-funktion f så att $y = f(x)$ beskriver kurvan $F(x,y) = 2$ nära punkten (a,b) (enligt implicita funktionssatsen). Vi då parametrisera kurvan med, t ex, $x = t$ och $y = f(t)$ för t nära a. Motsvarande argument kan användas om det är $F'_y(a,b)$ som är skild från noll. Vi har nu visat delen som efterfrågas i (a).

   Vi väljer en C^1-parametrisering $(x,y) = (x(t), y(t))$ av kurvan Γ nära $(x,y) = (a,b)$ så att

$$\begin{cases} x(t_0) = a, \\ y(t_0) = b. \end{cases}$$

   En sådan parametrisering finns enligt (a). Eftersom $F(x(t), y(t)) = 2$ för t nära a (detta gäller eftersom $(x(t), y(t))$ består av punkter på kurvan), så gäller att

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\Big(F(x(t), y(t))\Big) &= F'_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + F'_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \\ &= (\nabla F)((x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   där vi använt kedjeregeln i den andra likheten. Vektorn $T(x(t), y(t)) = (x'(t), y'(t))$ är inget annat än tangentvektorn till Γ i punkten $(x(t), y(t))$ (om t är nära a). Speciellt får vi, om vi sätter $t = t_0$, följande samband:

$$\nabla F(a,b) \cdot \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \nabla F(a,b) \cdot T(a,b) = 0.$$

   Med andra ord är gradienten av F ortogonal mot tangentvektorn till kurvan Γ i punkten (a,b).

   Svar: se ovan.