LINKÖPINGS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Johan Thim

Kurskod: TATA68
Provkod: TEN1
Datum: 2011-09-24
Institution: MAI

Dugga 1 i Matematisk Grundkurs, TATA68/TEN1 2011-09-24 08–11

Inga hjälpmedel. Lösningarna skall vara fullständiga, välmotiverade, ordentligt skrivna och avslutade med ett svar. Varje uppgift är värd 3 poäng. För godkänt betyg (G) räcker 7 poäng. Poängen på duggorna summeras och avgör slutbetyg.

För lösningsskisser, se `www.mai.liu.se/~jothi/kurser/TATA68/` efter skrivningens slut. Lycka till!

1. (a) Förenkla $\left|\dfrac{3+4i}{(-1+i)^3}\right|$. (1p)

   (b) Finn alla komplexa tal z så att $(\overline{z})^2 = 2i$. (1p)

   (c) Beräkna summan $\displaystyle\sum_{k=1}^{21}(2^{-k}+2^k)$. (1p)

2. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $x + \dfrac{1}{3}\sqrt{4x+1} = 1$. (3p)

3. För vilka reella x gäller olikheten $1 + \dfrac{6}{x-1} < \dfrac{2}{x}$? (3p)

4. En cirkel C har mittpunkt $(2,0)$. Linjen $y = 1-2x$ skär cirkeln i två punkter, varav den ena är $(1,-1)$. Bestäm cirkelns ekvation och bestäm den andra skärningspunkten mellan $y = 1-2x$ och cirkeln C. (3p)

5. Låt $p(z) = 5\,z^4 + 7\,z^3 + 9\,z^2 - 9\,z$.

   (a) Visa att $p(z)$ har minst två stycken reella nollställen. (1p)

   (b) Faktorisera $p(z)$ fullständigt i faktorer av grad ett (komplexa tal är tillåtna). (2p)

Lösningsskisser för TATA68, 2011-09-24

1. (a) Kända regler för belopp ger att

$$\left|\frac{3+4i}{(-1+i)^3}\right| = \frac{|3+4i|}{|-1+i|^3} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{(\sqrt{(-1)^2+1^2})^3} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

(b) Vi ansätter direkt att $z = a + bi$ där $a, b \in \mathbf{R}$. Vi erhåller att

$$(\overline{z})^2 = 2i \quad \Leftrightarrow \quad (a-bi)^2 = 2i \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 - 2abi = 2i.$$

Vi sätter realdelar och imaginärdelar lika med varandra och ser att $a^2 = b^2$ samt $ab = -1$. Det följer att $a^2b^2 = 1$, och då $b^2 = a^2$ så måste $a^4 = 1$. Detta ger att $a^2 = \pm 1$, men då $a \in \mathbf{R}$ måste $a^2 = 1$, så $a = \pm 1$. Om $a = 1$ måste $b = -1/a = -1$ och om $a = -1$ blir $b = 1$. Totalt sett finner vi två tal: $z = 1 - i$ och $z = -1 + i$.

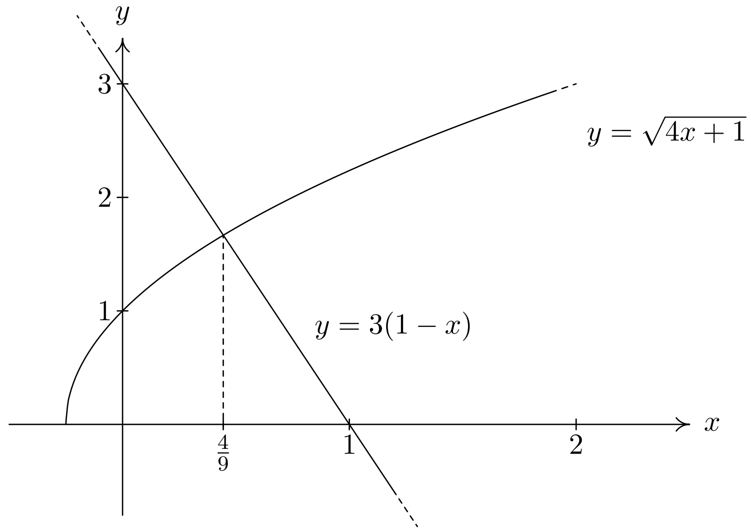
(c) Summan består av två geometriska följder. Vi delar upp i två delar och summerar var och en enligt formel för geometrisk summa:

$$\sum_{k=1}^{21}(2^{-k} + 2^k) = \sum_{k=1}^{21} 2^{-k} + \sum_{k=1}^{21} 2^k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2^{-21}}{1-\frac{1}{2}} + 2\cdot\frac{1-2^{21}}{1-2}$$
$$= 1 - 2^{-21} + 2(2^{21}-1) = 2^{22} - 1 - 2^{-21}.$$

Svar: (a) $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$. (b) $z = 1 - i$ och $z = -1 + i$. (c) $2^{22} - 1 - 2^{-21}$.

2. Vi sorterar så att kvadratroten står ensam på en sida, och löser sedan ekvationen försiktigt (vi håller reda på kraven för att det verkligen skall vara ekvivalenser):

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{3}\sqrt{4x+1} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{4x+1} = 3(1-x) \\
&\Leftrightarrow \quad 4x+1 = 9(1-x)^2\,,\ 4x+1 \geq 0\,,\ 3(1-x) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 9x^2 - 22x + 8 = 0\,,\ -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 2 \text{ eller } x = \frac{4}{9}\,,\ -\frac{1}{4} \leq x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$



Figur 1: Kurvorna skär varandra endast i punkten $x = 4/9$.

