LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Tentamen i Analys B, flera variabler (TATA09/TEN1)
2012-01-12 kl 08–13

Inga hjälpmedel. Varje uppgift är värd 3 poäng. Betygsgränser: 8p för trea, 11p för fyra, 14p för femma.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA09/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. Låt D vara området som begränsas av linjerna $x = 0$, $x = 4$, $y = x$ samt $y = 2x$. Beräkna
$$\iint_D \big(x + \cos y\big)\, dxdy.$$

2. Undersök om följande gränsvärden existerar, och beräkna gränsvärdet i de fall det är möjligt.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x+y)-\arctan(y)}{x}$

3. Låt $P(x, y) = (x^3-3x)(y^2+4y+5)+7$. Finn alla lokala extrempunkter och avgör deras karaktär. Om vi "står" i punkten $(\sqrt{3}, 1)$, i vilken riktning växer P snabbast? Hur snabbt växer P i riktningen $(1, 1)^T$?

4. Finn största och minsta värdet, samt var dessa inträffar, för funktionen $f(x, y) = \sin(xy)$ på det slutna området som begränsas av kurvorna $y = 1$, $x = 1$ och $y = \dfrac{8}{x}$.

5. Låt $\psi(r, \theta, \varphi) = cr \sin\theta e^{i\varphi} e^{-ar}$, där a och c är konstanter, $i^2 = -1$, och (r, θ, φ) är rymdpolära koordinater (θ är vinkeln mot z-axeln). Beräkna integralen
$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{r}\, |\psi(r,\theta,\varphi)|^2\, dV,$$
där $dV = dx\,dy\,dz$ är volymelementet.

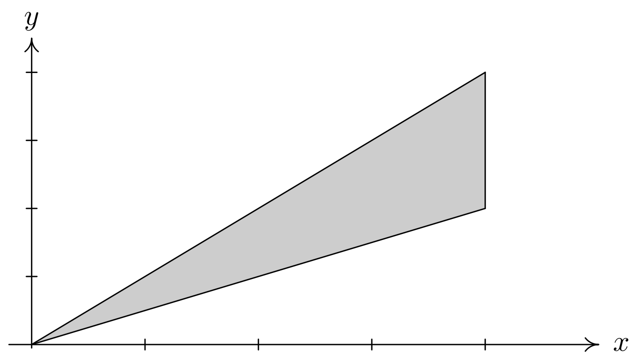
   Anmärkning: detta är det förväntade värdet $<V>$ för den potentiella energin hos systemet i en vätelik atom där elektronen befinner sig i $2p_z$-orbitalen. Konstanterna a och c har med laddning hos kärnan och normalisering att göra.

6. Hitta en C^1-lösning till ekvationen
$$zz'_x + zz'_y = 2x^2 - 2y^2, \qquad x - y > 0\,,\ x + y > 0\,,$$
som uppfyller $z(x, 0) = 2x^{3/2}$ för $x > 0$. Börja med att betrakta funktionen $w(x, y) = z(x, y)^2$ och gör sedan variabelbytet $u = x + y$, $v = x - y$.

7. Låt $N \geq 2$ vara ett heltal, f och g icke-negativa kontinuerliga funktioner, och $g(t) \leq N/2$ för alla t. Visa att
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(N(t-\tau)) \left(\int_{-\infty}^{\tau} f(s)g(s) \exp\left(\int_s^{\tau} g(u)\,du \right) ds \right) d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp(N(t-s))\, ds, \quad t \in \mathbf{R},$$
för de funktioner f där högerledet är konvergent.

Lösningsskisser för TATA09, Analys B, 2012-01-12

1. Vi skisserar området i Figur 1.



Figur 1: Området i uppgift 1.

Vi itererar med x-integralen ytterst:

$$\iint_D \big(x + \cos y\big)\, dxdy = \int_0^4 \int_x^{2x} \big(x + \cos y\big)\, dydx = \int_0^4 x^2 + \sin 2x - \sin x\, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\cos 2x}{2} + \cos x\right]_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{125}{3} - \cos 8 + 2\cos 4\right)$$

2. (a) Vi byter till polära koordinter, och finner att

$$\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\sin r^2}{r^2} \to 1, \quad \text{då } r \to 0.$$

(b) Om vi låter $y = 0$, ser vi att

$$\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} = \frac{\sin 0}{x^2} = 0,$$

men om $y = x$ så får vi

$$\frac{\sin x^2}{2x^2} \to \frac{1}{2}, \quad \text{då } x \to 0.$$

Sålunda kan inte gränsvärdet existera.

