LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1
2011-09-09 kl 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Vad blir koefficienten före x^{12} i uttrycket $(x + x^2)^{10}$? (1 p)

   (b) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=1}^{21}(2 + 2^{-k})$. (1 p)

   (c) Låt $p(x) = x^{89} + x^{55} + x^{34} + x^{21} + 13$. Bestäm resten när $p(x)$ delas med $x(x - 1)$. (1 p)

2. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $|x| = 2|x - 1| - |x + 1|$.

3. För vilka reella x gäller olikheten $\dfrac{2x}{x+2} \leq \dfrac{x+1}{x+\frac{3}{2}}$?

4. (a) Finn mittpunkt och radie för cirkeln $x^2 - 4x + y^2 + 6y = -9$. (1 p)

   (b) Finn alla lösningar till ekvationen $z^2 + 2iz + 4i - 1 = 0$. Kontrollera dina lösningar. (2 p)

5. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+a} = 1$ för varje värde på den reella konstanten a.

Lösningsskisser för TATA68, 2011-09-09

1. (a) Vi använder binomialsatsen och erhåller

$$(x+x^2)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^k (x^2)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{k+2(10-k)} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{20-k},$$

vi söker termer x^{12}, vilket vi får då $20-k=12 \Leftrightarrow k=8$.

(b) Summan kan delas upp i två delar, där den första blir aritmetisk (med den konstanta skillnaden noll!) och den andra är geometrisk. Dessa kan vi enkelt beräkna:

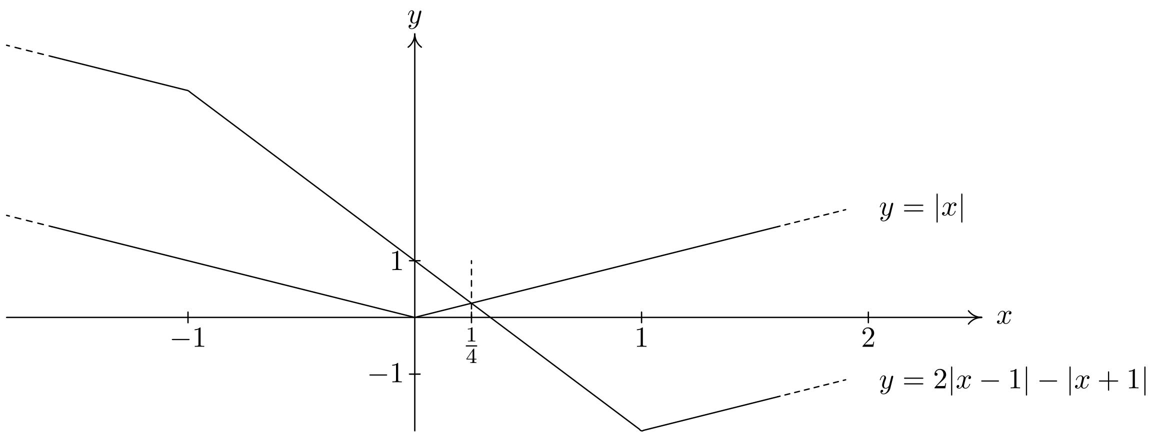
$$\sum_{k=1}^{21}(2+2^{-k}) = \sum_{k=1}^{21} 2 + \sum_{k=1}^{21} 2^{-k} = 21 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2^{-21}}{1-\frac{1}{2}} = 43 - 2^{-21}.$$

(c) Faktorsatsen säger att $p(x) = x(x-1)q(x) + r(x)$, där polynomet $r(x)$ har gradtal strikt mindre än grad$x(x-1) = 2$. Med andra ord, $r(x) = ax + b$ för två konstanter a och b. Vi vill bestämma dessa och gör det genom att sätta in lämpliga värden på x. Vi testar $x = 0$ och $x = 1$ eftersom dessa gör att vi inte behöver veta mer precist vad polynomet $q(x)$ är (vi slipper således polynomdivisionen). Vi har

$$\begin{cases} 13 = p(0) = b, \\ 17 = p(1) = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4, \\ b = 13. \end{cases}$$

Svar: (a) $\binom{10}{8} = 45$. (b) $43 - 2^{-21}$. (c) $r = 4x + 13$.

2. Intressanta punkter där beloppen kan växla tecken: $x = -1, 0, 1$. Vi måste alltså dela upp i fyra olika fall. Figure 1 skissar upp hur situationen ser ut.



Figur 1: Vi ser att funktionerna skär varandra i en enda punkt, som verkar ligga vid $x = 1/4$.

Fall 1, $x \leq -1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) + (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.

Fall 2, $-1 \leq x \leq 0$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad -x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Eftersom $\frac{1}{2} \notin [-1, 0]$ så är detta ingen lösning.

Fall 3, $0 \leq x \leq 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = -2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Eftersom $\frac{1}{4} \in [0, 1]$ så är detta en lösning.

Fall 4, $x \geq 1$:

$$|x| = 2|x-1| - |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad x = 2(x-1) - (x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -3.$$

Går inte. Finns ingen lösning i detta intervall.

Svar: $x = \frac{1}{4}$ är den enda lösningen.

3. Vi flyttar över allt på ena sidan i olikheten och gör liknämningt samt faktoriserar nämnare och täljare för att lättare kunna se när uttrycket växlar tecken:

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{x+2} \leq \frac{x+1}{x+\frac{3}{2}} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x+2) - 2x(x+\frac{3}{2})}{(x+2)(x+\frac{3}{2})} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2-x^2}{(x+2)(x+\frac{3}{2})} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)(x+\frac{3}{2})} \leq 0.
\end{aligned}$$

Observera olikhetens riktning i sista steget. Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		-2		$-\frac{3}{2}$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$x+\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+2)(x+\frac{3}{2})}$	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ur detta ser vi att uttrycket är mindre än noll endast då $-2 < x < -\frac{3}{2}$ och då $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Svar: $-2 < x < -\frac{3}{2}$ och $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

4. (a) Vi kvadratkompletterar för att tydligare se cirkelns ekvation:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = -9 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = -9 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4.$$

Här kan vi utläsa att cirkelns mittpunkt är $(x, y) = (2, -3)$ och att radien är $r = 2$.