Svar: $x = \dfrac{4}{9}$ är den enda lösningen.

3. Först skriver vi om olikheten för att få något som är enklare att studera:

$$1 + \frac{6}{x-1} < \frac{2}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5+x}{x-1} - \frac{2}{x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(5+x)x - 2(x-1)}{x(x-1)} < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)} < 0.$$

Vi gör ett teckenschema för uttrycket i vänsterledet:

		-2		-1		0		1	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

Vi ser ur tabellen att uttrycket är strikt mindre än noll precis då $-2 < x < -1$ eller $0 < x < 1$.

Svar: $-2 < x < -1$ eller $0 < x < 1$.

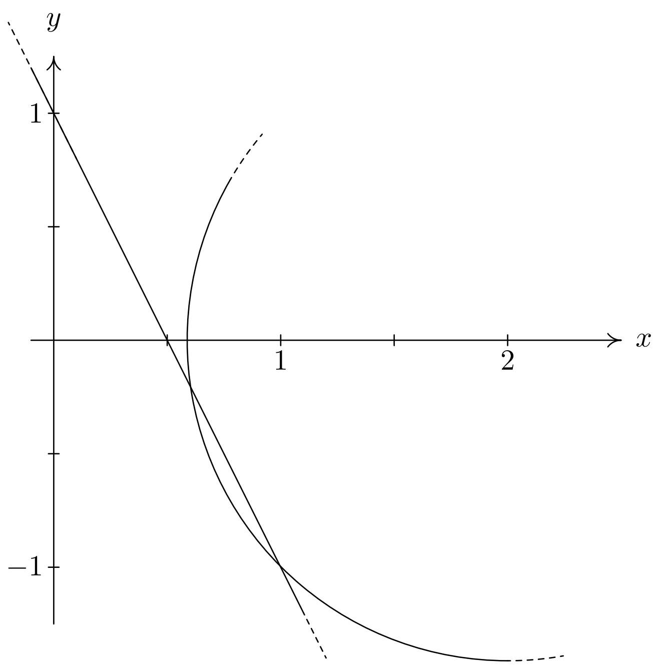
4. Cirkelns mittpunkt är $(2, 0)$, så cirkelns ekvation är

$$(x-2)^2 + y^2 = r^2,$$

där radien r är okänd. Eftersom linjen $y = 1 - 2x$ skär cirkeln i (bland annat) $(1, -1)$ så måste den punkten ligga på cirkeln. Således gäller att $(1-2)^2 + (-1)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 2$. Radien är med andra ord $\sqrt{2}$. Vi söker nu den andra skärningspunkten mellan cirkeln och linjen $y = 1 - 2x$. Vi hittar den genom att sätta in sambandet $y = 1 - 2x$ i cirkelns ekvation:

$$(x-2)^2 + (1-2x)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 4/5)^2 - 16/25 + 3/5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3/5) = 0$$

Vi finner alltså två punkter: $(1, -1)$ och $(3/5, -1/5)$. Detta verkar rimligt då vi redan känner till den första punkten.



Figur 2: Här ser vi ungefär vart linjen skär cirkeln.

Svar: Cirkelns ekvation blir $(x-2)^2 + y^2 = 2$ och linjen $y = 1 - 2x$ skär cirkeln i punkterna $(1, -1)$ och $(3/5, -1/5)$.

5. Vi ser direkt att $z = 0$ är ett nollställe till polynomet $p(z)$. Med andra ord,

$$p(z) = z\,(5\,z^3 + 7\,z^2 + 9\,z - 9) = z\,q(z).$$

Polynomet $q(z)$ har grad tre och har reella koefficienter. Enligt algebrans fundamentalsats så finns det tre rötter (räknat med multiplicitet). Vidare så kommer komplexa nollställen till polynom med reella koefficienter alltid i konjugerade par, så det kan endast finnas noll eller exakt två stycken komplexa nollställen. Vi har alltså visat att $p(z)$ har minst två stycken reella nollställen.

Vi försöker nu faktorisera $q(z)$ fullständigt. Eftersom $q(z)$ har heltalskoefficienter så måste ett rationellt nollställe $z = r/q$ uppfylla att 9 är en multipel av r och att 5 är en multipel av q. De möjliga kombinationerna blir då

$$\begin{cases} r = \pm 1\,,\ \pm 3\,,\ \pm 9 \\ q = \pm 1\,,\ \pm 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = \pm 1\,,\ \pm 3\,,\ \pm 9\,,\ \pm 15\,,\ \pm\frac{3}{5}\,,\ \pm\frac{9}{5}.$$

Vi testar och finner att $q(3/5) = 0$. Polynomdivision ger att $q(z) = (z - 3/5)(5\,z^2 + 10\,z + 15)$. Vi kvadratkompletterar och söker nollställerna till den andra faktorn:

$$5\,z^2 + 10\,z + 15 = 5(z^2 + 2z + 3) = 5((z+1)^2 + 2) = 5(z + 1 + i\sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2}).$$

Totalt sett har vi

$$p(z) = 5z(z - 3/5)(z + 1 + i\sqrt{2})(z + 1 - i\sqrt{2}) = z(5z - 3)(z + 1 + i\sqrt{2})(z + 1 - i\sqrt{2}).$$

Observera att vi även direkt visat del (a) i och med faktoriseringen ovan.

Svar: $z(5z - 3)(z + 1 + i\sqrt{2})(z + 1 - i\sqrt{2})$.