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x+y) - \arctan(y)}{x} = \frac{\partial}{\partial x} \arctan(2x+y)\Big|_{x=0} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}\Big|_{x=0} = \frac{2}{1+y^2}.$$

Svar: (a) gränsvärdet blir 1. (b) gränsvärdet saknas. (c) gränsvärdet blir $2/(1+y^2)$.

3. Funktionen i fråga är kontinuerligt deriverbar, så alla extrempunkter måste ha $\nabla f = 0$. Vi ser att $P'_x(x,y) = (3x^2-3)(y^2+4y+5)$ och $P'_y(x,y) = (x^3-3x)(2y+4)$. Eftersom

$$y^2 + 4y + 5 = (y+2)^2 + 1 > 0,$$

så måste $x = \pm 1$ för att $P'_x = 0$. Detta leder till att $2y + 4 = 0$ är enda möjligheten för att få $\nabla f = 0$, så $y = -2$ med andra ord. Vi finner således två stationära punkter: $(\pm 1, -2)$. Vi kan nu beräkna derivatorer av ordning två:

$$H(\pm 1, -2) = \begin{pmatrix} P''_{xx}(\pm 1,-2) & P''_{xy}(\pm 1,-2) \\ P''_{yx}(\pm 1,-2) & P''_{yy}(\pm 1,-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 6 & 0 \\ 0 & \mp 4 \end{pmatrix}.$$

Både $H(\pm 1, 2)$ har egenvärden av olika tecken, så båda punkterna är sadelpunkter.

Riktningen som funktionen växer snabbast i ges av gradientens riktning i punkten. Vi har

$$\nabla f(\sqrt{3}, 1) = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix},$$

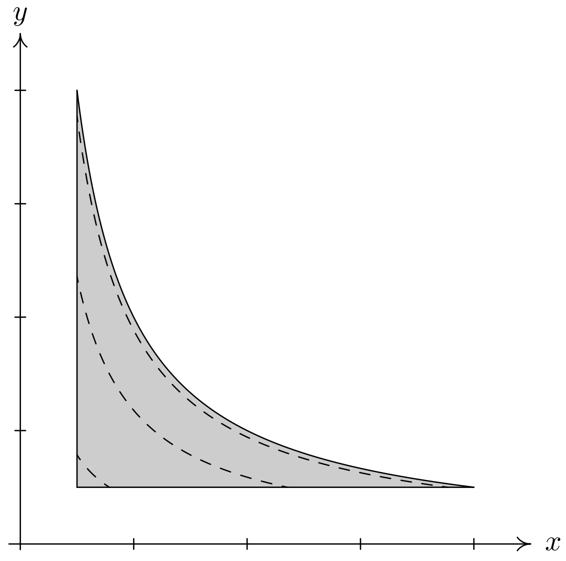
så funktionen växer snabbast i riktningen $(1, 0)^T$ om vi står i punkten $(\sqrt{3}, 1)$. Om vi istället rör oss i riktningen $v = (1, 1)^T$ så får vi

$$f'_v(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T \cdot \nabla f(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{60}{\sqrt{2}} = 30\sqrt{2}.$$

Funktionen växer alltså med $30\sqrt{2}$ enheter per längdenhet. Observera faktorn $1/\sqrt{2}$ som är nödvändig för att normera riktningen.

Svar: Två stationära punkter finns i $(-1, -2)$ och i $(1, -2)$. Båda är indefinita. Funktionen växer snabbast, sett från punkten $(\sqrt{3}, 1)$, i riktningen $(1, 0)^T$. Om vi förflyttar oss från punkten $(\sqrt{3}, 1)$ i riktningen $(1, 1)^T$ istället gör vi det med hastigheten $30\sqrt{2}$.