(b) Vi börjar med att kvadratkomplettera vänsterledet:

$$z^2 + 2iz + 4i - 1 = (z+i)^2 - i^2 + 4i - 1 = (z+i)^2 + 4i.$$

Låt $w = z + i$. Vi söker nu komplexa tal w så att $w^2 + 4i = 0$. Vi sätter $w = a + bi$ och erhåller

$$w^2 + 4i = (a+bi)^2 + 4i = a^2 - b^2 + 2abi + 4i = 0.$$

För att likhet skall gälla måste både realdelen och imaginärdelen bli noll, så vi har

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ \quad 2ab = -4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 = b^2 \\ ab = -2 \end{cases}$$

Vi ser att $ab = -2 \Rightarrow a^2b^2 = 4$, och eftersom $b^2 = a^2$ så skall vi alltså lösa ekvationen $a^4 = 4$. Det följer att $a^2 = \pm 2$, men eftersom $a \in \mathbf{R}$ så är det bara $a^2 = 2$ som ger intressanta (reella) lösningar. Vi får alltså $a = \pm\sqrt{2}$, och därmed $b = -2/a = \mp 2/\sqrt{2} = \mp\sqrt{2}$. Summa summarum, $w = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ och $w = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ är de enda lösningarna till $w^2 + 4i = 0$. Eftersom $w = z + i$ får vi nu lösningarna $z = \sqrt{2} - i(\sqrt{2} + 1)$ och $z = -\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 1)$ till ursprungsekvationen.

Svar: (a) $(2, -3)$ och 2. (b) $z = \sqrt{2} - i(\sqrt{2} + 1)$ och $z = -\sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 1)$.

5. För att vänsterledet skall vara definierat måste $x \geq -\dfrac{1}{2}$ och $x \geq -a$. Vi antar att dessa villkor gäller nedan. Eftersom

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+a} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+a} = 1 - \sqrt{2x+1},$$

så följer det att $1 - \sqrt{2x+1} \geq 0$ för att lösning skall kunna existera. Med andra ord måste $x \leq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+a} = 1 - \sqrt{2x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad x + a = 2 + 2x - 2\sqrt{2x+1}\,,\; x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2x+1} = 2 - a + x\,,\; x \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4(2x+1) = 4 - 4a + a^2 + 4x - 2ax + x^2\,,\; x \leq 0\,,\; 2 - a + x \geq 0 \end{aligned}$$

Om vi arbetar lite med den sista ekvationen kan vi se att

$$4(2x+1) = 4 - 4a + a^2 + 4x - 2ax + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x - (2+a))^2 - 4(2a+1) = 0.$$

Denna ekvation har endast lösningar om $a \geq -\dfrac{1}{2}$, och i detta fall är $x = 2 + a \pm 2\sqrt{1+2a}$. Nu måste vi verifiera när dessa uttryck verkligen löser problemet. Eftersom $a \geq -\dfrac{1}{2}$ och $x \leq 0$ är nödvändigt, ser vi att $x = 2 + a + 2\sqrt{1+2a}$ aldrig kan vara en lösning (alltid större än noll). Vi har en kandidat kvar. Låt $x_a = 2 + a - 2\sqrt{1+2a}$. Denna punkt måste uppfylla följande villkor:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq x_a \leq 0, \\ -a \leq x_a, \\ a - 2 \leq x_a. \end{cases}$$

Eftersom $a \geq -\dfrac{1}{2}$ så är $\dfrac{1}{2} \leq -a \leq x_a$. Villkoret $x_a \geq -\dfrac{1}{2}$ är alltså överflödigt. Kravet att $x_a \leq 0$ innebär att

$$2 + a - 2\sqrt{1+2a} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + a \leq 2\sqrt{1+2a} \quad \Leftrightarrow \quad (2+a)^2 \leq 4(1+2a)$$

där den sista ekvivalensen följer från att både $1 + 2a \geq 0$ och att $2 + a \geq 0$. Vi skriver om den sista olikheten:

$$(2+a)^2 \leq 4(1+2a) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 4a - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-2)^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |a-2| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a \leq 4$$

För att $-a \leq x_a$ skall gälla, så måste

$$-a \leq 2 + a - 2\sqrt{1+2a} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{1+2a} \leq 2 + 2a \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2a \leq (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq a^2,$$

vilket gäller för alla reella a. Den andra ekvivalensen följer från att $1 + 2a \geq 0$ och att $1 + a \geq 0$.

För att $a-2 \leq x_a$ skall gälla, så måste

$$a-2 \leq 2+a-2\sqrt{1+2a} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{1+2a} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1+2a \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \frac{3}{2}.$$

Totalt sett blir kravet på a att $0 \leq a \leq \dfrac{3}{2}$ för att x_a skall vara en lösning.

Svar: Lösning saknas om $a < 0$ eller om $a > \dfrac{3}{2}$. För $0 \leq a \leq \dfrac{3}{2}$ är den enda lösningen till ekvationen $x = 2+a-2\sqrt{2a+1}$.

Alternativt kan man tänka sig att räkna ut de två möjliga lösningarna, och gå tillbaka till ursprungsekvationen och testa för vilka a de verkligen är lösningar. Detta kommer att ge samma svar efter liknande kalkyler.