4. Funktionen i fråga är kontinuerligt deriverbar, så alla inre extrempunkter måste ha $\nabla f = 0$. Vi kan beskriva området som den del av kvadraten $1 \leq x \leq 8$ och $1 \leq y \leq 8$ där $xy \leq 8$. Området är kompakt, så maximum och minimum finns säkert. Vi beräknar gradienten och söker efter stationära punkter:
$$\nabla f = (y \cos(xy), x \sin(xy)) = 0.$$
Från detta följer att $(x, y) = (0, 0)$ eller $\cos(xy) = 0$ måste gälla för inre punkter om vi skall ha max eller min. Alternativet $(0, 0)$ ligger utanför mängden och är inte intressant. Då måste alltså $\cos(xy) = 0$, vilket inträffar precis då $xy = \pm\pi/2 + 2\pi n$ för alla heltal n. Inom området måste $xy < 8$, och $1 < x < 8$ samt $1 < y < 8$. Detta ger att endast $xy = \pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ uppfyller kraven. Vi får alltså hela kurvor med extrempunkter som skär genom området. Om $xy = \pi/2$ eller $xy = 5\pi/2$ så är $\sin(xy) = 1$ så punkter inom området som uppfyller något av dessa krav är maxpunkter. Om $xy = 3\pi/2$ så är $\sin(xy) = -1$ så denna kurva ger minpunkter. Se Figur 2.



Figur 2: Området i uppgift 4. De streckade linjerna är kurvor där max och min antas.

Randen består av tre delar. När $y = 8/x$, $1 \leq x \leq 8$, så är $\sin(xy)$ konstant lika med $\sin 8$. Om $y = 1$, $1 \leq x \leq 8$, så får vi funktionen $\sin(x)$ som har sina maximum i $\pi/2$ och $5\pi/2$ och sitt minimum i $3\pi/2$, det vill säga precis där kurvorna ovan skär linjen $y = 1$. På samma sätt finner vi max och min när $x = 1$. I hörnen (ändpunkterna) finns inte heller något max eller min ($\sin 1$ respektive $\sin 8$).

Svar: Maxpunkter finns längs kurvorna $y = \frac{\pi}{2x}$ för $1 \leq x \leq \pi/2$ och $y = \frac{5\pi}{2x}$ för $1 \leq x \leq 5\pi/2$. Minpunkter finns på kurvan $y = \frac{3\pi}{2x}$ för $1 \leq x \leq 3\pi/2$.

5. Först skriver vi ut hur integralen ser ut i rymdpolära koordinater:

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{r} |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 \, dV &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} c^2 r \sin^2\theta e^{-2ar} r^2 \sin\theta d\varphi \, d\theta \, dr \\ &= c^2 \int_0^\infty r^3 e^{-2ar} \, dr \cdot \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi.\end{aligned}$$

Vi räknar ut en integral i taget. Först den radiella:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r^3 e^{-2ar} \, dr &= \left[r^3 \frac{e^{-2ar}}{-2a} \right]_0^\infty + \frac{3}{2a} \int_0^\infty r^2 e^{-2ar} \, dr = \frac{3}{2a} \int_0^\infty r^2 e^{-2ar} \, dr \\ &= \frac{3}{2a} \left(\left[r^2 \frac{e^{-2ar}}{-2a} \right]_0^\infty + \frac{2}{2a} \int_0^\infty r e^{-2ar} \, dr \right) = \frac{6}{4a^2} \int_0^\infty r e^{-2ar} \, dr \\ &= \frac{3}{2a^2} \left(\left[r \frac{e^{-2ar}}{-2a} \right]_0^\infty + \frac{1}{2a} \int_0^\infty e^{-2ar} \, dr \right) = \frac{3}{4a^3} \int_0^\infty e^{-2ar} \, dr \\ &= \frac{3}{4a^3} \left[\frac{e^{-2ar}}{-2a} \right]_0^\infty = \frac{3}{8a^4}\end{aligned}$$

Sen tar vi θ-integralen:

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Och den sista:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Totalt sett erhåller vi

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} \frac{1}{r} |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 \, dV = c^2 \frac{3}{8a^4} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{c^2\pi}{a^4}.$$

Svar: $\dfrac{\pi c^2}{a^4}$.

6. Vi börjar med att titta på de partiella derivatorerna för $w(x,y) = z^2(x,y)$:

$$w'_x = 2zz'_x \qquad \text{och} \qquad w'_y = 2zz'_y,$$

vilket följer av, e.g., produktregeln. Vi ser nu att

$$w'_x + w'_y = 2(zz'_x + zz'_y) = 4(x^2 - y^2). \tag{$*$}$$

Vi gör ett variabelbyte, $u = x + y$ och $v = x - y$. Kedjeregeln säger att

$$\begin{cases} w'_x = w'_u u'_x + w'_v v'_x = w'_u + w'_v \\ w'_y = w'_u u'_y + w'_v v'_y = w'_u - w'_v \end{cases}$$

och $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv$, så ekvation $(*)$ kan ekvivalent skrivas

$$2w'_u = 4uv \quad \Leftrightarrow \quad w'_u = 2uv \quad \Leftrightarrow \quad w(u,v) = u^2 v + g(v),$$

där $g \in C^1$ är en godtycklig funktion (av en variabel). Så

$$w(x,y) = (x+y)^2(x-y) + g(x-y)$$

och

$$z(x,y) = \pm\sqrt{(x+y)^2(x-y) + g(x-y)}.$$

Vi söker en lösning där $z(x,0) = 2x^{3/2}$ för $x > 0$, så vi måste välja den positiva roten. Sen ser vi att

$$z(x,0) = \sqrt{x^3 + g(x)} = 2x^{3/2}$$

medför att $g(t) = 3t^3$ för alla $t \in \mathbf{R}$, så vi får lösningen

$$z(x,y) = \sqrt{(x+y)^2(x-y) + 3(x-y)^3} = \sqrt{(x-y)\big((x+y)^2 + 3(x-y)^2\big)}.$$

Svar: $z(x,y) = \sqrt{(x-y)\big((x+y)^2 + 3(x-y)^2\big)}$ för $x+y > 0$ och $x-y > 0$.

7. Vi börjar med att byta integrationsordning (rita en figur för att se vad som händer med gränserna):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(N(t-\tau)) \int_{-\infty}^{\tau} f(s)g(s) \exp\left(\int_s^\tau g(u)\,du\right) ds\,d\tau \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(s) \int_s^\infty \exp\left(N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du\right) d\tau\,ds\end{aligned}$$

Problemet ligger nu i att integrera den inre integralen. Eftersom exponentialfunktioner har trevliga egenskaper vid derivering (man återfår ett liknande uttryck) så undersöker vi hur derivatan ser ut:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \exp\left(N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du\right) = \frac{1}{N - g(\tau)} \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \exp\left(N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du\right)\right),$$

där vi utnyttjat analysenshuvudsats vid derivering av integralen i exponenten samt flyttat runt minustecken lite kreativt. Eftersom $\partial/\partial\tau\big(-\exp(...)\big) \geq 0$ och

$$\frac{1}{N - g(\tau)} \leq \frac{1}{N - N/2} = \frac{2}{N},$$

så kan vi uppskatta vår sökta integral enligt

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(s) \int_s^\infty \exp\left(N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du\right) d\tau\,ds \\ &\leq \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(s) \int_s^\infty -\frac{\partial}{\partial\tau} \exp\left(N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du\right) d\tau\,ds \\ &= \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(s) \left[-\exp\left(N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du\right)\right]_{\tau=s}^{\tau=\infty} ds \\ &= \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(s) \exp\left(N(t-s)\right)\,ds.\end{aligned}$$

I den sista likheten utnyttjar vi att

$$\begin{aligned}N(t-\tau) + \int_s^\tau g(u)\,du &\leq N(t-\tau) + \int_s^\tau \frac{N}{2}\,du \\ &= Nt - N\tau + \frac{N}{2}\tau - \frac{N}{2}s = -\frac{N}{2}\tau + Nt - \frac{N}{2}s \to -\infty\end{aligned}$$

då $\tau \to \infty$ för alla t och s, vilket gör att termen för $\tau = \infty$ försvinner. Slutligen kan vi uppskatta

$$\frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,g(s) \exp\left(N(t-s)\right)\,ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \exp\left(N(t-s)\right)\,ds.$$

genom att återigen utnyttja att $g(s) \leq N/2$ för alla s.

Svar: se ovan.